ORTAÖĞRETİM

FEN LİSESİ

MATEMATİK

10

DERS KİTABI

YAZARLAR

Beytullah ÖZ
Büşra KOŞANSER
Emin EMİR
Hasan ATA
Hüseyin Fatih PARLAR
Metin YAYMACI

DEVLET KİTAPLARI
İKİNCİ BASKI
.........................., 2019

MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI YAYINLARI ....: 6671
DERS KİTAPLARI DİZİSİ ....: 1746

HAZIRLAYANLAR

Editör
Prof. Dr. Erdal ULUALAN

Dil Uzmanı
Gülçin GÜRPINAR

Program Geliştirme Uzmanı
Raşit ATEŞ

Ölçme ve Değerlendirme Uzmanı
Fikret DOLAŞIK

Rehberlik ve Gelişim Uzmanı
Mevlüt DURAN

Görsel ve Grafik Tasarım Uzmanı
Hacı Mehmet ÖZTÜRKOĞLU

ISBN 978-975-11-4333-4

Millî Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulunun 28.05.2018 gün ve 78 sayılı kararı ile ders kitabı olarak kabul edilmiş, Destek Hizmetleri Genel Müdürlüğünün 28.05.2019 gün ve 10443977 sayılı yazısı ile ikinci defa 80.923 adet basılmıştır.

İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl.
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl.

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,
Medeniyyet dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş, yurduma alçakları uğratma sakın;
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın;
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın.

Bastığın yerleri toprak diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki feda?
Şüheda fışkıracak toprağı sıksan, şüheda!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüda.

Ruhumun senden İlâhî, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar -ki şehadetleri dinin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,
Her cerîhamdan İlâhî, boşanıp kanlı yaşım,
Fışkırır ruh-ı mücerret gibi yerden na'şım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalan sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl;
Hakkıdır hür yaşamış bayrağımın hürriyyet;
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif Ersoy

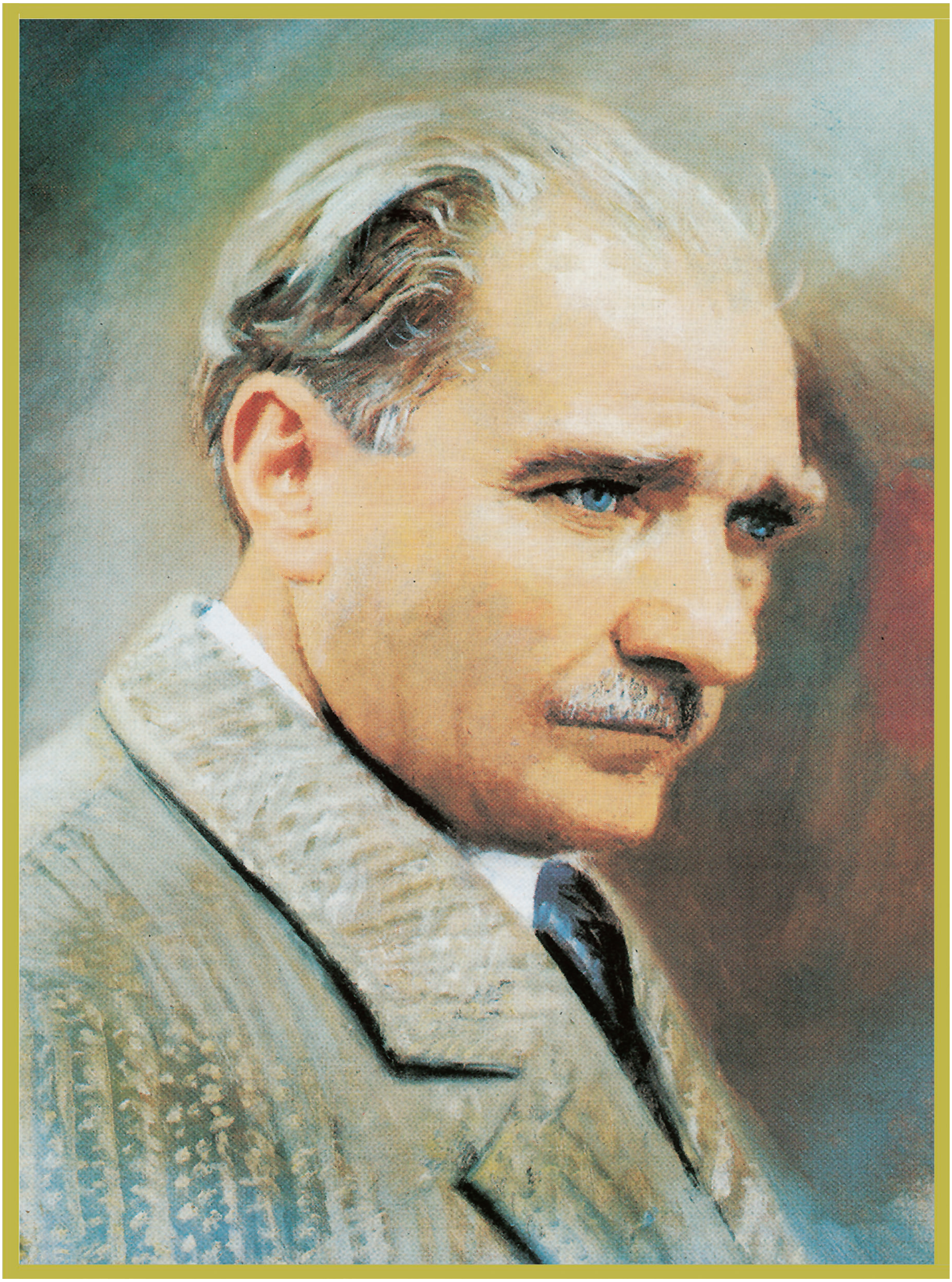
GENÇLİĞE HİTABE

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk Cumhuriyetini, ilelebet muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni bu hazineden mahrum etmek isteyecek dâhilî ve hâricî bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok namüsait bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dâhilinde iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlîlerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi vazifen, Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır. Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asil kanda mevcuttur.

Mustafa Kemal Atatürk



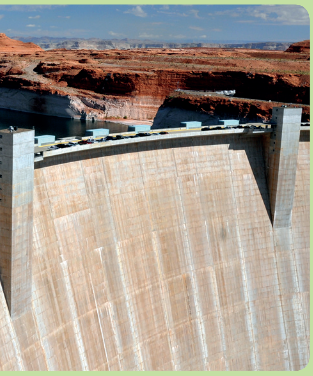
MUSTAFA KEMAL ATATÜRK

İÇİNDEKİLER

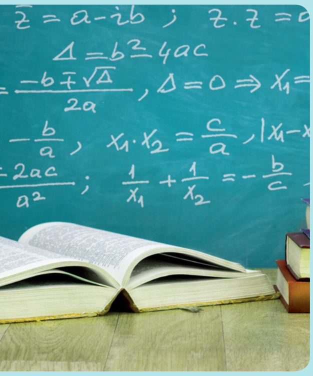
10.1. SAYMA VE OLASILIK

10.2. FONKSİYONLAR

10.3. POLİNOMLAR



10.4. İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER



10.5. DÖRTGENLER VE ÇOKGENLER

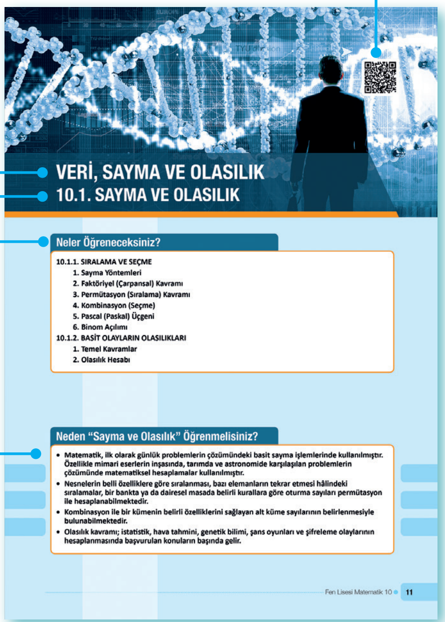
10.6. UZAY GEOMETRİ

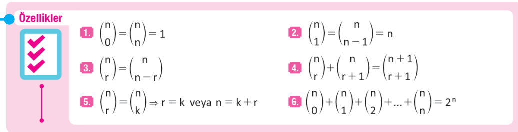
KİTABIN TANITIMI

Öğrenme alanı

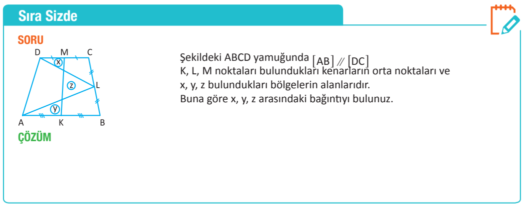
Alt öğrenme alanı

Karekod uygulamasıyla alt öğrenme alanlarına interaktif olarak ulaşabilirsiniz.





Konu ile ilgili özelliklerin verildiği bölümdür.



Alt öğrenme alanının pekiştirilmesi amacıyla verilen uygulama sorularının bulunduğu bölümdür.

ALIŞTIRMALAR

Konular ile ilgili pekiştirme sorularının bulunduğu bölümdür.

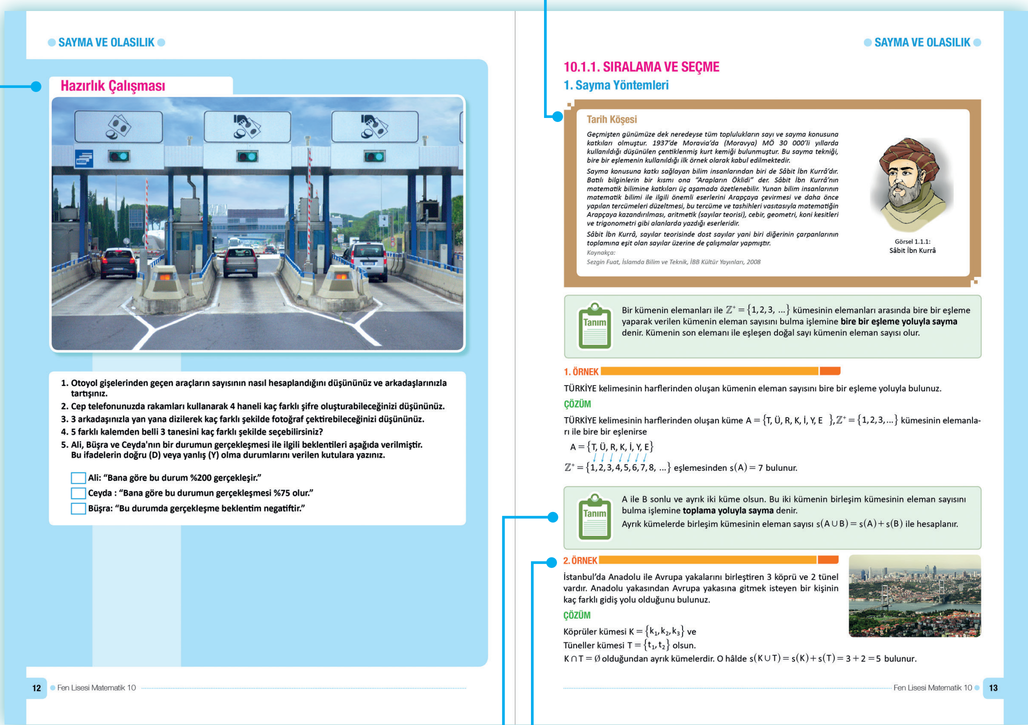
ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

Alt öğrenme alanının sonunda verilen değerlendirme sorularının bulunduğu bölümdür.

Alt öğrenme alanında neler öğrenileceğini, alt öğrenme alanını öğrenmenin önemini, alt öğrenme alanının günlük hayatla ilişkisini tanıtan bölümdür.

Alt öğrenme alanlarının günlük hayatla ilişkilendirilmiş hazırlık sorularının bulunduğu bölümdür.

Alt öğrenme alanındaki işlenişe yönelik kısa tarihî bilgilerin bulunduğu bölümdür.



Konu ile ilgili tanım ve açıklamaların verildiği bölümdür.

Alt öğrenme alanıyla ilgili işlenişleri açıklayan örneklerin ve çözümlerinin bulunduğu bölümdür.

VERİ, SAYMA VE OLASILIK
10.1. SAYMA VE OLASILIK

Neler Öğreneceksiniz?

10.1.1. SIRALAMA VE SEÇME
1. Sayma Yöntemleri
2. Permütasyon
3. Tekrarlı Permütasyon
4. Dönel (Dairesel) Permütasyon
5. Kombinasyon
6. Pascal Üçgeni
7. Binom Açılımı

10.1.2. BASİT OLAYLARIN OLASILIKLARI
1. Temel Kavramlar
2. Olasılık Hesabı

Neden "Sayma ve Olasılık" Öğrenmelisiniz?

- Matematik, ilk olarak günlük problemlerin çözümündeki basit sayma işlemlerinde kullanılmıştır. Özellikle mimari eserlerin inşasında, tarımda ve astronomide karşılaşılan problemlerin çözümünde matematiksel hesaplamalar kullanılmıştır.
- Nesnelerin belli özelliklere göre sıralanması, bazı elemanların tekrar etmesi hâlindeki sıralamalar, bir bankta ya da dairesel masada belirli kurallara göre oturma sayıları permütasyon ile hesaplanabilmektedir.
- Bir kümenin belirli özelliklerini sağlayan farklı seçimlerinin sayısı kombinasyon ile hesaplanabilmektedir.
- Olasılık kavramı; istatistik, hava tahmini, genetik bilimi, şans oyunları, şifre koyma gibi olayların hesaplanmasında başvurulan konuların başında gelir.

Hazırlık Çalışması

1. Otoyol gişelerinden geçen araçların sayısının nasıl hesaplandığını düşününüz ve arkadaşlarınızla tartışınız.
2. Cep telefonunuzda rakamları kullanarak 4 haneli kaç farklı şifre oluşturabileceğinizi düşününüz.
3. 3 arkadaşınızla yan yana dizilerek kaç farklı şekilde fotoğraf çektirebileceğinizi düşününüz.
4. 5 farklı kalemden belli 3 tanesini kaç farklı şekilde seçebilirsiniz?
5. Ali, Büşra ve Ceyda'nın bir durumun gerçekleşmesi ile ilgili beklentileri aşağıda verilmiştir. Bu ifadelerin doğru (D) veya yanlış (Y) olma durumlarını verilen kutulara yazınız.

☐ Ali: "Bana göre bu durum %200 gerçekleşir."

☐ Ceyda: "Bana göre bu durumun gerçekleşmesi %75 olur."

☐ Büşra: "Bu durumda gerçekleşme beklentim negatiftir."

10.1.1. SIRALAMA VE SEÇME

1. Sayma Yöntemleri

Tarih Köşesi

Geçmişten günümüze dek neredeyse tüm toplulukların sayı ve sayma konusuna katkıları olmuştur. 1937'de Moravia'da (Moravya) MÖ 30.000'li yıllarda kullanıldığı düşünülen çentiklenmiş kurt kemiği bulunmuştur. Bu sayma tekniği, bire bir eşlemenin kullanıldığı ilk örnek olarak kabul edilmektedir.

Sayma konusuna katkı sağlayan bilim insanlarından biri de Sâbit İbn Kurrâ'dır. Batılı bilginlerin bir kısmı ona "Arapların Öklit'i" der. Sâbit İbn Kurrâ'nın matematik bilimine katkıları üç aşamada özetlenebilir: Yunan bilim insanlarının matematik bilimi ile ilgili önemli eserlerini Arapçaya çevirmesi ve daha önce yapılan tercümeleri düzeltmesi, bu tercüme ve tashihleri vasıtasıyla matematiğin Arapçaya kazandırılması, aritmetik (sayılar teorisi), cebir, geometri, koni kesitleri ve trigonometri gibi alanlarda yazdığı eserleridir.

Sâbit İbn Kurrâ, sayılar teorisinde dost sayılar yani biri diğerinin çarpanlarının toplamına eşit olan sayılar üzerine de çalışmalar yapmıştır (Görsel 1.1.1).

Kaynakça:
İslamda Ansiklopedisi Cilt:35, Sayfa:355

Görsel 1.1.1:
Sâbit İbn Kurrâ

Tanım

Bir kümenin elemanları ile $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ kümesinin elemanları arasında bire bir eşleme yaparak verilen kümenin eleman sayısını bulma işlemine **bire bir eşleme yoluyla sayma** denir. Kümenin son elemanı ile eşleşen doğal sayı kümenin eleman sayısı olur.

1. ÖRNEK

TÜRKİYE kelimesinin harflerinden oluşan kümenin eleman sayısını bire bir eşleme yoluyla bulunuz.

ÇÖZÜM

TÜRKİYE kelimesinin harflerinden oluşan küme $A = \{T, Ü, R, K, İ, Y, E\}$, $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ kümesinin elemanları ile bire bir eşlenirse

$$\begin{array}{l} A = \{T, Ü, R, K, İ, Y, E\} \\ \quad\;\; \downarrow\;\; \downarrow\;\; \downarrow\;\; \downarrow\;\; \downarrow\;\; \downarrow\;\; \downarrow \\ \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\} \end{array}$$

eşlemesinden $s(A) = 7$ bulunur.

Tanım

A ile B sonlu ve ayrık iki küme olsun. Bu iki kümenin birleşim kümesinin eleman sayısını bulma işlemine **toplama yoluyla sayma** denir.

Ayrık kümelerde birleşim kümesinin eleman sayısı $s(A \cup B) = s(A) + s(B)$ ile hesaplanır.

2. ÖRNEK

İstanbul'da Anadolu ile Avrupa yakalarını birleştiren 3 köprü ve 2 tünel vardır. Anadolu yakasından Avrupa yakasına gitmek isteyen bir kişinin kaç farklı gidiş yolu olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Köprüler kümesi $K = \{k_1, k_2, k_3\}$ ve
Tüneller kümesi $T = \{t_1, t_2\}$ olsun.
$K \cap T = \emptyset$ olduğundan ayrık kümelerdir. O hâlde $s(K \cup T) = s(K) + s(T) = 3 + 2 = 5$ bulunur.

3. ÖRNEK

3 farklı dergi ve 4 farklı gazete arasından bir dergi veya bir gazetenin kaç farklı şekilde seçilebileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

3 farklı dergi arasından 1 dergi 3 farklı yolla, 4 farklı gazete arasından 1 gazete 4 farklı yolla seçilebilir.Buna göre 3 farklı dergi ve 4 farklı gazete arasından 1 dergi veya 1 gazete, saymanın toplama ilkesine göre $3+4=7$ değişik yolla seçilebilir.

Tanım

A ve B boş kümeden farklı, ayrık iki küme olmak üzere $A \times B$ kümesinde oluşan sıralı ikililerin eleman sayısını bulma işlemine **çarpma yoluyla sayma** veya **saymanın temel ilkesi** denir.

$s(A \times B) = s(A) \cdot s(B)$ şeklinde hesaplanır.

Bu özellik şu şekilde de ifade edilebilir:

Bir A olayı ayrık $A_1, A_2, ..., A_r$ aşamalarında sırasıyla gerçekleşsin.

A_1 aşaması n_1 farklı yolla,

A_2 aşaması n_2 farklı yolla,

....

A_r aşaması n_r farklı yolla gerçekleşmesi durumunda A olayı $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_r$ farklı yolla gerçekleşir.

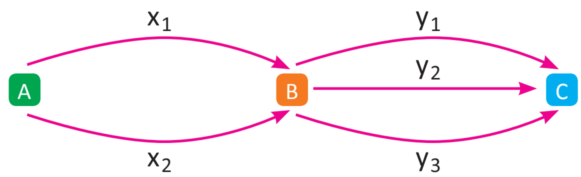
$s(A) = s(A_1 \times A_2 \times ... \times A_r) = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_r$ dir.

4. ÖRNEK

A kentinden B kentine 2 farklı yolla, B kentinden C kentine 3 farklı yolla gidilebilmektedir. A kentinden C kentine gitmek isteyen bir kişinin B ye uğramak koşuluyla C ye kaç farklı yolla gidebileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

A kentinden B kentine $X = \{x_1, x_2\}$ yolları ve B kentinden C kentine $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ yolları bulunsun.



A kentinden B kentine uğramak koşuluyla C kentine gidilebilecek yollar

$X \times Y = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_1, y_3), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_2, y_3)\}$ kümesinin elemanları kadardır.

O hâlde

$s(X \times Y) = s(X) \cdot s(Y) = 2 \cdot 3 = 6$ farklı yolla gidilebilir.

5. ÖRNEK

2 kız ve 6 erkek öğrenci arasından 1 kız ve 1 erkek öğrencinin kaç farklı şekilde seçilebileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

2 kız öğrenci arasından 1 kız öğrenci 2 farklı,

6 erkek öğrenci arasından 1 erkek öğrenci 6 farklı şekilde seçilir.

Bu durumda $2 \cdot 6 = 12$ farklı şekilde seçim yapılır.

6. ÖRNEK

A kentinden B kentine 4, B kentinden C kentine 5 farklı yolla gidilebilmektedir. Buna göre

a) B kentine uğramak koşuluyla A kentinden C kentine kaç farklı yolla gidilip dönülebileceğini bulunuz.

b) Gidişte kullandığı yolları dönüşte kullanmamak ve B kentine uğramak koşuluyla A kentinden C kentine kaç farklı yolla gidilip dönülebileceğini bulunuz.

c) Gidişte kullandığı yolu dönüşte kullanmamak ve B kentine uğramak koşuluyla A kentinden C kentine kaç farklı yolla gidilip dönülebileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Gidişte A kentinden B kentine 4, B kentinden C kentine 5 ve dönüşte C kentinden B kentine 5, B kentinden A kentine 4 farklı yol bulunduğundan saymanın çarpma ilkesine göre $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 = 400$ farklı yolla gidilip dönülebilir.

b) Gidişte A kentinden B kentine 4, B kentinden C kentine 5 farklı yol vardır. Gidişte kullanılan yollar dönüşte kullanılmayacağından C den B ye 4, B den A ya 3 farklı yol kalır. Saymanın çarpma ilkesine göre $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 240$ farklı yolla gidilip dönülebilir.

c) Gidişte A kentinden B kentine 4, B kentinden C kentine 5 farklı yol olduğundan $4 \cdot 5 = 20$ farklı yolla A dan C ye gidilebilir. Gidişte kullanılan yol dönüşte kullanılmayacağından dönüş için $20 - 1 = 19$ farklı yol vardır. Bu durumda saymanın çarpma ilkesi gereği $20 \cdot 19 = 380$ farklı yolla gidilip dönülebilir.

7. ÖRNEK

16 kişilik bir sınıftan 1 başkan ve 1 başkan yardımcısının kaç farklı şekilde seçilebileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Başkan 16 kişi arasından 16 farklı şekilde, başkan yardımcısı ise geriye kalan 15 kişi arasından 15 farklı şekilde seçilebilir.

Bu durumda tüm seçimlerin sayısı $16 \cdot 15 = 240$ olur.

Sıra Sizde

SORU

Ahmet'in 8 pantalonu, 7 gömleği ve 3 ayakkabısı vardır. Buna göre Ahmet'in kıyafetlerinin herbirinden birer tane seçmesi şartıyla kaç farklı şekilde giyinebileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

8. ÖRNEK

a) 5 mektup, 3 posta kutusuna kaç farklı şekilde atılıp postalanabilir?

b) 3 mektup, 5 posta kutusuna bir posta kutusunda en çok bir mektup olması koşuluyla kaç farklı şekilde atılıp postalanabilir?

ÇÖZÜM

a) Birinci mektubun atılabileceği posta kutusu 3 farklı şekilde, ikinci mektubun atılabileceği posta kutusu 3 farklı şekilde, ..., beşinci mektubun atılabileceği posta kutusu 3 farklı şekilde seçilebilir.
Bu durumda 5 mektup, 3 posta kutusuna $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$ farklı şekilde atılarak postalanabilir.

b) Birinci mektup 5 posta kutusundan birine, ikinci mektup geriye kalan 4 posta kutusundan birine, üçüncü mektup ise geriye kalan 3 posta kutusundan birine atılarak postalanabilir. Bu durumda her mektup farklı posta kutusuna atılmak koşuluyla 3 mektup, 5 posta kutusuna $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ farklı şekilde postalanabilir.

9. ÖRNEK

$A = \{0, 1, 2, 3\}$ kümesinin elemanları kullanılarak 4 basamaklı

a) Kaç doğal sayı

b) Rakamları farklı kaç doğal sayı

c) Rakamları farklı kaç çift doğal sayı

ç) Rakamları farklı 5 ile bölünebilen kaç doğal sayı

d) 1000 ile 3000 arasında rakamları farklı kaç doğal sayı yazılabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Binler basamağında 0 kullanılamayacağından 3, diğer basamaklarda ise 4 rakam kullanılabilir.

Bu durumda

$\underset{\{1,2,3\}}{\boxed{3}} \cdot \underset{\{0,1,2,3\}}{\boxed{4}} \cdot \underset{\{0,1,2,3\}}{\boxed{4}} \cdot \underset{\{0,1,2,3\}}{\boxed{4}} = 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 192$ tane doğal sayı yazılabilir.

b) Binler basamağında 0 kullanılamayacağından 3 farklı rakamdan biri, yüzler basamağında rakamlardan biri kullanıldığı için geriye kalan 3 rakamdan biri kullanılır. Benzer düşünceyle onlar basamağında geriye kalan 2 rakamdan biri ve birler basamağında kalan 1 rakam kullanılabilir. O hâlde

$\underset{\{1,2,3\}}{\boxed{3}} \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{1} = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$ tane rakamları farklı 4 basamaklı doğal sayı yazılabilir.

c) Sayının çift olması için birler basamağı 0, 2 elemanlarından biri olmalıdır. Birler basamağına 0 veya 2 yazıldığı durumlarda

$$\begin{aligned}\underset{\{1,2,3\}}{\boxed{3}} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{1} \cdot \underset{\{0\}}{\boxed{1}} + \underset{\{1,3\}}{\boxed{2}} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{1} \cdot \underset{\{2\}}{\boxed{1}} &= 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= 6 + 4 \\ &= 10\end{aligned}$$

tane rakamları farklı çift doğal sayı bulunur.

ç) Sayının 5 ile bölünebilmesi için birler basamağı 0 veya 5 olmalıdır. A kümesinde 5 bulunmadığından birler basamağına sadece 0 yazılabilir. Bu durumda

$\underset{\{1,2,3\}}{\boxed{3}} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{1} \cdot \underset{\{0\}}{\boxed{1}} = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 6$ tane rakamları farklı 5 ile bölünebilen doğal sayı yazılabilir.

d) Sayı 1000 ile 3000 arasında olacağından binler basamağı 1 ve 2 elemanlarından biri olmalıdır. Bu durumda

$\underset{\{1,2\}}{\boxed{2}} \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{1} = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$ tane sayı yazılabilir.

10. ÖRNEK

5 basamaklı, rakamları farklı doğal sayılardan kaç tanesinin 4 ile başlayıp 3 ile biteceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

4 ve 3 rakamları kullanıldığından kullanılmayan rakamlar, diğer basamaklara basamakları birbirinden farklı olacak şekilde yazılabilir. Bu durumda

$\underset{\{4\}}{\boxed{1}} \cdot \boxed{8} \cdot \boxed{7} \cdot \boxed{6} \cdot \underset{\{3\}}{\boxed{1}} = 1 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1 = 336$ sayı yazılabilir.

11. ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ kümesinin elemanları ile rakamları birbirinden farklı ve rakamları çarpımı 3 ile bölünebilen 3 basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Tüm durumların sayısı $-$ İstenmeyen durumların sayısı $=$ İstenen durumların sayısı eşitliği kullanılırsa

Tüm durumların sayısı : $\boxed{9} \cdot \boxed{8} \cdot \boxed{7} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$, $\left(A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}\right)$

İstenmeyen durumların sayısı : $\boxed{6} \cdot \boxed{5} \cdot \boxed{4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$, ($B = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ 3 ün katı olmayan rakamlar)

İstenen durumların sayısı : $504 - 120 = 384$ olarak bulunur.

12. ÖRNEK

$A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin elemanları ile yazılabilen doğal sayılar küçükten büyüğe sıralandığında baştan 281. doğal sayının kaç olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin elemanları kullanılarak 1, 2, 3, 4 ve 5 basamaklı yazılabilen

Bir basamaklı doğal sayılar 5 tane

İki basamaklı doğal sayılar $\boxed{5} \cdot \boxed{5} = 5 \cdot 5 = 25$ tane

Üç basamaklı doğal sayılar $\boxed{5} \cdot \boxed{5} \cdot \boxed{5} = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ tane

2 ile başlayan 4 basamaklı doğal sayılar $\underset{\{2\}}{\boxed{1}} \cdot \boxed{5} \cdot \boxed{5} \cdot \boxed{5} = 1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ tanedir.

Bu sayıların toplamı

$5 + 25 + 125 + 125 = 280$ olur. Bu durumda 281. sayı, 3 ile başlayan 4 basamaklı en küçük doğal sayı olur.
Bu sayı 3222 olarak bulunur.

Sıra Sizde

SORU

20 soruluk bir testte her bir sorunun seçenek sayısı 5 tir ve her sorunun bir doğru cevabı bulunmaktadır. Buna göre

a) Bu test için kaç farklı cevap anahtarı oluşturulabilir?

b) Ardışık 3 sorudan herhangi ikisinin cevabı aynı olmamak koşuluyla bu test için kaç farklı cevap anahtarı oluşturulabilir?

ÇÖZÜM

Faktöriyel Kavramı

Tanım

n bir pozitif tam sayı olmak üzere 1 den n ye kadar olan doğal sayıların çarpımına **n faktöriyel** denir ve n! şeklinde gösterilir.

$n! = 1 \cdot 2 .... (n-1) \cdot (n)$ dir.

$1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

$6! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 5 \cdot 4!$

$0! = 1$ kabul edilir. Ayrıca $n! = n \cdot (n-1)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!$ yazılabilir.

13. ÖRNEK

$\dfrac{11! - 10!}{9! + 8!}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{11! - 10!}{9! + 8!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8! - 10 \cdot 9 \cdot 8!}{9 \cdot 8! + 8!} = \frac{\cancel{8!} \cdot (11 \cdot 10 \cdot 9 - 10 \cdot 9)}{\cancel{8!} \cdot (1 + 9)}$$

$$= \frac{\cancel{10} \cdot (11 \cdot 9 - 9)}{\cancel{10}}$$

$$= 99 - 9 = 90 \text{ bulunur.}$$

14. ÖRNEK

$\dfrac{(n+3)!}{(n+1)!} = 20$ olduğuna göre n değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{(n+3)!}{(n+1)!} = \frac{(n+3) \cdot (n+2) \cdot \cancel{(n+1)!}}{\cancel{(n+1)!}} = 20$$

$$(n+3) \cdot (n+2) = 5 \cdot 4$$

Buradan $n = 2$ bulunur.

15. ÖRNEK

$1! + 3! + 5! + ... + 2023!$ toplamının birler basamağındaki rakamı bulunuz.

ÇÖZÜM

$1! + 3! + 5! + ... + 2023! = \underbrace{1 + 6}_{7} + 120 + ... + 2023! = 7 + 5! + ... + 2023!$ bulunur.

$5! + ... + 2023!$ toplamının birler basamağı daima 0 olduğundan $7 + 5! + ... + 2023!$ toplamının birler basamağı 7 olarak bulunur.

Sonuç

$n > 4$ olmak üzere n! sayısında 2 ve 5 çarpanları olduğundan birler basamağı daima 0 olur.

16. ÖRNEK

$\frac{x}{7} = 5!$ olduğuna göre $7! + 6! + 5!$ toplamının x türünden eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\frac{x}{7} = 5!$ ise $x = 7 \cdot 5!$ yazılır.

$$\begin{aligned} 7! + 6! + 5! &= 7 \cdot 6 \cdot 5! + 6 \cdot 5! + 5! \\ &= 5!(7 \cdot 6 + 6 + 1) \\ &= 49 \cdot 5! = 7 \cdot \underbrace{7 \cdot 5!}_{x} = 7x \end{aligned}$$ bulunur.

17. ÖRNEK

a ve b doğal sayı olmak üzere $a! = 120 \cdot b!$ eşitliğini sağlayan kaç farklı (a, b) sıralı ikilisi olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} 120 &= 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ &= 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \end{aligned}$$

$\frac{a!}{b!} = 120$ olduğundan

$$\frac{a!}{b!} = \frac{120}{1} = \frac{120 \cdot 119!}{1 \cdot 119!} = \frac{120!}{119!} \Rightarrow (a, b) = (120, 119)$$

$$\frac{a!}{b!} = \frac{120}{1} = \frac{5!}{1} = \frac{5! \cdot 6}{1 \cdot 6} = \frac{6!}{3!} \Rightarrow (a, b) = (6, 3)$$

$$\frac{a!}{b!} = \frac{120}{1} = \frac{5!}{\underbrace{1}_{(0!=1,\,1!=1)}} \Rightarrow \begin{cases} (a, b) = (5, 0) \\ (a, b) = (5, 1) \end{cases}$$

$(120, 119), (6, 3), (5, 1)$ ve $(5, 0)$ şeklinde 4 tane (a, b) ikilisi bulunur.

Not

$k, n \in \mathbb{Z}^+$, p asal sayı ve $p^k \leq n$ olmak üzere n! ifadesinin içinde p asal çarpanının sayısı

$$\begin{array}{r|l} n & p^1 \\ \hline \underline{\quad} & A \\ --- & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} n & p^2 \\ \hline \underline{\quad} & B \\ --- & \end{array} \qquad \cdots \qquad \begin{array}{r|l} n & p^k \\ \hline \underline{\quad} & K \\ --- & \end{array}$$

işlemleri yapılarak elde edilen bölümler toplamı $A + B + ... + K$ olarak bulunur.

18. ÖRNEK

$43! = 3^n \cdot a,\ n \in \mathbb{N}$ olduğuna göre n doğal sayısının alabileceği değerler toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{array}{r|l} 43 & 3 \\ \hline & 14 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 14 & 3 \\ \hline & 4 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 4 & 3 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Bu işlemin bölümler toplamı olan $14 + 4 + 1 = 19$ değeri, n doğal sayısının alabileceği en büyük değerdir. $0 \leq n \leq 19$ olduğundan n nin alabileceği değerler toplamı

$$0 + 1 + 2 + ... + 19 = \frac{19 \cdot (19 + 1)}{2} = \frac{19 \cdot \cancel{20}}{\cancel{2}} = 19 \cdot 10 = 190$$ olur.

19. ÖRNEK

$n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $n \cdot (n!) = (n+1)! - n!$ olduğu bilindiğine göre

$1 \cdot (1!) + 2 \cdot (2!) + 3 \cdot (3!) + ... + 43 \cdot (43!)$ toplamının sondan kaç basamağının 9 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} 1 \cdot (1!) + 2 \cdot (2!) + 3 \cdot (3!) + ... + 43 \cdot (43!) &= (2! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + ... + (44! - 43!) \\ &= (\cancel{2!} - 1!) + (\cancel{3!} - \cancel{2!}) + (\cancel{4!} - \cancel{3!}) + ... + (44! - \cancel{43!}) \\ &= 44! - 1! \text{ eşitliği yazılır.} \end{aligned}$$

Bu ifadede $44! = A \cdot 2^{41} \cdot 5^9 = B \cdot 10^9$ olduğundan
$44! - 1 = B \cdot 10^9 - 1$ elde edilir.
Bu ifade, verilen toplamın sondan 9 basamağının 9 olduğu sonucunu verir.

20. ÖRNEK

$11! + 1 < x < 11! + 13$ eşitsizliğini sağlayan kaç asal sayı olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$k_1, k_2, ..., k_{11} \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$x_1 = 11! + 2 = 2 \cdot k_1$

$x_2 = 11! + 3 = 3 \cdot k_2$

$x_3 = 11! + 4 = 4 \cdot k_3$

....

$x_{11} = 11! + 12 = 12 \cdot k_{11}$ sayıları, 12 nin katı olduğundan verilen eşitsizliği sağlayan asal olmayan sayılardır.
Bu durumda $x_1, x_2, x_3, ..., x_{11}$ sayılarının hiçbiri asal sayı olmadığından verilen eşitsizliği sağlayan asal sayı yoktur.

21. ÖRNEK

Bir doğal sayının faktöriyeline eşit olan sayılara **Wilson sayıları** denir.
Doğal sayılar kümesinden Wilson sayılarının atılmasıyla oluşan 0, 3, 4, 5, 7, ... sayı dizisinde 2018. sayının kaç olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Doğal sayılar kümesinden hiçbir sayı atılmasaydı 2018. sayı 2017 olurdu.

$0! = 1! = 1,$

$2! = 2,$

$3! = 6,$

$4! = 24,$

$5! = 120,$

$6! = 720$ ve $7! = 5040 > 2017$ olduğundan

$\{1, 2, 6, 24, 120, 720\}$ kümesinin elemanları Wilson sayıları olup doğal sayılar kümesinden çıkarılmıştır.

Buna göre aranan sayı $2017 + 6 = 2023$ olur.

ALIŞTIRMALAR-1

1. Bir telefon hattı almak için GSM şubesine giden Defne'ye satış elemanı faturasız 4 farklı tarife ile faturalı 5 farklı tarife öneriyor. Defne, faturalı veya faturasız bir tarifeyi kaç farklı şekilde seçebilir?

2. Yavuz, yarıyıl tatilinde Konya'da bulunan amcasını ziyarete gidecektir. Seyahat esnasında yolda okumak için 4 farklı dergiden birini ve 5 farklı romandan birini seçecektir. Yavuz bu seçimini kaç farklı şekilde yapabilir?

3. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinin elemanları kullanılarak rakamları farklı 4 basamaklı

a) Kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

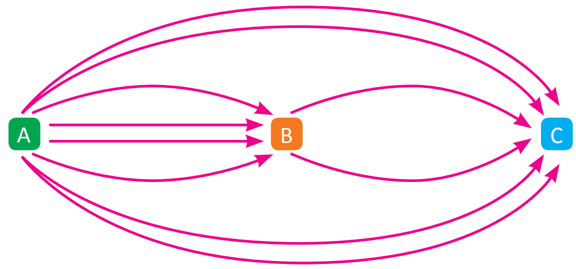
b) Kaç farklı çift doğal sayı yazılabilir?

c) 5 ile bölünebilen kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

ç) 2500 ile 6500 arasında kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

d) 4 ile bölünebilen kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

4. Aşağıdaki şekilde A, B ve C kentleri arasındaki farklı ulaşım yolları gösterilmiştir. Gidilen güzergâh bir daha kullanılmamak koşuluyla A kentinden C kentine kaç farklı şekilde gidilip dönülebilir?



5. 404 sayfadan oluşan bir matematik kitabının sayfaları numaralandırıldığında kaç adet 4 rakamı kullanılır?

6. Bir yarışma jürisi üyeliği için 5 evli çift içinden 1 erkek ve 1 kadın seçilecektir.
Seçilenlerin eş olmadığı kaç farklı (erkek, kadın) ikili oluşturulabilir?

7. 1 den başlayan doğal sayılar soldan sağa yan yana dizilerek 1234...910..17181920... sayısı oluşturuluyor. Bu sayının baştan 505. rakamı kaçtır?

8. $\{1, 4, 5, 3\}$ kümesinin elemanları kullanılarak yazılan tüm doğal sayılar küçükten büyüğe doğru sıralandığında 1453 sayısı kaçıncı sırada yer alır?

9. $\dfrac{(n-1)!-(n-2)!}{(n-3)!}=36$ olduğuna göre n değerini bulunuz.

10. $a, b \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\dfrac{a!+2\cdot(b!)}{b!}=212$ eşitliğini sağlayan kaç farklı (a, b) ikilisi vardır?

11. $A, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $6! = 2^n \cdot A$ olduğuna göre A nın alabileceği <u>en büyük</u> ve <u>en küçük</u> değerlerin toplamını bulunuz.

12. $a, b \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $67! = 15^a \cdot b$ eşitliğinde a nın alabileceği değerlerin toplamını bulunuz.

13. $17! + 16! = 9 \cdot k$ olduğuna göre $17! - 16!$ işleminin sonucunu k türünden bulunuz.

14. $\left(\dfrac{a}{5}\right)! + \left(\dfrac{10}{a}\right)!$ toplamının tanımlı olabilmesi için a nın alabileceği değerlerin çarpımını bulunuz.

2. Permütasyon

Tanım

$n, r \in \mathbb{N}$ ve $n \geq r$ olmak üzere n elemanlı bir $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ kümesinin birbirinden farklı r tane elemanından oluşan sıralı r lilerine A kümesinin **r li permütasyonları** (dizilişleri) denir. n elemanlı bir A kümesinin r elemanlı permütasyonlarının sayısı $P(n, r)$ biçiminde gösterilir. $P(n, r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ formülü ile hesaplanır.

n elemanlı bir kümenin r li permütasyonu demek aynı zamanda r elemanlı sıralaması demektir.

$P(n, r)$ bulunurken $\underbrace{(\square, \square, ..., \square)}_{r \text{ tane}}$ r lisinde

1. kareye n tane elemandan herhangi biri n türlü,
2. kareye $(n-1)$ tane elemandan herhangi biri $(n-1)$ türlü,
3. kareye $(n-2)$ tane elemandan herhangi biri $(n-2)$ türlü,

....,

r. kareye $(n-r+1)$ tane elemandan herhangi biri $(n-r+1)$ türlü seçenek vardır.

$P(n, r) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-r+1)$, bu eşitlik $(n-r)!$ ile çarpılır ve bölünürse

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-r+1) \cdot (n-r)!}{(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!} \text{ elde edilir.}$$

Sonuç

$r = n$ alınırsa $P(n, n) = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!} = \dfrac{n!}{1} = n!$ olur.

1. ÖRNEK

$P(5, 3)$, $P(6, 2)$, $P(7, 3)$ ve $P(8, 2)$ değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}^{1}}{\cancel{2!}} = 60$$

$$P(6, 2) = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}^{1}}{\cancel{4!}} = 30$$

$$P(7, 3) = \underbrace{7 \cdot 6 \cdot 5}_{3 \text{ tane}} = 210$$

$$P(8, 2) = \underbrace{8 \cdot 7}_{2 \text{ tane}} = 56 \text{ bulunur.}$$

2. ÖRNEK

$28 \cdot P(n, 2) = P(2n, 3)$ olduğuna göre n değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(n, 2) = n \cdot (n-1)$ ve $P(2n, 3) = 2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2)$ ifadeleri verilen eşitlikte yerine yazılırsa

$$28 \cdot n \cdot (n-1) = 2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2)$$

$$\cancel{28}_{7} \cdot \cancel{n}_{1} \cdot \cancel{(n-1)}_{1} = \cancel{4}_{1} \cdot \cancel{n}_{1} \cdot (2n-1) \cdot \cancel{(n-1)}_{1}$$

$$7 = 2n - 1$$

$$8 = 2n \Rightarrow n = 4 \text{ olur.}$$

3. ÖRNEK

SABIR kelimesinin harflerinin yerlerini değiştirerek anlamlı ya da anlamsız kaç farklı kelime yazılabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

SABIR kelimesinde beş farklı harf olduğundan bu beş harfin herhangi bir permütasyonu beş harfli yeni bir kelime oluşturur.
Bu durumda yazılabilecek kelimelerin sayısı
$P(5,5)=5!=120$ olur.

4. ÖRNEK

$A=\{1,2,3,4,5,6\}$ kümesinin elemanları ile yazılabilen sıralı 4 lülerin kaç tanesinde 4 bulunur?

ÇÖZÜM

$s(A)=6$ dır. Bu 6 elemandan $P(6,4)=6\cdot5\cdot4\cdot3=360$ tane sıralı 4 lü oluşur.
4 elemanının bulunmadığı sıralı 4 lülerin sayısı $P(5,4)=5\cdot4\cdot3\cdot2=120$ bulunur.
O hâlde 4 elemanının bulunduğu sıralı 4 lülerin sayısı
$P(6,4)-P(5,4)=360-120=240$ olur.

5. ÖRNEK

4 kız ve 2 erkek öğrenci yan yana dizilerek fotoğraf çektireceklerdir. Buna göre bu öğrencilerin

a) Kaç farklı şekilde fotoğraf çektirebileceklerini bulunuz.

b) Erkeklerin yan yana olmak koşuluyla kaç farklı şekilde fotoğraf çektirebileceklerini bulunuz.

c) Erkeklerin yan yana olmamak koşuluyla kaç farklı şekilde fotoğraf çektirebileceklerini bulunuz.

ÇÖZÜM

a) $\{E_1,E_2,K_1,K_2,K_3,K_4\}$ olduğundan toplam öğrenci sayısı 6 dır. Bu 6 kişinin tüm farklı dizilişlerinin sayısı $P(6,6)=6!=720$ olur.

b) Erkekler yan yana olduğunda $\{\{E_1,E_2\},K_1,K_2,K_3,K_4\}$ kümesinin 5 li permütasyonlarının sayısı $P(5,5)$ ve $\{E_1,E_2\}$ kümesinin 2 li permütasyonlarının sayısı $P(2,2)$ olur. Saymanın çarpma kuralı gereği $P(5,5)\cdot P(2,2)=5!\cdot2!=120\cdot2=240$ bulunur.

c) Tüm dizilişlerin sayısından erkeklerin yan yana olduğu dizilişlerin sayısı çıkarılırsa erkeklerin yan yana olmadığı dizilişlerin sayısı

$$\begin{aligned}P(6,6)-P(5,5)\cdot P(2,2)&=6!-5!\cdot2!\\&=720-120\cdot2\\&=720-240=480\end{aligned}$$ bulunur.

6. ÖRNEK

5 doktor, 4 hemşire ve 2 diş hekimi yan yana dizilerek fotoğraf çektireceklerdir. Buna göre

a) Aynı meslekten olanlar yan yana olmak koşuluyla bu kişilerin kaç farklı şekilde fotoğraf çektirebileceklerini bulunuz.

b) Hemşirelerin yan yana olması koşuluyla kaç farklı şekilde fotoğraf çektirebileceklerini bulunuz.

c) Başta ve sonda 1 diş hekimi olmak koşuluyla kaç farklı şekilde fotoğraf çektirebileceklerini bulunuz.

ç) Doktor ile başlayıp doktor ile bitmeyen bir dizilişle kaç farklı şekilde fotoğraf çektirebileceklerini bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Her meslek grubu 1 kişi olarak düşünülürse
5 doktor, 1 kişi
4 hemşire, 1 kişi
2 diş hekimi, 1 kişi olacağından gruptaki kişi sayısı 3 olur.
Bu grubun dizilişlerinin sayısı $P(3,3)$ olur.
Meslek gruplarının kendi aralarındaki dizilişlerinin sayısı sırasıyla
$P(5,5)$, $P(4,4)$ ve $P(2,2)$ olduğundan
saymanın çarpma kuralına göre oluşabilecek dizilişlerin sayısı
$P(3,3)\cdot P(5,5)\cdot P(4,4)\cdot P(2,2)=3!\cdot 5!\cdot 4!\cdot 2!$ olur.

b) Hemşireler 1 kişi olarak düşünülürse
4 hemşire 1 kişi olacağından gruptaki kişi sayısı 8 olur.
Bu grubun dizilişlerinin sayısı $P(8,8)$ olur.
Hemşirelerin kendi aralarındaki dizilişlerinin sayısı $P(4,4)$ olduğunda saymanın çarpma kuralına göre oluşabilecek dizilişlerin sayısı
$P(8,8)\cdot P(4,4)=8!\cdot 4!$ olur.

c) Başta ve sonda bir diş hekimi bulunacağından bu kişilerin dizilişlerinin sayısı $P(2,2)$ olur.
Diş hekimleri arasına 5 doktor ve 4 hemşire girdiğinde bu kişilerin dizilişlerinin sayısı $P(9,9)$ olacağından saymanın çarpma kuralına göre oluşabilecek dizilişlerin sayısı
$P(2,2)\cdot P(9,9)=2!\cdot 9!$ olur.

ç) Doktorla başlayan tüm dizilişlerin sayısından doktorla başlayıp doktorla biten tüm dizilişlerin sayısı çıkarılmalıdır.
Doktorla başlayan tüm dizilişlerin sayısı $P(5,1)\cdot P(10,10)=5\cdot 10!$ olur.
Doktorla başlayıp doktorla biten tüm dizilişlerin sayısı $P(5,1)\cdot P(9,9)\cdot P(4,1)=5\cdot(9!)\cdot 4$ bulunur.
O hâlde istenen dizilişlerin sayısı

$$\begin{aligned}5\cdot 10!-5\cdot(9!)\cdot 4&=5\cdot 10\cdot 9!-20\cdot 9!\\&=(50-20)\cdot 9!\\&=30\cdot 9!\text{ olur.}\end{aligned}$$

7. ÖRNEK

Aralarında 1 matematik ve 1 fizik kitabının bulunduğu 10 farklı kitap bir rafa dizilecektir.

Matematik ve fizik kitaplarının arasında daima 3 kitap bulunması koşuluyla kaç farklı diziliş yapılabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

$M(K_1K_2K_3)F$, 1 nesne olarak alınırsa toplamda 6 nesne olur. Matematik ve fizik kitapları dışındaki 8 kitabın herhangi üçünün sıralanması $P(8,3)$, matematik ve fizik kitaplarının sıralanması $P(2,2)$ ve toplam 6 kitabın sıralanması $P(6,6)$ şeklindedir.

Bu durumda saymanın çarpma kuralına göre yapılabilecek tüm dizilişlerin sayısı

$$\begin{aligned} P(8,3)\cdot P(2,2)\cdot P(6,6) &= 8\cdot 7\cdot 6\cdot 2!\cdot 6! \\ &= 6\cdot 2\cdot 8\cdot 7\cdot 6! \\ &= 12\cdot 8! \ \text{ olur.} \end{aligned}$$

8. ÖRNEK

$A=\{0,1,2,3,4,5\}$ kümesinin elemanları kullanılarak 3 basamaklı

a) Kaç doğal sayı
b) 5 in bulunup 2 nin bulunmadığı rakamları farklı kaç doğal sayı
c) Rakamları toplamı çift sayı olan, rakamları farklı kaç doğal sayı yazılabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Yüzler basamağına 0 yazılamayacağından

$$\underbrace{\boxed{5}}_{\{1,2,3,4,5\},}\cdot\underbrace{\boxed{6}}_{\{0,1,2,3,4,5\}}\cdot\underbrace{\boxed{6}}_{\{0,1,2,3,4,5\}}=5\cdot 6\cdot 6=180 \text{ doğal sayı yazılabilir.}$$

b) Herhangi bir basamağında 2 rakamının bulunmadığı durumlardan 2 ve 5 rakamlarının aynı anda bulunmadığı durumlar çıkarılmalıdır.

2 rakamının bulunmadığı durumların sayısı: $\underbrace{\boxed{4}}_{\{1,3,4,5\}}\cdot\boxed{4}\cdot\boxed{3}=4\cdot 4\cdot 3=48$ bulunur.

2 ve 5 rakamının bulunmadığı durumların sayısı: $\underbrace{\boxed{3}}_{\{1,3,4\}}\cdot\boxed{3}\cdot\boxed{2}=3\cdot 3\cdot 2=18$ olur.

Bu durumda $48-18=30$ bulunur.

c) $T=\{1,3,5\}$ ve $Ç=\{0,2,4\}$ kümelerindeki rakamlar kullanılarak oluşturulacak üç basamaklı sayıların toplamının çift sayı olması için TTÇ, TÇT, ÇTT veya ÇÇÇ şeklinde olmalıdır.

$$\begin{aligned} &\underbrace{\overset{T}{\boxed{3}}}_{\{1,3,5\}}\cdot\overset{T}{\boxed{2}}\cdot\underbrace{\overset{Ç}{\boxed{3}}}_{\{0,2,4\}}+\underbrace{\overset{T}{\boxed{3}}}_{\{1,3,5\}}\cdot\underbrace{\overset{Ç}{\boxed{3}}}_{\{0,2,4\}}\cdot\overset{T}{\boxed{2}}+\underbrace{\overset{Ç}{\boxed{2}}}_{\{2,4\}}\cdot\underbrace{\overset{T}{\boxed{3}}}_{\{1,3,5\}}\cdot\overset{T}{\boxed{2}}+\underbrace{\overset{Ç}{\boxed{2}}}_{\{2,4\}}\cdot\overset{Ç}{\boxed{2}}\cdot\overset{Ç}{\boxed{1}}=3\cdot 2\cdot 3+3\cdot 3\cdot 2+2\cdot 3\cdot 2+2\cdot 2\cdot 1 \\ &=18+18+12+4 \\ &=52 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

3. Tekrarlı Permütasyon

"FİZİK" kelimesindeki harflerin yerleri değiştirilerek 5 harfli anlamlı veya anlamsız kaç farklı kelime yazılabileceği incelenirse; birbirinin aynısı (özdeşi) olan nesnelerin veya elemanların da bulunduğu bir topluluk sıralanırken öncelikle tüm nesneler farklıymış gibi sıralama yapılır.

"FİZİK" kelimesinde 5 harf bulunduğundan bunların farklı dizilişlerinin sayısı $P(5,5)=5!=120$ tanedir. Ancak "FİZİK" kelimesinde 2 tane "İ" harfi bulunduğundan bu harfler kendi aralarında yer değiştirse bile oluşan kelimeler daima aynı olur. Yani 120 cevabı, içinde farklı permütasyon $(2!)$ adet bulunmaktadır. Bu yüzden 120, aranan cevabın $(2!)$ katıdır. Buna göre "FİZİK" kelimesindeki harflerin yerleri değiştirilerek oluşturulabilecek 5 harfli, anlamlı veya anlamsız kelimelerin sayısı

$\frac{5!}{2!}=\frac{120}{2}=60$ olur.

Tanım

Bazı elemanları özdeş olan n elemanlı bir kümenin n li permütasyonlarına **tekrarlı permütasyon** denir.

$r_1, r_2, ..., r_k \in \mathbb{Z}^+$ ve $n=r_1+r_2+...+r_k$ olmak üzere n elemanlı bir kümenin r_1 tanesi birbiriyle özdeş, r_2 tanesi birbiriyle özdeş, ..., r_k tanesi birbiriyle özdeş ise n elemanlı kümenin elemanlarının n li permütasyonlarının (dizilişlerinin) sayısı

$P(n;\ r_1, r_2, ..., r_k)=\frac{n!}{r_1!\cdot r_2!\cdot ...\cdot r_k!}$ ile hesaplanır.

1. ÖRNEK

11 222 344 sayısının rakamlarının yer değiştirmesi ile 8 basamaklı kaç sayı yazılabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

11 222 344 sayısında
$1 \rightarrow$ 2 tane
$2 \rightarrow$ 3 tane
$4 \rightarrow$ 2 tane
$3 \rightarrow$ 1 tane bulunmaktadır. Bu durumda 11 222 344 sayısının rakamlarının yer değiştirmesi ile yazılabilecek 8 basamaklı sayılar

$$P(8;\ 2,3,2,1)=\frac{8!}{2!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!}=\frac{\overset{2}{\cancel{8}}\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot 5!}{\cancel{2}\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{2}}=14\cdot(5!)$$
$$=14\cdot 120$$
$$=1680 \text{ tanedir.}$$

2. ÖRNEK

$n, x \in \mathbb{N}$ olmak üzere $P(n;x,3)=56$ olduğuna göre $n+x$ toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$x+3=n$ olduğundan $\frac{n!}{x!\cdot 3!}=\frac{(x+3)!}{x!\cdot 3!}=\frac{(x+3)\cdot(x+2)\cdot(x+1)\cdot \cancel{x!}}{\cancel{x!}\cdot 3!}=7\cdot 8$

$(x+3)\cdot(x+2)\cdot(x+1)=7\cdot 8\cdot(3!)$ elde edilir. Buradan

$x+3=8$ ise $x=5$ ve $x+3=n$ olduğundan $n=5+3=8$ bulunur.

O hâlde $n+x=8+5=13$ olur.

3. ÖRNEK

2 220 007 sayısının rakamlarının yer değiştirmesi ile 7 basamaklı kaç farklı çift sayı yazılabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Tüm durumlardan tek sayıların sayısı çıkarılırsa çift sayıların sayısı elde edilir.
7 basamaklı 2 220 007 sayısının rakamlarının 4 tanesi sıfırdan farklıdır.
Seçilen rakamların 3 tanesi 0 olduğundan yazılabilecek 7 basamaklı dizilişlerin $\frac{3}{7}$ ü 0 ile başlarken $\frac{4}{7}$ ü 0 ile başlamaz. O hâlde yazılabilecek 7 basamaklı sayıların sayısı

$\frac{7!}{3!\cdot 3!}\cdot\frac{4}{7}$ tane olur.

2 220 007 sayısının rakamları kullanılarak yazılabilecek tek sayıları bulmak için 7 rakamı birler basamağında sabitlenirse 0 ile başlamayan tek sayılar

$\frac{6!}{3!\cdot 3!}\cdot\frac{3}{6}$ tane olur.

Buna göre 7 basamaklı çift sayıların sayısı

$\frac{7!}{3!\cdot 3!}\cdot\frac{4}{7}-\frac{6!}{3!\cdot 3!}\cdot\frac{3}{6}=80-10=70$ olarak bulunur.

4. ÖRNEK

Sezin ve Yunus'un düğün konvoyunda A marka 5, B marka 5, C marka 7 ve D marka 3 adet otomobil bulunmaktadır.

Düğün konvoyunda bulunan kamera çekim aracının tüm konvoyu çektiği herhangi bir zamanda 1. sırada gelin arabası, 2. sırada C marka ve sonuncu sırada A marka araç olma koşuluyla konvoydaki araçların markalarına göre kaç farklı diziliş oluşturabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Düğün konvoyundaki diziliş G gelin arabasını göstermek üzere

$A\ \underbrace{A\,A\,A\,A\,B\,B\,B\,B\,B\,C\,C\,C\,C\,C\,C\,D\,D\,D}_{18\ \text{otomobil}}\ C\ G$ şeklinde olmalıdır. Bu durumda 18 otomobilin dizilişi

$\frac{18!}{\underbrace{4!}_{A}\cdot\underbrace{5!}_{B}\cdot\underbrace{6!}_{C}\cdot\underbrace{3!}_{D}}$ olarak bulunur.

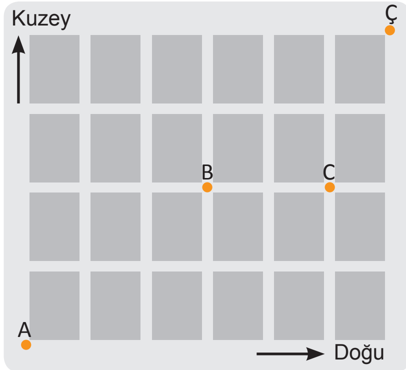
Sıra Sizde

SORU

"KÜÇÜKÇAKIR" kelimesinin harflerinin yer değiştirmesiyle her Ü den hemen sonra Ç harfinin geldiği ve K ile başlayıp R ile biten anlamlı veya anlamsız 10 harfli kaç farklı kelime yazılabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

5. ÖRNEK



Yandaki şekil, bir şehrin birbiriyle kesişen cadde ve sokaklarının krokisidir.

A noktasındaki bir kurye, sadece doğu veya kuzey yönünde ilerleyecektir. Buna göre bu kuryenin

a) A noktasından Ç noktasına

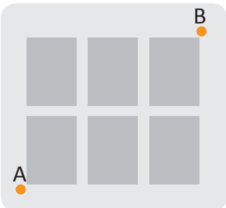
b) BC yolunu kullanmak koşuluyla A noktasından Ç noktasına

c) B noktasına uğramak ve C noktasına uğramamak koşuluyla A noktasından Ç noktasına kaç farklı yolla gidebileceğini bulunuz.

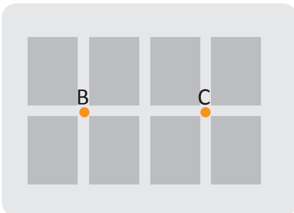
ÇÖZÜM

a) A noktasından Ç noktasına gitmek isteyen kurye hangi güzergâhı kullanırsa kullansın mutlaka 6 birim doğuya ve 4 birim kuzeye hareket etmelidir. Bu güzergâhlardan biri DDDDDDKKKK şeklindedir. Diğer güzergâhlar ise bu harflerin kendi aralarındaki permütasyonları kadardır. Bu durumda A noktasından Ç noktasına
$P(10;6,4)=\dfrac{10!}{6!\cdot 4!}$ farklı şekilde gidilebilir.

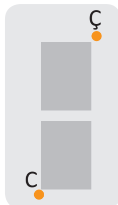
b)



Şekil 1



Şekil 2



Şekil 3

BC yolunu kullanarak A noktasından Ç noktasına gidebilmek için sırasıyla

i) A noktasından B noktasına gidilmeli (Şekil 1).
A noktasından B noktasına gidebilmesi için DDDKK şeklindeki dizilişlerden herhangi biri kullanılmalıdır.
Bu dizilişlerin sayısı $P(5;3,2)=\dfrac{5!}{3!\cdot 2!}=10$ olur.

ii) BC yolu kullanılmalı (Şekil 2).
B noktasından C noktasına gidebilmesi için DD şeklindeki dizilişi kullanmalıdır.
Bu dizilişlerin sayısı $P(2;2)=\dfrac{2!}{2!}=1$ olur.

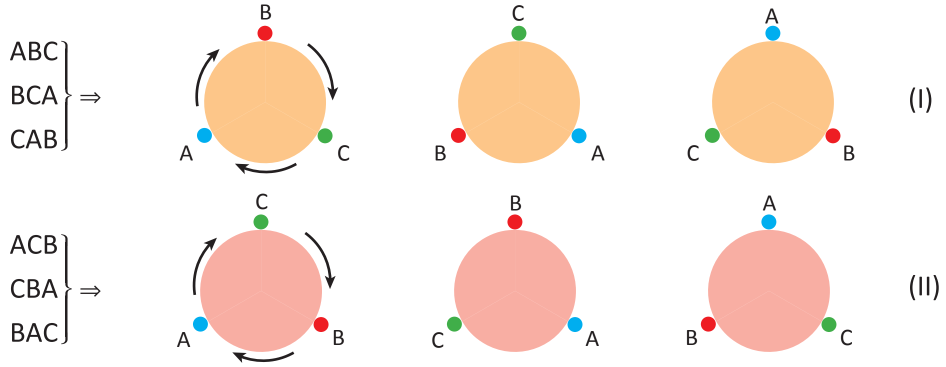
iii) C noktasından Ç noktasına gidilmelidir (Şekil 3).
C noktasından Ç noktasına gidebilmesi için DKK şeklindeki dizilişlerden herhangi birini kullanmalıdır.
Bu dizilişlerin sayısı $P(3;2)=\dfrac{3!}{2!}=3$ kadardır.
Saymanın çarpma kuralı gereği kurye BC yolunu kullanarak A noktasından Ç noktasına
$P(5;3,2)\cdot P(2;2)\cdot P(3;2)=10\cdot 1\cdot 3=30$ farklı şekilde gidebilir.

c) Kuryenin B noktasına uğrayıp C noktasına uğramamak koşuluyla A noktasından Ç noktasına gidebileceği yolların sayısı hesaplanırken B noktasına uğrama koşuluyla A noktasından Ç noktasına giderken kullandığı yolların sayısından (X), BC yolunu kullandığı durumların sayısı (Y) çıkarılmalıdır. Bu durumda

$$\begin{aligned} X-Y &= [P(5;3,2)\cdot P(5;3,2)]-[P(5;3,2)\cdot P(2;2)\cdot P(3;2)] \\ &= 10\cdot 10-10\cdot 1\cdot 3 \\ &= 100-30 \\ &= 70 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

4. Dönel Permütasyon

Şekil 1.1.1'deki Ayşe, Burak ve Ceyda isimli üç öğrencinin düz bir sıra ve yuvarlak bir masa etrafındaki dizilişleri incelenirse



Şekil 1.1.1

Sonuç olarak düz bir sıradaki 3 farklı permütasyon, yuvarlak masa etrafında 1 permütasyon oluşturmaktadır. Orantı ile

Doğrusal diziliş	Dairesel diziliş
3 diziliş	1 diziliş
$P(3,3)=3!$	x diziliş

$$x=\frac{P(3,3)}{3}=\frac{3!}{3}=(3-1)!=2! \text{ bulunur.}$$

Genelleme yapılırsa $s(A)=n$ olmak üzere A kümesinin elemanlarının bir daire üzerindeki dizilişlerinin sayısı

$\frac{P(n,n)}{n}=\frac{n!}{n}=(n-1)!$ olur.

Tanım

$n\in\mathbb{Z}^{+}$ olmak üzere n tane farklı elemanın dairesel permütasyonlarının sayısına n elemanın **dönel (dairesel) permütasyonu** denir.
n tane farklı elemanın dairesel dizilişlerinin sayısı $(n-1)!$ tanedir.

1. ÖRNEK

Anne, baba ve 4 çocuktan oluşan SEVGİ ailesi akşam yemeklerini tüm aile bireyleriyle birlikte yuvarlak bir masa etrafında yemektedir. Buna göre aile bireyleri

a) Kaç farklı şekilde oturabilir?

b) Anne ve baba daima yan yana olmak koşuluyla kaç farklı şekilde oturabilir?

c) Yalnız en küçük çocuğun anne ve babasının arasında oturması koşuluyla bu ailenin kaç farklı şekilde oturabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Masanın etrafına oturacak kişi sayısı 6 olduğundan yuvarlak masa etrafındaki farklı dizilişlerinin sayısı $(n-1)!=(6-1)!=5!=120$ olur.

b) Anne ve baba yan yana olduğundan bu kişiler 1 kişi olarak düşünülürse yuvarlak masa etrafında dizilen kişi sayısı $(AB)Ç_1Ç_2Ç_3Ç_4$ şeklinde olup 5 olur. Ayrıca anne ve babanın kendi aralarındaki farklı dizilişlerinin sayısı $2!$ olduğundan saymanın çarpma kuralına göre

$(5-1)!\cdot 2!=4!\cdot 2!=48$ bulunur.

c) Anne, en küçük çocuk ve baba yan yana olduğundan bu kişiler 1 kişi olarak düşünülürse $(AÇ_1B)Ç_2Ç_3Ç_4$ şeklindeki 4 farklı kişinin yuvarlak masa etrafındaki farklı diziliş sayısı

$(4-1)!\cdot 2!=3!\cdot 2!=12$ olur.

2. ÖRNEK

Yaz olimpiyatlarına hazırlık kampında bulunan bir sporcu kafilesindeki 6 güreş, 5 halter ve 4 okçuluk branşından toplam 15 sporcu yuvarlak masa etrafında Gençlik ve Spor Bakanı tarafından verilen dostluk yemeğine katılacaklardır.

Aynı branştan olan sporcular yan yana olmak koşuluyla bu sporcuların kaç farklı şekilde oturabilir, bulunuz.

ÇÖZÜM

Aynı branştan olan sporcular,
6 güreşçi, 1 grup
5 halterci, 1 grup
4 okçu, 1 grup
olacak şekilde düşünülürse
3 farklı kişinin yuvarlak masa etrafındaki farklı dizilişlerinin sayısı $(3-1)! = 2!$ bulunur.

Aynı branştaki sporcuların kendi aralarındaki farklı dizilişlerinin sayısı $6! \cdot 5! \cdot 4!$ olur. Buna göre 15 sporcunun aynı branştakiler yan yana olmak koşuluyla yuvarlak masa etrafındaki farklı dizilişlerinin sayısı, saymanın çarpma kuralına göre $2! \cdot 6! \cdot 5! \cdot 4!$ olarak bulunur.

3. ÖRNEK

Bir lunaparkta her sepete 1 kişinin binebildiği 10 kişi kapasiteli bir dönme dolap bulunmaktadır. İsmail, Okan ve 9 arkadaşı bu dönme dolaba binmek istiyor.

Okan, fedakârlık yaparak dönme dolaba binmiyor ve dönme dolap etrafında dolaşarak arkadaşlarını izliyor. Okan'ın gözlemleyebileceği dizilişlerin sayısını bulunuz.

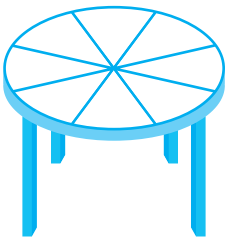
ÇÖZÜM

Dairesel dizilişten farklı olarak dönme dolaba iki farklı yönden bakılabilir. Arka taraftan bakıldığında görülen diziliş, ön taraftan bakıldığında görülen dizilişin aynısıdır. Bu sebeple bu dönme dolaptaki dizilişlerin sayısı dairesel dizilişlerin sayısının yarısı kadardır. O hâlde

$\dfrac{(10-1)!}{2} = \dfrac{9!}{2}$ farklı diziliş gözlemlenebilir.

Sıra Sizde

SORU



Şekildeki yuvarlak masa 8 eş parçaya ayrılmıştır.
Her bir dilim kırmızı, pembe, turuncu, sarı, mavi, lacivert, mor ve yeşil renge boyanacağına göre kaç farklı desen oluşturulabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

ALIŞTIRMALAR-2

1. 4 kız ve 2 erkek yan yana dizilerek fotoğraf çektireceklerdir. Buna göre bu kişiler

a) Kaç farklı dizilişle fotoğraf çektirebilirler?

b) Erkekler yan yana olmak koşuluyla kaç farklı dizilişle fotoğraf çektirebilirler?

2. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin 3 lü permütasyonlarının kaç tanesinde 4 veya 5 eleman olarak bulunur?

3. 15 soruluk 5 şıklı bir testin cevap anahtarı hazırlanacaktır. Bu testin doğru cevap şıklarının yerleri değiştirilerek

a) Kaç farklı cevap anahtarı hazırlanabilir?

b) Ardışık iki sorunun cevabının aynı şık olmaması koşuluyla kaç farklı cevap anahtarı hazırlanabilir?

c) Ardışık üç sorunun cevap şıklarının birbirinden farklı olması koşuluyla kaç farklı cevap anahtarı hazırlanabilir?

4. Rakamları çarpımı 36 olan 4 basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

5. $(n^2 + n + 1) \cdot P(n, 2) = 124 \cdot n$ eşitliğini sağlayan n değerini bulunuz.

6. $A = \{a, b, c, d, e, 1, 2\}$ kümesinin 4 lü permütasyonlarının kaç tanesinde a veya b elemanı bulunur, 2 elemanı <u>bulunmaz?</u>

7. 6 katlı bir binanın dış cephesi sarı, mavi ve yeşil renklerle boyanacaktır.

Ardışık katlar farklı renklere boyanacağına göre bina üzerinde kaç farklı boyama yapılabilir?

8. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin elemanları ile sadece iki basamağı 4 olan 4 basamaklı kaç farklı sayı yazılabilir?

9. 5 evli çift yuvarlak masa etrafında oturmak istiyor. Herhangi iki bayan yan yana olmamak koşuluyla bu çiftler kaç farklı şekilde oturabilir?

10. 3 330 072 sayısının rakamları kullanılarak 7 basamaklı

a) Kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

b) Kaç farklı çift doğal sayı yazılabilir?

11. "MİSAFİRPERVER" kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek içinde MİSAFİR kelimesinin bulunduğu anlamlı ya da anlamsız kaç tane kelime yazılabilir?

12. 5 kişinin katıldığı bir bilgi yarışmasının yalnız bir tane birincisinin olması koşuluyla yarışmanın kaç farklı şekilde sonuçlanabileceğini bulunuz.

5. Kombinasyon

$A=\{a,b,c,d\}$ kümesi verilmiş olsun. A kümesinin üç elemanlı farklı dizilişleri ve üç elemanlı alt kümeleri Tablo 1.1.1' de aşağıda verilmiştir.

Tablo 1.1.1

Üç Elemanlı Farklı Dizilişler	Üç Elemanlı Alt Kümeler
abc - acb - bac - bca - cba - cab	$\{a,b,c\}$
bcd - bdc - cdb - cbd - dbc - dcb	$\{b,c,d\}$
acd - adc - cad - cda - dac - dca	$\{a,c,d\}$
abd - adb - bda - bad - dab - dba	$\{a,b,d\}$

Tablonun sağ sütunundaki her bir alt kümenin elemanları kullanılarak sol sütundaki farklı dizilişler elde edilmiştir. Her alt kümenin farklı dizilişlerinin sayısı $3!$ kadardır. Bu durumda dört alt kümenin farklı dizilişlerinin sayısı $4\cdot 3!$ tane olur. Bu sonuç, A kümesinin elemanları kullanılarak yazılabilecek üç elemanlı farklı dizilişlerin sayısına eşittir.

Buradan $4\cdot 3!=P(4,3)$ eşitliği elde edilir.

Sonuç olarak;

$n,r\in\mathbb{N},\ r\le n$ olmak üzere n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümelerinin sayısı X olsun. Her bir alt kümenin $r!$ tane farklı dizilişi vardır. Tüm alt kümelerin farklı dizilişlerinin sayısı $X\cdot r!$ tane olur. Bu sonuç, n elemanlı kümenin r li dizilişlerinin sayısına eşit olduğundan

$X\cdot r!=P(n,r)$ dir. Buradan $X=\dfrac{P(n,r)}{r!}$ elde edilir. $P(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!}$ olduğundan

$X=\dfrac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!}=\dfrac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$ bulunur.

Bu ifade, n elemanlı kümenin r elemanlı alt kümelerinin sayısıdır.

Tanım

n elemanlı kümenin r elemanlı alt kümelerinin sayısına **n nin r li kombinasyonu** denir.

$C(n,r)$ veya $\dbinom{n}{r}$ şeklinde gösterilir.

$C(n,r)=\dbinom{n}{r}=\dfrac{n!}{(n-r)!\cdot r!}\quad (n,r\in\mathbb{N},0\le r\le n)$ olur.

$$C(6,4)=\frac{6!}{(6-4)!\cdot 4!}=\frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{2!\cdot \cancel{4!}}=\frac{30}{2}=15$$

$$\binom{7}{3}=\frac{7!}{(7-3)!\cdot 3!}=\frac{7\cdot \cancel{6}\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}\cdot \cancel{3!}}=35$$

1. ÖRNEK

$A=\{1,2,3,4\}$ kümesinin iki elemanlı alt kümelerinin sayısını (2 li kombinasyonlarını) bulunuz.

ÇÖZÜM

A kümesinin iki elemanlı alt kümeleri $\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$ şeklinde olup 6 tanedir.

A kümesinin 2 li kombinasyonlarının sayısı $C(4,2)=\dfrac{4!}{(4-2)!\cdot 2!}=\dfrac{4\cdot 3\cdot \cancel{2!}}{2!\cdot \cancel{2!}}=6$ olur.

2. ÖRNEK

$C(n+2,n-1)=5\cdot C(n,1)$ olduğuna göre n değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$C(n+2,n-1)=5\cdot C(n,1)\Rightarrow \frac{(n+2)!}{[(n+2)-(n-1)]!\cdot(n-1)!}=5\cdot\frac{n!}{(n-1)!\cdot 1!}$$

$$\Rightarrow \frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot \cancel{n}\cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}\cdot 3!}=5\cdot\frac{\cancel{n}\cdot\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}\cdot 1!}$$

$$\Rightarrow (n+2)\cdot(n+1)=6\cdot 5$$

$$\Rightarrow n=4 \text{ olur.}$$

Özellikler

1. $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$
2. $\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$
3. $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$
4. $\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}=\binom{n+1}{r+1}$
5. $\binom{n}{r}=\binom{n}{k}\Rightarrow r=k$ veya $n=k+r$
6. $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$

3. ÖRNEK

$\binom{n}{4}+\binom{n}{5}=\binom{13-n}{5}$ olduğuna göre n değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}=\binom{n+1}{r+1}$ olduğundan

$\binom{n}{4}+\binom{n}{5}=\binom{n+1}{5}$ olur. Buna göre

$$\binom{n}{4}+\binom{n}{5}=\binom{13-n}{5}\Rightarrow\binom{n+1}{5}=\binom{13-n}{5}$$

$$\Rightarrow n+1=13-n$$

$$\Rightarrow 2n=12$$

$$\Rightarrow n=6 \text{ bulunur.}$$

4. ÖRNEK

$\binom{10}{4}=\binom{10}{2n-6}$ olduğuna göre n nin alabileceği değerler toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\binom{10}{4}=\binom{10}{2n-6}\Rightarrow \begin{array}{lll} 4=2n-6 & \text{veya} & 10=4+2n-6\\ 10=2n & \text{veya} & 10=2n-2\\ n=5 & \text{veya} & 12=2n\\ & & n=6\end{array}$$

Buradan n nin alabileceği değerler toplamı $5+6=11$ bulunur.

5. ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin en az 3 elemanlı alt kümelerinin sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

Sonlu n elemanlı bir kümenin bütün alt kümelerinin sayısı 2^n tanedir. Bu kümenin

0 elemanlı alt kümelerinin sayısı: $\binom{6}{0}$

1 elemanlı alt kümelerinin sayısı: $\binom{6}{1}$

2 elemanlı alt kümelerinin sayısı: $\binom{6}{2}$

....

6 elemanlı alt kümelerinin sayısı: $\binom{6}{6}$ olduğundan

$\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+...+\binom{6}{6}=2^6$ yazılabilir.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin en az 3 elemanlı alt kümelerinin sayısı

$\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}=x$ olsun.

$\underbrace{\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+\binom{6}{2}}_{1+6+15}+\underbrace{\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}}_{x}=2^6$ eşitliği kullanılırsa

$x = 2^6 - (1 + 6 + 15)$

$= 64 - 22 = 42$ bulunur.

6. ÖRNEK

5 öğrencinin katıldığı bir sınavın başarı yönünden kaç farklı şekilde sonuçlanabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

5 öğrencinin katıldığı bir sınav sonucunda 5 öğrenci, 4 öğrenci, ..., 1 öğrenci başarılı olabileceği gibi hiçbir öğrenci de başarılı olmayabilir. Bütün bu durumların sayısı

$\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}=2^5=32$ olur.

7. ÖRNEK

5 doktor ve 4 hemşire arasından 3 doktor ve 2 hemşireden oluşan 5 kişilik bir sağlık ekibinin kaç farklı şekilde oluşturulabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

5 doktor arasından 3 doktor $\rightarrow \binom{5}{3}$

4 hemşire arasından 2 hemşire $\rightarrow \binom{4}{2}$ kadar farklı şekilde seçilebilir.

Bu durumda saymanın çarpma ilkesine göre 3 doktor ve 2 hemşireden oluşan 5 kişilik sağlık ekibi

$$\binom{5}{3}\cdot\binom{4}{2}=\frac{5!}{(5-3)!\cdot 3!}\cdot\frac{4!}{(4-2)!\cdot 2!}$$

$$=\frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{2!\cdot \cancel{3!}}\cdot\frac{4\cdot 3\cdot \cancel{2!}}{2!\cdot \cancel{2!}}=10\cdot 6=60$$ farklı şekilde seçilebilir.

8. ÖRNEK

Şehit Ömer Halisdemir Fen Lisesi 10/A sınıfındaki 6 erkek ve 4 kız öğrenci arasından "Vatan, Millet ve Bayrak Sevgisi" konulu sunuma 5 kişilik konuşmacı ekibi seçilecektir. Buna göre

a) Bu ekip kaç farklı şekilde seçilebilir?

b) 5 kişilik ekip ve bu ekibin içinden olması koşuluyla 1 başkan kaç farklı şekilde seçilebilir?

c) 3 ü erkek 2 si kız öğrenci olmak koşuluyla kaç farklı seçim yapılabilir?

ç) İçinde en az bir kız öğrenci olmak koşuluyla kaç farklı ekip oluşturulabilir?

ÇÖZÜM

a) $6+4=10$ öğrenci arasından 5 kişilik ekip

$\binom{10}{5}=\dfrac{10!}{(10-5)!\cdot 5!}=252$ farklı şekilde seçilebilir.

b) 10 öğrenci arasından 5 kişilik bir ekip $\binom{10}{5}$ farklı şekilde ve 5 öğrenci arasından bir başkan $\binom{5}{1}$ farklı şekilde seçilebilir.

Bu durumda $\binom{10}{5}\cdot\binom{5}{1}=252\cdot 5=1260$ farklı şekilde seçim yapılabilir.

c) 6 erkek öğrenci arasından 3 erkek öğrenci $\binom{6}{3}$ farklı şekilde, 4 kız öğrenci arasından 2 kız öğrenci $\binom{4}{2}$ farklı şekilde seçilebilir.
Buna göre 3 ü erkek, 2 si kız öğrenci olmak üzere $\binom{6}{3}\cdot\binom{4}{2}=20\cdot 6=120$ farklı seçim yapılabilir.

ç) En az 1 kız öğrenci olmak üzere

$\binom{6}{4}\cdot\binom{4}{1}+\binom{6}{3}\cdot\binom{4}{2}+\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{3}+\binom{6}{1}\cdot\binom{4}{4}=15\cdot 4+20\cdot 6+15\cdot 4+6\cdot 1=246$ farklı seçim yapılabilir.

9. ÖRNEK

Aralarında Çağla ve Efe'nin de bulunduğu 8 kişi arasından 5 kişilik bir satranç takımı oluşturulacaktır.

Çağla'nın daima takımda bulunup Efe'nin bulunmadığı kaç farklı takım oluşturulabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Satranç takımında Çağla daima bulunup Efe bulunmayacağından geriye kalan 6 kişi arasından 4 kişinin kaç farklı şekilde seçilebileceği hesaplanmalıdır.

Seçilecek takım $\{Ç,?,?,?,?\}$ şeklinde olacağından

$\binom{8-1-1}{5-1}=\binom{6}{4}=15$ tane farklı takım oluşturulabilir.

Sıra Sizde

SORU

12 soruluk bir sınavda ilk 5 soruyu cevaplamak zorunlu olduğuna göre toplam 10 sorunun kaç farklı şekilde seçilebileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

10. ÖRNEK

Enstrüman çalmayı öğrenmek için planlı çalışmak ve sabırlı olmak çok önemlidir. Bir halk eğitimi merkezi bu amaçla bağlama, gitar, kemençe, tulum, piyano ve ney enstrümanlarını öğrenmek isteyenler için bir kurs ilanı vermiştir. Kemençe ve tulum kursları aynı saatte yapıldığına göre 3 tane kursa katılmak isteyen bir kişinin kaç farklı seçim yapabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Açılan kurs sayısı 6 dır. Yapılacak seçim iki yolla yapılır. Aynı saatte olan kurslardan birisi seçilirse kalan 4 kurs içinden 2 tane kurs seçilir veya aynı saatte olan kurslardan seçim yapılmadan diğer 4 kurs içinden 3 kurs seçilir. Buna göre

$\binom{2}{1}\cdot\binom{4}{2}+\binom{2}{0}\cdot\binom{4}{3}=2\cdot 6+1\cdot 4=16$ farklı seçim yapılabilir.

11. ÖRNEK

“KARADENİZ” kelimesinin harflerinden oluşan bir kümeden sessiz harflerden 3 ü ve sesli harflerden 2 si kullanılarak 5 harfli anlamlı ya da anlamsız kaç kelime yazılabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

“KARADENİZ” kelimesinin harflerinden oluşan küme $A=\{K,R,D,N,Z\}\cup\{A,E,İ\}$ şeklindedir.

Buna göre 5 sessiz harften 3 tanesinin seçimi $\binom{5}{3}$

3 sesli harften 2 tanesinin seçimi $\binom{3}{2}$ ile bulunur. Ayrıca seçilen 5 harfin kendi aralarındaki dizilişlerinin sayısı $P(5,5)$ olduğundan

$\binom{5}{3}\cdot\binom{3}{2}\cdot P(5,5)=10\cdot 3\cdot 5!=3600$ tane 5 harfli kelime yazılabilir.

12. ÖRNEK

On basamaklı 1 122 233 333 sayısının rakamlarının yerleri değiştirilerek yazılabilen on basamaklı sayıların kaç tanesinde herhangi iki tane 2 nin yan yana olmadığını bulunuz.

ÇÖZÜM

2 dışındaki 1, 1, 3, 3, 3, 3, 3 rakamları kullanılarak yazılabilecek 7 basamaklı sayılar tekrarlı permütasyon ile

$P(7;2,5)=\dfrac{7!}{2!\cdot 5!}=21$ bulunur.

_1_1_3_3_3_3_3_ ifadesinde rakamları arasında herhangi ikisi yan yana gelmeyen üç tane 2 rakamının yazılabileceği aralık sayısı 8 dir. Bu 8 aralıktan herhangi üçü

$\binom{8}{3}=\dfrac{8!}{(8-3)!\cdot 3!}=56$ farklı şekilde seçilebilir.

Saymanın çarpma ilkesi gereğince $21\cdot 56=1176$ adet 10 basamaklı sayı yazılabilir.

13. ÖRNEK

Bir okulun 10/A sınıfı öğrencileri ihtiyaç sahiplerine dağıtılması için gıda kolisi hazırlamışlardır. Bu kolilerin dağıtımı için gönüllü olan 5 öğrenciden 3 ü A mahallesinde, diğer 2 si B mahallesinde belirlenen kişilere gıda kolilerini dağıtacaklardır. Bu 5 öğrenci arasından üçer ve ikişer kişilik kaç farklı grup oluşturulabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

5 öğrenciden önce 3 kişi, daha sonra kalan 2 öğrenciden 2 kişi seçilir. Bu seçimler

$\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{2}=10\cdot 1=10$ farklı şekilde yapılabilir.

14. ÖRNEK

Bir sporcu kafilesinde bulunan Ayhan, Berna, Cemil ve Didem isimli öğrencilerin

a) İkişer kişilik Ay ve Yıldız isimli iki takıma kaç farklı şekilde seçilebileceklerini bulunuz.

b) Bu kişilerin ikişer kişilik 2 takıma kaç farklı şekilde ayrılabileceklerini bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Ay takımına 4 öğrenci arasından 2 öğrenci ve geriye kalan 2 öğrenci arasından Yıldız takımına 2 öğrenci seçilir. Bu durumda

$\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = 6 \cdot 1 = 6$ farklı şekilde seçilebilir.

b) Oluşturulabilecek takımlar

$$\left.\begin{matrix}\{A,B\} \to \{C,D\} \\ \{C,D\} \to \{A,B\}\end{matrix}\right\} 1.\text{durum}$$
$$\left.\begin{matrix}\{A,C\} \to \{B,D\} \\ \{B,D\} \to \{A,C\}\end{matrix}\right\} 2.\text{durum}$$
$$\left.\begin{matrix}\{A,D\} \to \{B,C\} \\ \{B,C\} \to \{A,D\}\end{matrix}\right\} 3.\text{durum}$$

şeklindedir.

1. durumda gösterilen takım isimleri belli olmadığından bu dağılımlar aslında özdeş dağılımlardır. 2 ve 3. durumda da özdeş dağılımlar gerçekleşmiştir.

4 kişi içerisinden 2 kişi $\binom{4}{2}$, geriye kalan 2 kişi içerisinden 2 kişi $\binom{2}{2}$ farklı şekilde seçilir. Çarpma kuralı gereği $\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = 6$ tanedir. Yukarıda da görüldüğü gibi önceden seçilen iki kişi sonradan da seçilmiş olacağından aynı gruplama $2!$ defa sayılmış olur. O hâlde 4 kişi isimsiz ikişer kişilik 2 gruba

$\dfrac{\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}}{2!} = 3$ farklı şekilde ayrılabilir.

15. ÖRNEK

$a > b \geq c$ koşulunu sağlayan üç basamaklı kaç farklı abc sayısı yazılabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Rakamlar kümesinin üç elemanlı her alt kümesi $a > b > c$ koşulunu sağlar. Bunların sayısı $\binom{10}{3}$ tanedir.

Aynı düşünceyle rakamlar kümesinin iki elemanlı her alt kümesi $a > b = c$ koşulunu sağlar. Bunların sayısı ise $\binom{10}{2}$ tanedir.

Buna göre

$$\binom{10}{2} + \binom{10}{3} = \binom{11}{3}$$
$$= 165 \text{ olur.}$$

Bilgi

Düzlemde

- İki noktadan yalnız bir doğru geçer.
- Herhangi üçü doğrusal olmayan n tane nokta ile $\binom{n}{2}$ tane doğru çizilebilir.
- $3 \leq r \leq n$ olmak üzere herhangi üçü doğrusal olmayan n tane nokta ile $\binom{n}{3}$ tane üçgen, $\binom{n}{4}$ tane dörtgen, ..., $\binom{n}{r}$ tane r gen çizilebilir.

16. ÖRNEK

Düzlemde bulunan farklı 10 doğrunun en çok kaç noktada kesişebileceğini bulunuz.

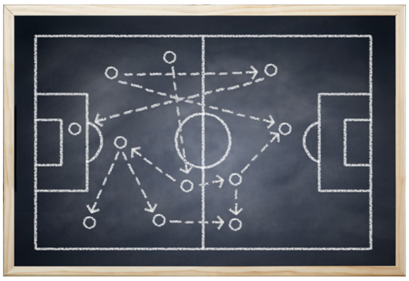
ÇÖZÜM

Doğrular birbirinden farklı olduğundan ya bir noktada kesişir ya da paralel olur. En çok kesişme sayısı istendiğinden doğrulardan herhangi ikisi paralel olmamalıdır.

10 doğrudan seçilen herhangi iki doğru 1 noktada kesişebileceğinden oluşabilecek en çok nokta sayısı

$\binom{10}{2} = 45$ olur.

17. ÖRNEK



Bir futbol takımının 11 oyuncusu, herhangi üçü doğrusal olmayacak şekilde futbol sahasında bulunmaktadır.

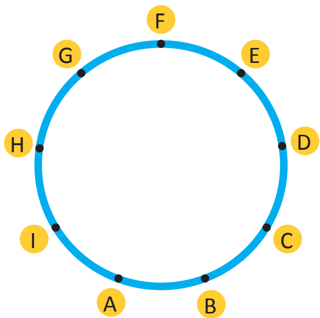
Bu 11 oyuncunun yerlerinde sabit kalması koşuluyla kaç farklı doğrusal paslaşma yapabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Düzlemde herhangi iki noktadan bir doğru geçtiği için herhangi iki futbolcu, kendi aralarında bir doğrusal paslaşma yapabilir. Buna göre 11 futbolcu kendi aralarında

$\binom{11}{2} = \dfrac{11 \cdot 10 \cdot \cancel{9!}}{\cancel{9!} \cdot 2!} = 55$ farklı paslaşma yapabilir.

18. ÖRNEK



Bir çember üzerinde birbirinden farklı 9 nokta işaretleniyor. Köşeleri bu noktalar olan kaç farklı üçgen çizilebileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Çember üzerindeki noktalar doğrusal olmadığından işaretli noktalardan herhangi üçü ile bir üçgen çizilebilir.

O hâlde çember üzerinde bulunan 9 noktadan

$\binom{9}{3} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!} \cdot 3!} = 84$ farklı üçgen çizilebilir.

19. ÖRNEK

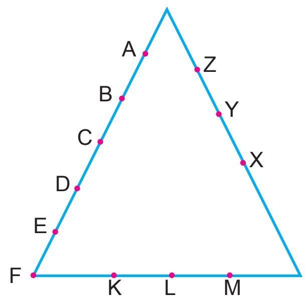
4 ü birbiriyle paralel olan, diğer 3 ü ise aynı noktadan geçen 12 doğrunun en çok kaç kesişme noktası olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Aynı noktadan geçen 3 doğrunun tek kesim noktası vardır. 4 paralel doğru hiçbir noktada kesişmez. Eğer doğrulardan 4 tanesi paralel olmasaydı $\binom{4}{2}$ tane nokta, doğrulardan 3 tanesi aynı noktadan geçmeseydi $\binom{3}{2}$ tane nokta elde edilecekti. Tüm durumlardan bu sayılar çıkarılır ve 3 doğrunun kesiştiği tek nokta eklenirse aranan kesişme noktası sayısı

$\binom{12}{2}-\binom{4}{2}-\binom{3}{2}+1=66-6-3+1=58$ olarak bulunur.

20. ÖRNEK



Şekildeki üçgen üzerinde 12 nokta verilmiştir.
Buna göre bu noktalardan herhangi üçünü köşe kabul eden kaç farklı üçgen çizilebileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

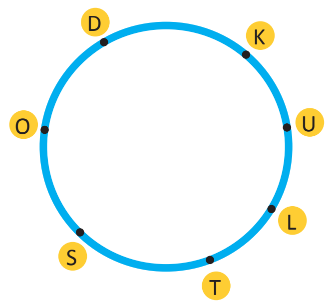
12 noktanın herhangi üçü doğrusal olmadığında $\binom{12}{3}$ tane üçgen çizilebilir. Ancak verilen üçgen üzerinde bulunan doğrusal noktalar üçgen oluşturmadığından

$\binom{12}{3}-\left[\underbrace{\binom{6}{3}}_{\{A,B,C,D,E,F\}}+\underbrace{\binom{4}{3}}_{\{F,K,L,M\}}+\underbrace{\binom{3}{3}}_{\{X,Y,Z\}}\right]=220-(20+4+1)=195$ tane üçgen çizilebilir.

Sıra Sizde

SORU

Şekildeki çember üzerinde verilen 7 noktayı köşe kabul eden en çok kaç farklı çokgen çizilebileceğini bulunuz.



ÇÖZÜM

21. ÖRNEK

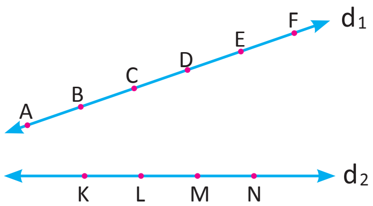
Birbirinden farklı 6 tane çemberin en çok kaç noktada kesişebileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Farklı iki çember en çok iki noktada kesişir. 6 çember arasından herhangi ikisi $\binom{6}{2} = 15$ farklı şekilde seçilebilir.

Her seçim için en çok iki kesişim noktası vardır. Bu durumda 6 çember en çok $\binom{6}{2} \cdot 2 = 15 \cdot 2 = 30$ farklı noktada kesişir.

22. ÖRNEK



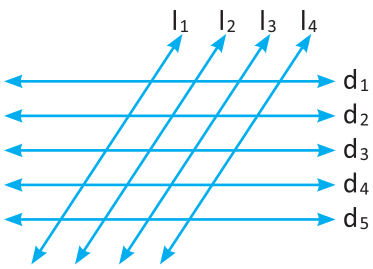
Şekilde d_1 doğrusu üzerinde 6 nokta, d_2 doğrusu üzerinde 4 nokta verilmiştir.
Köşeleri bu noktalardan seçilen kaç farklı üçgen çizilebileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

İki durum söz konusudur:
1. durum:
d_1 doğrusu üzerinden 1 nokta ve d_2 doğrusu üzerinden 2 nokta seçilirse $\binom{6}{1} \cdot \binom{4}{2}$ tane üçgen çizilebilir.
2. durum:
d_1 doğrusu üzerinden 2 nokta ve d_2 doğrusu üzerinden 1 nokta seçilirse $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1}$ tane üçgen çizilebilir.
Bu üçgenlerin sayısı

$$\begin{aligned}\binom{6}{1} \cdot \binom{4}{2} + \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1} &= 6 \cdot 6 + 15 \cdot 4 \\ &= 36 + 60 \\ &= 96 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

23. ÖRNEK



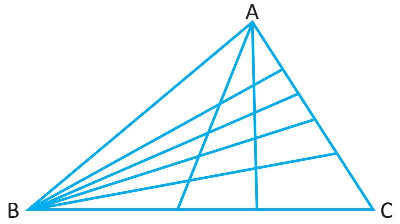
Aynı düzlemde birbirine paralel 5 doğru, birbirine paralel 4 doğru ile kesiştiğinde oluşabilecek paralelkenar sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

Yatay olan 5 doğrudan herhangi ikisi ve düşey olan 4 doğrudan herhangi ikisi alınırsa bir paralelkenar oluşur. Buna göre oluşabilecek paralelkenarların sayısı

$\binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} = 10 \cdot 6 = 60$ tane olur.

24. ÖRNEK



Şekildeki üçgen sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

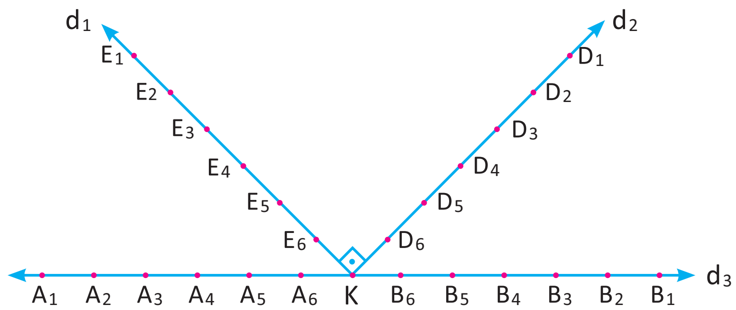
Düzlemde farklı üç doğrunun ikişer ikişer kesişmesiyle bir üçgen elde edilir. Şekilde 9 doğru bulunduğundan bunların oluşturacağı üçgen sayısı en çok

$\binom{9}{3}$ tanedir.

Ancak B noktasında kesişen 6 doğru ile $\binom{6}{3}$, A noktasında kesişen 4 doğru ile $\binom{4}{3}$ tane üçgen oluşmayacağından istenen üçgen sayısı

$\binom{9}{3}-\left[\binom{6}{3}+\binom{4}{3}\right]=84-(20+4)=84-24=60$ tane olur.

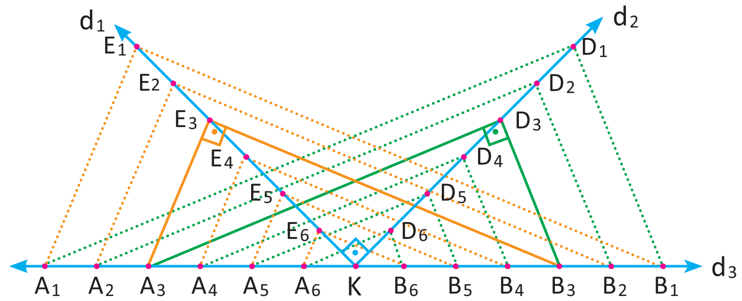
25. ÖRNEK



Şekilde d_1, d_2 ışını ve d_3 doğrusunda $d_1 \perp d_2$ ve $m(\widehat{A_1KE_1})=45^\circ$ olmak üzere 25 nokta eşit aralıklarla işaretlenmiştir.

Buna göre verilen noktalar kullanılarak en fazla kaç dik üçgen çizilebileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM



d_1 ışını üzerindeki 6 noktadan 1 tane, d_2 ışını üzerindeki 6 noktadan 1 tane seçilirse $6 \cdot 6 = 36$ tane dik köşesi K noktası olan dik üçgen çizilebilir.

Dik köşesi D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 ve D_6 noktaları olan dik üçgenler

$A_1D_1B_1, A_2D_2B_2, A_3D_3B_3, A_4D_4B_4, A_5D_5B_5, A_6D_6B_6$, 6 tanedir.

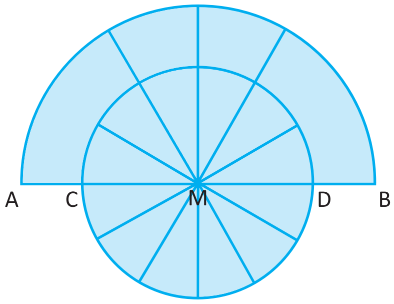
Dik köşesi E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 ve E_6 noktaları olan dik üçgenler

$A_1E_1B_1, A_2E_2B_2, A_3E_3B_3, A_4E_4B_4, A_5E_5B_5, A_6E_6B_6$, 6 tanedir.

Yukarıda çizilen üçgenlerde, örneğin $A_1D_1B_1$ üçgeninde $|A_1B_1| = 2 \cdot |KD_1|$ olduğundan $A_1D_1B_1$ bir dik üçgendir. Neden?

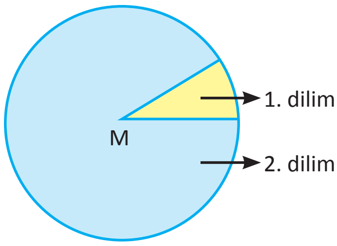
Buna göre $36+6+6=48$ tane dik üçgen çizilebilir.

26. ÖRNEK



Yandaki şekilde aynı M merkezli daire ve yarım daire verilmiştir. Buna göre şekildeki toplam daire dilimi sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM



M merkezli daire üzerinde 12 nokta vardır. Bu noktalardan herhangi ikisi M merkezi ile birleştirildiğinde iki daire dilimi oluşur.
Bu durumda oluşabilecek daire dilimi sayısı

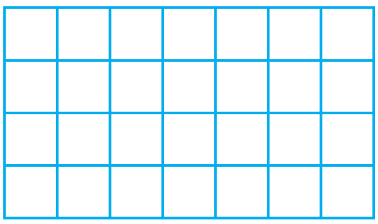
$2\cdot\binom{12}{2}$ tanedir.

AB çaplı yarım dairede ise 5 nokta olduğundan bu noktalardan herhangi ikisi M merkezi ile birleştirildiğinde bir daire dilimi oluşur.
Bu durumda oluşabilecek daire dilimi sayısı

$\binom{5}{2}$ tanedir.

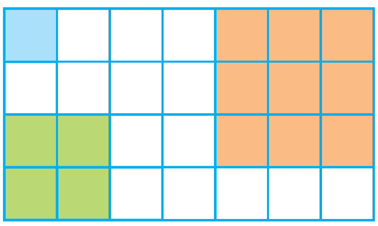
O hâlde şekildeki tüm daire dilimlerinin sayısı $2\cdot\binom{12}{2}+\binom{5}{2}=2\cdot 66+10=132+10=142$ tanedir.

27. ÖRNEK



Yandaki şekil $1\,cm^2$ lik 28 tane kareden oluşmaktadır.
Buna göre şekilde kare olmayan kaç dikdörtgen olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



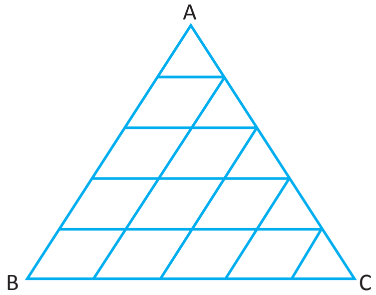
Şekildeki 5 yatay doğrudan herhangi ikisi ve 8 dikey doğrudan herhangi ikisi seçildiğinde bir dikdörtgen oluşur.

Bu dikdörtgenlerin sayısı $\binom{5}{2}\cdot\binom{8}{2}$ tanedir.

Ancak her kare aynı zamanda bir dikdörtgen olduğundan tüm dikdörtgenlerin sayısından kare sayısı çıkarılmalıdır.

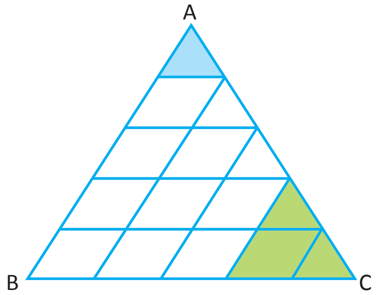
1x1 lik kare sayısı $7\cdot 4=28$
2x2 lik kare sayısı $6\cdot 3=18$ (Sol alt köşedeki yeşil renkli karenin sağa doğru birer kare kaydırılması ile 6 adet, yukarıya doğru birer kare kaydırılmasıyla 3 adet olmak üzere 18 adet kare oluşur.)
Benzer düşünceyle
3x3 lük kare sayısı $5\cdot 2=10$
4x4 lük kare sayısı $4\cdot 1=4$ tanedir.
Bu durumda kare olmayan dikdörtgen sayısı $\binom{5}{2}\cdot\binom{8}{2}-(28+18+10+4)=10\cdot 28-60=280-60$
$=220$ olur.

28. ÖRNEK



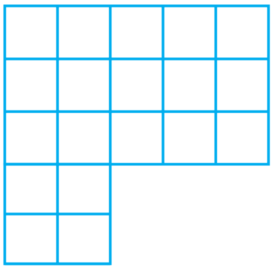
Yandaki ABC üçgeninin $[AB]$ ve $[BC]$ kenarlarına paralel doğrular çizilmiştir.
Buna göre oluşan şekilde kaç farklı üçgen olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



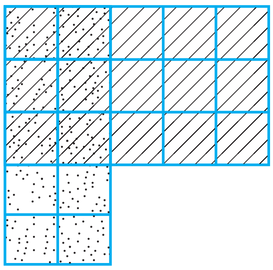
Şekilde oluşan tüm üçgenler, iki köşesi $[AC]$ kenarı üzerindeki 6 noktadan herhangi ikisi olan üçgenlerdir.
Bu durumda şekildeki üçgen sayısı
$\binom{6}{2} = 15$ tanedir.

29. ÖRNEK



Yanda verilen 1 birimlik karelerden oluşan şekilde kaç tane dikdörtgen olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Taralı bölge (T)

$s(T) = \binom{4}{2} \cdot \binom{6}{2} = 6 \cdot 15 = 90$ adet dikdörtgenden,

Noktalı bölge (N)

$s(N) = \binom{3}{2} \cdot \binom{6}{2} = 3 \cdot 15 = 45$ adet dikdörtgenden oluşmaktadır.

Buna göre şekildeki birim karelerden oluşan dikdörtgen sayısı

$$\begin{aligned} s(T \cup N) &= s(T) + s(N) - s(T \cap N) \\ &= \binom{4}{2} \cdot \binom{6}{2} + \binom{3}{2} \cdot \binom{6}{2} - \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{2} \\ &= 90 + 45 - 18 \\ &= 135 - 18 \\ &= 117 \text{ olur.} \end{aligned}$$

ALIŞTIRMALAR-3

1. $P(n,4) = 12 \cdot C(n,3)$ olduğuna göre n değerini bulunuz.

2. $\dfrac{P(n,2)+C(n,0)+C(n,1)}{P(n,1)} = \dfrac{26}{n}$

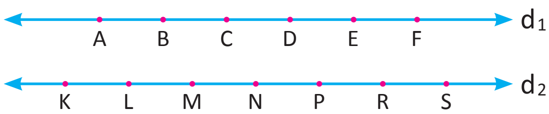
olduğuna göre $\binom{n}{3}$ değerini bulunuz.

3. $\binom{16}{5} = \binom{16}{3n-10}$ olduğuna göre n nin alabileceği değerler çarpımını bulunuz.

4. 15 kişilik 10/A sınıfından bilgi ve genel kültür yarışması için 4 yarışmacı seçilecektir. Erdem yarışma ekibinde kesin olarak bulunacağına ve Merve bulunmayacağına göre yarışma ekibinin kaç farklı şekilde seçilebileceğini bulunuz.

5. Her tarlaya en az bir tür fide gelecek şekilde 5 farklı meyve fidesinin iki farklı tarlaya dikimi yapılacaktır. Kaç farklı dikim yapılabileceğini bulunuz.

6.



Şekilde $d_1 \parallel d_2$ dir. d_1 doğrusu üzerinde verilen A, B, C, D, E, F ve d_2 doğrusu üzerinde verilen K, L , M, N, P, R, S noktaları ile köşeleri bu noktalardan herhangi üçü olan kaç farklı üçgen çizilebilir?

7. Bir çember üzerindeki 6 farklı nokta kullanılarak doğrular oluşturuluyor.

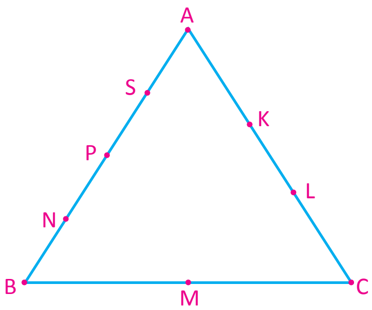
Bu doğrular, çemberin iç bölgesinde en çok kaç kesim noktası oluşturur?

8. Bir düzlemde 5 i doğrusal olan 10 nokta ile en çok kaç doğru çizilebileceğini bulunuz.

9. 5 elemanlı bir kümenin alt kümeleri arasından kesişimleri boş küme olan iki farklı küme seçilecektir.

Bu seçimin kaç farklı şekilde yapılabileceğini bulunuz.

10.



Şekildeki $\widehat{ABC}$ üzerinde verilen 9 noktayı köşe kabul eden kaç farklı üçgen çizilebileceğini bulunuz.

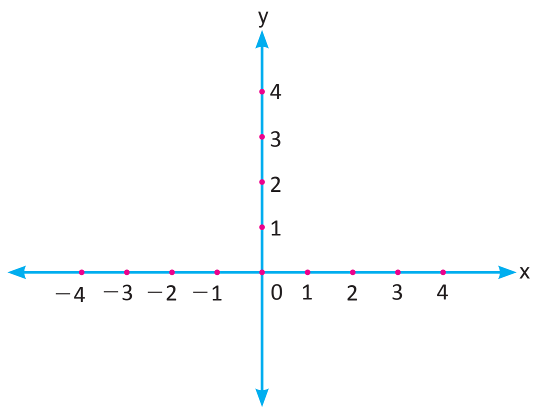
11. Bir öğretmen, öğrencilerine kitap hediye etmek istemektedir.

Buna göre elindeki 5 farklı kitabı 3 öğrencisinden her birine en az bir kitap vermek koşuluyla kaç farklı şekilde hediye edebilir?

12. Bir sınıftaki öğrenciler, 20 soruluk bir sınavda seçtikleri 10 soruyu cevaplandıracaklardır. Öğrenciler, ilk 8 sorudan <u>en az</u> 6 tanesini cevaplandırmak zorundadır.
Buna göre bir öğrencinin soruları cevaplandırmak için kaç farklı seçeneği vardır?

13. $A = \left\{3\sqrt{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{2}, 1, 0, \sqrt{3}, \sqrt{6}\right\}$
kümesinin 2 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde elemanlar çarpımı rasyoneldir?

14.



Yukarıdaki koordinat eksenleri üzerinde verilen 13 nokta ile köşeleri bu noktalardan herhangi üçü olan kaç farklı dik üçgen oluşturulabilir?

6. Pascal Üçgeni

Tanım

$x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x + y$ ifadesinin kuvvetleri alınırsa

$(x+y)^0 = 1$

$(x+y)^1 = 1 \cdot x + 1 \cdot y$

$(x+y)^2 = 1 \cdot x^2 + 2 \cdot xy + 1 \cdot y^2$

$(x+y)^3 = 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2y + 3 \cdot xy^2 + 1 \cdot y^3$

....

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} \cdot x^n y^0 + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} y + \ldots + \binom{n}{n} \cdot x^0 y^n$$

açılımları elde edilir. Bu açılımlardaki terimlerin katsayıları ortalanarak yazılırsa

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & & & \ldots & & & \end{array}$$

şeklindeki sayılardan oluşan üçgen elde edilir.
Bu üçgene **Pascal üçgeni** adı verilir.

1	$1 = 2^0$	1. satır	$\binom{0}{0}$
1 1	$1 + 1 = 2^1$	2. satır	$\binom{1}{0} + \binom{1}{1}$
1 2 1	$1 + 2 + 1 = 2^2$	3. satır	$\binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2}$
1 3 3 1	$1 + 3 + 3 + 1 = 2^3$	4. satır	$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3}$

Pascal üçgeninin her bir satırındaki sayıların toplamı, eleman sayısı satır numarasının 1 eksiği olan kümenin alt küme sayısını verir.

1. satır $A = \{\ \}$ kümesi için $s(A) = 0$ ve alt küme sayısı: $2^0 = 1$

2. satır $A = \{a\}$ kümesi için $s(A) = 1$ ve alt küme sayısı: $2^1 = 2$

3. satır $A = \{a, b\}$ kümesi için $s(A) = 2$ ve alt küme sayısı: $2^2 = 4$ olur.

Pascal üçgeninin $(n+1)$. satırındaki sayıların her biri eleman sayısı n olan kümenin 0 elemanlı, 1 elemanlı, 2 elemanlı, ..., n elemanlı alt küme sayısını verir.

Örneğin

4. satır $A = \{a, b, c\}$ kümesi için $s(A) = 3$ olur.

Alt küme sayısı $\rightarrow$ $2^3 = 8 = \underbrace{1}_{\binom{3}{0}} + \underbrace{3}_{\binom{3}{1}} + \underbrace{3}_{\binom{3}{2}} + \underbrace{1}_{\binom{3}{3}}$

$\binom{3}{0} = 1,$ A kümesinin 0 elemanlı alt küme sayısı

$\binom{3}{1} = 3,$ A kümesinin 1 elemanlı alt küme sayısı

$\binom{3}{2} = 3,$ A kümesinin 2 elemanlı alt küme sayısı

$\binom{3}{3} = 1,$ A kümesinin 3 elemanlı alt küme sayısı olduğuna dikkat ediniz.

Pascal üçgeninin $(n+1)$. satırındaki sayıların toplamı, eleman sayısı n olan kümenin alt küme sayısını verir.

Bu durumda $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$ bulunur.

Tanım

Pascal üçgeninin herhangi bir n. satırının r. sırasındaki sayı ile $(r+1)$. sırasındaki sayı toplanırsa Pascal üçgeninin $(n+1)$. satırının $(r+1)$. sırasındaki sayı elde edilir. Başka bir ifadeyle Pascal üçgeninin herhangi bir satırındaki ardışık iki sayının toplamı, takip eden satırda bu iki sayının ortasındaki sayıya eşittir.

$\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}=\binom{n+1}{r+1}$ olur. Bu eşitliğe **Pascal özdeşliği** denir.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

$1+2=3$ ya da $\binom{2}{0}+\binom{2}{1}=\binom{3}{1}$

$4+6=10$ ya da $\binom{4}{1}+\binom{4}{2}=\binom{5}{2}$

$4+1=5$ ya da $\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=\binom{5}{4}$ olur.

1. ÖRNEK

4 elemanlı bir kümenin alt küme sayılarını veren Pascal üçgeninin ilgili satırını yazarak satırda bulunan sayıların neyi ifade ettiğini belirtiniz.

ÇÖZÜM

n elemanlı bir kümenin alt küme sayısı bilgileri Pascal üçgeninin $(n+1)$. satırında bulunur. Bu durumda 4 elemanlı kümenin alt küme bilgileri Pascal üçgeninin 5. satırındadır.

1 4 6 4 1 → 5. Satır.

- 1 → 4 elemanlı kümenin 0 elemanlı alt küme sayısını
- 4 → 4 elemanlı kümenin 1 elemanlı alt küme sayısını
- 6 → 4 elemanlı kümenin 2 elemanlı alt küme sayısını
- 4 → 4 elemanlı kümenin 3 elemanlı alt küme sayısını
- 1 → 4 elemanlı kümenin 4 elemanlı alt küme sayısını ifade eder.

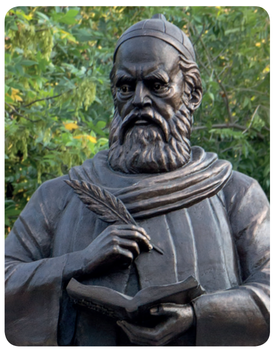
Tarih Köşesi

Ömer Hayyam (Görsel 1.1.2), 1048'de Nişabur'da doğmuştur. Öğrenimini ve hayatının büyük bir kısmını Nişabur ve Semerkant'ta geçirmiştir.

Hayyam, matematik tarihinde üçüncü dereceden denklemleri incelemiş ve sınıflandırmıştır. Ömer Hayyam, bunun dışında cebirde n bir pozitif tam sayı olduğunda $(a+b)^n$ ifadesinin açılımına ait terimlerin katsayılarını veren Pascal üçgenini, Pascal'dan önce bulan matematikçiler arasındadır. Bu sebeple Pascal üçgeni yerine Hayyam üçgeni ismi de kullanılmaktadır.

Pascal üçgeni üzerinde Ömer Hayyam'dan başka Hindistan, İran, Çin, İtalya ve İslam medeniyetlerindeki pek çok matematikçi ve düşünür de çalışmalar yapmıştır. Buradan da anlaşılacağı üzere matematiksel bilgi ve birikimin oluşması için birçok farklı kültürde yetişmiş bilim insanının katkısı olmuştur.

Kaynakça:
İslam Tarihi Ansiklopedisi Yıl: 2007, Cilt: 34



Görsel 1.1.2: Ömer Hayyam

7. Binom Açılımı

Binom Teoremi

$x, y \in \mathbb{R}; n, r \in \mathbb{N}; r \leq n$ olmak üzere

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} \cdot x^n y^0 + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} y^1 + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} y^2 + \ldots + \binom{n}{r} \cdot x^{n-r} y^r + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot x^0 y^n \text{ olur.}$$

Binom teoremindeki $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$ katsayıları Pascal üçgeninin $(n+1)$. satırındaki katsayılardır. Bunların sayısı $(n+1)$ tanedir.

Özellikler

1. $(x+y)^n$ ifadesinin açılımındaki terim sayısı $(n+1)$ tanedir.
2. $(x+y)^n$ ifadesinin açılımındaki katsayılar toplamı $x = 1$ ve $y = 1$ alınırsa
   $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$ eşitliği elde edilir.
3. $(x+y)^n$ ifadesinin açılımında sabit terim bulunurken $x = 0$ ve $y = 0$ (tanımsızlık yoksa) alınır.
4. $(x+y)^n$ ifadesinin açılımındaki her bir terimde x ile y nin kuvvetleri toplamı n ye eşittir.
   $\left(\binom{n}{r} \cdot x^{n-r} \cdot y^r\right.$ teriminde $\left. n - r + r = n \right)$
5. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(x+y)^{2n}$ ifadesinin açılımındaki ortanca terim $\binom{2n}{n} \cdot x^n y^n$ olur.
6. $(x+y)^n$ ifadesinin x in azalan kuvvetlerine göre açılımında baştan $(r+1)$. terim $\binom{n}{r} \cdot x^{n-r} \cdot y^r$ olur.

1. ÖRNEK

$(x+2y)^4$ ifadesinin açılımını bulunuz.

ÇÖZÜM

$(x+2y)^4$ ifadesinin açılımı

$$(x+2y)^4 = \binom{4}{0} \cdot x^4 \cdot (2y)^0 + \binom{4}{1} \cdot x^3 \cdot (2y)^1 + \binom{4}{2} \cdot x^2 \cdot (2y)^2 + \binom{4}{3} \cdot x^1 \cdot (2y)^3 + \binom{4}{4} \cdot x^0 \cdot (2y)^4$$

$$= 1 \cdot x^4 + 4 \cdot x^3 \cdot 2y + 6 \cdot x^2 \cdot 4y^2 + 4 \cdot x^1 \cdot 8y^3 + 1 \cdot 16y^4$$

$$= x^4 + 8x^3 y + 24x^2 y^2 + 32xy^3 + 16y^4 \text{ biçimindedir.}$$

2. ÖRNEK

$(2x-3)^3$ ifadesinin açılımını bulunuz.

ÇÖZÜM

$(2x-3)^3$ ifadesinin açılımı

$$(2x-3)^3 = (2x+(-3))^3 = \binom{3}{0} \cdot (2x)^3 (-3)^0 + \binom{3}{1} \cdot (2x)^2 \cdot (-3)^1 + \binom{3}{2} \cdot (2x)^1 (-3)^2 + \binom{3}{3} \cdot (2x)^0 (-3)^3$$

$$= 1 \cdot 8x^3 + 3 \cdot 4x^2 \cdot (-3) + 3 \cdot (2x) \cdot 9 + 1 \cdot (-27)$$

$$= 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 \text{ biçimindedir.}$$

3. ÖRNEK

$(3x-2y)^{12}$ ifadesinin açılımındaki terim sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

$(3x-2y)^{12}$ ifadesinin açılımında $n=12$ olduğundan terim sayısı $n+1=12+1=13$ bulunur.

4. ÖRNEK

$(2x-3y+z)^6$ ifadesinin açılımındaki terim sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

$(2x-3y+z)^6=\left[(2x-3y)+z\right]^6$ biçiminde yazılabilir. İfadenin Binom açılımı yapılırsa

$[(2x-3y)+z]^6=\binom{6}{0}\underbrace{(2x-3y)^6}_{7\ terim}z^0+\binom{6}{1}\underbrace{(2x-3y)^5}_{6\ terim}z^1+\binom{6}{2}\underbrace{(2x-3y)^4}_{5\ terim}z^2+\ldots+\binom{6}{6}\underbrace{(2x-3y)^0}_{1\ terim}z^6$ elde edilir.

($(x+y)^n$ açılımındaki terim sayısı $n+1$ olur.)

Buna göre $(2x-3y+z)^6$ ifadesinin açılımındaki terim sayısı

$7+6+5+4+3+2+1=\dfrac{7\cdot 8}{2}=28$ bulunur.

5. ÖRNEK

$(-2x+5y+4)^7$ ifadesinin açılımındaki

a) Katsayılar toplamını

b) Sabit terimi bulunuz.

ÇÖZÜM

a) $x=y=1$ alınırsa $(-2x+5y+4)^7$ açılımındaki katsayılar toplamı
$(-2\cdot 1+5\cdot 1+4)^7=(-2+5+4)^7=7^7$ bulunur.

b) $x=y=0$ alınırsa $(-2x+5y+4)^7$ açılımındaki sabit terim
$(-2\cdot 0+5\cdot 0+4)^7=(0+0+4)^7=4^7$ bulunur.

Sıra Sizde

SORU

$(mx-2y)^n$ ifadesinin açılımında 6 terim vardır. Bu ifadenin katsayılar toplamı -243 olduğuna göre n^m değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

6. ÖRNEK

$(3x-y)^7$ ifadesinin x in azalan kuvvetlerine göre açılımında baştan 4. terimi bulunuz.

ÇÖZÜM

$(x+y)^n$ ifadesinin x in azalan kuvvetlerine göre açılımında baştan $(r+1)$. terimi $\binom{n}{r}\cdot x^{n-r}\cdot y^r$ olduğundan $r+1=4 \Rightarrow r=3$ olur. Buradan
$(3x-y)^7$ ifadesinin x in azalan kuvvetlerine göre açılımında baştan 4. terimi

$$\begin{aligned}\binom{7}{3}\cdot(3x)^{7-3}\cdot(-y)^3 &= 35\cdot 3^4\cdot x^4\cdot(-y^3)\\ &= -35\cdot 81\cdot x^4\cdot y^3\\ &= -2835x^4y^3 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

7. ÖRNEK

$x=\sqrt[3]{5}+1$ olmak üzere x^3-3x^2+3x-2 ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

x^3-3x^2+3x-2 ifadesi düzenlenirse

$$\begin{aligned}x^3-3x^2+3x-2 &= \underbrace{x^3-3x^2+3x-1}_{(x-1)^3}-1\\ &= (x-1)^3-1 \text{ elde edilir.}\end{aligned}$$

Burada x yerine verilen değer yazıldığında bu değer

$$\begin{aligned}(x-1)^3-1 &= [(\sqrt[3]{5}+1)-1]^3-1\\ &= (\sqrt[3]{5}\cancel{+1}\cancel{-1})^3-1\\ &= 5-1\\ &= 4 \text{ olarak bulunur.}\end{aligned}$$

8. ÖRNEK

$\left(\frac{2x}{5}-3y\right)^6$ ifadesinin açılımında ortanca terimi bulunuz.

ÇÖZÜM

$2n=6$ olduğundan $n=3$ bulunur. Bu durumda ortanca terim

$$\begin{aligned}\binom{6}{3}\cdot\left(\frac{2x}{5}\right)^3\cdot(-3y)^3 &= 20\cdot\frac{2^3}{5^3}\cdot x^3\cdot(-3)^3\cdot y^3\\ &= -\frac{864}{25}x^3y^3 \text{ olarak bulunur.}\end{aligned}$$

9. ÖRNEK

$(5x+2x^3)^8$ ifadesinin 5x in azalan kuvvetlerine göre açılımında sondan 3. terimi bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen ifadede $n=8$ olduğundan açılımdaki terim sayısı 9 olur. Bu durumda ifadenin açılımında sondan 3. terim, baştan 7. terimdir. O hâlde sondan 3. terim

$\binom{8}{6}\cdot(5x)^{8-6}\cdot(2x^3)^6 = 28\cdot 25\cdot x^2\cdot 64\cdot x^{18} = 44\,800x^{20}$ olur.

10. ÖRNEK

$\binom{4}{0}4^4-\binom{4}{1}4^3+\binom{4}{2}4^2-\binom{4}{3}4^1+\binom{4}{4}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$\binom{4}{0}4^4-\binom{4}{1}4^3+\binom{4}{2}4^2-\binom{4}{3}4^1+\binom{4}{4}$ ifadesi Binom açılımına göre düzenlenirse

$\binom{4}{0}4^4 1^0-\binom{4}{1}4^3 1^1+\binom{4}{2}4^2 1^2-\binom{4}{3}4^1 1^3+\binom{4}{4}4^0 1^4$ şeklinde olup bu ifade

$\binom{4}{0}4^4 1^0-\binom{4}{1}4^3 1^1+\binom{4}{2}4^2 1^2-\binom{4}{3}4^1 1^3+\binom{4}{4}4^0 1^4=(4-1)^4$ Binom açılımıdır.

O hâlde verilen işlemin sonucu $3^4=81$ bulunur.

11. ÖRNEK

$(-3x^4+4y^2)^n = ...+k\cdot x^{12}\cdot y^{10}+....$ olduğuna göre $n\cdot k$ çarpımının sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

1. Yol

$k\cdot x^{12}\cdot y^{10}$ terimi baştan $(r+1)$. terim olarak alınırsa

$\binom{n}{r}\cdot(-3x^4)^{n-r}(4y^2)^r = k\cdot x^{12}\cdot y^{10}$ eşitliği yazılabilir. Bu eşitlik düzenlenirse

$\binom{n}{r}\cdot(-3)^{n-r}\cdot(x^4)^{n-r}\cdot 4^r\cdot(y^2)^r = k\cdot x^{12}\cdot y^{10} \Rightarrow \binom{n}{r}\cdot(-3)^{n-r}\cdot x^{4n-4r}\cdot 4^r\cdot y^{2r} = k\cdot x^{12}\cdot y^{10}$ elde edilir.

Buradan $k=\binom{n}{r}\cdot(-3)^{n-r}\cdot 4^r, 4n-4r=12, 2r=10$ eşitlikleri bulunur. O hâlde

$2r=10 \Rightarrow r=5$ ve $4n-4r=12 \Rightarrow 4n-4\cdot 5=12 \Rightarrow 4n=32 \Rightarrow n=8$ olur.

Bulunan n ve r değerleri yerine yazılırsa $k=\binom{8}{5}\cdot(-3)^{8-5}\cdot 4^5 = 56\cdot(-3)^3\cdot 4^5$ bulunur.

O hâlde $n\cdot k = 8\cdot[56\cdot(-3)^3\cdot 2^{10}] = -189\cdot 2^{16}$ olur.

2. Yol

$k\cdot x^{12}\cdot y^{10}$ teriminde x in üssü 12 olduğundan $(-3x^4)$ teriminin kuvveti 3 olmalıdır.

Benzer düşünceyle y nin üssü 10 olduğundan $(4y^2)$ teriminin kuvveti 5 olmalıdır. O hâlde

$k\cdot x^{12}\cdot y^{10} = \binom{3+5}{5}\cdot(-3x^4)^3\cdot(4y^2)^5$

$n=3+5=8$ bulunur. Buradan $k=\binom{8}{5}\cdot(-3)^3\cdot 4^5$ elde edilir. Buradan

$n\cdot k = 8\cdot\binom{8}{5}\cdot(-3)^3\cdot 4^5 = 8\cdot 56\cdot(-3)^3\cdot 4^5 = -189\cdot 2^{16}$ bulunur.

ALIŞTIRMALAR-4

1. $(3x-4y)^3$ ifadesinin açılımını bulunuz.

2. $(x+3y-2)^7$ ifadesinin açılımında sabit terimi ve katsayılar toplamını bulunuz.

3. $(2x-3y)^5 \cdot (a+3b-c)^7$ ifadesinin açılımındaki terim sayısını bulunuz.

4. $(3x^2-2y^3)^n$ ifadesinin x in azalan kuvvetlerine göre açılımında terimlerden biri $A \cdot x^4 \cdot y^9$ dir. Buna göre A değerini bulunuz.

5. $x=\sqrt[3]{5}-2$ olmak üzere $(x^3+6x^2+12x+8)^3$ ifadesinin değerini bulunuz.

6. Boş olmayan bir kümenin çift sayıda eleman içeren alt küme sayılarının toplamı ile tek sayıda eleman içeren alt küme sayılarının toplamının eşit olduğunu gösteriniz.

(İpucu: $(x+y)^n$ ifadesinin açılımında $x=1$ ve $y=-1$ alınız.)

7. 10^8-11^6 işlemi yapıldığında elde edilen sayının rakamları toplamını bulunuz.

8. $1+2+3+...+n$ toplama işleminin sonucunu Pascal özdeşliğini kullanarak n cinsinden bulunuz.

10.1.2. BASİT OLAYLARIN OLASILIKLARI

1. Temel Kavramlar

Olasılık, günlük yaşamın birçok alanında sıkça kullanılır. Meteorolojik hava tahminleri, ekonomik verilerin gerçekleşme durumu, millî savunma, temel bilimler ve sağlıkta olası gerçekleşmelerin yüzdesi vb. pek çok olay olasılık kavramı yardımıyla tahmin edilmeye çalışılır.

Olasılık, bir olayla ilgili gerçekleşmelerden yararlanarak gelecekte karşılaşılması muhtemel sonuçlara ulaşmak için doğru kararların alınmasında başvurulan bir kavramdır.

Basit anlamıyla olasılık, bir olayın gerçekleşmeden önce sonucunu tahmin etmenin sayılarla ifadesidir. Bir madenî paranın havaya atılması durumunda yazı ya da tura gelme oranı, bir tavla oyununda bir çift zarın istenen sayı ikilisinin gelme oranı gibi eylemlerin gerçekleşme durumudur.

Deney, Çıktı ve Örnek Uzay

Tanım

Önceden sonucu bilinmeyen olayların gerçekleşme durumlarına ilişkin veri toplama sürecine **deney** adı verilir. İçinde farklı renkte bilyeler bulunan bir torbadan bir bilyenin çekilmesi ve madenî paranın yazı tura için havaya atılması işlemlerinin her biri matematiksel deneylere birer örnektir.

Bir deney sonucunda karşılaşılabilecek olası tüm durumların her birine **çıktı** (örnek nokta) denir.

Deney sonucunda elde edilen bütün çıktıların kümesine ise **örnek uzay** (örneklem uzayı) adı verilir ve E ile gösterilir.

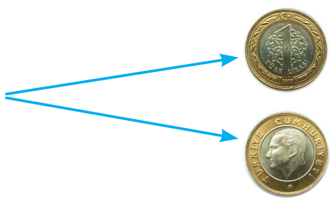
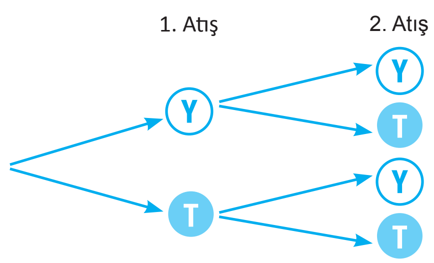
1. ÖRNEK

Madenî paranın bir kez havaya atılması, bir zarın bir kez atılması deneylerindeki çıktıları ve örnek uzayları yazınız.

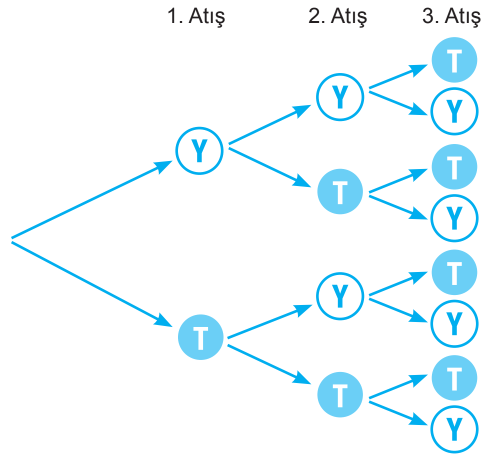
ÇÖZÜM

Deney	Çıktılar	Örnek Uzay
Madenî paranın bir kez havaya atılması	Tura (T), Yazı (Y)	$E=\{T,Y\}$
Zarın bir kez atılması	1, 2, 3, 4, 5, 6	$E=\{1,2,3,4,5,6\}$

Bir Madenî Paranın N Kez (n Tane Madenî Paranın) Havaya Atılması Deneyinde Örnek Uzayın Eleman Sayısı

a) 1 tane madenî paranın 1 kez havaya atılması deneyinde	b) 1 tane madenî paranın 2 kez havaya atılması deneyinde
	
Örnek Uzay: $E=\{T,Y\}, s(E)=2=2^1$	Örnek Uzay: $E=\{(Y,Y),(Y,T),(T,Y),(T,T)\}, s(E)=4=2^2$

c) 1 tane madenî paranın 3 kez havaya atılması deneyinde



Örnek Uzay:
$E=\{(Y,Y,Y),(Y,Y,T),(Y,T,Y),(T,Y,Y),(Y,T,T),(T,Y,T),(T,T,Y),(T,T,T)\}, s(E)=8=2^3$

Sonuç

n tane madenî paranın havaya atılması deneyinde örnek uzayın eleman sayısı 2^n dir.

n Tane Zarın Atılması Deneyinde Örnek Uzayın Eleman Sayısı

a) 1 tane zarın havaya atılması deneyinde

$1,2,3,4,5,6$

Örnek Uzay:
$E=\{1,2,3,4,5,6\}, s(E)=6=6^1$

b) 2 tane zarın havaya atılması deneyinde

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Örnek Uzay:
$E=\{(1,1),...,(1,6),...,(6,1),...,(6,6)\}, s(E)=36=6^2$

Sonuç

n tane zarın havaya atılması deneyinde örnek uzayın eleman sayısı 6^n olur.

Bir Örnek Uzayda Olay

Madenî paranın üç kez arka arkaya havaya atılması deneyinde örnek uzay

$E=\{(Y,Y,Y),(Y,Y,T),(Y,T\,Y),(T,Y,Y),(T,T,Y),(Y,T,T),(T,Y,T),(T,T,T)\}$ şeklindedir.

Deney sonucunda en çok bir kez yazı geldiği durumların kümesi

$A=\{(T,T,Y),(Y,T,T),(T,Y,T),(T,T,T)\}$ olur.

A kümesi, E örnek uzayının bir alt kümesidir.

Tanım

Bir E örnek uzayının her bir alt kümesine **olay** adı verilir.

$s(E)=8$ olduğundan E örnek uzayının $2^8=256$ tane farklı alt kümesi (olayı) yazılabilir.

2. ÖRNEK

Bir zarın atılması deneyinde zarın üst yüzüne gelen sayının

a) Tek sayı gelme olayını
b) Asal sayı gelme olayını liste yöntemi ile yazınız.

ÇÖZÜM

Bir zarın atılması deneyinde örnek uzay $E=\{1,2,3,4,5,6\}$ şeklindedir.

a) Zarın tek sayı gelme olayı A ise $A=\{1,3,5\}$ olur.
b) Zarın asal sayı gelme olayı B ise $B=\{2,3,5\}$ olur.

Bir Olayın Tümleyeni

Madenî paranın üç kez arka arkaya havaya atılması deneyinde en çok bir kez yazı geldiği durumların kümesi $A=\{(T,T,Y),(Y,T,T),(T,Y,T),(T,T,T)\}$, en çok bir kez yazı geldiği durumların kümesi $B=\{(Y,Y,Y),(Y,Y,T),(Y,T,Y),(T,Y,Y)\}$ olur. B kümesi, E örnek uzayının alt kümesi ve A kümesinin tümleyenidir. Bu durumda $A'=B$ olur.

Tanım

Bir E örnek uzayının istenen koşulları sağlayan alt kümesi dışında kalan elemanlarının kümesine **bir olayın tümleyeni** denir.

Kesin Olay

Madenî paranın üç kez arka arkaya havaya atılması deneyinde karşılaşılabilecek durumların kümesi
$E=\{(Y,Y,Y),(Y,Y,T),(Y,T\ Y),(T,Y,Y),(T,T,Y),(Y,T,T),(T,Y,T),(T,T,T)\}$ dir.

Tanım

Bir deney sonucunda gerçekleşmesi mümkün olan tüm durumların kümesine **kesin olay** denir. Kesin olayların olasılığı 1 dir.
Örneğin bir çift zarın atılması deneyinde üst yüze gelen sayılar toplamının 13 ten küçük olması olayı kesin olaydır.

İmkânsız Olay

Bir madenî paranın üç kez arka arkaya havaya atılması deneyinde dört kez yazı gelmesi olayı, gerçekleşmesi mümkün olmayan bir durumdur. Bu küme boş kümedir.

Tanım

Bir deney sonucunda gerçekleşmesi mümkün olmayan olaya imkânsız olay denir. İmkânsız olayın olasılığı 0 dır.
Bir zarın atılması deneyinde üst yüze gelen sayının 6 dan büyük olması imkânsız olaydır.

Ayrık Olaylar

Tanım

Bir E örnek uzayındaki A ve B şeklindeki iki olayın ortak elemanı yoksa ya da iki olayın aynı anda gerçekleşmesi mümkün değilse bu olaylara **ayrık olaylar** denir.

A ve B olayları ayrık olaylar ise $A\cap B=\emptyset$ olur.

$A\cap B\neq\emptyset$ ise A ve B olayları ayrık olmayan olaylardır.

3. ÖRNEK

Bir çift zarın atılması deneyinde zarların üst yüzlerine gelen sayıların

A: Çarpımlarının en çok 3 olma olayı
B: Eşit olma olayı
C: Toplamlarının en az 10 olma olayı şeklinde veriliyor.
Buna göre

a) A, B ve C olaylarını liste yöntemi ile yazınız.

b) A, B ve C olaylarından ayrık olanları ve ayrık olmayanları bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Zarların üst yüzlerine gelen sayıların çarpımlarının en çok 3 olma olayı
$A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1)\}$ şeklindedir.
Zarların üst yüzlerine gelen sayıların eşit olma olayı
$B = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$ şeklindedir.
Zarların üst yüzlerine gelen sayılar toplamının en az 10 olma olayı
$C = \{(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}$ şeklindedir.

b) $A \cap C = \emptyset$ olduğundan A ile C olayları ayrık olaylardır.
$A \cap B = \{(1,1)\}$ ve $B \cap C = \{(5,5),(6,6)\}$ olduğundan A ile B ve B ile C olayları ayrık olmayan olaylardır.

4. ÖRNEK

4 doktor, 5 hemşire arasından rastgele 3 kişilik sağlık ekibi seçilecektir. Buna göre

a) Örnek uzayın eleman sayısını
b) İkisinin doktor, birinin hemşire olduğu sağlık ekibini seçme olayının eleman sayısını
c) En az birinin doktor olduğu 3 kişilik sağlık ekibini seçme olayının eleman sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Hiçbir koşul olmadan 4 doktor, 5 hemşire arasından yani 9 kişi arasından 3 kişilik sağlık ekibi seçme işlemi yapılacağından örnek uzayın eleman sayısı

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{(9-3)! \cdot 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 3!} = 84 \text{ olur.}$$

b) Sağlık ekibinin ikisinin doktor, birinin hemşire olma olayının eleman sayısı
4 doktor arasından 2 doktorun seçimi $\binom{4}{2}$
5 hemşire arasından 1 hemşirenin seçimi $\binom{5}{1}$ farklı şekilde yapılabilir. Saymanın çarpma kuralı gereğince ikisi doktor, biri hemşire olan sağlık ekibi seçme olayının eleman sayısı

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{5}{1} = 6 \cdot 5 = 30 \text{ olur.}$$

c) Sağlık ekibinden en az bir kişinin doktor olma olayının eleman sayısı

$$\begin{aligned}\binom{4}{1} \cdot \binom{5}{2} + \binom{4}{2} \cdot \binom{5}{1} + \binom{4}{3} \cdot \binom{5}{0} &= 4 \cdot 10 + 6 \cdot 5 + 4 \cdot 1 \\ &= 40 + 30 + 4 \\ &= 74 \text{ olur.}\end{aligned}$$

2. Olasılık Hesabı

Özellikler

$A \subseteq E$ ve $B \subseteq E$ olmak üzere A olayının olasılığı $P(A)$, B olayının olasılığı $P(B)$ şeklinde gösterilir.

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ olur.
2. $P(E) = 1$ ve $P(\varnothing) = 0$ olur.
3. Bir olayın gerçekleşme olasılığı ile gerçekleşmeme olasılığı toplamı 1 olur.
   Yani $P(A) + P(A') = 1$
4. $A \subseteq B$ ise $P(A) \leq P(B)$ olur.

1. ÖRNEK

E örnek uzay, $A \subseteq E$ ve $P(A) = \frac{3}{4}$ olduğuna göre $P(A')$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Bir olayın gerçekleşme olasılığı ile gerçekleşmeme olasılığı toplamı 1 dir.

$P(A) + P(A') = 1$ özelliğinden

$\frac{3}{4} + P(A') = 1$

$P(A') = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ bulunur.

Tarih Köşesi

Yusuf el-Kindi (Görsel 1.2.1), sayı sistemi hakkında dört kitap yazmıştır ve modern aritmetiğin temelini atmıştır.

El-Kindi, dünya tarihindeki ilk şifre kırıcılardandır. Şifreleme biliminde Sezar tarafından bulunan ve uygulanan tek alfabeli, yerine koyma şifreleme yöntemini geliştirerek frekans analizini yapan ilk kişidir. MS 850 yılında "Şifrelenmiş Metinlerin Çözümlenmesi" adlı el yazması eserinde şifrelerin çözümlenmesi için Frekans Analizi Yöntemi'ni göstererek bilinen bütün şifreleme yöntemlerini kırılabilir hâle getirmiştir. Bu çalışmaları Süleymaniye Osmanlı Arşivi'nde bulunmaktadır. Bu yöntemde şifreli mesajların yazıldığı dildeki normal bir metinde her harfin kaç kez kullanıldığı sayılır (frekans). Örneğin Türkçede "A" binde 121, "B" ise binde 25 kez geçer. Ardından şifreli metindeki harflerin kaçar kez kullanıldığı bulunur. Şifreli metinde en çok kullanılan harf sayılarından metnin hangi dilde yazıldığı anlaşılır. O dildeki harflerin kullanım yüzdesinden şifreli metnin harf karşılıkları bulunup şifre kırılır.

Olasılığın tarihsel gelişim sürecine katkısı bulunan bir başka bilim insanı da Laplace'tır (Laplas). Laplace,"Theorie Analytique de Probabilities" (Tiori Analitik dö Probabiliti) adlı kitabı olasılık teorisinin ilk önemli eseridir. Laplace, olasılığı eşit ölçüde olabilir durumlar arasında ilgilenilen olayın gerçekleşen durumlara oranı biçiminde tanımlamıştır. Bulduğu matematik sonuçlarının birçoğunu astronomide de kullanmıştır. Olasılık kuramı üzerindeki çalışması da olasılığı astronomide kullanması sonucunda olmuştur.

Başarılarından dolayı 1773 yılında Paris İlimler Akademisine üye seçilmiş, böylece yaşamının ilk ödülünü almıştır.

Kaynakça:
users.metu.edu.tr/beyaz/304/sunumlar/FransizDevrimiDonemiveMatematik.pdf
ET: 31 Ekim 2017 ES:10.11

Görsel 1.2.1: Yusuf el-Kindi

Tanım

Bir deneye ait sonlu örnek uzay $E = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$ olsun.
Bu örnek uzayın her bir elemanının olasılıkları eşit ise yani $P(e_1) = P(e_2) = ... = P(e_n)$ ise bu E örnek uzayına **eş olumlu örnek uzay** denir. $A \subseteq E$ olmak üzere

$$P(A) = \frac{\text{İstenen durumların sayısı}}{\text{Tüm durumların sayısı}} = \frac{s(A)}{s(E)} \text{ olur.}$$

2. ÖRNEK

Bir torbada özdeş 4 kırmızı, 5 beyaz renkte bilye vardır. Bu torbadan rastgele çekilen bir bilyenin beyaz renkte olma olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Örnek uzayın eleman sayısı $s(E) = 4 + 5 = 9$ olur. Çekilen bilyenin beyaz renkte olması olayı B olsun.
O hâlde $s(B) = 5$ olur.

Bu durumda B olayının gerçekleşme olasılığı

$P(B) = \frac{s(B)}{s(E)} = \frac{5}{9}$ bulunur.

3. ÖRNEK

Hilesiz üç madenî paranın havaya atılması deneyinde

a) Birinin yazı, ikisinin tura gelme olasılığını
b) En az birinin yazı gelme olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Üç madenî paranın havaya atılması deneyinde örnek uzay
$E = \{(Y, Y, Y), (Y, Y, T), (Y, T Y), (T, Y, Y), (T, T, Y), (Y, T, T), (T, Y, T), (T, T, T)\}$ olup $s(E) = 8 = 2^3$ olur.

a) Birinin yazı, ikisinin tura gelme olayı B ise $B = \{(T, T, Y), (Y, T, T), (T, Y, T)\}$ biçimindedir. O hâlde

$P(B) = \frac{s(B)}{s(E)} = \frac{3}{8}$ olur.

b) En az birinin yazı gelme olayı C ise $C = \{(Y, Y, Y), (Y, Y, T), (Y, T, Y), (T, Y, Y), (T, T, Y), (Y, T, T), (T, Y, T)\}$ biçimindedir. O hâlde

$P(C) = \frac{s(C)}{s(E)} = \frac{7}{8}$ olur.

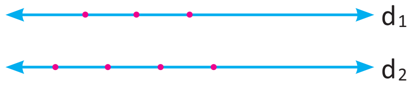
Sıra Sizde

SORU

Hilesiz bir çift zarın atılması deneyinde
a) Üst yüze gelen sayıların farklı olma olasılığını
b) Üst yüze gelen sayıların toplamının en çok 5 olma olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

4. ÖRNEK



Şekilde $d_1 \parallel d_2$ olmak üzere d_1 doğrusunda 3 nokta, d_2 doğrusunda 4 nokta vardır. Doğrular üzerinde bulunan 7 noktadan rastgele seçilen 3 noktanın üçgen oluşturma olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Seçilen üç nokta ile üçgen oluşabilmesi için doğruların birinden 2 nokta, diğerinden 1 nokta seçilmelidir.
Buna göre oluşabilecek üçgenlerin sayısına $s(A)$ denilirse

$$s(A)=\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{2}+\binom{3}{2}\cdot\binom{4}{1}=3\cdot 6+3\cdot 4=18+12=30 \text{ olur.}$$

Tüm durumların sayısı $s(E)=\binom{7}{3}=35$ olur.

Buna göre doğrular üzerinde bulunan 7 noktadan rastgele seçilen 3 noktanın üçgen oluşturma olasılığı

$$P(A)=\frac{s(A)}{s(E)}=\frac{30}{35}=\frac{6}{7} \text{ bulunur.}$$

5. ÖRNEK

4 mavi, 5 kırmızı ve 2 beyaz renkte özdeş boncuklar yan yana rastgele diziliyor.
Mavi boncukların yan yana gelme olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Bu deneyde örnek uzayın eleman sayısı $s(E)=\dfrac{11!}{4!\cdot 5!\cdot 2!}$ olur.

4 mavi boncuk bir grup olarak düşünülürse mavi boncukların yan yana gelme durumlarının sayısı $s(M)=\dfrac{8!}{5!\cdot 2!}$ olur. Bu durumda mavi boncukların yan yana gelme olasılığı

$$P(M)=\frac{s(M)}{s(E)}=\frac{\dfrac{8!}{\cancel{5!}\cdot\cancel{2!}}}{\dfrac{11!}{4!\cdot\cancel{5!}\cdot\cancel{2!}}}$$

$$=\frac{\cancel{8!}\cdot 4!}{11\cdot 10\cdot 9\cdot\cancel{8!}}=\frac{24}{11\cdot 10\cdot 9}=\frac{4}{165} \text{ bulunur.}$$

6. ÖRNEK

Köşeleri bir çember üzerindeki 7 farklı noktadan seçilen bir çokgenin beşgen olma olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Bir çokgenin oluşması için en az üç nokta gerekir. Bu durumda deneydeki örnek uzayın eleman sayısı

$$s(E)=\binom{7}{3}+\binom{7}{4}+\binom{7}{5}+\binom{7}{6}+\binom{7}{7}$$

$$=2^7-\left[\binom{7}{0}+\binom{7}{1}+\binom{7}{2}\right]$$

$$=128-(1+7+21)=99 \text{ olur.}$$

Çokgenin beşgen olma durumlarının sayısı $s(B)=\binom{7}{5}=21$ olur. Seçilen bir çokgenin beşgen olma olasılığı

$$P(B)=\frac{s(B)}{s(E)}=\frac{21}{99}=\frac{7}{33} \text{ bulunur.}$$

Tanım

Bir deneye ait sonlu örnek uzay $E = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$ olsun.
Bu örnek uzayın en az bir elemanının olasılığı diğerlerinden farklı ise bu E örnek uzayına **eş olumlu olmayan örnek uzay** denir.

7. ÖRNEK

Doruk, Rüzgâr, Serhat ve Bora'nın katıldığı bir kros yarışmasında Bora'nın yarışı kazanma olasılığı Doruk'un, Rüzgâr'ın yarışı kazanma olasılığı ise Serhat'ın iki katı; Doruk'un yarışı kazanma olasılığı Rüzgâr'ın dört katıdır. Buna göre Serhat'ın yarışı kazanma olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Bu yarışmada öğrencilerin yarışı kazanma olasılıkları $(k \in \mathbb{R}^+)$ olmak üzere

Doruk'un kazanma olasılığı: $P(D)$
Rüzgâr'ın kazanma olasılığı: $P(R)$
Serhat'ın kazanma olasılığı: $P(S)$
Bora'nın kazanma olasılığı: $P(B)$ olsun. $P(B) = 2 \cdot P(D)$, $P(R) = 2 \cdot P(S)$, $P(D) = 4 \cdot P(R)$ olduğundan
$P(R) = 2k$ alınırsa $P(D) = 8k$, $P(B) = 16k$, $P(S) = k$ olur. Buradan

$$P(E) = P(D) + P(R) + P(S) + P(B)$$
$$1 = 8k + 2k + k + 16k$$
$$1 = 27k$$
$$k = \frac{1}{27} \text{ bulunur.}$$

Buradan Serhat'ın yarışmayı kazanma olasılığı

$$P(S) = \frac{1}{27} \text{ olur.}$$

8. ÖRNEK

Hileli bir zar atıldığında herhangi bir sayının üst yüze gelme olasılığı, kendisinin karesi ile doğru orantılıdır. Buna göre bu hileli zar bir kez atıldığında üst yüze asal sayı gelme olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Bu deneyde atılan zar hileli olduğundan $(k \in \mathbb{R}^+)$ üst yüze

1 gelme olasılığı: $P(\{1\}) = 1^2 \cdot k = k$
2 gelme olasılığı: $P(\{2\}) = 2^2 \cdot k = 4k$
3 gelme olasılığı: $P(\{3\}) = 3^2 \cdot k = 9k$
4 gelme olasılığı: $P(\{4\}) = 4^2 \cdot k = 16k$
5 gelme olasılığı: $P(\{5\}) = 5^2 \cdot k = 25k$
6 gelme olasılığı: $P(\{6\}) = 6^2 \cdot k = 36k$ biçimindedir. Bu olaylar ayrık ve zarda 6 tane yüz olduğundan

$$P(E) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\})$$
$$1 = k + 4k + 9k + 16k + 25k + 36k$$
$$1 = 91k \Rightarrow k = \frac{1}{91} \text{ bulunur.}$$

Buna göre hileli zar bir kez atıldığında üst yüze asal sayı gelme olasılığı ayrık olayların olasılığından

$$P(\{2\} \cup \{3\} \cup \{5\}) = P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{5\})$$
$$= 4k + 9k + 25k$$
$$= 38k$$
$$= 38 \cdot \frac{1}{91} = \frac{38}{91} \text{ bulunur.}$$

9. ÖRNEK

5 gönüllü öğrenci kendi çabalarıyla Zehra Hanım'ın bahçesine fidan dikmeye gitmişlerdir.
Aşağıda bulunanTablo 1'de öğrencilerin isimleri ve yaşları, Tablo 2'de de fidan türü ve adedi verilmektedir.

Tablo 1

İsim	Yaş
Merve	8
Ahmet	12
Burak	9
Zeynep	11
Çetin	10

Tablo 2

Fidan türü	Adet
Elma	30
Erik	15
Kayısı	10
Kiraz	45

Öğrenciler yaşları ile orantılı sayıda fidan dikmişlerdir. Bu fidanları, Zehra Hanım rastgele sulamıştır.
Buna göre
a) Sulanan ilk fidanın Merve'nin diktiği fidan olma olasılığını bulunuz.
b) Sulanan ilk fidanın kiraz olma olasılığını bulunuz.
c) Sulanan ilk iki fidanın ikisinin de Burak ve Zeynep'in diktiği fidanlardan olmama olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Tablo 2'ye göre fidan sayısı $30+15+10+45=100$ olur.
M, A, B, Z ve Ç öğrencilerin diktikleri fidan sayısı olmak üzere ve öğrenciler yaşları ile doğru orantılı olacak şekilde fidan diktiğinden

$\frac{M}{8}=\frac{A}{12}=\frac{B}{9}=\frac{Z}{11}=\frac{Ç}{10}=k$ orantısı yazılır.

Buradan $M=8k, A=12k, B=9k, Z=11k$ ve $Ç=10k$ elde edilir. Buna göre

$$8k+12k+9k+11k+10k=100$$
$$50k=100$$
$$k=2 \text{ bulunur.}$$

Buradan öğrencilerin diktikleri fidan sayıları

$M=8\cdot 2=16$
$A=12\cdot 2=24$
$B=9\cdot 2=18$
$Z=11\cdot 2=22$ ve
$Ç=10\cdot 2=20$ bulunur. Buna göre

a) Sulanan ilk fidanın Merve'nin diktiği fidan olma olayına A olayı denilirse

$P(A)=\frac{s(A)}{s(E)}=\frac{16}{100}=\frac{4}{25}$ bulunur.

b) Sulanan ilk fidanın kiraz olma olayına B olayı denilirse

$P(B)=\frac{s(B)}{s(E)}=\frac{45}{100}=\frac{9}{20}$ bulunur.

c) Sulanan ilk iki fidanın ikisinin de Burak ve Zeynep'in diktiği fidanlardan olmama olayına C denilirse Burak ve Zeynep'in diktiği fidanların sayısı $18+22=40$ olur. Buradan

$P(C)=\frac{s(C)}{s(E)}=\frac{100-40}{100}=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$ bulunur.

ALIŞTIRMALAR-5

1. Beş madenî para birlikte havaya atılıyor. Bu beş madenî paranın en az birinin tura gelme olasılığını bulunuz.

2. 4 matematik, 3 fizik, 2 kimya kitabı bir rafa dizilecektir. Aynı türden kitapların yan yana olma olasılığını bulunuz.

3. Bir kişi 1 adımda 1, 2 veya 3 merdiven basamağı çıkabilmektedir. Bu kişinin 5 basamaklı bir merdiveni 2 adımda çıkma olasılığını bulunuz.

4. Rastgele yazılan iki basamaklı bir doğal sayının rakamlarının asal sayı olma olasılığını bulunuz.

5. Bir torbada 4 kırmızı ve 5 mavi özdeş bilye vardır. Bu torbadan rastgele seçilen 3 bilyeden birinin kırmızı, diğer ikisinin mavi olma olasılığını bulunuz.

6. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin elemanlarıyla yazılabilecek rakamları farklı 3 basamaklı abc doğal sayıları kâğıtlara yazılıp bir torbaya atılıyor. Rastgele seçilen bir kâğıdın üzerinde yazan sayının rakamlarının $a < b < c$ biçiminde olma olasılığını bulunuz.

7. 4 doktor, 3 hemşire arasından rastgele seçilen iki kişiden birinin doktor, diğerinin hemşire olma olasılığını bulunuz.

8. 4 kız, 4 erkek yan yana dizilerek fotoğraf çektireceklerdir. Dizilişte herhangi iki kızın yan yana gelmeme olasılığını bulunuz.

9. Renkleri farklı 5 çift terliğin bulunduğu bir kutudan rastgele çekilen iki terliğin birbirinin eşi olma olasılığını bulunuz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A) 1-5. sorularda boş bırakılan yerleri uygun olacak şekilde doldurunuz.

1. 4 beyaz, 3 kırmızı ve 6 sarı özdeş topun bulunduğu bir torbadan <u>en az</u> .... top çekilirse her üç renkten birer top <u>kesinlikle</u> çekilmiş olur.

2. 12 atletin yarıştığı 1000 m koşusunda ilk 2 derece .... farklı şekilde oluşur.

3. Olasılığı 1 olan olaylara .... denir.

4. İki zar atılması deneyinde üst yüze gelen sayılardan birinin tek, diğerinin çift gelme olasılığı .... olur.

5. $(2x-3)^8$ ifadesinin açılımındaki terim sayısı .... olur.

B) 6. soruda numaralarla verilen ifadeleri, harf ile verilen sayılarla doğru şekilde eşleştiriniz.

6.

İfade	No
$C(6,2)$	1
$P(5,3)$	2
$C(8,7)$	3
$\dfrac{6!}{5!+4!}$	4

Harf	Sayı
a	8
b	5
c	15
ç	10
d	60
e	30

C) 7-10. açık uçlu soruların cevaplarını boş bırakılan alanlara yazınız.

7. $\dfrac{48}{P(n,3)}-\dfrac{1}{C(n,2)}=\dfrac{2}{P(n,1)}$ olduğuna göre n değerini bulunuz.

8. Aralarında Ali ile Betül'ün bulunduğu 6 kişi yan yana sıralanacaktır.
Ali ile Betül arasında sadece 3 kişi bulunmak koşuluyla bu 6 kişinin bir sıra boyunca kaç farklı şekilde sıralanabileceğini bulunuz.

9.

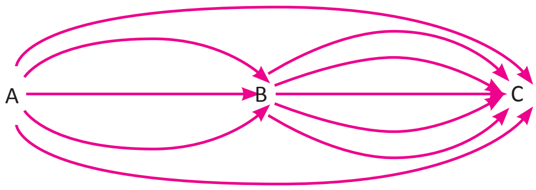
```
    S
  E   E
V   V   V
  G   G
    İ
    S
  A   A
Y   Y   Y
  G   G
    I
```

Yandaki şekilde yukarıdan aşağıya doğru komşu harfler takip edilerek "SEVGİ, SAYGI" kelimelerinin kaç farklı şekilde okunabileceğini bulunuz.

10. 1 adımda 1 veya 2 merdiven basamağı çıkabilen bir kişinin, 6 basamaklı bir merdiveni kaç farklı şekilde çıkabileceğini bulunuz

Ç) 11-32. çoktan seçmeli soruları okuyunuz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

11.



A şehrinden B şehrine 3, B şehrinden C şehrine 5 ve A şehrinden C şehrine 2 farklı yol vardır.

Buna göre gidişte kullanılan herhangi bir yol, dönüşte tekrar kullanılmamak koşuluyla A dan C ye kaç farklı yoldan gidilip dönülebilir?

A) 128 B) 180 C) 182 D) 190 E) 192

12. Boyları birbirinden farklı 5 öğrenci birlikte fotoğraf çektirmek istiyor.

Bu öğrenciler, en uzun boylu öğrenci sol başta ve en kısa boylu öğrenci sağ başta olmayacak şekilde kaç farklı biçimde fotoğraf çektirebilir?

A) 48 B) 60 C) 108 D) 114 E) 120

13. 3 farklı fizik ve 4 farklı kimya kitabı sıra hâlinde bir rafa dizilecektir.

Fizik veya kimya kitaplarının birbirinden ayrılmaması koşuluyla bu kitaplar kaç farklı şekilde dizilebilir?

A) $2! \cdot 3! \cdot 4!$ B) $3 \cdot 3! \cdot 4!$ C) $5 \cdot 3! \cdot 4!$ D) $6 \cdot 3! \cdot 4!$ E) $7 \cdot 3! \cdot 4!$

14. Rakamları çarpımı 2, rakamları toplamı 222 olan kaç farklı doğal sayı yazılabileceğini bulunuz.

A) 111 B) 220 C) 221 D) 222 E) 242

15. Anne, baba ve 4 çocuktan oluşan bir aile; çocukların hepsi yan yana <u>olmamak</u> koşuluyla yuvarlak bir masa etrafında kaç farklı şekilde oturabilir?

A) 24 B) 36 C) 60 D) 72 E) 96

16. $\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+...+\binom{n}{n}=1024$

eşitliğini sağlayan n sayısı kaçtır?

A) 9 B) 11 C) 13 D) 15 E) 17

17. Bir fakültede 10 seçmeli dersin 4 ü aynı saatte okutulmaktadır.

Bir öğrenci, bu derslerden 3 ünü kaç farklı şekilde seçebilir?

A) 50 B) 80 C) 100 D) 120 E) 160

18. Farklı renkteki 5 futbol topu, her bir çocuğa en az 1 tane futbol topu verilmesi koşuluyla 3 çocuğa kaç farklı şekilde dağıtılabilir?

A) 120 B) 150 C) 180 D) 240 E) 300

19. 6 öğrencinin her biri grupta olmak ve her grupta en az bir kişi bulunması koşuluyla iki gruba kaç farklı şekilde ayrılabilir?

A) 15 B) 31 C) 32 D) 61 E) 62

20. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinin 4 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde herhangi iki asal sayı birlikte bulunur?

A) 12 B) 18 C) 21 D) 24 E) 35

21. $(x - 2y)^9 = ... + A \cdot x^5 \cdot y^4 + ...$ olduğuna göre A kaçtır?

A) -2018 B) -2016 C) 2016 D) 2018 E) 2023

22. $(x - 2)^3 \cdot (2x + 1)^5$ ifadesinin açılımında x^3 lü terimin katsayısı kaçtır?

A) -274 B) -222 C) -219 D) 219 E) 222

23. $(x + 2y + 3z)^n$ ifadesinin açılımında terim sayısı 45 olduğuna göre n kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

24. $\binom{5}{0}x^5 - 2 \cdot \binom{5}{1}x^4 + 4 \cdot \binom{5}{2}x^3 - ... - 32 \cdot \binom{5}{5}$

ifadesinin $x = \sqrt[5]{3} + 2$ için değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

25. Pascal üçgeninin 2017. satırının baştan 3. terimi kaçtır?

A) $\binom{2017}{3}$ B) $\binom{2016}{3}$ C) $\binom{2017}{2}$ D) $\binom{2016}{1}$ E) $\binom{2016}{2}$

26. Haftanın günlerinin yazılı olduğu kağıtlardan iki tanesi rastgele seçiliyor.

Seçilen bu kağıtlardan birinin P harfi ile diğerinin C harfi ile başlayan gün olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{14}$ B) $\frac{1}{7}$ C) $\frac{3}{14}$ D) $\frac{2}{7}$ E) $\frac{3}{7}$

27. 1 den 60 a kadar olan doğal sayılar arasından rastgele seçilen bir sayının 60 ile aralarında asal sayı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{3}{20}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{4}{15}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{8}{15}$

28. 4 madenî para havaya atılıyor. En çok birinin tura gelme olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{16}$ B) $\frac{3}{16}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{5}{16}$ E) $\frac{3}{4}$

29. 4 evli çift arasından rastgele seçilen 2 kişinin evli çiftlerden biri olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{11}{28}$ D) $\frac{6}{7}$ E) $\frac{13}{14}$

30. $A=\{a,b,c,d,e\}$ kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinden biri rastgele seçiliyor.

Seçilen kümenin içinde c elemanının bulunma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{7}{10}$

31. $(x+y)^5$ ifadesinin açılımındaki terimlerden iki tanesi rastgele seçiliyor.

Seçilen terimlerin katsayıları toplamının 15 olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{4}{15}$ D) $\frac{11}{12}$ E) $\frac{23}{24}$

32. 5 farklı kalemin boyları sırası ile 4, 5, 7, 9 ve 13 birimdir.

Bu kalemlerden herhangi üçü seçildiğinde seçilen kalemlerle üçgen oluşturma olasılılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{4}{5}$

33. Bir sınıftaki öğrencilerin $\frac{2}{5}$ si matematik dersinden kalmıştır. Matematik dersinden geçen öğrencilerin de %60 ı fizik dersinden kalmıştır.

Buna göre bu sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin her iki dersten de geçmiş olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{3}{25}$ B) $\frac{3}{20}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{6}{25}$ E) $\frac{2}{5}$

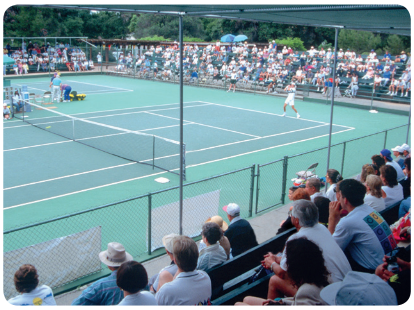
D) 34-36. soruları aşağıda verilen ortak metne göre cevaplandırınız.

Pamukkale'de bir tenis turnuvası düzenlenmektedir. Turnuvanın şartları şu şekilde açıklanıyor:

a) Maçlar tek maç üzerinden eleme usulü ile oynanacaktır. Kazananlar arasındaki eşleşme kura ile belirlenecektir.

b) Final maçı 5 set, diğer maçlar ise 3 set üzerinden oynanacaktır.

c) 3 setlik oyunlarda 2 set, 5 setlik oyunlarda 3 set alan oyuncu maçı kazanır.



34. Turnuvaya 32 sporcu katıldığına göre yarı final maçlarına kadar toplam kaç maç oynanacağını bulunuz.

35. Yarı finale A, B, C ve D kişilerinin katılacağı düşünülürse bu 4 kişinin kaç farklı şekilde eşleşebileceğini bulunuz.

36. Yarı final maçlarından birinin A ile B kişileri arasında oynanması hâlinde setlerin kaç farklı şekilde sonuçlanabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

E) 37-39. soruları aşağıda verilen ortak metne göre cevaplandırınız.

Ayşe ile Fatma, yandaki tablolarda sayıları verilen çikolata ve çiçekleri alarak huzurevine bayram ziyaretine gitmişlerdir.

Ziyaret sonrasında da günün anısına seçilen 8 kişiyle toplu olarak fotoğraf çektirmişlerdir.

Huzurevindeki 75 kişiye 1 çiçek ve 1 çikolata rastgele dağıtılıyor. Buna göre

Çikolata	Adet
Fındıklı	20
Bademli	15
Sütlü	10
Bitter	30

Çiçek	Adet
Karanfil	25
Gül	30
Papatya	20

37. Huzurevi sakinlerinden seçilen herhangi birinin bademli çikolata alma olasılığını bulunuz.

38. Huzurevi sakinlerinden seçilen herhangi birinin gül almama olasılığını bulunuz.

39. Fotoğraf çekiminde ziyaretçilerden Ayşe ile Fatma'nın kenarlarda olmak koşuluyla kaç farklı şekilde fotoğraf çektirebileceklerini bulunuz.

ÇÖZÜM

SAYILAR VE CEBİR
10.2. FONKSİYONLAR

Neler Öğreneceksiniz?

10.2.1. FONKSİYON KAVRAMI VE FONKSİYONLARIN GÖSTERİMİ

1. Fonksiyonlar
2. Fonksiyonlarda Grafik Çizimi
3. Fonksiyon Grafiklerini Yorumlama
4. Doğrusal Fonksiyonlarda Güncel Uygulamalar

10.2.2. İKİ FONKSİYONUN BİLEŞKESİ VE BİR FONKSİYONUN TERSİ

1. Fonksiyonların Bire Bir ve Örtenliğinin İncelenmesi
2. Bileşke Fonksiyon
3. Bir Fonksiyonun Tersi

Neden "Fonksiyonları" Öğrenmelisiniz?

- Borsa, para, döviz, altın ve petrolün değişim değerleri gösterilirken fonksiyon grafiklerinden yararlanılır.
- Günlük hayatta kullandığınız çamaşır ve bulaşık makineleri, telefonlar, yapay zekâ ile çalışan akıllı ev sistemleri fonksiyonları kullanan araçlardır ve bu araçlar girdi çıktı mantığıyla çalışır.
- Bilgisayar programcılığında kullanılan fonksiyon kavramı, matematikteki fonksiyon kavramının uygulamalarından oluşmaktadır.
- Fonksiyonlar, matematik öğreniminde önemli bir yer tutar.

Hazırlık Çalışması

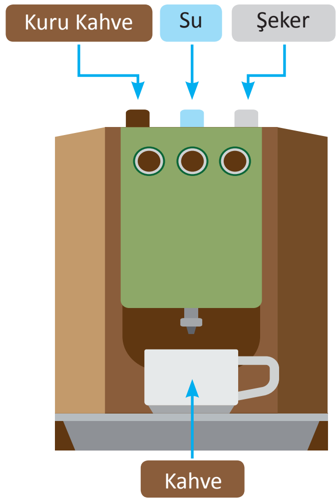
1. **Bir kişi aynı anda iki farklı şehirde bulunamaz, bir kişinin iki tane öz annesi olmaz, bir kişinin T.C. kimlik numarası bir tanedir. Bunun gibi yalnız bir tane sahip olduğunuz durumlara örnekler veriniz.**
2. **Girdi çıktı kavramlarını düşünerek fırından aldığınız bir ekmeğin hangi süreçlerden geçtiğini şema ile gösteriniz.**
3. $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ **kümeleri arasında aşağıdaki koşulları sağlayan bağıntıları yazınız.**
   a) A nın her elemanı B nin yalnız bir elemanı ile eşleşsin.
   b) A nın her elemanı B nin farklı bir elemanı ile eşleşsin.
4. **Bir baskül, her 10 kg ağırlığı 0,25 kg eksik tartmaktadır. Buna göre 75 kg olan bir kişinin bu baskülde tartıldığında kaç kg olacağını bulunuz.**

10.2.1. FONKSİYON KAVRAMI VE GÖSTERİMİ

1. Fonksiyonlar

Fonksiyon Kavramı

Fonksiyonlar konusu, matematiğin birçok konusu gibi günlük hayatta sıkça kullanılmaktadır. Çamaşır ve bulaşık makinelerinde bulunan yıkama programları ayarlanırken; çay, kahve otomatlarından (Görsel 2.1.1) çay veya kahve alırken fotokopi makinelerinden fotokopi çektirirken veya bir kişiye adres tarif ederken farkında olmadan fonksiyon kavramı kullanılmaktadır.



Görsel 2.1.1

Tablo 2.1.1

Girdi	Kural (Dönüştüren Makine)	Çıktı
Kuru kahve, su, şeker	Kahve makinesi	Kahve
Buğday	Değirmen	Un
Yoğurt, su, tuz	Mikser	Ayran

Tanım

- A ve B boş kümeden farklı herhangi iki küme olmak üzere $A \times B = \{(x,y): x \in A, y \in B\}$ kartezyen çarpım kümesinin her bir alt kümesine A dan B ye bir **bağıntı** denir. Bağıntılar genellikle α, β, f, g, h sembolleri ile gösterilir.
- A dan B ye tanımlanan f bağıntısı aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa bir fonksiyon olur.

1. A kümesinde eşleşmemiş eleman kalmamalıdır.
2. A kümesindeki herhangi bir eleman, B kümesinde bir ve yalnız bir eleman ile eşleşmelidir.

Bu tanım, matematik diliyle aşağıdaki gibi ifade edilir.

f, A dan B ye bir bağıntı olsun. Eğer

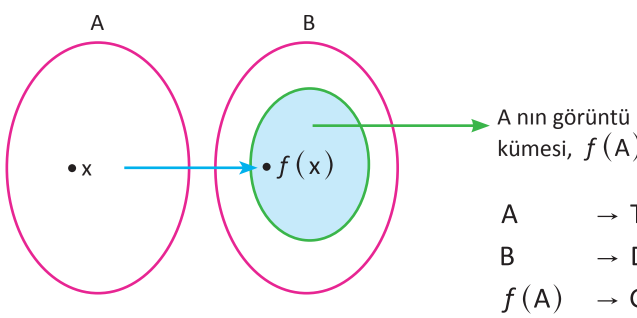
1. Her $x \in A$ için $(x,y) \in f$ olacak şekilde bir $y \in B$ var ve
2. $(x,y_1) \in f$ ve $(x,y_2) \in f$ olduğunda $y_1 = y_2$ oluyorsa f bağıntısına

A dan B ye bir **fonksiyon** denir.

A dan B ye tanımlanan f fonksiyonu $f: A \to B$ şeklinde gösterilir. $(x,y) \in f \Rightarrow y = f(x)$ şeklinde yazılır. Bu gösterimde x **bağımsız değişken**, y **bağımlı değişken** olarak adlandırılır.

$f: A \to B$ gösteriminde A kümesine fonksiyonun **tanım kümesi**, B kümesine fonksiyonun **değer kümesi** adı verilir (Şekil 2.1.1).

A kümesinin elemanlarının, f fonksiyonuyla B kümesinde eşleştiği elemanlardan oluşan kümeye fonksiyonun görüntü kümesi denir ve $f(A)$ ile gösterilir. $f(A) \subseteq B$ dir.



Şekil 2.1.1

$\left.\begin{array}{ll} A & \to \text{Tanım} \\ B & \to \text{Değer} \\ f(A) & \to \text{Görüntü} \end{array}\right\}$ kümeleridir. $f(A) \subseteq B$

FONKSİYONLAR

1. ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3\}$ kümesinden $B = \{k, l, m, n\}$ kümesine tanımlanan aşağıdaki bağıntıların fonksiyon olup olmadığını belirleyiniz.

$\beta_1 = \{(1, m), (2, n), (3, k)\}$

$\beta_2 = \{(1, n), (2, n), (3, n)\}$

$\beta_3 = \{(1, m), (3, n)\}$

$\beta_4 = \{(1, k), (3, m), (3, n), (2, k)\}$

ÇÖZÜM

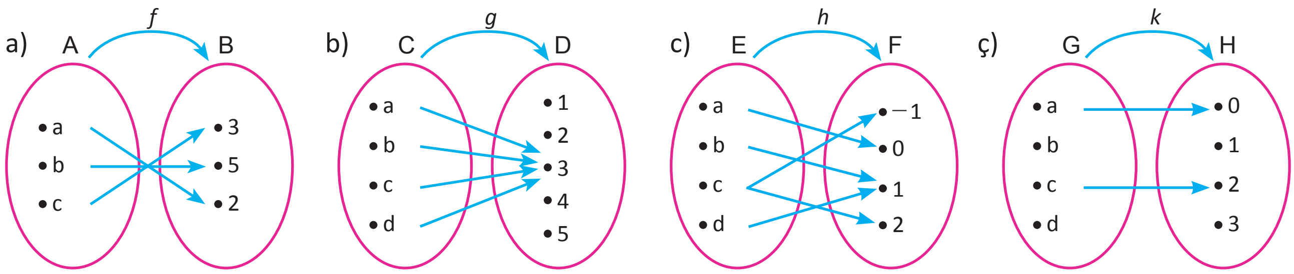
β_1 ve β_2 bağıntılarında A kümesindeki herhangi bir eleman, B kümesinde bulunan yalnız bir elemanla eşleştiğinden bu bağıntılar birer fonksiyondur.

β_3 bağıntısında A kümesindeki "2" elemanı, B kümesinde bulunan herhangi bir elemanla eşleşmediğinden bu bağıntı fonksiyon değildir.

β_4 bağıntısında A kümesindeki "3" elemanı, B kümesinde bulunan birden fazla eleman ile eşleştiğinden bu bağıntı fonksiyon değildir.

2. ÖRNEK

Aşağıda Venn şeması ile gösterilen bağıntıların fonksiyon olup olmadığını belirleyiniz.



ÇÖZÜM

a) A kümesindeki her eleman, değer kümesinde bulunan yalnız bir eleman ile eşleştiği için *f* bağıntısı bir fonksiyondur.

b) C kümesindeki her eleman, değer kümesinde bulunan yalnız bir eleman ile eşleştiği için g bağıntısı bir fonksiyondur. C kümesindeki her elemanın D kümesinde aynı eleman ile eşleşmesi fonksiyon olmasını etkilemez.

c) E kümesindeki "c" elemanı, F kümesinde bulunan birden fazla eleman ile eşleştiği için h bağıntısı fonksiyon değildir.

ç) G kümesindeki "b" ve "d" elemanları, H kümesinde bulunan hiçbir eleman ile eşleşmediği için k bağıntısı fonksiyon değildir.

Sonuçlar

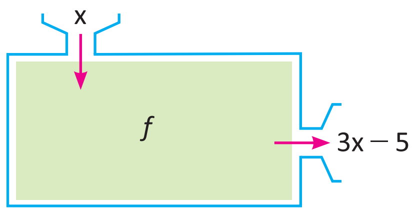
1. Bir bağıntının fonksiyon olabilmesi için
- Tanım kümesinde eşleşmeyen (açıkta) eleman olmamalıdır.
- Tanım kümesindeki her eleman, değer kümesinde bulunan yalnız bir elemanla eşleşmelidir.

2. Her fonksiyon bir bağıntıdır fakat her bağıntı bir fonksiyon olmayabilir. Bağıntılarda kullanılan gösterim biçimleri fonksiyonlarda da kullanılabilir.

3. ÖRNEK

Şekildeki fonksiyon makinesine giren x ler $3x-5$ olarak çıkmaktadır.

Buna göre fonksiyon makinesinde $A=\left\{-3,0,\frac{2}{3},2\right\}$ kümesinin elemanları girdi için kullanıldığında makineden elde edilen çıktıları bulunuz.



ÇÖZÜM

Fonksiyon makinesinin kuralı $f(x)=3x-5$ olur. Fonksiyonun bir noktadaki değeri bulunurken değişken yerine istenilen değer yazılarak fonksiyonun o noktadaki görüntüsü bulunur. Bu durumda

$x=-3$ için $f(-3)=3\cdot(-3)-5=-9-5=-14$

$x=0$ için $f(0)=3\cdot 0-5=0-5=-5$

$x=\frac{2}{3}$ için $f\left(\frac{2}{3}\right)=3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)-5=2-5=-3$

$x=2$ için $f(2)=3\cdot 2-5=6-5=1$ bulunur.

O hâlde elde edilen çıktıların kümesi (görüntü kümesi) $f(A)=\{-14,-5,-3,1\}$ bulunur.

4. ÖRNEK

f fonksiyonu tanımlı olduğu değerlerde

$y=f(x)=x^2-x+1$ olduğuna göre $f(3)$, $f(2x)$, $f(x-1)$, $f(x^2)$ ve $f(t)$ ifadelerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(3)=3^2-3+1=9-3+1=7$

$f(2x)=(2x)^2-(2x)+1=4x^2-2x+1$

$f(x-1)=(x-1)^2-(x-1)+1=x^2-2x+1-x+1+1=x^2-3x+3$

$f(x^2)=(x^2)^2-(x^2)+1=x^4-x^2+1$

$f(t)=t^2-t+1$ bulunur.

5. ÖRNEK

Aşağıda verilen bağıntıların fonksiyon olup olmadığını inceleyiniz.

a) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, f(x)=2x+3$

b) $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}, g(x)=\frac{2x}{3}$

c) $h:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}, h(x)=x^2$

ç) $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, u(x)=\frac{1}{x-2}$

ÇÖZÜM

a) $\forall x\in\mathbb{N}$ için $(2x+3)\in\mathbb{N}$ ve her elemanın yalnız bir görüntüsü olduğundan f fonksiyondur.

b) $\exists x\in\mathbb{Z}$ için $\frac{2x}{3}\notin\mathbb{N}$ olduğundan g fonksiyon değildir.

c) $\forall x\in\mathbb{Z}$ için $x^2\in\mathbb{Z}$ ve her elemanın yalnız bir görüntüsü olduğundan h fonksiyondur.

ç) $x=2$ için $u(2)=\frac{1}{0}\notin\mathbb{R}$ olduğundan 2 elemanı açıkta kalır. Buna göre u fonksiyon değildir.

6. ÖRNEK

$f: A \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Her x gerçek sayısı için $2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ ifadesi bir gerçek sayıdır. Bu durumda $f(x)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi $A = \mathbb{R}$ bulunur.

7. ÖRNEK

$g(x) = \dfrac{x-1}{x+7}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$g(x) = \dfrac{x-1}{x+7}$ fonksiyonu rasyonel bir fonksiyondur. Bu tür fonksiyonlar, paydayı 0 yapan değerler dışında tanımlıdır. O hâlde $x + 7 = 0$ ise $x = -7$ olduğundan $g(x)$ fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R} - \{-7\}$ bulunur.

8. ÖRNEK

$h(x) = \sqrt{x+5}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Kökün derecesi çift sayı (2) olduğundan kök içindeki ifade 0 veya 0 dan büyük gerçek sayı olmalıdır.
Bu durumda $x + 5 \geq 0$ ise $x \geq -5$ olur. O hâlde $h(x)$ fonksiyonunun tanım kümesi $[-5, \infty)$ olur.

9. ÖRNEK

$t(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt[4]{9-x} - \sqrt[3]{\dfrac{2}{x-5}}$ fonksiyonunu tanımlı yapan tam sayıların toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$t(x)$ fonksiyonu kendi içinde üç ayrı fonksiyon içerdiğinden her fonksiyonun tanım kümesi ayrı ayrı incelenir. Üç fonksiyonu da sağlayan noktalar $t(x)$ fonksiyonunun tanım kümesidir.

$\sqrt{x-2}$ için $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$, $\sqrt[4]{9-x}$ için $9 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 9$ ve $\sqrt[3]{\dfrac{2}{x-5}}$ için $x \neq 5$ olmalıdır.

Bu durumda $2 \leq x \leq 9$ ve $x \neq 5$ tir.

O hâlde $t(x)$ fonksiyonunu tanımlı yapan tam sayılar $\{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ olduğundan toplamı $2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 = 39$ bulunur.

Sıra Sizde

SORU

$s(x) = \sqrt[3]{-x + \dfrac{3}{x-2} - 5}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

10. ÖRNEK

$f(2x-3)=x^2-1$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre $f(5)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$2x-3=5 \Rightarrow 2x=8 \Rightarrow x=4$ bulunur.
Verilen fonksiyonda x yerine 4 yazılırsa
$f(2\cdot 4-3)=f(8-3)=f(5)=4^2-1=16-1=15$ olur.

11. ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x^2+5x)=2x^2+10x+8$ olduğuna göre $f(4)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x^2+5x)=2x^2+10x+8$ ifadesi düzenlenirse
$f(x^2+5x)=2\cdot(x^2+5x)+8$ biçiminde yazılabilir. Bu eşitlikte x^2+5x yerine t yazılırsa
$f(t)=2t+8$ bulunur. O hâlde
$f(4)=2\cdot 4+8=8+8=16$ sonucu elde edilir.

12. ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x+2)=3x+1$ olduğuna göre $f(3x-1)$ ifadesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x+2=a$ denirse $x=a-2$ olur. Bu değer yerine yazılırsa
$f(a)=3\cdot(a-2)+1$
$\quad\ =3a-5$ bulunur.
Bu ifadede a yerine $3x-1$ yazılırsa
$f(3x-1)=3\cdot(3x-1)-5$
$\qquad\qquad =9x-3-5$
$\qquad\qquad =9x-8$ olur.

13. ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x-1)=x^2-x-5$ olduğuna göre $f(x)$ değerini bulunuz.

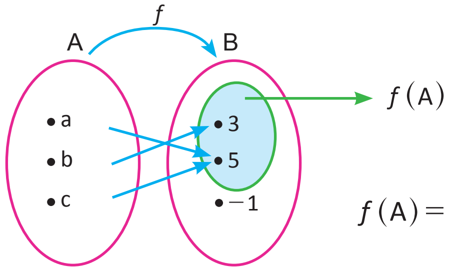
ÇÖZÜM

x^2-x-5 ifadesinin $x-1$ türünden yazmak için x^2-x-5 ifadesine $x-1$ eklenip çıkarılırsa
$f(x-1)=x^2-x-5+(x-1)-(x-1)$
$f(x-1)=(x^2-2x+1)+(x-1)-5$
$f(x-1)=(x-1)^2+(x-1)-5$ biçiminde yazılabilir. Bu eşitlikte $x-1=a$ alınırsa
$f(a)=a^2+a-5$ bulunur. a yerine x yazılırsa
$f(x)=x^2+x-5$ elde edilir.

Fonksiyon Çeşitleri

Tanım

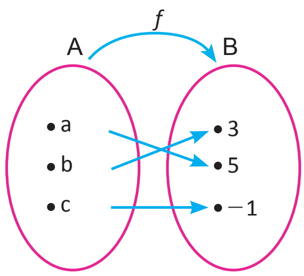
$f: A \rightarrow B$ fonksiyonunun değer kümesinde boşta eleman kalıyorsa (değer kümesinde eşleşmeyen eleman varsa) f fonksiyonuna **içine fonksiyon** denir.
Başka bir ifadeyle fonksiyonun görüntü kümesi, değer kümesine eşit değilse bu fonksiyon içine fonksiyondur (Şekil 2.1.2).



$f(A) = \{3,5\} \neq \{3,5,-1\}$ olup f içine fonksiyondur.

Şekil 2.1.2

$f: A \rightarrow B$ fonksiyonun tanım kümesinin elemanları, değer kümesinin tüm elemanlarıyla eşleşmişse f fonksiyonuna **örten fonksiyon** denir.
Başka bir ifadeyle bir fonksiyonda görüntü kümesi, değer kümesine eşit ise fonksiyon örten fonksiyondur. Buna göre $f: A \rightarrow B$, $f(x)$ verildiğinde
$\forall y \in B$ için $y = f(x)$ olacak şekilde $\exists x \in A$ var ise f fonksiyonu örtendir (Şekil 2.1.3).



$f(A) = \{3,5,-1\} = B$ f örtendir.

Şekil 2.1.3

Sonuç

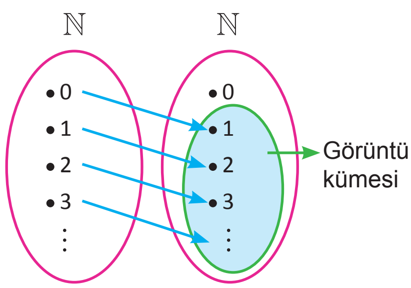
Örten olmayan fonksiyon içine fonksiyondur.

14. ÖRNEK

$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = x + 1$ fonksiyonunun örten olup olmadığını inceleyiniz.

ÇÖZÜM

1. Yol



$\mathbb{N} \neq f(\mathbb{N})$ olup f içinedir.

Verilen fonksiyonda
$x = 0$ için $f(0) = 0 + 1 = 1$, $x = 1$ için $f(1) = 1 + 1 = 2$
....
Bu durumda fonksiyonun görüntü kümesi, $f(\mathbb{N}) = \{1,2,3,...\}$ fonksiyonun değer kümesine eşit olmadığından f örten fonksiyon değildir.
Değer kümesinde eşleşmeyen eleman bulunduğundan bu fonksiyon örten değil içine fonksiyondur.

2. Yol

$\forall y \in \mathbb{N}$ için $y = f(x)$ olacak şekilde $\exists x \in \mathbb{N}$ olup olmadığı incelenmelidir.
$y = x + 1, (x, y \in \mathbb{N}) \Rightarrow x = y - 1, (x, y \in \mathbb{N}) \Rightarrow x = y - 1 \geq 0, (x, y \in \mathbb{N}) \Rightarrow y \geq 1, (y \in \mathbb{N})$ olduğundan
$y = 0$ elemanı ile eşleşen bir x elemanı olmadığından f fonksiyonu örten değildir.

15. ÖRNEK

$f:\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Z},\ f(x)=x+1$ fonksiyonunun örten olup olmadığını inceleyiniz.

ÇÖZÜM

Verilen fonksiyonda $f(\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$ olduğu gösterilmelidir.

....

$x=-2$ için $f(-2)=-2+1=-1$

$x=-1$ için $f(-1)=-1+1=0$

$x=0$ için $f(0)=0+1=1$

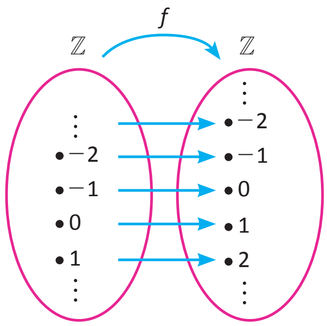
$x=1$ için $f(1)=1+1=2$

....

Bu durumda fonksiyonun görüntü kümesi

$f(\mathbb{Z})=\{...,-2,-1,0,1,2,\ ...\}$ bulunur.

Fonksiyonun değer kümesi, görüntü kümesine eşit olduğundan *f* fonksiyonu örtendir.



Örten fonksiyon

16. ÖRNEK

$f:\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{Z},\ f(x)=2x+1$ fonksiyonunun örten veya içine olup olmadığını inceleyiniz.

ÇÖZÜM

$\forall x\in\mathbb{Z}$ için $2x+1$ daima tek sayıdır. Bu durumda değer kümesindeki çift sayılar açıkta kalır. Dolayısıyla *f* örten fonksiyon değil içine fonksiyondur.

Tanım

$f:A\rightarrow B$ fonksiyonu verilsin. Tanım kümesindeki elemanların her biri, değer kümesinde bulunan farklı bir eleman ile eşleşiyorsa *f* fonksiyonuna **bire bir fonksiyon** denir. Buna göre

a) Her $x_1,x_2\in A$ için $x_1\neq x_2$ iken $f(x_1)\neq f(x_2)$ veya

b) Her $x_1,x_2\in A$ için $f(x_1)=f(x_2)$ iken $x_1=x_2$ oluyorsa *f* fonksiyonu bire bir fonksiyondur.

17. ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\ f(x)=4x+3$ fonksiyonunun bire bir olup olmadığını inceleyiniz.

ÇÖZÜM

Her $x_1,x_2\in A$ için $x_1\neq x_2$ iken $f(x_1)\neq f(x_2)$ olduğu gösterilmelidir.

Her $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ için $x_1\neq x_2$ ise her iki taraf da 4 ile çarpılır ve her iki tarafa 3 eklenirse $4x_1+3\neq 4x_2+3$ eşitsizliği elde edilir. Buradan $f(x_1)\neq f(x_2)$ olur. Tanım kümesindeki farklı elemanlar, değer kümesinde bulunan farklı elemanlarla eşleşmiş olur. Bu durumda *f* fonksiyonu bire bir fonksiyondur.

18. ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\ f(x)=x^2$ fonksiyonunun bire bir olup olmadığını inceleyiniz.

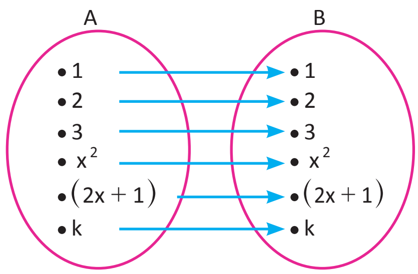
ÇÖZÜM

Her $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ için $f(x_1)=f(x_2)$ iken $x_1=x_2$ olduğu gösterilmelidir.

$f(x_1)=f(x_2)$ ise $(x_1)^2=(x_2)^2$ dir. İki tarafın da karekökü alınırsa $|x_1|=|x_2|$ elde edilir. Bu eşitlikten $x_1=x_2$ veya $x_1=-x_2$ olur. Buradan daima $x_1=x_2$ eşitliğinin sağlanmadığı görülür. O hâlde *f* fonksiyonu bire bir fonksiyon değildir.

Tanım

$f: A \rightarrow B$ bir fonksiyon olmak üzere tanım kümesindeki her elemanı kendisine eşleyen fonksiyona **birim (özdeşlik)** fonksiyonu denir. Birim fonksiyon $f(x) = I(x) = x$ biçiminde gösterilir (Şekil 2.1.4).



Şekil 2.1.4

19. ÖRNEK

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},\ f(x) = (a-2)x^2 + (b+3)x + c - 5$ fonksiyonu, birim fonksiyon olduğuna göre a, b ve c değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x)$ birim fonksiyon olduğundan $f(x) = x$ biçimindedir. O hâlde

$f(x) = \underbrace{(a-2)}_{0}x^2 + \underbrace{(b+3)}_{1}x + \underbrace{c-5}_{0} = x$ olduğundan katsayıların eşitliğinden

$a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2,\ b + 3 = 1 \Rightarrow b = -2$ ve $c - 5 = 0 \Rightarrow c = 5$ bulunur.

20. ÖRNEK

f birim fonksiyon olmak üzere $f(2x-1) + f(3) = x + f(7)$ ise x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

f birim fonksiyon olduğundan $f(x) = x$ olur.

$f(2x-1) + f(3) = x + f(7)$ ise

$2x - 1 + 3 = x + 7$ olur.

Buradan $x = 5$ bulunur.

Sıra Sizde

SORU

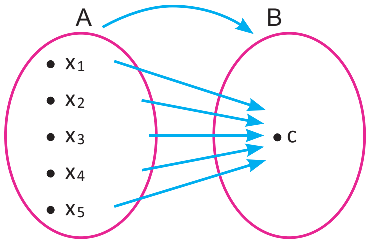
$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},\ f(x) = (a+3)x - b + 4$ birim fonksiyon olduğuna göre $f(b-a)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Tanım

$f: A \to B$ bir fonksiyon olmak üzere tanım kümesindeki bütün elemanlar değer kümesinde bulunan yalnız bir eleman ile eşleşiyorsa f fonksiyonuna **sabit fonksiyon** denir. $c \in B$ olmak üzere $f(x) = c$ şeklinde gösterilir.

Görüntü kümesinin eleman sayısı 1 olan fonksiyondur. Sabit fonksiyon Şekil 2.1.5'te Venn şeması ile gösterilmiştir.



Şekil 2.1.5

21. ÖRNEK

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (a-3)x^2 + (b-5)x + a \cdot b - 4$ fonksiyonu sabit fonksiyon olduğuna göre $f(2017 + a - b)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x)$ sabit fonksiyon olduğundan $f(x) = c$ dir. O hâlde

$f(x) = \underbrace{(a-3)}_{0}x^2 + \underbrace{(b-5)}_{0}x + a \cdot b - 4$

$a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3$ ve $b - 5 = 0 \Rightarrow b = 5$ olur. Buradan $f(x) = 11$ bulunur. Buna göre $c = 11$ olur.

Bu durumda

$f(2017 + a - b) = 11$ olur.

Not

Tanımlı olduğu durumlarda $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ sabit fonksiyon ise $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ olur.

22. ÖRNEK

$x \neq 4$ olmak üzere $f(x) = \frac{mx+4}{2x-8}$ sabit fonksiyon ise $m + f(2017)$ toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x) = \frac{mx+4}{2x-8}$ sabit fonksiyon olduğuna göre

$\frac{m}{2} = \frac{4}{-8}$ orantısında içler dışlar çarpımı yapılırsa $m = -1$ bulunur. m değeri fonksiyonda yerine yazılırsa

$f(x) = \frac{-x+4}{2x-8} = \frac{-\cancel{(x-4)}}{2 \cdot \cancel{(x-4)}} = -\frac{1}{2}$ olur.

O hâlde $m + f(2017) = -1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$ sonucu elde edilir.

23. ÖRNEK

f gerçek sayılarda tanımlı bir sabit fonksiyondur.
Buna göre $f(-1)\cdot f(0)\cdot f(5)=-64$ ise $f(1923)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x)$ sabit fonksiyon olduğundan $f(x)=c$ dir.
O hâlde $f(-1)\cdot f(0)\cdot f(5)=c\cdot c\cdot c=c^3=-64 \Rightarrow c=-4$ bulunur.
Buradan $f(1923)=-4$ sonucu elde edilir.

Tanım

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ ve $a,b\in\mathbb{R}$, olmak üzere
$f(x)=ax+b$ biçimindeki fonksiyonlara **doğrusal fonksiyon** denir.
Bu fonksiyonların görüntü kümeleri analitik düzlemde doğru belirtir.

24. ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ bir doğrusal fonksiyon olmak üzere
$f(3)=15$
$f(5)=23$ olduğuna göre $f(9)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

f doğrusal fonksiyon olduğundan $f(x)=ax+b$ biçimindedir. O hâlde
$f(3)=3a+b=15$
$f(5)=5a+b=23$ bulunur. Bulunan denklem sistemi, yok etme yöntemiyle çözüldüğünde

$$\begin{array}{rl} -1/ & 3a+b=15 \\ + & \underline{\ \ 5a+b=23} \\ & 2a=8 \\ & a=4,\ b=3 \text{ olur.} \end{array}$$

Buradan $f(x)=4x+3$ bulunur.
$f(9)=4\cdot 9+3=39$ olur.

25. ÖRNEK

$f(x)$ bir doğrusal fonksiyon olmak üzere $f(2x-1)+f(x+2)=6x+5$ olduğuna göre
$f(1)+2\cdot f(3)+f(4)$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$x=1$ için $f(1)+f(3)=6\cdot 1+5=6+5=11$
$x=2$ için $f(3)+f(4)=6\cdot 2+5=12+5=17$ eşitlikleri bulunur.
Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa
$f(1)+2\cdot f(3)+f(4)=11+17=28$ sonucu bulunur.

26. ÖRNEK

f bir doğrusal fonksiyon olmak üzere $f(x-3)+f(x+2)=6x+7$ ise $f(7)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x-3)+f(x+2)=6x+7$ ifadesinde,

$f(x)=ax+b$ biçimindedir.

$$\begin{array}{rl} & f(x-3)=a\cdot(x-3)+b \\ + & f(x+2)=a\cdot(x+2)+b \\ \hline \end{array}$$

$f(x-3)+f(x+2)=a\cdot(x-3)+b+a\cdot(x+2)+b=6x+7$

$\Rightarrow ax-3a+b+ax+2a+b=6x+7$

$\Rightarrow 2ax+(-a+2b)=6x+7$

$2a=6 \Rightarrow a=3$

$-a+2b=7 \Rightarrow -3+2b=7$

$2b=10$

$b=5$

değerleri elde edilir. O hâlde

$f(x)=3x+5$ olur.

$f(7)=3\cdot7+5=21+5=26$ bulunur.

Tanım

Tanım kümesinin alt aralıklarında farklı kurallarla tanımlanan fonksiyonlara **parçalı tanımlı fonksiyon** denir.

Parçalı tanımlı fonksiyonlar

$A\subseteq\mathbb{R}$, $f:A\to\mathbb{R}$ ve $c\in A$ olmak üzere

$$f(x)=\begin{cases} g(x), & a\le x< c \text{ ise} \\ h(x), & c\le x\le b \text{ ise} \end{cases}$$ biçiminde yazılır.

a, b ve c noktaları tanım aralıklarının uç noktaları olduğundan bu noktalara kritik noktalar olur.

27. ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & x<2 \text{ ise} \\ x^2, & x\ge 2 \text{ ise} \end{cases}$$ biçiminde tanımlanıyor.

$f(1)+f(2)+f(3)$ toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x)$ parçalı tanımlı fonksiyonunda $x=2$ kritik noktadır.

$1<2$ olduğundan $f(x)=x^3 \Rightarrow f(1)=1^3=1$

$2\ge2$ olduğundan $f(x)=x^2 \Rightarrow f(2)=2^2=4$

$3\ge2$ olduğundan $f(x)=x^2 \Rightarrow f(3)=3^2=9$ bulunur. O hâlde

$f(1)+f(2)+f(3)=1+4+9=14$ bulunur.

28. ÖRNEK

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x+3, & x<-1 \text{ ise} \\ x^2-1, & -1\le x\le 1 \text{ ise} \\ 2x-2, & x>1 \text{ ise}\end{cases}$$

biçiminde tanımlanıyor. Buna göre $f(-2)+f(1)+f(2)$ toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x)$ parçalı tanımlı fonksiyonunda
$-2<-1$ olduğundan $f(x)=x+3 \Rightarrow f(-2)=-2+3=1$
$1\le 1$ olduğundan $f(x)=x^2-1 \Rightarrow f(1)=1^2-1=0$
$2>1$ olduğundan $f(x)=2x-2 \Rightarrow f(2)=2\cdot 2-2=4-2=2$ bulunur. O hâlde
$f(-2)+f(1)+f(2)=1+0+2=3$ bulunur.

29. ÖRNEK

$f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, g birim fonksiyon ve h sabit fonksiyon olmak üzere

$$f(x)=\begin{cases} g(x), & x\ge 0 \text{ ise} \\ h(x), & x<0 \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonunda $f(1)+f(-1)=6$ olduğuna göre $h(6)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x)$ parçalı tanımlı fonksiyon olduğundan
$1\ge 0$ olduğundan $f(1)=g(1)=1$
$-1<0$ olduğundan $f(-1)=h(-1)=c$ bulunur.
Bulunan değerler $f(1)+f(-1)=6$ ifadesinde yerine yazılırsa
$1+c=6 \Rightarrow c=5$ elde edilir.
h sabit fonksiyon olduğundan $h(6)=5$ sonucu bulunur.

30. ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} x-k, & x<2 \text{ ise} \\ 5, & x=2 \text{ ise} \\ x+k, & x>2 \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonunda $f(-2)+f(2)=10$ olduğuna göre $f(3)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$-2<2$ olduğundan $f(-2)=-2-k$ ve $2=2$ olduğundan $f(2)=5$ olur. Bu durumda
$f(-2)+f(2)=10 \Rightarrow -2-k+5=10 \Rightarrow -k+3=10 \Rightarrow k=3-10=-7$ bulunur. O hâlde

$$f(x)=\begin{cases} x+7, & x<2 \text{ ise} \\ 5, & x=2 \text{ ise} \\ x-7, & x>2 \text{ ise olur.}\end{cases}$$

Buradan $3>2$ olduğundan $f(3)=3-7=-4$ sonucuna ulaşılır.

Tanım

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tanımlı bir f fonksiyonu olmak üzere $\forall x\in\mathbb{R}$ için $f(-x)=f(x)$ ise f fonksiyonuna **çift fonksiyon** denir.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tanımlı bir f fonksiyonu olmak üzere $\forall x\in\mathbb{R}$ için $f(-x)=-f(x)$ ise f fonksiyonuna **tek fonksiyon** denir.

31. ÖRNEK

Aşağıda verilen $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tanımlı fonksiyonların tek ya da çift fonksiyon olup olmadıklarını bulunuz.

a) $f_1(x)=3x^2$
b) $f_2(x)=4x^3$
c) $f_3(x)=x^3+4x$
ç) $f_4(x)=x^4+2x^2+3$
d) $f_5(x)=2x^3+3x^2+1$

ÇÖZÜM

a) $f_1(x)=3x^2$ fonksiyonunda x yerine $-x$ yazılırsa
$f_1(-x)=3(-x)^2=3x^2=f_1(x)$ olduğundan $f_1(x)$ fonksiyonu çift fonksiyondur.

b) $f_2(x)=4x^3$ fonksiyonunda x yerine $-x$ yazılırsa
$f_2(-x)=4(-x)^3=-4x^3=-f_2(x)$ olduğundan $f_2(x)$ fonksiyonu tek fonksiyondur.

c) $f_3(x)=x^3+4x$ fonksiyonunda x yerine $-x$ yazılırsa
$f_3(-x)=(-x)^3+4(-x)=-x^3-4x=-(x^3+4x)=-f_3(x)$ olduğundan $f_3(x)$ fonksiyonu tek fonksiyondur.

ç) $f_4(x)=x^4+2x^2+3$ fonksiyonunda x yerine $-x$ yazılırsa
$f_4(-x)=(-x)^4+2(-x)^2+3=x^4+2x^2+3=f_4(x)$ olduğundan $f_4(x)$ fonksiyonu çift fonksiyondur.

d) $f_5(x)=2x^3+3x^2+1$ fonksiyonunda x yerine $-x$ yazılırsa
$f_5(-x)=2(-x)^3+3(-x)^2+1=-2x^3+3x^2+1$ olur. $f_5(-x)\neq -f_5(x)$ olduğundan $f_5(x)$ fonksiyonu tek fonksiyon değildir.

Aynı şekilde $f_5(-x)\neq f_5(x)$ olduğundan $f_5(x)$ fonksiyonu çift fonksiyon da değildir. Buna göre $f_5(x)$ fonksiyonu ne tek fonksiyondur ne de çift fonksiyondur.

32. ÖRNEK

$f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tanımlı tek fonksiyon olsun. $g(x)=2x^3+4\cdot f(x)$ fonksiyonu verilsin. $f(-3)=-5$ olduğuna göre $g(3)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$g(x)=2x^3+4\cdot f(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonları tek fonksiyon olduklarından
$f(-3)=-f(3)$ olur.
Buna göre $f(3)=-f(-3)=-(-5)=5$ bulunur.
$x=3$ için $g(3)=2\cdot(3)^3+4\cdot f(3)$
$=2\cdot 27+4\cdot 5=54+20=74$ bulunur.

Eşit Fonksiyonlar

Tanım

$f:A\to B$ ve $g:A\to B$ iki fonksiyon olmak üzere $\forall x\in A$ için $f(x)=g(x)$ oluyorsa f ve g fonksiyonlarına **eşit fonksiyonlar** denir ve $f=g$ biçiminde gösterilir.

33. ÖRNEK

$A=\{0,2\}$ ve $B=\{1,2,3,4,5\}$ olmak üzere

$f:A\to B,\ f(x)=x^2+1$

$g:A\to B,\ g(x)=2x+1$ fonksiyonları veriliyor. f ve g fonksiyonlarının eşit olup olmadığını inceleyiniz.

ÇÖZÜM

A kümesindeki elemanların f ve g altındaki görüntülerinin eşit olup olmadığı incelenmelidir.

$x=0$ için $f(0)=0^2+1=0+1=1,\ g(0)=2\cdot 0+1=0+1=1$

$x=2$ için $f(2)=2^2+1=4+1=5,\ g(2)=2\cdot 2+1=4+1=5$ bulunur.

$f(A)=g(A)=\{1,5\}$ olduğundan $f(x)=g(x)$ olur.

34. ÖRNEK

$f=\{(0,5),(-1,m),(2,n^2),(4,6)\}$

$g=\{(0,r),(2,9),(s^2,6),(-1,4)\}$

fonksiyonları veriliyor. $f=g$ olduğuna göre $m+n+r+s$ toplamının en küçük değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

f ve g fonksiyonlarının tanım kümesi $A=\{0,-1,2,4\}$ dir. $f=g$ olduğundan $\forall x\in A$ için $f(x)=g(x)$ olmalıdır. Buna göre

$f(0)=g(0)=5\Rightarrow r=5$

$f(-1)=g(-1)=4\ \Rightarrow\ m=4$

$f(2)=g(2)=9\ \Rightarrow\ n^2=9\Rightarrow n=\mp 3,\ f(4)=g(4)=6\ \Rightarrow\ s^2=4\Rightarrow s=\mp 2$ bulunur.

Bu durumda $m+n+r+s$ toplamının en küçük değeri $4+(-3)+5+(-2)=4$ olur.

Sıra Sizde

SORU

$A=\{-1,0,1\}$ olmak üzere $f,g,h:A\to\mathbb{R}$ fonksiyonlardır.

$f(x)=x^2-x,\ g(x)=-x^3$ ve $h(x)=-x$ fonksiyonlarının birbirlerine eşit fonksiyon olup olmama durumlarını inceleyiniz.

ÇÖZÜM

Fonksiyonlarda Cebirsel işlemler

Tanım

$f: A \to \mathbb{R}, g: B \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon ve $A \cap B \neq \varnothing$ olsun.

$f+g:(A \cap B) \to \mathbb{R}, (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$f-g:(A \cap B) \to \mathbb{R}, (f-g)(x) = f(x) - g(x)$

$f \cdot g:(A \cap B) \to \mathbb{R}, (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$\frac{f}{g}:(A \cap B) \to \mathbb{R}, \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \ (g(x) \neq 0)$

$k \cdot f: A \to \mathbb{R}, (k \cdot f)(x) = k \cdot f(x), (k \in \mathbb{R})$ biçiminde tanımlanır.

35. ÖRNEK

$f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$f(x) = x^2 + 2x + 1$ ve $g(x) = x + 1$ fonksiyonları verilsin.

$(f+g)(x), (f-g)(x), (f \cdot g)(x)$ ve $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ fonksiyonlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 2x + 1 + x + 1 = x^2 + 3x + 2$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 + 2x + 1 - (x+1) = x^2 + 2x + 1 - x - 1 = x^2 + x$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2 + 2x + 1) \cdot (x+1) = x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x + x + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 2x + 1}{x+1} = \frac{(x+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{x+1}} = x + 1$ bulunur $(x \neq -1)$.

36. ÖRNEK

$f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$f(x) = 2x - 1$ ve $g(x) = -x^2 + 1$ fonksiyonları verilsin. $\left(\frac{2f - 3g}{f \cdot g}\right)(2)$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\left(\frac{2f - 3g}{f \cdot g}\right)(2) = \frac{2f(2) - 3g(2)}{f(2) \cdot g(2)}$$

$$= \frac{2 \cdot 3 - 3 \cdot (-3)}{3 \cdot (-3)}$$

$$= \frac{6 + 9}{-9}$$

$$= -\frac{15}{9}$$

$$= -\frac{5}{3} \text{ olur.}$$

37. ÖRNEK

$f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$(f+g)(x) = x^3 + 2x - 1$ ve $f(x) = 3x + 1$ olduğuna göre $g(-1)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

1. Yol

$(f+g)(x) = x^3 + 2x - 1$ ise

$f(x) + g(x) = x^3 + 2x - 1$ ifadesinde $g(x)$ yalnız bırakılırsa

$$g(x) = x^3 + 2x - 1 - f(x)$$
$$g(x) = x^3 + 2x - 1 - (3x + 1)$$
$$= x^3 + 2x - 1 - 3x - 1$$
$$= x^3 - x - 2 \text{ olur. O hâlde}$$
$$g(-1) = (-1)^3 - (-1) - 2$$
$$= \cancel{-1} \cancel{+1} - 2$$
$$= -2 \text{ sonucu bulunur.}$$

2. Yol

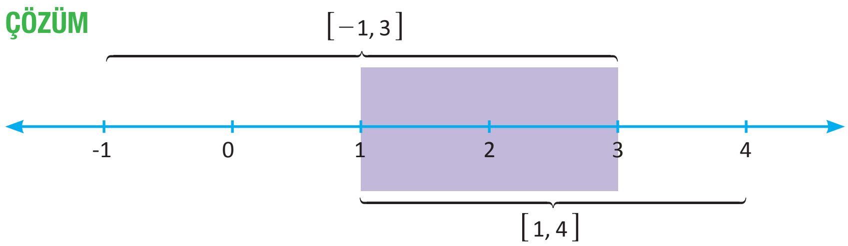
$(f+g)(-1) = f(-1) + g(-1)$ olduğundan

$$(-1)^3 + 2 \cdot (-1) - 1 = 3 \cdot (-1) + 1 + g(-1)$$
$$-1 - 2 - 1 = -3 + 1 + g(-1)$$
$$-4 = -2 + g(-1)$$
$$g(-1) = -2 \text{ bulunur.}$$

38. ÖRNEK

$f: [1, 4] \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$, $g: [-1, 3] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - 2$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre $(f+g)$ fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM



Ortak tanım kümesi: $[1, 4] \cap [-1, 3] = [1, 3]$ kapalı aralığı olur.

$$f + g: [1, 3] \to \mathbb{R}, (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$= 2x + 1 + x - 2$$
$$= 3x - 1 \text{ olur.}$$

$1 \le x \le 3$ eşitsizlik 3 ile çarpılırsa

$3 \le 3x \le 9$ elde edilir. Eşitsizlikteki ifadelere -1 eklenirse

$3 - 1 \le 3x - 1 \le 9 - 1$ bulunur.

$3x - 1$ yerine $(f+g)(x)$ yazıldığında

$2 \le (f+g)(x) \le 8$ sonucu elde edilir.

Dolayısıyla $(f+g)[1, 3] = [2, 8]$ olur.

39. ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x}$, $g:\mathbb{R}^+\cup\{0\}\to\mathbb{R}, g(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre $(2f-\sqrt{3}g)(27)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Ortak tanım kümesi: $\mathbb{R}\cap(\mathbb{R}^+\cup\{0\})=\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ olur.

$2f-\sqrt{3}g:\mathbb{R}^+\cup\{0\}\to\mathbb{R}, (2f-\sqrt{3}g)(x)=2f(x)-\sqrt{3}g(x)$

$$\begin{aligned}(2f-\sqrt{3}g)(27)&=2f(27)-\sqrt{3}g(27)\\&=2\cdot\sqrt[3]{27}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}\\&=2\cdot 3-\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}\\&=6-9\\&=-3\end{aligned}$$
sonucu elde edilir.

40. ÖRNEK

$f=\{(1,3),(-1,2),(0,4),(2,5)\}$ ve $g=\{(-2,1),(-1,4),(3,2),(2,0)\}$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre $(2f+3g)(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Ortak tanım kümesi: $\{-1,2\}$ dir.

$$\begin{aligned}(2f+3g)(x)&=2f(x)+3g(x)\\&=\{(-1,2\cdot f(-1)+3\cdot g(-1)),(2,2\cdot f(2)+3\cdot g(2))\}\\&=\{(-1,2\cdot 2+3\cdot 4),(2,2\cdot 5+3\cdot 0)\}\\&=\{(-1,4+12),(2,10+0)\}\\&=\{(-1,16),(2,10)\}\end{aligned}$$
sonucu elde edilir.

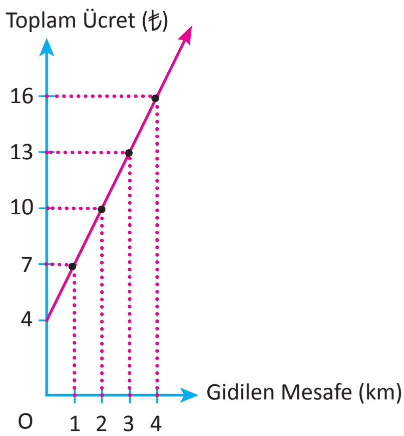
41. ÖRNEK

Ankara'da taksilerin taksimetre açılış ücreti 4 TL'dir. Her 1 km için de 3 TL ücret alınmaktadır. Ankara'da taksiye binen bir kişinin 4. km sonunda ödediği ücret ile gidilen mesafe arasındaki ilişkiyi tablo üzerinde gösteriniz ve bu ilişkinin grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

Gidilen Mesafe	Açılış (0. km)	1. km	2. km	3. km	4. km
Toplam Ücret	₺ 4	₺ 7	₺ 10	₺ 13	₺ 16

Tablodaki değerler, ikililer hâlinde yazılıp koordinat sisteminde işaretlenip birleştirilir. Bu durumda gidilen mesafe ile ücret arasındaki ilişki yanda verilen grafikteki gibi olur.



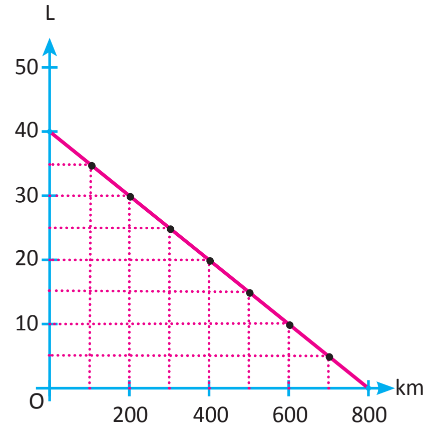
42. ÖRNEK

Yakıt deposunda 40 L benzini bulunan ve her 100 km de 5 L benzin tüketen bir otomobilin deposunda kalan yakıt miktarı ve gittiği yol arasındaki ilişkiyi tablo üzerinde gösteriniz ve grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

Kalan Yakıt (L)	40	35	30	25	20	15	10	5	0
Gidilen Mesafe (km)	0	100	200	300	400	500	600	700	800

Tablodaki değerler, ikililer hâlinde yazılıp koordinat sisteminde işaretlenip birleştirilir. Bu durumda depodaki benzin ile gittiği yol arasındaki ilişki yanda verilen grafikteki gibi olur.



2. Fonksiyonlarda Grafik Çizimi

Tanım

$f : A \to B, y = f(x)$ fonksiyonuna ait bütün noktaların koordinat sisteminde gösterilmesiyle oluşan noktalar kümesine f **fonksiyonunun grafiği** denir.

Bu grafik çizilirken tanım kümesinin elemanları yatay eksende, değer kümesinin elemanları ise düşey eksende gösterilir.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ biçimindeki doğrusal fonksiyonların grafikleri çizilirken en az iki x değeri için $f(x)$ değerleri bulunur. Bulunan $(x, f(x))$ noktaları, koordinat sisteminde işaretlenir. Bu noktaların birleştirilmesiyle oluşan doğru f fonksiyonunun grafiğidir.

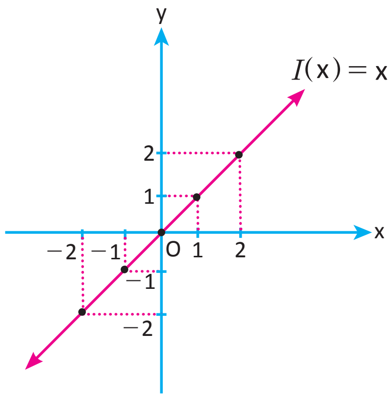
1. ÖRNEK

$I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $I(x) = x$ birim fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

Birim fonksiyonu sağlayan birkaç nokta tabloda verilmiştir.

x	−2	−1	0	1	2
$I(x)$	−2	−1	0	1	2

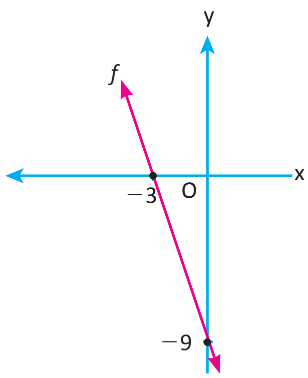


2. ÖRNEK

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = -3x - 9$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

x	0	−3
$f(x)$	−9	0

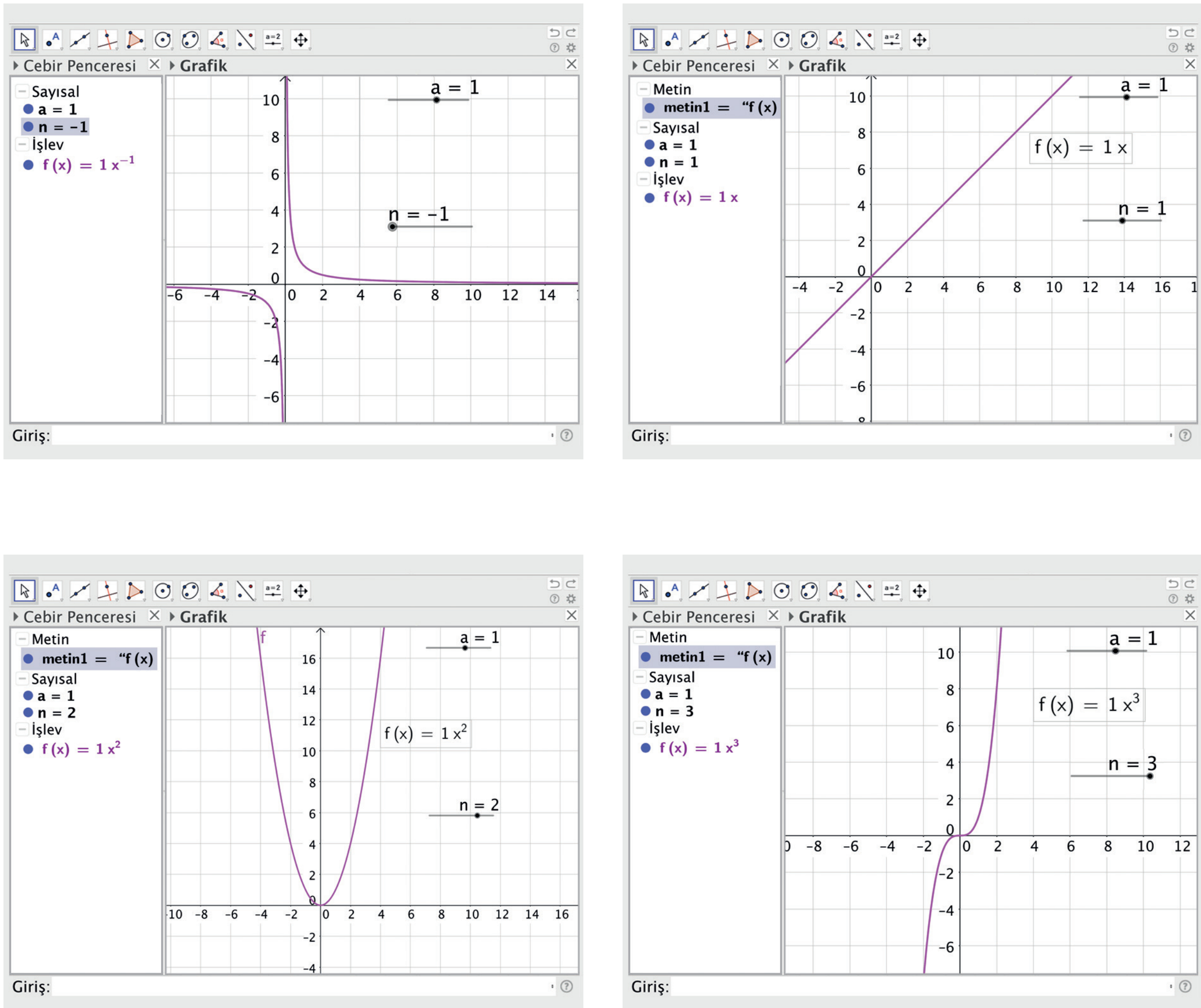


Teknoloji Uygulaması

Aşağıda Görsel 2.1.2'de GeoGebra programı ile $f(x) = ax^n, (n \in \{-1, 1, 2, 3\})$ fonksiyonunun grafikleri çizilmiştir. İnceleyiniz.

a=2	**Sürgü** aracını seçiniz. Açılan pencerede a isimli bir sürgü tanımlayınız.
a=2	**Sürgü** aracını seçiniz. Açılan pencerede n isimli bir sürgü oluşturup minimum değeri -1, maksimum değeri 3, artış miktarını 1 olarak tanımlayınız.
Giriş:	**Giriş** kısmına $f(x) = ax^{\wedge}n$ yazıp enter tuşuna basınız.
a = 1	a ve n sürgülerinin değerleri için fonksiyon grafiğindeki değişimi inceleyiniz.

"^n" ifadesini yazabilmek için klavyenizdeki Shift ↑ + ^ 3 + N tuşlarına basınız.



Görsel 2.1.2

Not

Yukarıdaki teknoloji uygulamasında da görüldüğü gibi tek fonksiyonların grafikleri orijine göre, çift fonksiyonların grafikleri ise y eksenine göre simetriktir.

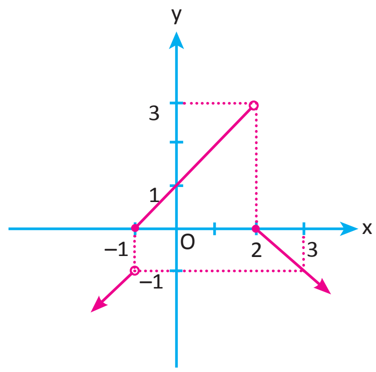
3. ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olmak üzere

$$y=f(x)=\begin{cases} x, & x<-1 \text{ ise} \\ x+1, & -1\le x<2 \text{ ise} \\ -x+2, & 2\le x \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM



$(-\infty,-1)$ aralığında $y=x$ birim fonksiyonun grafiği çizilir.
$[-1,2)$ aralığında $y=x+1$ doğrusunun grafiği için
$x=-1$ için $y=-1+1=0\Rightarrow(-1,0)$ ve
$x=2$ için $y=2+1=3\Rightarrow(2,3)$ noktaları işaretlenip birleştirilir.
$2\notin[0,2)$ olduğundan $(2,3)\notin f$ bulunur.
$[2,\infty)$ aralığında $y=-x+2$ doğrusunun grafiği çizilir.
$x=2$ için $y=-2+2=0\Rightarrow(2,0)$ ve
$x=3$ için $y=-3+2=-1\Rightarrow(3,-1)$
noktaları işaretlenip birleştirilir ve doğrunun grafiği çizilir.

4. ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olmak üzere

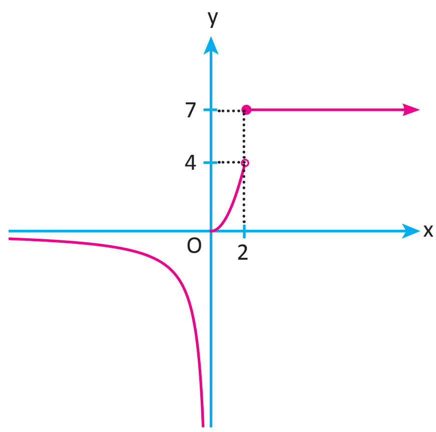
$$y=f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & x<0 \text{ ise} \\ x^2, & 0\le x<2 \text{ ise} \\ 7, & 2\le x \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

$(-\infty,0)$ aralığında

x	$\cdots-3$	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}\cdots$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\cdots-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	$-3\cdots$



$\frac{1}{x}$ ifadesinde $x\ne0$ olmalıdır. Tablodan da görüldüğü gibi x değerleri azaldığında y değerleri artarak 0 a yaklaşır, eğri x eksenine değmez. Benzer şekilde x değerleri artarak 0 a yaklaştığında y değerleri sürekli azalır, eğri y eksenine değmez. Tablodaki noktalar işaretlenip birleştirildiğinde grafik çizilmiş olur. $[0,2)$ aralığında

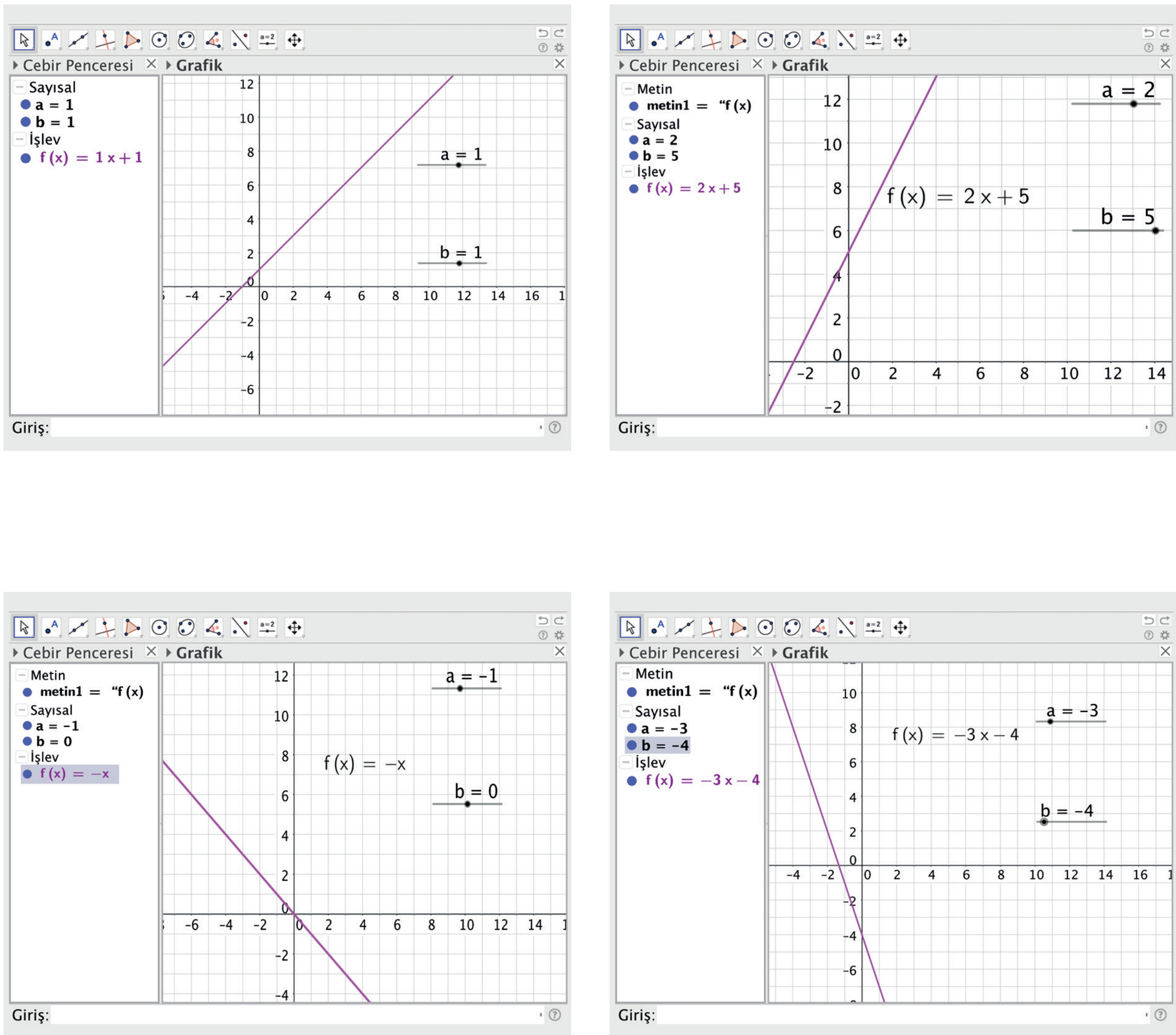
x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	2
$f(x)=x^2$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	4

Tabloda bulunan noktalar işaretlenip birleştirilirse $y=x^2$ fonksiyonunun grafiği çizilmiş olur.
$[2,\infty)$ aralığında $f(x)=7$ sabit fonksiyon olduğu için $y=7$ doğrusunun $[2,\infty)$ kısmı alınır.

Teknoloji Uygulaması

Aşağıda Görsel 2.1.3'te GeoGebra programı kullanılarak $f(x) = ax + b$ fonksiyonunun grafikleri incelenmiştir.

a=2	Sürgü aracını seçiniz. Açılan pencerede a isimli bir sürgü tanımlayınız.
a=2	Sürgü aracını seçiniz. Açılan pencerede b isimli bir sürgü tanımlayınız.
Giriş:	Giriş kısmına $f(x) = ax + b$ yazıp enter tuşuna basınız.
a = 1	a ve b sürgülerinin değerleri için fonksiyon grafiğindeki değişimi inceleyiniz.

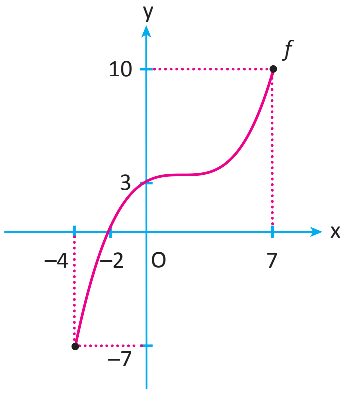


Görsel 2.1.3

3. Fonksiyon Grafiklerini Yorumlama

Fonksiyonun grafiği üzerindeki her noktadan y eksenine çizilen paralel doğruların x ekseninde kestiği noktalar fonksiyonun tanım kümesini, x eksenine çizilen paralel doğruların y ekseninde kestiği noktalar ise fonksiyonun görüntü kümesini verir.

1. ÖRNEK



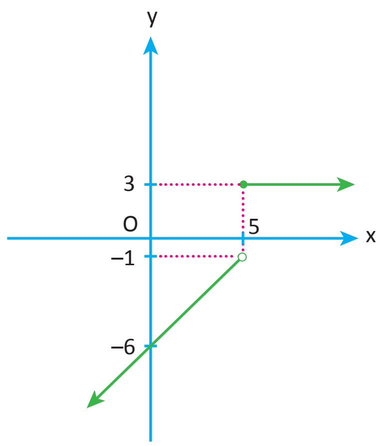
Grafiği verilen f fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Grafik üzerindeki her noktadan y eksenine çizilen paralel doğruların x ekseninde kestiği noktalar fonksiyonun tanım kümesinin elemanı olduğundan fonksiyonun tanım kümesi $\left[-4,7\right]$ olur.
Grafik üzerindeki her noktadan x eksenine çizilen paralel doğruların y ekseninde kestiği noktalar fonksiyonun görüntü kümesinin elemanı olduğundan görüntü kümesi $\left[-7,10\right]$ olur.

2. ÖRNEK

Grafiği verilen g fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.



ÇÖZÜM

Grafik üzerindeki her noktadan y eksenine paralel çizilen doğruların x ekseninde kestiği noktalar tanım kümesi olduğundan fonksiyonun tanım kümesi $\mathbb{R}$ olur.

Grafik üzerindeki her noktadan x eksenine paralel çizilen doğruların y ekseninde kestiği noktalar fonksiyonun görüntü kümesi olduğundan fonksiyonun görüntü kümesi $\left(-\infty,-1\right)\cup\left\{3\right\}$ olur.

3. ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $f(x) = 4x + 3$ fonksiyonu verilsin. Buna göre $A = [-2,1]$ için $f(A)$ kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

1. Yol

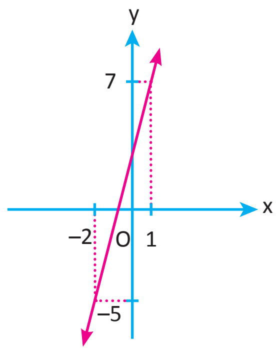
$x \in [-2,1]$ ise $-2 \le x \le 1$

$-8 \le 4x \le 4$

$-8+3 \le 4x+3 \le 4+3$

$-5 \le f(x) \le 7$ bulunur. O hâlde $f(A) = [-5,7]$ olur.

2. Yol



Fonksiyonun grafiği çizilir.
Çizilen grafikte A kümesinin uç noktalarında fonksiyonun görüntüleri alınır.

$f(-2) = 4 \cdot (-2) + 3 = -8 + 3 = -5$

$f(1) = 4 \cdot (1) + 3 = 4 + 3 = 7$

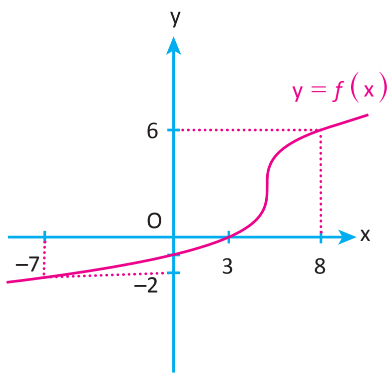
Bulunan görüntüler arasındaki aralık, istenen kümenin görüntü kümesi olur.

$f(A) = [-5,7]$ bulunur.

Tanım

$f: A \to B$, $y = f(x)$ fonksiyonunda x in f altındaki görüntüsü y,
y nin **ters görüntüsü** x tir.

4. ÖRNEK



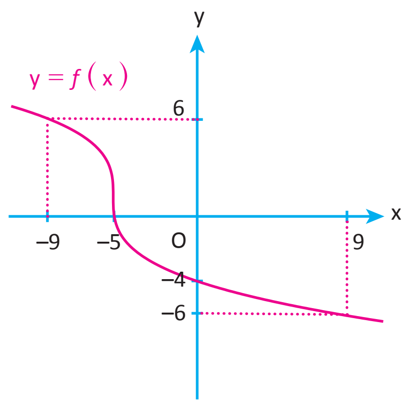
Grafiği verilen $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunda $[-2,6]$ aralığının ters görüntüsünü bulunuz.

ÇÖZÜM

Fonksiyonun grafiğine göre $f(8) = 6$ ve $f(-7) = -2$ bulunur.

O hâlde fonksiyonun görüntü kümesinde -2 elemanının ters görüntüsü -7, 6 elemanın ters görüntüsü 8 olur. Bu durumda $[-2,6]$ aralığının f fonksiyonu altındaki ters görüntü kümesi $[-7,8]$ aralığı elde edilir.

5. ÖRNEK



Grafiği verilen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ y=f(x)$ fonksiyonunun $[-6,6]$ aralığındaki ters görüntüsünü bulunuz.

ÇÖZÜM

Grafiği verilen fonksiyonun $x=-9$ ve $x=9$ noktalarının görüntüleri $f(-9)=6$ ve $f(9)=-6$ olur.
O hâlde fonksiyonun görüntü kümesinde 6 elemanının ters görüntüsü -9, -6 elemanının ters görüntüsü 9 olur. Bu durumda $[-6,6]$ aralığının f fonksiyonu altındaki ters görüntü kümesi $[-9,9]$ aralığı elde edilir.

6. ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ve $f(x)=x^3+2$ fonksiyonu verilsin. Buna göre $y=f(x)$ fonksiyonunun $[-25,66]$ aralığındaki ters görüntüsünü bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x)\in[-25,66]$ ise $-25\le f(x)\le 66$

$$-25\le x^3+2\le 66$$
$$-25-2\le x^3\le 66-2$$
$$-27\le x^3\le 64$$
$$-3\le x\le 4 \text{ bulunur.}$$

O hâlde $[-25,66]$ aralığındaki ters görüntüsü $A=[-3,4]$ olur.

7. ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ ve $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonu verilsin. Buna göre $y=f(x)$ fonksiyonunun $\left(\frac{1}{4},8\right]$ aralığındaki ters görüntüsünü bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x)\in\left(\frac{1}{4},8\right]$ ise $\frac{1}{4}< f(x)\le 8$

$$\frac{1}{4}<\left(\frac{1}{2}\right)^x\le 8$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^2<\left(\frac{1}{2}\right)^x\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$
$$-3\le x<2 \text{ bulunur.}$$

O hâlde $\left(\frac{1}{4},8\right]$ aralığındaki ters görüntüsü $A=[-3,2)$ olur.

Düşey Doğru Testi

Tanım

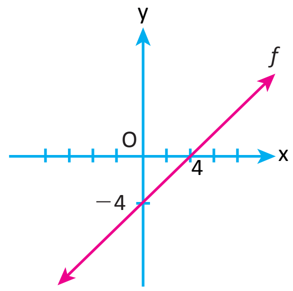
Grafiği verilen bir bağıntının fonksiyon olup olmadığını belirlemek için tanım aralığının her noktasından y eksenine paralel doğrular çizilir. Çizilen bu doğrular, grafiği yalnız bir noktada kesiyorsa bu bağıntı bir fonksiyondur. Diğer durumlarda bu bağıntı fonksiyon değildir.

Grafiği verilen bir bağıntının fonksiyon olup olmadığını tespit etmek için uygulanan bu teste **düşey (dikey) doğru testi** denir.

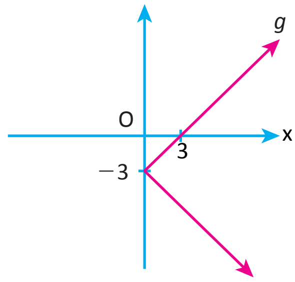
8. ÖRNEK

Aşağıda grafiği verilen bağıntıların fonksiyon olup olmadığını belirleyiniz.

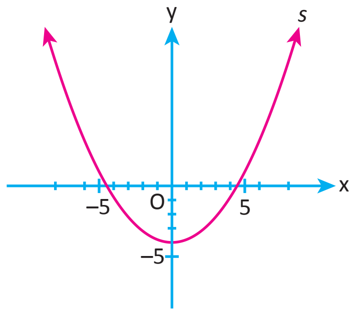
a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$



b) $g:\mathbb{R}^{+}\cup\{0\}\to\mathbb{R}$

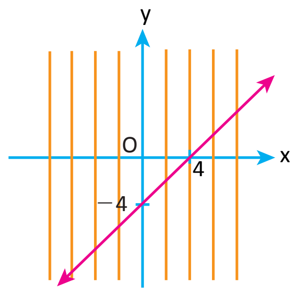


c) $s:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

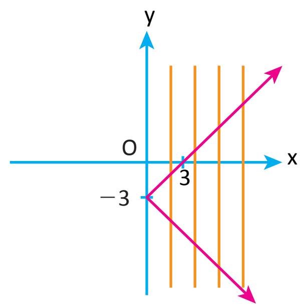


ÇÖZÜM

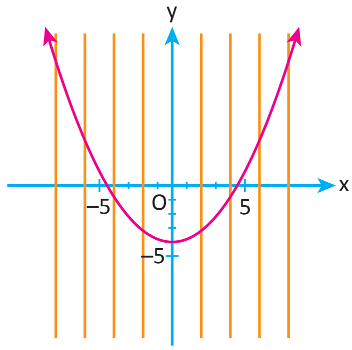
a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tanım kümesinin her noktasından Oy eksenine çizilen paralel doğrular, grafiği yalnız bir noktada kestiği için bu bağıntı bir fonksiyondur.



b) $g:\mathbb{R}^{+}\cup\{0\}\to\mathbb{R}$ tanım kümesinin herhangi bir noktasından Oy eksenine çizilen paralel doğrulardan en az biri grafiği iki noktada kestiği için bu bağıntı fonksiyon değildir.

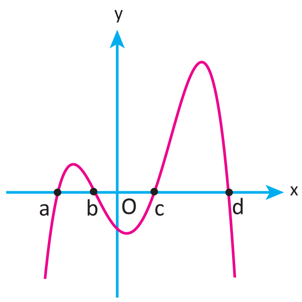


c) $s:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tanım kümesinin her noktasından Oy eksenine çizilen paralel doğrular grafiği yalnız bir noktada kestiği için bu bağıntı bir fonksiyondur.



Tanım

Grafiği verilen bir f fonksiyonunun x eksenini kestiği noktalar $y = f(x) = 0$ **denkleminin köklerine kökleridir.** Tanım kümesinin bir alt aralığının görüntüsü x ekseninin üzerinde kalıyorsa bu aralık $f(x) > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesidir. Tanım kümesinin bir alt aralığının görüntüsü x ekseninin altında kalıyorsa bu aralık $f(x) < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesidir.



Grafik 2.1.1

Yandaki grafikte

$f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = 0$ olduğundan a, b, c ve d

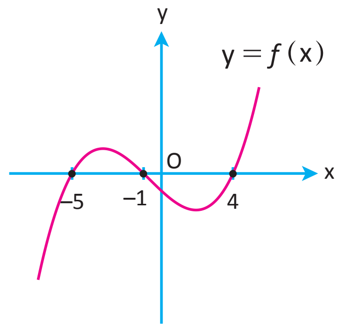
noktaları $f(x) = 0$ denkleminin kökleridir.

$f(x) > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $(a, b) \cup (c, d)$

$f(x) < 0$ eşitsizliğinin

çözüm kümesi $(-\infty, a) \cup (b, c) \cup (d, \infty)$ olur.

9. ÖRNEK



Grafiği verilen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunda $f(x) = 0$ denkleminin köklerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Fonksiyonun grafiği, x eksenini $-5, -1$ ve 4 noktalarında kesmektedir. Bu durumda

$f(-5) = f(-1) = f(4) = 0$ olur.

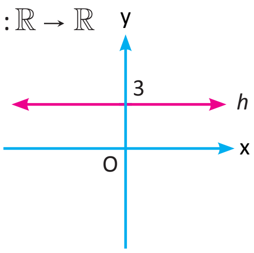
O hâlde $f(x) = 0$ denkleminin kökleri $-5, -1$ ve 4 olur.

Sıra Sizde

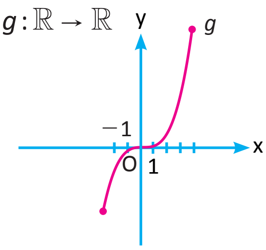
SORU

Aşağıda grafiği verilen bağıntıların fonksiyon olup olmadığını belirleyiniz.

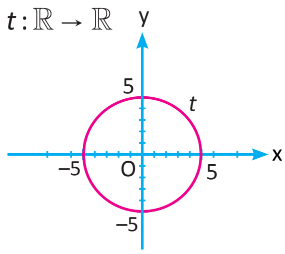
a) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

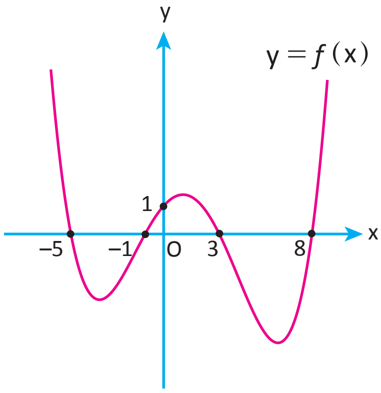


c) $t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



ÇÖZÜM

10. ÖRNEK



Grafiği verilen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ y=f(x)$ fonksiyonunda $f(x-2)=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Fonksiyonun grafiği x eksenini $-5,-1,3$ ve 8 noktalarında kesmektedir. Bu durumda $f(-5)=f(-1)=f(3)=f(8)=0$ olur.

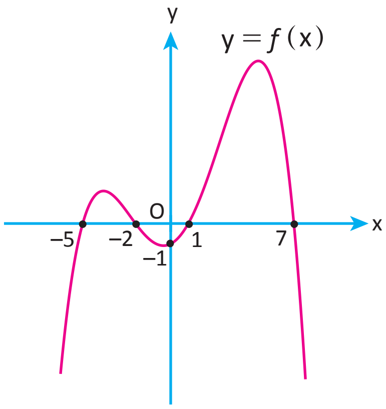
O hâlde

$f(x-2)=0$ denkleminin kökleri

$x-2=-5$ ise $x=-3$, $x-2=-1$ ise $x=1$, $x-2=3$ ise $x=5$, $x-2=8$ ise $x=10$ olur.

$f(x-2)=0$ denkleminin çözüm kümesi $\{-3,1,5,10\}$ biçimindedir.

11. ÖRNEK



Grafiği verilen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ y=f(x)$ fonksiyonunda $f(x)\geq 0$ eşitsizliğini sağlayan x tam sayı değerlerinin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x)\geq 0$ eşitsizliğini sağlayan değerler, grafiğin x ekseninin üzerinde kaldığı aralıklardadır.

$f(x)\geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $[-5,-2]\cup[1,7]$ olur.

Bu kümede bulunan tam sayı değerlerinin toplamı

$\cancel{-5}\cancel{-4}\cancel{-3}\cancel{-2}+1\cancel{+2}\cancel{+3}\cancel{+4}\cancel{+5}+6+7=14$ olur.

4. Doğrusal Fonksiyonlarda Güncel Uygulamalar

1. ÖRNEK

Bir firmanın zamana (x yıl) bağlı gelir (1000 TL) fonksiyonu $g(x)$, gider fonksiyonu $h(x)$ tir.
$0 \leq x \leq 8$ için $g(x) = x + 2, h(x) = \frac{3}{4}x + 3$ olarak verildiğine göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) $g(x)$ ve $h(x)$ fonksiyonlarının grafiklerini aynı koordinat sisteminde çiziniz.

b) Gelir ve giderin hangi yılda eşit olduğunu bulunuz.

c) Hangi yıldan itibaren gelir gider farkının 1000 TL ve üzerinde olacağını bulunuz.

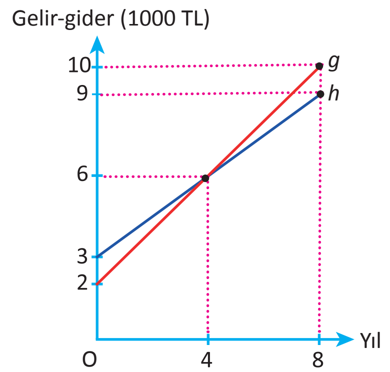
ç) Hangi yılda gelirin gidere oranının $\frac{8}{9}$ olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

a)

x	0	−2
$g(x)$	2	0

x	0	−4
$h(x)$	3	0



b) Gelir ve giderin eşit olduğu x değeri, grafikte görüldüğü gibi iki doğrunun kesişme noktasıdır.
Bu nokta $h(x) = g(x)$ denkleminin çözüm kümesidir.

$$\frac{3}{4}x + 3 = x + 2$$

$$\frac{3}{4}x - x = 2 - 3$$

$$-\frac{x}{4} = -1 \Rightarrow x = 4 \text{ bulunur.}$$ O hâlde firmanın 4. yıldaki gelir ve gideri birbirine eşit olur.

c) Gelir gider farkının 1000 TL ve üzerinde olması için

$$g(x) - h(x) \geq 1$$

$$x + 2 - \left(\frac{3}{4}x + 3\right) \geq 1$$

$$x + 2 - \frac{3}{4}x - 3 \geq 1$$

$$\frac{x}{4} - 1 \geq 1$$

$$\frac{x}{4} \geq 2 \text{ olmalıdır.}$$

Bu durumda 8. yıldan itibaren gelir gider farkı 1000 TL ve üzerinde olur.

ç) x yıl sonra gelirin gidere oranı $\frac{8}{9}$ ise $\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{8}{9}$ olmalıdır. O hâlde

$$\frac{x+2}{\frac{3}{4}x+3} = \frac{8}{9} \Rightarrow 9 \cdot (x+2) = 8 \cdot \left(\frac{3}{4}x + 3\right)$$

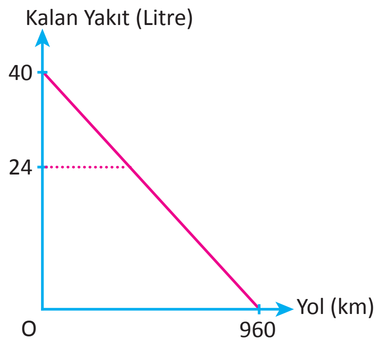
$$\Rightarrow 9x + 18 = 6x + 24$$

$$\Rightarrow 9x - 6x = 24 - 18$$

$$\Rightarrow 3x = 6$$

$\Rightarrow x = 2$ bulunur. Bu durumda 2. yılda gelir gider oranı $\frac{8}{9}$ olur.

2. ÖRNEK



Yanda bir aracın km cinsinden gittiği yola bağlı olarak litre cinsinden kalan yakıt miktarını gösteren grafik verilmiştir. Buna göre depoda 24 L yakıt kaldığında aracın kaç km yol gittiğini bulunuz.

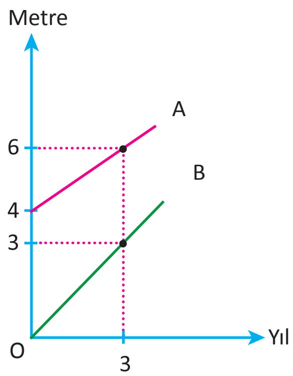
ÇÖZÜM

Grafiğe göre aracın tükettiği yakıt ile gittiği yol arasında orantı kurulduğunda
40 L yakıt ile 960 km yol gidiyorsa $(40-24)$ L yakıt ile kaç km yol gideceği bulunur.

$$\frac{16\,\text{L}}{40\,\text{L}} = \frac{x\,\text{km}}{960\,\text{km}} \Rightarrow 40 \cdot x = 16 \cdot 960$$

$$\Rightarrow x = 384 \text{ km yol gider.}$$

3. ÖRNEK



Yandaki doğrusal grafikler A ve B ağaçlarının zamana bağlı boylarındaki değişimi göstermektedir.
Buna göre kaç yıl sonra A nın boyunun B nin boyuna oranı $\frac{5}{6}$ olur?

ÇÖZÜM

A ve B ağaçlarının boylarındaki değişimi gösteren grafikler doğrusal olduğundan
$f_A(x) = a_1x + b_1$ ve $f_B(x) = a_2x + b_2$ biçimindedir. O hâlde

x	0	3
$f_A(x)$	4	6

$f_A(0) = a_1 \cdot 0 + b_1 = 4 \Rightarrow b_1 = 4$ ve
$f_A(3) = a_1 \cdot 3 + 4 = 6 \Rightarrow 3a_1 = 2 \Rightarrow a_1 = \frac{2}{3}$ olduğundan $f_A(x) = \frac{2}{3}x + 4$ bulunur.

x	0	3
$f_B(x)$	0	3

$f_B(0) = a_2 \cdot 0 + b_2 = 0 \Rightarrow b_2 = 0$ ve
$f_B(3) = a_2 \cdot 3 + 0 = 3 \Rightarrow 3a_2 = 3 \Rightarrow a_2 = 1$ olduğundan $f_B(x) = x$ bulunur.

Buna göre $\frac{f_A(x)}{f_B(x)} = \frac{5}{6}$ oranından

$$\frac{\frac{2}{3}x + 4}{x} = \frac{5}{6} \Rightarrow 5 \cdot x = 6 \cdot \left(\frac{2}{3}x + 4\right)$$

$$\Rightarrow 5 \cdot x = 4x + 24$$

$\Rightarrow x = 24$ yıl sonra A nın boyunun B nin boyuna oranı $\frac{5}{6}$ olur.

ALIŞTIRMALAR-1

1. $A=\{-3,0,1\}$ ve $B=\{1,3,5,10,13\}$ kümeleri veriliyor. A dan B ye tanımlanan aşağıdaki bağıntıların fonksiyon olup olmadığını inceleyiniz.

a) $f_1=\{(-3,5),(0,13)\}$

b) $f_2=\{(-3,1),(1,10),(0,3)\}$

c) $f_3=\{(-3,3),(0,3),(1,3)\}$

ç) $f_4=\{(-3,10),(0,5),(1,5)\}$

d) $f_5=\{(0,10),(0,13),(-3,5),(1,10)\}$

2. Aşağıda verilenlerin fonksiyon olup olmadığını inceleyiniz.

a) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ f(x)=2x-5$

b) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N},\ f(x)=\dfrac{3x+1}{x+2}$

c) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N},\ f(x)=4x-9$

ç) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{2-3x}$

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{-2x+1}{x+3}$

3. $f:[-3,2)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{5x-3}{4}$ olduğuna göre görüntü kümesini bulunuz.

4. $f:A\to B,\ f(x)=\dfrac{2x+5}{3}$ ve $f(A)=[5,7]$ ise A kümesinde kaç tam sayı olduğunu bulunuz.

5. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$f(x)=x^2-4x+9$ olduğuna göre

$f(2018)-f(-2014)$ işleminin sonucunu bulunuz.

6. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$f(x)=x^2-3x+m-1$ olmak üzere $f(2)=5$ ise $f(-2)$ değerini bulunuz.

7. f tanımlı olduğu durumlarda

$f\left(\dfrac{5x-2}{2x+3}\right)=\dfrac{4x+6}{5x-2}+1$ olmak üzere $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ değerini bulunuz.

8. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$f(x)=x^{125}-3x^{124}-x^3+2$ olmak üzere

$f(1)+f(3)$ toplamının sonucunu bulunuz.

9. $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}$ fonksiyonu için $h(x)=f(2)\cdot f(3)\cdot\ldots\cdot f(x)$ şeklinde h fonksiyonu tanımlanıyor.

Buna göre $h(7)$ değerini bulunuz.

10. $f:\mathbb{R}-\{0\}\rightarrow\mathbb{R},\ f\left(\frac{3}{x}\right)-3\cdot f\left(\frac{x}{3}\right)=9x$ olduğuna göre $f(3)$ değerini bulunuz.

11. $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, f birim fonksiyondur.
$f(x)=(m+5)x-n+2$ olduğuna göre $m\cdot n$ çarpımının sonucunu bulunuz.

12. $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$
$f(x)=mx+n$ ve $g(x)=(n+1)x+2m$ olmak üzere $(f-g)(x)$ fonksiyonu, birim fonksiyon olduğuna göre $m\cdot n$ çarpımının sonucunu bulunuz.

13. $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+4}{4x^2+5x-8}$ fonksiyonu, sabit fonksiyon olduğuna göre $a+b$ toplamını bulunuz.

14. f doğrusal fonksiyon olmak üzere
$f(0)=3$, $f(-1)=4$ ise $f(2)$ değerini bulunuz.

15. f doğrusal fonksiyon ve
$f(2x+1)+f(x-2)=-3x+5$ olduğuna göre $f(1)$ değerini bulunuz.

16. Bir otoparkta park ücreti olarak 2 saate kadar (2. saat dâhil) 8 TL, 2. saatten sonra her bir saat için 3 TL alınmaktadır. Buna göre otopark ücretinin zamana bağlı fonksiyonunu bulunuz.

17. Bir pazarlamacı çalıştığı firmadan 1800 lira maaş ayrıca tanesi 50 lira olan ürünlerden her satışında %3 prim almaktadır. Bu pazarlamacı, bir ayda x adet ürün sattığında maaşı f olduğuna göre bu pazarlamacının sattığı ürün ve aldığı maaş arasındaki ilişkiyi gösteren fonksiyonu yazınız.

10.2.2. İKİ FONKSİYONUN BİLEŞKESİ VE BİR FONKSİYONUN TERSİ

1. Fonksiyonların Bire Birliğinin ve Örtenliğinin İncelenmesi

Yatay Doğru Testi

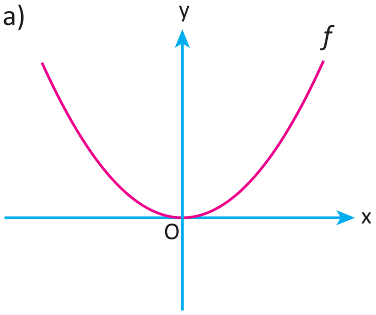
Tanım

Grafiği verilen bir $f(x)$ fonksiyonunun bire bir veya örten olup olmadığını belirlemek için değer aralığının her noktasından x eksenine paralel doğrular çizilir. Çizilen paralel doğrular, fonksiyonun grafiğini en az bir noktada kesiyorsa bu fonksiyon örtendir. Çizilen paralel doğrular, fonksiyonun grafiğini yalnız bir noktada kesiyorsa bu fonksiyon bire birdir. x eksenine paralel doğrular çizilerek yapılan bu işleme **yatay doğru testi** denir.

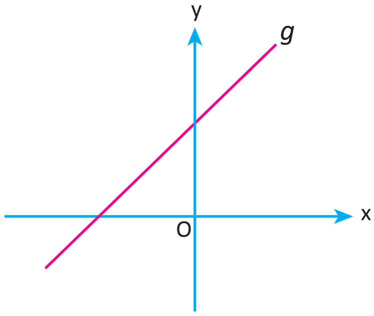
1. ÖRNEK

Aşağıda grafiği verilen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonların bire bir ve örten olma durumlarını inceleyiniz.

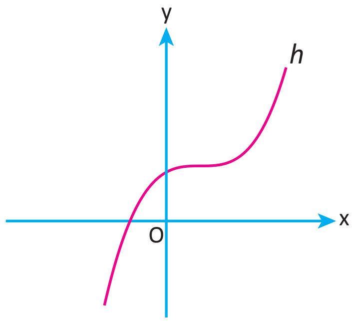
a)



b)

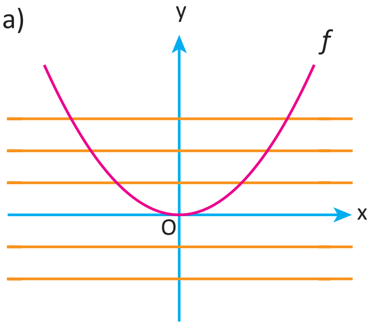


c)



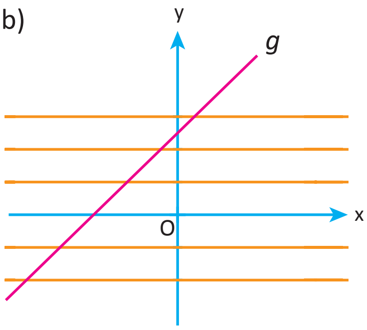
ÇÖZÜM

a)



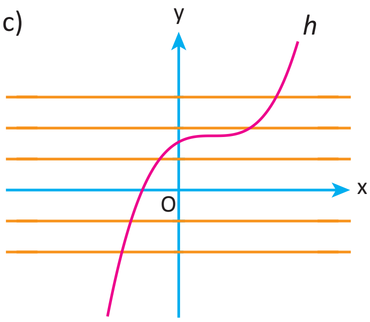
Verilen fonksiyonun grafiğinde çizilen paralel doğrular birden fazla noktada grafiği kestiğinden bu fonksiyon bire bir değildir. Paralel doğrular, x ekseni altında kalan kısımda fonksiyonun grafiğini kesmediğinden bu fonksiyon örten değildir.

b)



Verilen fonksiyonun grafiğinde çizilen paralel doğrular yalnız bir noktada grafiği kestiğinden bu fonksiyon bire birdir. Paralel doğrular, değer kümesinin her noktasında fonksiyonu kestiğinden bu fonksiyon örtendir.

c)



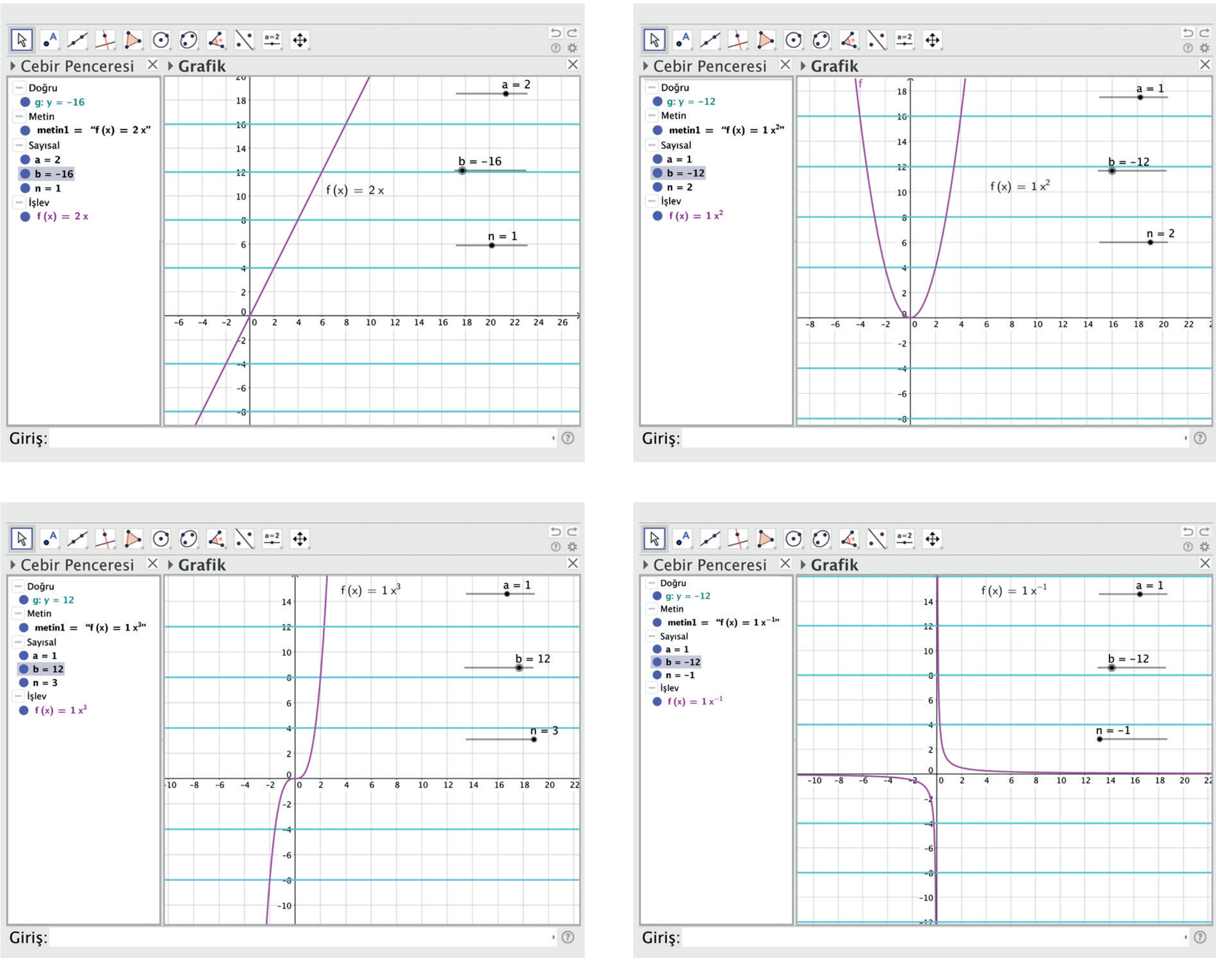
Verilen fonksiyonun grafiğinde çizilen paralel doğrular yalnız bir noktada grafiği kestiğinden bu fonksiyon bire birdir. Paralel doğrular, değer kümesinin her noktasında fonksiyonu kestiğinden bu fonksiyon örtendir.

Teknoloji Uygulaması

Aşağıda Görsel 2.2.1’de GeoGebra programı kullanılarak $f(x) = ax^n + b$ fonksiyonun grafikleri incelenmiştir.

a=2	Sürgü aracını seçiniz. Açılan pencerede a, b, n isimli sürgüler oluşturup bu sürgülerin minimum ve maksimum noktalarını tanımlayınız.
Giriş:	Giriş kısmına $f(x) = ax^\wedge n$ yazıp enter tuşuna basınız.
a = 1	y sürgüsünün değerleri için fonksiyon grafiğinde bire birliği ve örtenliği inceleyiniz.

“^n” ifadesini yazabilmek için klavyenizdeki Shift + ^ 3 + N tuşlarına basınız.



Görsel 2.2.1

Not

Yukarıdaki teknoloji uygulamasından da görüldüğü gibi tek dereceli fonksiyonlar bire bir ve örten, çift dereceli fonksiyonlar ise bire bir ve örten değildir.

2. Bileşke Fonksiyon

Aşağıda incir ile ilgili farklı durumlar gösterilmiştir (Görsel 2.2.2).

Yaş incir Kuru incir Pekmezli kuru incir tatlısı

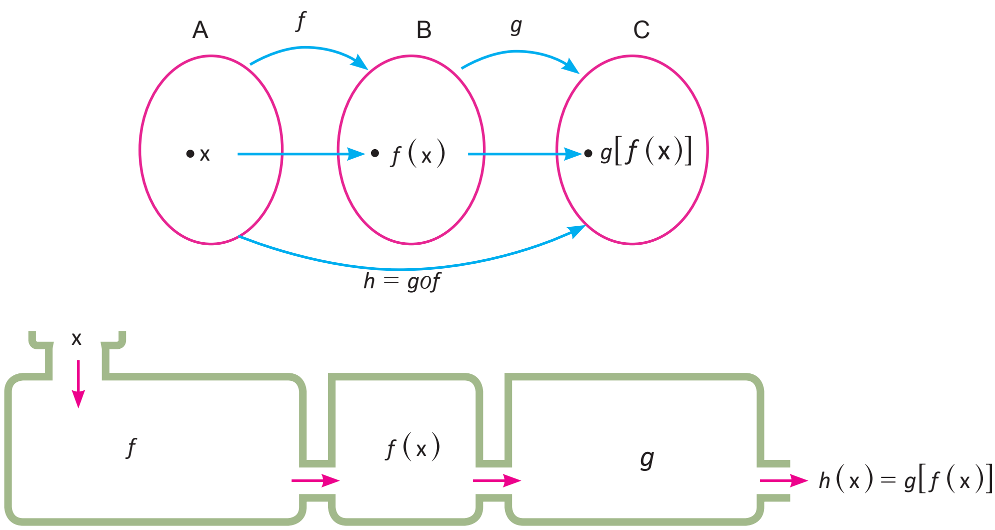
Görsel 2.2.2

Burada *f* fonksiyonu yaş inciri kuru incire dönüştüren bir fonksiyon iken *g* fonksiyonu kuru inciri pekmezli kuru incir tatlısına dönüştüren farklı bir fonksiyondur.

Tanım

$f: A \to B$ örten ve $g: B \to C$ fonksiyonları verilsin. A nın elemanlarını, *f* ve *g* fonksiyonlarıyla C nin elemanları ile eşleyen fonksiyona **bileşke fonksiyonu** denir.

Başka bir ifadeyle $f: A \to B$ örten ve $g: B \to C$ fonksiyonları verilsin.
$\forall x \in A$ için $h(x) = g[f(x)]$ şeklinde tanımlanan $h: A \to C$ fonksiyonuna *f* ve *g* fonksiyonlarının bileşke fonksiyonu denir ve $h = gof$ ile gösterilir (Şekil 2.2.1).
$gof: A \to C, (gof)(x) = g[f(x)]$ şeklinde gösterilir ve "*g* bileşke *f*" diye okunur.



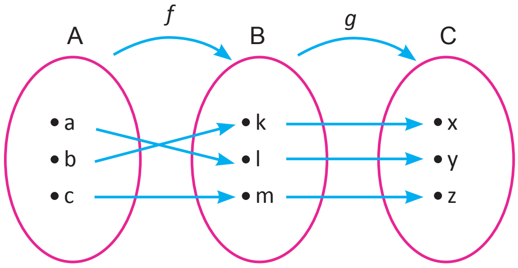
Şekil 2.2.1

Not

Bileşke fonksiyonlarda işlemler sağdan sola doğru yapılır.

1. ÖRNEK

Aşağıda $f: A \to B$ ve $g: B \to C$ fonksiyonları verilmiştir.



Buna göre $(gof)(b)$ ve $(gof)(c)$ bileşke işlemlerinin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

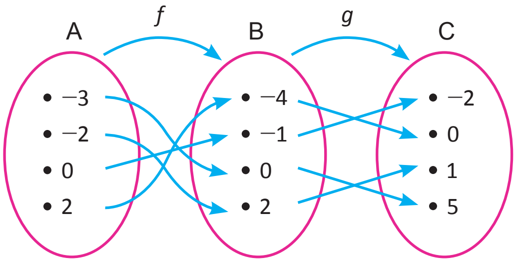
$(gof)(b) = g[f(b)] = g(k) = x$ ve
$(gof)(c) = g[f(c)] = g(m) = z$ sonucu elde edilir.

2. ÖRNEK

$f = \{(-3,0),(-2,2),(0,-1),(2,-4)\}$ ve
$g = \{(-4,0),(-1,-2),(0,5),(2,1)\}$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre gof bileşke fonksiyonunu bulunuz.

ÇÖZÜM

f ve g fonksiyonları, Venn şeması üzerinde gösterilirse



$gof = \{(-3,5),(-2,1),(0,-2),(2,0)\}$ olarak bulunur.

Özellikler

1. Fonksiyonlarda bileşke işleminin değişme özelliği yoktur, $fog \neq gof$ dir.
2. Bir f fonksiyonunun birim fonksiyon $(I(x) = x)$ ile bileşkesi kendisine eşittir.
   $foI = Iof = f$ olur.
3. Fonksiyonlarda bileşke işleminin birleşme özelliği vardır.
   $fogoh = (fog)oh = fo(goh)$ olur.

3. ÖRNEK

$f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = 3x + 4$ ve $g(x) = 5x - 2$ fonksiyonları için fog ve gof fonksiyonlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

$(fog)(x) = f[g(x)] = f(5x-2) = 3 \cdot (5x-2) + 4$
$= 15x - 6 + 4 = 15x - 2$ bulunur.

$(gof)(x) = g[f(x)] = g(3x+4) = 5 \cdot (3x+4) - 2$
$= 15x + 20 - 2 = 15x + 18$ bulunur.

Örnekte de görüldüğü gibi $(fog)(x) \neq (gof)(x)$ olur.

4. ÖRNEK

$f, I: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x$ ve $I(x) = x$ olmak üzere foI ve Iof fonksiyonlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$(foI)(x) = f[I(x)]$$
$$= f(x)$$
$$= x^3 + 2x \text{ ve}$$
$$(Iof)(x) = I[f(x)]$$
$$= I(x^3 + 2x)$$
$$= x^3 + 2x \text{ sonuçları bulunur.}$$

Görüldüğü gibi bu iki fonksiyon için $foI = Iof = f$ olur.

5. ÖRNEK

$f, g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$, $g(x) = x + 4$ ve $h(x) = x^2 + 1$ olmak üzere $[fo(goh)](x)$ ve $[(fog)oh](x)$ fonksiyonlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$(fogoh)(x) = fo[(goh)(x)]$$
$$= fo(g[h(x)])$$
$$= fo[g(x^2+1)]$$
$$= f(x^2+1+4)$$
$$= f(x^2+5)$$
$$= x^2+5-1$$
$$= x^2+4$$

$$[(fog)oh](x) = (f[g(x)])o[h(x)]$$
$$= [(x+4)-1]o(x^2+1)$$
$$= (x+3)o(x^2+1)$$
$$= x^2+4$$

sonuçları bulunur. Buradan $(fog)oh = fo(goh)$ olduğu görülür.

6. ÖRNEK

$f, g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$f(4x+3) = 2x^3 - x^2 + 1$

$g(3x+1) = -2x + 3$

$h(x) = x + 2$ fonksiyonları veriliyor.

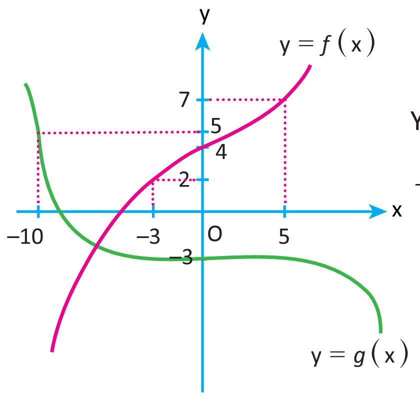
Buna göre $[fo(goh)](5) = [(fog)oh](5)$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

$$fo[(goh)(5)] = fo(g[h(5)])$$
$$= fo[g(7)]$$
$$= f(-1)$$
$$= 2\cdot(-1)^3 - (-1)^2 + 1$$
$$= -2 - 1 + 1$$
$$= -2 \text{ bulunur.}$$

$(fogoh)(5) = [fo(goh)](5) = [(fog)oh](5)$ olduğundan $[fo(goh)](5) = [(fog)oh](5) = -2$ olur.

7. ÖRNEK



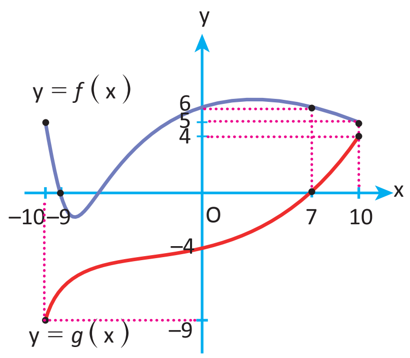
Yanda verilen $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının grafiklerine göre $\dfrac{(fog)(0)-(f\cdot g)(0)}{(fog)(-10)}$ ifadesinin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{(fog)(0)-(f\cdot g)(0)}{(fog)(-10)}=\frac{f[g(0)]-f(0)\cdot g(0)}{f[g(-10)]}=\frac{f(-3)-4\cdot(-3)}{f(5)}=\frac{2+12}{7}$$

$x = 2$ bulunur.

8. ÖRNEK



Yanda verilen f ve g fonksiyonlarının grafiklerine göre $(fog)(7)+f(10)+(gof)(-9)+g(-10)$ toplamının sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Grafiklere göre $(fog)(7)+f(10)+(gof)(-9)+g(-10)=f[g(7)]+5+g[f(-9)]+(-9)$

$=f(0)+5+g(0)-9$

$=6+5+(-4)-9$

$=-2$ sonucu elde edilir.

9. ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olmak üzere $f(x)=x^2-5x-2$ fonksiyonu için $(fofof)(5)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(fofof)(5)=(fof)[f(5)]=(fof)[5^2-5\cdot 5-2]=(fof)[25-25-2]=f[f(-2)]$

$=f[(-2)^2-5\cdot(-2)-2]$

$=f(4+10-2)$

$=f(12)$

$=12^2-5\cdot 12-2$

$=144-60-2$

$=82$ sonucu bulunur.

10. ÖRNEK

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x - 5$ ve $g(x+1) = f(x-3)$ olduğuna göre $(gof)(3)$ bileşke işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}(gof)(3) = g[f(3)] = g(2 \cdot 3 - 5) = g(6-5) &= g(1)\\ &= g(0+1)\\ &= f(0-3), \quad (g(x+1) = f(x-3))\\ &= f(-3)\\ &= 2 \cdot (-3) - 5\\ &= -6 - 5\\ &= -11 \text{ sonucu bulunur.}\end{aligned}$$

11. ÖRNEK

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ doğrusal fonksiyon olmak üzere $(fof)(x) = 9x + 16$ olduğuna göre $f(0)$ değerlerinin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

f doğrusal fonksiyon olduğundan $f(x) = ax + b$ formundadır. O hâlde

$$\begin{aligned}(fof)(x) = f[f(x)] = f(ax+b) &= a \cdot (ax+b) + b = 9x + 16\\ &\Rightarrow a^2 \cdot x + a \cdot b + b = 9x + 16\\ &\Rightarrow a^2 = 9 \text{ ve } a \cdot b + b = 16\\ &\Rightarrow (a = 3 \text{ veya } a = -3) \text{ ve } (3b + b = 16 \text{ veya} -3b + b = 16)\\ &\Rightarrow (a = 3 \text{ veya } a = -3) \text{ ve } (4b = 16 \text{ veya} -2b = 16)\\ &\Rightarrow (a = 3 \text{ veya } a = -3) \text{ ve } (b = 4 \text{ veya } b = -8)\\ &\Rightarrow f(x) = 3x + 4 \text{ veya } f(x) = -3x - 8 \text{ bulunur. Buradan}\\ &\Rightarrow f(0) = 3 \cdot 0 + 4 = 0 + 4 = 4 \text{ veya } f(0) = -3 \cdot 0 - 8 = 0 - 8 = -8\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Bu durumda $f(0)$ değerlerinin toplamı $4 + (-8) = 4 - 8 = -4$ bulunur.

12. ÖRNEK

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x$ olduğuna göre $\underbrace{(fofofo...of)}_{n \text{ tane}}(x)$ bileşke işlemini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(fof)(x) = f[f(x)] = f(3x) = 3 \cdot 3x = 9x = 3^2 \cdot x$

$(fofof)(x) = f[(fof)(x)] = f(9x) = 3 \cdot 9x = 27x = 3^3 \cdot x$

$(fofofof)(x) = f[(fofof)(x)] = f(27x) = 3 \cdot 27x = 81x = 3^4 \cdot x$ olur. Bu durumda

$\underbrace{(fofofo...of)}_{n \text{ tane}}(x) = 3^n \cdot x$ kuralı yazılabilir.

13. ÖRNEK

$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$ ve $g(x) = -x$ olduğuna göre $\underbrace{(fogofogo...ofog)}_{24\text{ tane}}(x)$ bileşke işlemini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$(fog)(x) = f[g(x)] = f(-x) = 3\cdot(-x) = -3x = (-1)^1 \cdot 3^1 \cdot x$$

$$(fogofog)(x) = (fog)[(fog)(x)] = (fog)(-3x) = -3\cdot(-3x) = 9x = (-1)^2 \cdot 3^2 \cdot x$$

$$(fogofogofog)(x) = (fog)[(fogofog)(x)] = (fog)(9x) = -3\cdot 9x = -27x = (-1)^3 \cdot 3^3 \cdot x \text{ olur.}$$

Bu durumda $\underbrace{(fogofogo...ofog)}_{2n\text{ tane}}(x) = (-1)^n \cdot 3^n \cdot x$ kuralı yazılabilir. Böylece

$$\underbrace{(fogofogo...ofog)}_{24\text{ tane}}(x) = (-1)^{12} \cdot 3^{12} \cdot x = 3^{12} \cdot x \text{ sonucu bulunur.}$$

14. ÖRNEK

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tanımlanan f fonksiyonu, $f(x) = 2^{x-1}$ olduğuna göre $f(3x)$ in $f(2x+1)$ türünden değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(2x+1) = 2^{2x+1-1} = 2^{2x} = (2^x)^2$ ve

$f(3x) = 2^{3x-1} = 2^{3x} \cdot 2^{-1} = (2^x)^3 \cdot 2^{-1}$ bulunur.

$f(2x+1)$ fonksiyonunda $f(2x+1) = (2^x)^2 \Rightarrow 2^x = \sqrt{f(2x+1)}$ olur.

$f(3x)$ fonksiyonunda 2^x yerine $\sqrt{f(2x+1)}$ yazılırsa

$$f(3x) = (2^x)^3 \cdot 2^{-1} = \left(\sqrt{f(2x+1)}\right)^3 \cdot 2^{-1} = \frac{\left(\sqrt{f(2x+1)}\right)^3}{2} \text{ sonucu bulunur.}$$

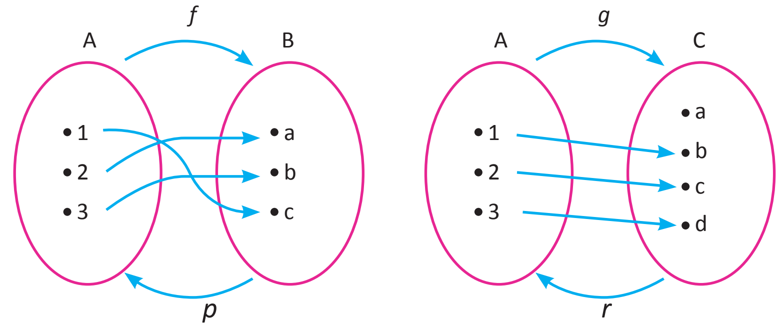
Sıra Sizde

SORU

Tanımlı olduğu durumlarda f fonksiyonu için $f(x) = \dfrac{2x+k}{x-1}$ ve $(fof)(x) = \dfrac{x+5}{2x+1}$ eşitlikleri veriliyor. Buna göre $f(k)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

3. Bir Fonksiyonun Tersi



Şekil 2.2.2

$f:A\to B$, $g:A\to C$ ve $h:A\to D$ fonksiyonlarındaki tanım ve değer kümeleri yer değiştirdiğinde oluşan yeni bağıntılar $p:B\to A, r:C\to A$ ve $s:D\to A$ olur. Bu durumda p bağıntısı, fonksiyon olma koşullarını sağlar.

$g:A\to C$ fonksiyonu bire birdir fakat örten değildir. $r:C\to A$ bağıntısında a elemanı herhangi bir elemanla eşleşmediğinden fonksiyon değildir.

$h:A\to D$ fonksiyonu örtendir fakat bire bir değildir. $s:D\to A$ bağıntısında d elemanı iki elemanla eşleştiğinden fonksiyon değildir (Şekil 2.2.2).

Sonuç

$f:A\to B$ bire bir ve örten ise $p:B\to A$ bir fonksiyon olur.

Tanım

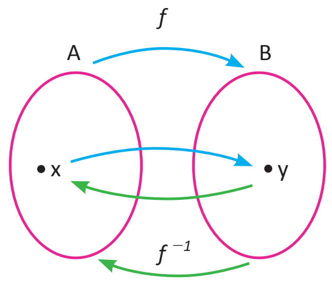
$f:A\to B$ fonksiyonu bire bir ve örten fonksiyon olmak üzere her $x\in A$ ve $y\in B$ için $(gof)(x)=x$ ve $(fog)(y)=y$ eşitliklerini sağlayan $g:B\to A$ fonksiyonuna f nin **ters fonksiyonu** denir, $g=f^{-1}$ şeklinde gösterilir (Şekil 2.2.3).

$f:A\to B$ ise $f^{-1}:B\to A$
$x\to y$ $\quad$ $y\to x$

Başka bir ifadeyle

$y=f(x)$ ise $x=f^{-1}(y)$ olur.

$(x,y)\in f$ ise $(y,x)\in f^{-1}$ olur.



Şekil 2.2.3

1. ÖRNEK

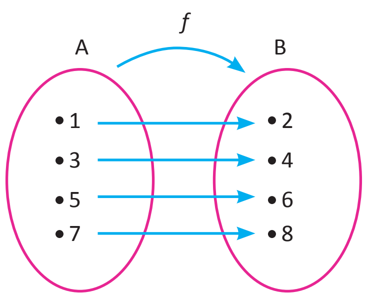
$A=\{1,3,5,7\}, B=\{2,4,6,8\}$ olmak üzere $f:A\to B$ $f=\{(1,2),(3,4),(5,6),(7,8)\}$ fonksiyonu veriliyor. f fonksiyonunun tersi varsa bulunuz.

ÇÖZÜM

Bir fonksiyonun tersinin olabilmesi için bire bir ve örten olması gerekir. f fonksiyonunun Venn şeması ile gösterimi yanda verilmiştir. Buna göre f fonksiyonun tanım kümesindeki bütün elemanlar değer kümesinde bulunan farklı elemanlarla eşleştiğinden bu fonksiyon bire birdir. Değer kümesinde eşleşmeyen eleman olmadığından bu fonksiyon örtendir. O hâlde f fonksiyonunun tersi vardır.

$(x,y)\in f$ ise $(y,x)\in f^{-1}$ olduğunda

$f^{-1}=\{(2,1),(4,3),(6,5),(8,7)\}$ bulunur.



Özellikler

1. Bir fonksiyonun tersi ile bileşkesi birim fonksiyonu verir. Buna göre $fof^{-1}=I$ veya $f^{-1}of=I$ olur.
2. $(fog)^{-1}(x)=(g^{-1}of^{-1})(x)$ olur.
3. $(f^{-1})^{-1}(x)=f(x)$ olur.

2. ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b,(a\neq 0)$ doğrusal fonksiyonunun tersini araştırınız.

ÇÖZÜM

Bir fonksiyonun tersinin olabilmesi için bire bir ve örten olması gerekir.

Bire Birlik: $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}, x_1\neq x_2$ iken $f(x_1)\neq f(x_2)$ oluyorsa f bire birdir.

$f(x_1)=a\cdot x_1+b$ ve $f(x_2)=a\cdot x_2+b$ olduğundan $f(x_1)\neq f(x_2)$ dir. f bire birdir.

Örtenlik: $\forall y\in\mathbb{R}$ için $\exists x\in\mathbb{R}$ varsa f örtendir.

$y=f(x)=ax+b$ ifadesinde x yalnız bırakılırsa

$\Rightarrow ax=y-b$

$\Rightarrow x=\dfrac{y-b}{a}\in\mathbb{R}$ vardır. f örtendir.

f fonksiyon bire bir ve örten olduğundan f nin tersi vardır. Buna göre

$y=f(x)$ ise $x=f^{-1}(y)$ olduğundan $x=f^{-1}(y)=\dfrac{y-b}{a}$ dır. Değişken x olarak değiştirilirse

$f^{-1}(x)=\dfrac{x-b}{a}$ sonucuna ulaşılır.

Sonuç

$a,b\in\mathbb{R}, a\neq 0$ olmak üzere $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b$ ise $f^{-1}(x)=\dfrac{x-b}{a}$ olur.

3. ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x+5$ fonksiyonunun tersini bulunuz.

ÇÖZÜM

Bir fonksiyonun tersinin olabilmesi için bire bir ve örten olması gerekir. Verilen f fonksiyonu doğrusal fonksiyon olduğundan bire bir ve örtendir.

O hâlde f fonksiyonunun tersi vardır.

1. Yol

$y=3x+5\Rightarrow 3x=y-5$

$x=\dfrac{y-5}{3}$ bulunur.

$y=f(x)$ ise $x=f^{-1}(y)$ olduğundan $x=f^{-1}(y)=\dfrac{y-5}{3}$ bulunur. Değişken x olarak değiştirilirse $f^{-1}(x)=\dfrac{x-5}{3}$ elde edilir.

2. Yol

$f(x)=ax+b$ ise $f^{-1}(x)=\dfrac{x-b}{a}$ olduğundan $f(x)=3x+5$ ise $f^{-1}(x)=\dfrac{x-5}{3}$ bulunur.

4. ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-2x+3$ fonksiyonu veriliyor.

a) $fof^{-1}=I$

b) $(f^{-1})^{-1}(x)=f(x)$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

$f(x)=ax+b$ ise $f^{-1}(x)=\dfrac{x-b}{a}$ olduğundan $f(x)=-2x+3$ ise $f^{-1}(x)=\dfrac{-x+3}{2}$ bulunur.

a) $$\begin{aligned}[fof^{-1}](x)&=f[f^{-1}(x)]\\&=f\left(\frac{-x+3}{2}\right)\\&=-\cancel{2}\cdot\left(\frac{-x+3}{\cancel{2}}\right)+3\\&=x-\cancel{3}+\cancel{3}\\&=x=I(x)\text{ bulunur.}\end{aligned}$$

b) $f(x)=-2x+3$ ise $f^{-1}(x)=\dfrac{-x+3}{2}=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$ olup doğrusal fonksiyondur.

$f^{-1}(x)$ fonksiyonunun tersi $(f^{-1})^{-1}(x)=-2x+3$ bulunur. Bu durumda $(f^{-1})^{-1}(x)=f(x)$ olur.

Sonuç

Bir f fonksiyonun tersinin tersi kendisidir. $(f^{-1})^{-1}=f$

5. ÖRNEK

$f:[2,\infty)\to[3,\infty),\ f(x)=x^2-4x+7$ bire bir ve örten fonksiyonunun tersinin kuralını bulunuz.

ÇÖZÜM

$y=f(x)=x^2-4x+7=x^2-4x+4+3$

$y=(x-2)^2+3$ ifadesinde x yalnız bırakılırsa

$\Rightarrow (x-2)^2=y-3$

$\Rightarrow |x-2|=\sqrt{y-3}$

$\Rightarrow x-2=\sqrt{y-3}$ ($x\in[2,\infty)$ olduğundan mutlak değer dışına aynı çıkar.)

$\Rightarrow x=\sqrt{y-3}+2$ bulunur.

$y=f(x)$ ise $x=f^{-1}(y)$ olduğundan

$\Rightarrow x=f^{-1}(y)=\sqrt{y-3}+2$ dir. Değişken x olarak değiştirilirse

$f^{-1}(x)=\sqrt{x-3}+2$ sonucuna ulaşılır.

Sonuç

Bire bir ve örten bir $f(x)$ fonksiyonun tersi $f^{-1}(x)$ bulunurken x, y cinsinden yazılır.

$y=f(x)$ ise $x=f^{-1}(y)$ olduğundan $f^{-1}(y)$ elde edilir.

Değişken olarak y yerine x yazıldığında $f^{-1}(x)$ bulunmuş olur.

6. ÖRNEK

$f:\mathbb{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}-\left\{\frac{a}{c}\right\},\ f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ fonksiyonunun tersini araştırınız.

ÇÖZÜM

Bir fonksiyonun tersinin olabilmesi için bire bir ve örten olması gerekir.

Bire Birlik

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ oluyorsa f bire birdir.

$f(x_1)=\frac{a \cdot x_1+b}{c \cdot x_1+d}$ ve $f(x_2)=\frac{a \cdot x_2+b}{c \cdot x_2+d}$ olduğundan $f(x_1) \neq f(x_2)$ dir. f bire birdir.

Örtenlik

$\forall y \in \mathbb{R}$ için $\exists x \in \mathbb{R}$ varsa f örtendir.

$y=\frac{ax+b}{cx+d}$ ifadesinde x yalnız bırakılırsa

$\Rightarrow y \cdot (cx+d)=ax+b$

$\Rightarrow cyx+dy=ax+b$

$\Rightarrow cyx-ax=-dy+b$

$\Rightarrow x \cdot (cy-a)=-dy+b$

$\Rightarrow x=\frac{-dy+b}{cy-a} \in \mathbb{R}-\left\{\frac{a}{c}\right\}$ vardır. f örtendir.

Fonksiyon bire bir ve örten olduğundan tersi vardır. Buna göre

$y=f(x)$ ise $x=f^{-1}(y)$ olduğundan

$\Rightarrow x=f^{-1}(y)=\frac{-dy+b}{cy-a}$ dır. Değişken x olarak değiştirilirse

$f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$ sonucuna ulaşılır.

Sonuç

$f:\mathbb{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}-\left\{\frac{a}{c}\right\}$ olmak üzere $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ fonksiyonunun tersi

$f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$ olur.

7. ÖRNEK

$f:\mathbb{R}-\{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}-\{-3\},\ f(x)=\frac{ax-2}{x-b}$ olduğuna göre $f(a-b)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x=-1$ için fonksiyonunun paydası 0 olacağından $-1-b=0 \Rightarrow b=-1$ olur.

Aynı şekilde $x=-3$ için fonksiyonunun tersinde payda 0 olur.

Bu durumda $f(x)=\frac{ax-2}{x-b}$ fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x)=\frac{bx-2}{x-a}$ olduğundan

$\Rightarrow -3-a=0 \Rightarrow a=-3$ tür. O hâlde

$f(x)=\frac{-3x-2}{x+1}$ fonksiyonunda x yerine $a-b$ yazılırsa

$$\begin{aligned} f(a-b)=f[-3-(-1)]=f(-2) &= \frac{-3\cdot(-2)-2}{-2+1} \\ &= \frac{6-2}{-1} \\ &= \frac{4}{-1} \\ &= -4 \text{ sonucu elde edilir.} \end{aligned}$$

8. ÖRNEK

$f:\mathbb{R}-\{3\}\longrightarrow\mathbb{R}-\{2\}$ olmak üzere $f(x)=\dfrac{4x+3}{2x-6}$ fonksiyonunun tersinin kuralını bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x)=\dfrac{4x+3}{2x-6}$ rasyonel fonksiyonu bire bir ve örten olduğundan tersi vardır.

$$y=\frac{4x+3}{2x-6}=\frac{2\cdot(2x-6)+15}{2x-6} \text{ şeklinde yazıldığında}$$

$$=\frac{2\cdot\cancel{(2x-6)}}{\cancel{2x-6}}+\frac{15}{2x-6}$$

$$=2+\frac{15}{2x-6} \text{ olur.}$$

$$\frac{15}{2x-6}=y-2 \Rightarrow 2x-6=\frac{15}{y-2} \Rightarrow 2x=\frac{15}{y-2}+6$$

$$=\frac{15+6y-12}{y-2}$$

$$=\frac{6y+3}{y-2} \Rightarrow x=\frac{6y+3}{2y-4}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{6x+3}{2x-4} \text{ bulunur.}$$

9. ÖRNEK

Bire bir ve örten olduğu aralıklarda $f(2x+2)=\dfrac{x-1}{x-3}$ olduğuna göre $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun tersinin kuralını bulunuz.

ÇÖZÜM

1. Yol

$f(2x+2)=\dfrac{x-1}{x-3}$ fonksiyonunda $g(x)=2x+2$ olarak seçilirse

$f(2x+2)=f[g(x)]=(fog)(x)=\dfrac{x-1}{x-3}$ olur.

$(fog)(x)=\dfrac{x-1}{x-3}$ fonksiyonunun $g^{-1}(x)=\dfrac{x-2}{2}$ fonksiyonu ile sağdan bileşkesi alınırsa

$$(fog)og^{-1}(x)=\left(\frac{x-1}{x-3}\right)og^{-1}(x)$$

$$fo(gog^{-1})(x)=\frac{\left(\frac{x-2}{2}\right)-1}{\left(\frac{x-2}{2}\right)-3},\ \left((gog^{-1})(x)=I(x)=x \text{ ve } (foI)(x)=f(x)\right) \text{ olur.}$$

Bu durumda

$f(x)=\dfrac{\frac{x-4}{2}}{\frac{x-8}{2}}=\dfrac{x-4}{x-8}$ bulunur. O hâlde $f^{-1}(x)=\dfrac{8x-4}{x-1}$ bulunur.

2. Yol

$$f(2x+2)=\frac{x-1}{x-3}=\frac{x+1-1-1}{x+1-1-3}=\frac{\frac{2x+2}{2}-1-1}{\frac{2x+2}{2}-1-3}=\frac{\frac{2x+2}{2}-2}{\frac{2x+2}{2}-4}=\frac{\frac{2x+2-4}{2}}{\frac{2x+2-8}{2}} \text{ biçiminde}$$

düzenlenip $2x+2=t$ yazılırsa $f(t)=\dfrac{t-4}{t-8}$ olur.

Değişken olarak x yazılırsa $f(x)=\dfrac{x-4}{x-8}$ bulunur. O hâlde $f^{-1}(x)=\dfrac{8x-4}{x-1}$ bulunur.

10. ÖRNEK

Bire bir ve örten olduğu aralıklarda $f\left(\frac{x+1}{x-4}\right)=\frac{3x+2}{x+3}$ olduğuna göre $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun tersinin kuralını bulunuz.

ÇÖZÜM

$f\left(\frac{x+1}{x-4}\right)=\frac{3x+2}{x+3} \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{3x+2}{x+3}\right)=\frac{x+1}{x-4}$ olduğundan

$f^{-1}\left(\frac{3x+2}{x+3}\right)=\frac{x+1}{x-4}$ fonksiyonunda

$g(x)=\frac{3x+2}{x+3}$ olarak seçilirse

$f^{-1}\left(\frac{3x+2}{x+3}\right)=f^{-1}[g(x)]=(f^{-1}og)(x)=\frac{x+1}{x-4}$ olur.

$(f^{-1}og)(x)=\frac{x+1}{x-4}$ fonksiyonunun $g^{-1}(x)=\frac{-3x+2}{x-3}$ fonksiyonu ile sağdan bileşkesi alınırsa

$((f^{-1}og)og^{-1})(x)=\left(\frac{x+1}{x-4}\right)og^{-1}(x)$

$(f^{-1}o(gog^{-1}))(x)=\dfrac{\left(\frac{-3x+2}{x-3}\right)+1}{\left(\frac{-3x+2}{x-3}\right)-4}$, $((gog^{-1})(x)=I(x)=x$ ve $(foI)(x)=f(x))$ bu durumda

$$f^{-1}(x)=\dfrac{\frac{-3x+2+x-3}{\cancel{x-3}}}{\frac{-3x+2-4x+12}{\cancel{x-3}}}$$

$$=\frac{-2x-1}{-7x+14}$$

$$=\frac{2x+1}{7x-14} \text{ bulunur.}$$

11. ÖRNEK

$f(x)$ bire bir, örten ve $f(x)=\frac{3x-f(x)}{x+2}$ olduğuna göre $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun tersinin kuralını bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen ifadeden $f(x)$ değeri çekilirse

$f(x)=\frac{3x-f(x)}{x+2}$ ise $f(x)\cdot(x+2)=3x-f(x)$

$x\cdot f(x)+2f(x)=3x-f(x)$

$x\cdot f(x)+3f(x)=3x$

$(x+3)\cdot f(x)=3x$

$f(x)=\frac{3x}{x+3}$ olarak bulunur.

Buradan $f^{-1}(x)=\frac{-3x}{x-3}$ olur.

12. ÖRNEK

$f(x)=4x-1$ ve $(gof)(x)=8x+5$ olduğuna göre $g(x)$ fonksiyonunun tersinin kuralını bulunuz.

ÇÖZÜM

$(gof)(x)=8x+5$ fonksiyonunun $f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{4}$ fonksiyonu ile sağdan bileşkesi alınırsa

$(gof)of^{-1}(x)=(8x+5)of^{-1}(x)$

$go(fof^{-1})(x)=8\cdot\left(\dfrac{x+1}{4}\right)+5$, $((f\,o\,f^{-1})(x)=I(x)=x$ ve $(goI)(x)=g(x))$ olur. Bu durumda $g(x)=2x+7$ bulunur.

13. ÖRNEK

$f(x)=5x+6$ ve $(fog)(x)=2x+7$ olduğuna göre $g(x)$ fonksiyonunun tersinin kuralını bulunuz.

ÇÖZÜM

1. Yol

$(fog)(x)=2x+7$ ise $f[g(x)]=5\cdot g(x)+6=2x+7$

$$5\cdot g(x)=2x+7-6$$
$$5\cdot g(x)=2x+1$$
$$g(x)=\frac{2x+1}{5} \text{ bulunur.}$$

2. Yol

$(fog)(x)=2x+7$ fonksiyonunun, $f^{-1}(x)=\dfrac{x-6}{5}$ fonksiyonu ile soldan bileşkesi alınırsa

$f^{-1}o(fog)(x)=f^{-1}o(2x+7)$

$(f^{-1}of)og(x)=f^{-1}(2x+7)$, $((f^{-1}of)(x)=I(x)=x$ ve $(Iog)(x)=g(x))$ olur.

Bu durumda $g(x)=\dfrac{(2x+7)-6}{5}=\dfrac{2x+1}{5}$ bulunur.

Sıra Sizde

SORU

f tanımlı olduğu durumlarda $x=\dfrac{3\cdot f(x)+2}{f(x)-1}$ olduğuna göre $f(4)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

14. ÖRNEK

f tanımlı olduğu durumlarda $f(x)=\dfrac{3x-5}{x+2}$ olduğuna göre $f^{-1}(5)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$y=f(x)$ ise $x=f^{-1}(y)$ olduğundan $f(x)=\dfrac{3x-5}{x+2} \Rightarrow f^{-1}\left(\dfrac{3x-5}{x+2}\right)=x$ tir. O hâlde

$$\frac{3x-5}{x+2}=5 \Rightarrow 3x-5=5x+10$$
$$\Rightarrow 2x=-15$$
$$\Rightarrow x=-\frac{15}{2} \text{ olur.}$$

Bu durumda $f^{-1}(5)=-\dfrac{15}{2}$ bulunur.

15. ÖRNEK

$f(2x+3)=g(x-1)$ olduğuna göre $(g^{-1}of)(5)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(2x+3)=g(x-1)$ ifadesinde eşitliğin her iki tarafının da $g^{-1}(x)$ fonksiyonu ile soldan bileşkesi alınırsa
$(g^{-1}of)(2x+3)=x-1$ olur.
Bu durumda $2x+3=5$

$$\Rightarrow 2x=2$$
$$\Rightarrow x=1 \quad \text{yazılırsa}$$

$$(g^{-1}of)(2\cdot 1+3)=(g^{-1}of)(5)$$
$$=1-1$$
$$=0 \text{ sonucu bulunur.}$$

16. ÖRNEK

$f(x)=3x-4$ ve $g^{-1}(x)=2x-8$ olduğuna göre $(gof^{-1})^{-1}(4)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(fog)^{-1}(x)=(g^{-1}of^{-1})(x)$ özelliğinden $(gof^{-1})^{-1}(4)=(fog^{-1})(4)$ olur. Bu durumda

$$(fog^{-1})(4)=f[g^{-1}(4)]=f(2\cdot 4-8)$$
$$=f(0)$$
$$=3\cdot 0-4$$
$$=-4 \text{ bulunur.}$$

17. ÖRNEK

$f(x)=\dfrac{ax-2}{x}, g(x)=\dfrac{x+4}{x-2}$ olmak üzere $(fog^{-1})(-1)=6$ olduğuna göre a değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(fog^{-1})(-1)=6 \Rightarrow f[g^{-1}(-1)]=6$ olur.

$g(x)=\dfrac{x+4}{x-2} \Rightarrow g^{-1}(x)=\dfrac{2x+4}{x-1}$ olur.

$g^{-1}(-1)=\dfrac{2\cdot(-1)+4}{-1-1}=\dfrac{2}{-2}=-1$

Bu durumda $g^{-1}(-1)=-1$ değeri yerine yazılırsa

$f[g^{-1}(-1)]=f(-1)=\dfrac{a\cdot(-1)-2}{-1}=6$ olur.

Buradan $-a-2=-6 \Rightarrow -2+6=a \Rightarrow a=4$ sonucuna ulaşılır.

18. ÖRNEK

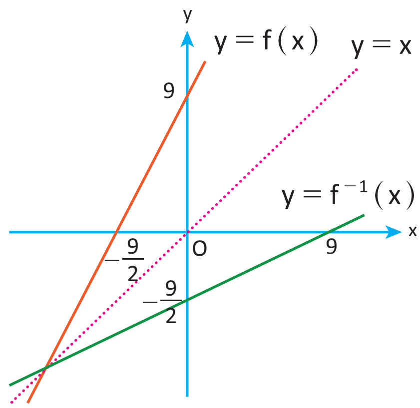
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+9$ fonksiyonu ile $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun grafiklerini çiziniz.

ÇÖZÜM

$f(x)=2x+9$ ise $f^{-1}(x)=\dfrac{x-9}{2}$ bulunur.

x	0	$-\frac{9}{2}$
$f(x)$	9	0

x	0	9
$f^{-1}(x)$	$-\frac{9}{2}$	0



19. ÖRNEK

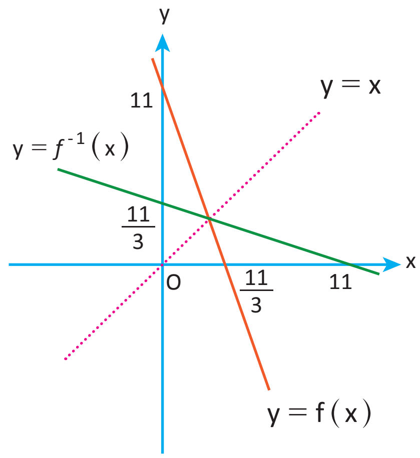
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+11$ fonksiyonu ile $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun grafiklerini çiziniz.

ÇÖZÜM

$f(x)=-3x+11$ ise $f^{-1}(x)=\dfrac{-x+11}{3}$ bulunur.

x	0	$\frac{11}{3}$
$f(x)$	11	0

x	0	11
$f^{-1}(x)$	$\frac{11}{3}$	0

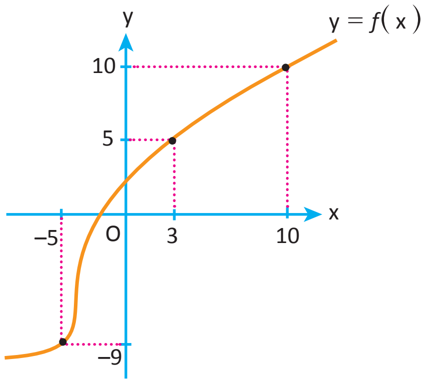


Not

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği ile $y = f^{-1}(x)$ fonksiyonunun grafiği analitik düzlemde $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.

20. ÖRNEK

Aşağıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



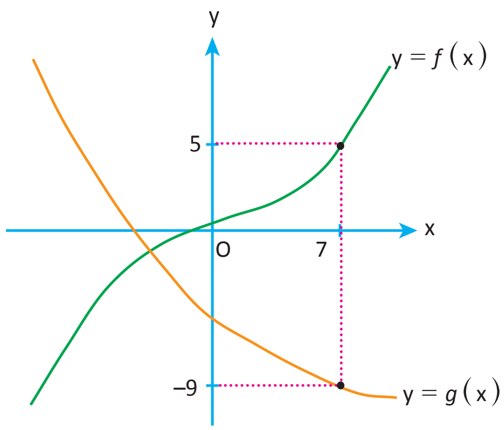
Buna göre $f(3) + f^{-1}(-9)$ toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

Grafiğe göre $f(3) + f^{-1}(-9) = 5 + (-5) = 0$ bulunur.

21. ÖRNEK

Aşağıda $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.



Buna göre $(gof^{-1})(5)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

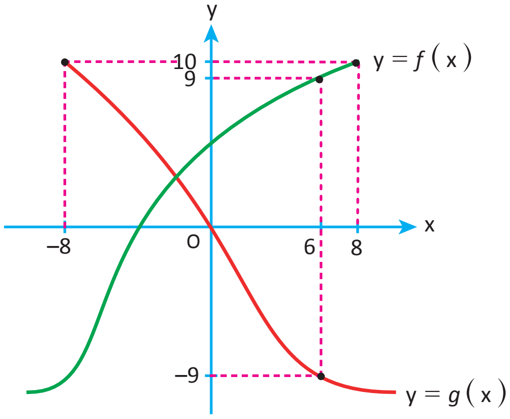
Grafiğe göre $(gof^{-1})(5) = g[f^{-1}(5)]$

$= g(7)$

$= -9$ bulunur.

22. ÖRNEK

Aşağıda $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.



$(f^{-1}og)(-8)+(fog^{-1})(-9)$ toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

Grafiğe göre $(f^{-1}og)(-8)+(fog^{-1})(-9) = f^{-1}[g(-8)]+f[g^{-1}(-9)]$

$= f^{-1}(10)+f(6)$

$= 8+9$

$= 17$ bulunur.

23. ÖRNEK

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f ve g doğrusal fonksiyonlar olmak üzere

$\left[(gof)o(g^{-1}of)^{-1}\right](x) = 16x+3$ olduğuna göre $g(-2)$ nin alabileceği değerleri bulunuz.

ÇÖZÜM

$\left[(gof)o(g^{-1}of)^{-1}\right](x) = [gofof^{-1}og](x) = 16x+3$, $\left((fof^{-1})(x) = I(x) = x \text{ ve } (goI)(x) = g(x)\right)$

Bu durumda $(gog)(x) = g[g(x)] = 16x+3$ olur.

g doğrusal fonksiyon olduğundan $g(x) = ax+b$ formundadır. O hâlde

$g[g(x)] = g(ax+b) = a\cdot(ax+b)+b = 16x+3$

$\Rightarrow a^2\cdot x + a\cdot b + b = 16x+3$

$\Rightarrow a^2 = 16$ ve $a\cdot b + b = 3$

$\Rightarrow (a=4 \text{ veya } a=-4)$ ve $(4b+b=3 \text{ veya } -4b+b=3)$

$\Rightarrow (a=4 \text{ veya } a=-4)$ ve $(5b=3 \text{ veya } -3b=3)$

$\Rightarrow (a=4 \text{ veya } a=-4)$ ve $\left(b=\frac{3}{5} \text{ veya } b=-1\right)$

$\Rightarrow g(x) = 4x+\frac{3}{5}$ veya $g(x) = -4x-1$ bulunur. Buradan

$\Rightarrow g(-2) = 4\cdot(-2)+\frac{3}{5} = -8+\frac{3}{5} = -\frac{37}{5}$ veya

$g(-2) = -4\cdot(-2)-1 = 8-1 = 7$ sonucu elde edilir.

24. ÖRNEK

$f:\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}\to\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\},\ f(x)=\frac{x+3}{2x-1}$ ise

$\underbrace{(fofofo...of)}_{2018\text{ tane}}(2018)$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$(fof)(x)=f[f(x)]=f\left(\frac{x+3}{2x-1}\right)=\frac{\frac{x+3}{2x-1}+3}{2\cdot\frac{x+3}{2x-1}-1}=\frac{\frac{x\cancel{+3}+6x\cancel{-3}}{\cancel{2x-1}}}{\frac{\cancel{2x}+6\cancel{-2x}+1}{\cancel{2x-1}}}=\frac{7x}{7}=x=I(x)$$

$((fof^{-1})(x)=I(x)=x\ )$ Bu durumda $f^{-1}(x)=f(x)$ olduğu görülür. Yani

$(fof^{-1})(x)=(fof)(x)=I(x)=x$ olur.

$$\underbrace{(fofofo...of)}_{2018\text{ tane}}(2018)=\underbrace{[(fof)o(fof)o...o(fof)]}_{1009\text{ tane}}(2018)$$

$$=\underbrace{[(fof^{-1})o(fof^{-1})o...o(fof^{-1})]}_{1009\text{ tane}}(2018)$$

$$=\underbrace{(IoIo...oI)}_{1009\text{ tane}}(2018)$$

$$=I(2018)$$

$=2018$ sonucu bulunur.

25. ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x}{3}-1$ fonksiyonu için

$\underbrace{(fofofo...of)}_{n\text{ tane}}(x)=\frac{x-363}{243}$ olduğuna göre n değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$(fof)(x)=f[f(x)]=f\left(\frac{x}{3}-1\right)=f\left(\frac{x-3}{3}\right)=\frac{\frac{x-3}{3}}{3}-1=\frac{x-3-9}{9}=\frac{x-3^1-3^2}{3^2}$$

$$(fofof)(x)=f[(fof)(x)]=f\left(\frac{x-3^1-3^2}{3^2}\right)=\frac{\frac{x-3^1-3^2}{3^2}}{3}-1=\frac{x-3^1-3^2-3^3}{3^3}$$

$$(fofofof)(x)=f[(fofof)(x)]=f\left(\frac{x-3^1-3^2-3^3}{3^3}\right)=\frac{\frac{x-3^1-3^2-3^3}{3^3}}{3}-1$$

$$=\frac{x-3^1-3^2-3^3-3^4}{3^4}$$ olur.

Bu durumda $\underbrace{(fofofo...of)}_{n\text{ tane}}(x)=\frac{x-3^1-3^2-3^3-...-3^n}{3^n}$ kuralı yazılabilir. Buradan

$\underbrace{(fofofo...of)}_{n\text{ tane}}(x)=\frac{x-363}{243}=\frac{x-3^1-3^2-...-3^5}{3^5}\Rightarrow n=5$ bulunur.

26. ÖRNEK

$f:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ tanımlanan f fonksiyonunda $f(n+1)=3+f(n)$ ve $f(1)=4$ olduğuna göre f fonksiyonunun kuralını bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(n+1)=3+f(n)\Rightarrow f(n+1)-f(n)=3$ elde edilir. Buradan

$$
\begin{array}{ll}
n=1 \text{ için} & \cancel{f(2)}-f(1)=3 \\
n=2 \text{ için} & \cancel{f(3)}-\cancel{f(2)}=3 \\
n=3 \text{ için} & \cancel{f(4)}-\cancel{f(3)}=3 \\
\ldots\ldots\ldots & \\
\ldots\ldots\ldots & \\
+\ \ n=k-1 \text{ için} & f(k)-\cancel{f(k-1)}=3 \\
\hline
f(k)-f(1)=(k-1)\cdot 3 &
\end{array}
$$

$f(k)-4=3k-3\Rightarrow f(k)=3k-3+4=3k+1$ bulunur. Değişken yerine n yazılırsa

$f(n)=3n+1$ kuralı elde edilir.

27. ÖRNEK

$A=\{0,1,2,3,4,5\}$ olmak üzere $f:A\rightarrow A$ fonksiyonu bire birdir. Buna göre $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$ toplamının alabileceği en büyük ve en küçük değerlerin çarpımını bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$ toplamının en büyük değeri $5+4+3+2=14$

$f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$ toplamının en küçük değeri $0+1+2+3=6$ olur.

O hâlde $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$ toplamının alabileceği en büyük ve en küçük değerlerin çarpımı

$14\cdot 6=84$ bulunur.

Sıra Sizde

SORU

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ tanımlanan f fonksiyonu, $f_n(x)=\underbrace{(fofofo\ldots of)}_{n\text{ tane}}(x)$ şeklinde verilmiştir.

$f(x)=x-1$ olduğuna göre $f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\ldots+f_{12}(x)$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

28. ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2^{x+3}$ ile tanımlı f fonksiyonu için $f(a+b-2)$ nin $f(a)$ ve $f(b)$ cinsinden değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(a+b-2)=2^{a+b-2+3}=2^{a+b+1}=2^a\cdot 2^b\cdot 2$

$f(a)=2^{a+3}=2^a\cdot 2^3=2^a\cdot 8\Rightarrow 2^a=\dfrac{f(a)}{8}$

$f(b)=2^{b+3}=2^b\cdot 2^3=2^b\cdot 8\Rightarrow 2^b=\dfrac{f(b)}{8}$ elde edilir. Buradan

$$f(a+b-2)=2^a\cdot 2^b\cdot 2=\frac{f(a)}{8}\cdot\frac{f(b)}{8}\cdot 2$$
$$=\frac{1}{32}\cdot f(a)\cdot f(b)$$ olur.

29. ÖRNEK

$f,g:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R},\ (fog)(x)=f(x)+g(x)$ ve $f(x)=3x+1$ olduğuna göre $g(2)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(fog)(x)=f[g(x)]=3\cdot g(x)+1$

$\Rightarrow f(x)+g(x)=3\cdot g(x)+1$

$\Rightarrow 3\cdot g(x)-g(x)=f(x)-1$

$\Rightarrow g(x)=\dfrac{f(x)-1}{2}$

$$\Rightarrow g(2)=\frac{f(2)-1}{2}$$
$$=\frac{3\cdot 2+\cancel{1}-\cancel{1}}{2}$$
$$=\frac{6}{2}$$
$=3$ sonucu bulunur.

30. ÖRNEK

$c\in\mathbb{R}^+,\ f(x)=\dfrac{c^x}{c^x+\sqrt{c}}$ ile tanımlı f fonksiyonu için $f(x)+f(1-x)$ toplamının değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$f(x)+f(1-x)=\frac{c^x}{c^x+\sqrt{c}}+\frac{c^{1-x}}{c^{1-x}+\sqrt{c}}=\frac{c^x}{c^x+\sqrt{c}}+\frac{\frac{c}{c^x}}{\frac{c}{c^x}+\sqrt{c}}$$
$$=\frac{c^x}{c^x+\sqrt{c}}+\frac{\frac{c}{\cancel{c^x}}}{\frac{c+c^x\cdot\sqrt{c}}{\cancel{c^x}}}=\frac{c^x}{c^x+\sqrt{c}}+\frac{c}{c+c^x\cdot\sqrt{c}}$$
$$=\frac{c^x}{c^x+\sqrt{c}}+\frac{\sqrt{c}\cdot\sqrt{c}}{\sqrt{c}\cdot\sqrt{c}+c^x\cdot\sqrt{c}}$$
$$=\frac{c^x}{c^x+\sqrt{c}}+\frac{\cancel{\sqrt{c}}\cdot\sqrt{c}}{\cancel{\sqrt{c}}\cdot(\sqrt{c}+c^x)}$$
$$=\frac{c^x+\sqrt{c}}{c^x+\sqrt{c}}$$
$=1$ sonucu bulunur.

31. ÖRNEK

400 kişilik bir lisenin sene başı öğretmenler kurulu toplantısında her öğrenciye eşit olarak yalnız bir proje ödevi ve her dönem bütün derslerden iki performans görevi verilmesi kararlaştırılmıştır. Ayrıca proje ödevlerini özgün bir şekilde hazırlamaları istenmiştir.

Bunun dışında öğrencilerin performans ve proje görevlerini elektronik ortamda taşınabilir bellek veya elektronik posta yoluyla öğretmenlerine teslim etmeleri kararı alınmıştır. Gerekçe olarak aşağıdaki nedenler gösterilmiştir:

- Öğrenciler proje görevi için ortalama 15, her bir performans görevi için de ortalama 10 yaprak kâğıt kullanmaktadır.
- Ortalama 30 000 yaprak kâğıt için 1 ağaç kesilmektedir.
- Geri dönüşüme giden 1 ton atık kâğıt, 17 yetişkin ağacı kesilmekten kurtarmaktadır.
- 1 dosya kâğıdı yaklaşık 5 gramdır.

Bu lisede her sınıf seviyesinde ortalama 15 farklı ders bulunduğu göz önüne alınırsa

a) Öğrenci sayısı ile proje ve performans görevleri için yıllık kullanılacak kâğıt miktarı arasındaki ilişkiyi fonksiyonla modelleyiniz.

b) Bu okuldaki uygulamayla 5 yılda kaç yetişkin ağacın kesilmekten kurtarılacağını bulunuz.

c) Üretilen kâğıdın ton cinsinden ağırlığı ile kesilen ağaç sayısı arasındaki ilişkiyi fonksiyonla modelleyiniz.

ç) Bu uygulamanın yapılmadığı 4 yılda proje ve performans ödevleri için kullanılan kâğıtlar geri dönüşüme gönderilirse kaç ağacın kesilmekten kurtarılacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Bir öğrenci yılda bir dersten proje ödevi aldığından 15 yaprak kâğıt proje ödevi için kullanırdı.
Her dönem bir öğrenci her derste bir yazılı performans ödevi aldığından bir dönemde
$15 \cdot 10 = 150$ yaprak kâğıt performans görevi için kullanırdı.
Bir yıl iki dönemden oluştuğundan bir öğrenci $2 \cdot 150 = 300$ yaprak kâğıdı performans ödevleri için kullanırdı. Buna göre bir öğrenci, bir yılda $300 + 15 = 315$ yaprak kâğıdı proje ve performans ödevleri için kullanırdı. Bunu gösteren fonksiyon, x öğrenci sayısı olmak üzere $f(x) = 315x$ olur.

b) Bu okulda 400 öğrenci olduğundan proje ve performans görevleri için $f(400) = 315 \cdot 400 = 126\,000$ yaprak kâğıt gerekirdi. Ortalama 30 000 yaprak kâğıt için 1 ağaç kesildiğinden 126 000 yaprak kâğıt için $126\,000 \div 30\,000 = 4{,}2$ ağaç bulunur.
Buna göre bu okuldaki uygulamayla 5 yılda $5 \cdot 4{,}2 = 21$ yetişkin ağaç kesilmekten kurtarılmış olur.

c) Bir yaprak yaklaşık 5 gram olduğundan bu okulda bu uygulamayla $126\,000 \cdot 5 = 630\,000 \text{ g} = 630 \text{ kg}$ kâğıt israf edilmiş olurdu. 630 kg kâğıt $4{,}2$ ağacın kesilmesiyle üretildiğinden

$630 \text{ kg} = 0{,}63 \text{ ton}$ kâğıt ⟶ $4{,}2$ ağaç
1 ton kâğıt ⟶ x ağaç

$0{,}63 \cdot x = 4{,}2 \Rightarrow x = \dfrac{20}{3}$ ağaç bulunur.

Buna göre x, üretilen kâğıdın ton cinsinden ağırlığı olmak üzere bu ilişkiyi gösteren fonksiyon
$f(x) = \dfrac{20}{3}x$ olur.

ç) Bu okulda proje ve performans ödevleri için 1 yılda $0{,}63$ ton kâğıt kullanılacağından 4 yılda
$4 \cdot 0{,}63 = 2{,}52$ ton kâğıt kullanılır. Geri dönüşüme giden 1 ton atık kâğıt, 17 ağacı kesilmekten kurtarıyor. Buna göre x, ton atık kâğıdı göstermek üzere $f(x) = 17x$ fonksiyonu atık kâğıtların ağırlığı ile kurtarılan ağaç arasındaki ilişkiyi gösteren fonksiyondur. Buradan $f(2{,}52) = 17 \cdot 2{,}52 = 42{,}84$ bulunur. O hâlde yaklaşık 43 ağaç kesilmekten kurtarılmış olur.

ALIŞTIRMALAR-2

1. $f(x) = 4x - 1$ ve $g(x+2) = f(x-2)$ olduğuna göre $(gof)(2)$ işleminin sonucunu bulunuz.

2. $f(x)$ doğrusal fonksiyondur. $(fof)(x) = 4x + 9$ olduğuna göre $f(3)$ ün alabileceği değerler toplamını bulunuz.

3. $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(gof)\left(\frac{x+2}{2}\right) = \frac{x-3}{3}$ ve

$(fogof)(-2) = f(m+2)$ olduğuna göre m değerini bulunuz.

4. f^{-1}, f fonksiyonunun ters fonksiyonudur.
$f^{-1}(3x-2) = 2x + 1$ olduğuna göre
$f(5) + f^{-1}(4)$ toplamını bulunuz.

5. $g^{-1}(3x-2) = \frac{x+2}{x-1}$ ve $(f^{-1}og)(x) = f(x)$ olduğuna göre $(fof)(5)$ değerini bulunuz.

6. $f : [2, \infty) \to [-3, \infty)$ ve $f(x) = x^2 - 4x + 1$ olduğuna göre $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun tersinin kuralını bulunuz.

7. $f : \mathbb{R} - \{a\} \to \mathbb{R} - \{b\}$ ve $f^{-1}(x) = \frac{3x+4}{6x+8}$ olduğuna göre $a + b$ toplamını bulunuz.

8. $y = f(x)$ fonksiyonu için

$x = \frac{2f^{-1}(x) + 3}{4 - f^{-1}(x)}$ olduğuna göre

$f(5)$ değerini bulunuz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A) 1-5. sorularda boş bırakılan yerleri uygun olacak şekilde doldurunuz.

1. Her elemanı, kendisine eşleyen fonksiyona .... denir.

2. Bir fonksiyonun tersinin olması için .... olması gerekir.

3. Grafiği verilen bir bağıntının fonksiyon olup olmadığını belirlemek için uygulanan teste .... denir.

4. $f(x)=(2k-6)x+4k+1$ fonksiyonu, sabit fonksiyon olduğuna göre $f(2017)\cdot f(2018)$ çarpımının sonucu .... olur.

5. $f:\mathbb{R}-\{3\}\to\mathbb{R}$

$f(x)=\dfrac{(m-3)\cdot x+24}{4x-12}$ fonksiyonu, sabit fonksiyon olduğuna göre $f(m)$ .... olur.

B) 6. soruda numaralarla verilen ifadeleri, harf ile verilen ifadelerle doğru şekilde eşleştiriniz.

6. $A=\{1,2,3\}$ olmak üzere $A\to A$ tanımlı fonksiyonlar için

Bire bir fonksiyon	1	a	$f=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$
Sabit fonksiyon	2	b	$f=\{(1,2),(2,2),(3,1)\}$
Birim fonksiyon	3	c	$f=\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$
İçine fonksiyon	4	ç	$f=\{(1,1),(2,2),(2,3)\}$
		d	$f=\{(1,1),(2,1),(3,1)\}$

C) 7-10. açık uçlu soruların cevaplarını boş bırakılan alanlara yazınız.

7. $f(3^x+2)=9^x+3^{x+1}-2$ olduğuna göre $f(4)$ değerini bulunuz.

8. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}2x+3a, & x<-2 \text{ ise}\\ 6, & x=-2 \text{ ise}\\ x+a, & x>-2 \text{ ise}\end{cases}$$

parçalı tanımlı fonksiyonu için $f(-2)+f(2)=10$ olduğuna göre $f(-4)$ değerini bulunuz.

9. $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tanımlı fonksiyonlarda f bir çift fonksiyon ise

$g(x)=-x^3\cdot f(x)$ fonksiyonunun tek fonksiyon olduğunu gösteriniz.

10. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bire bir ve örten bir fonksiyon olmak üzere

$f(x)=\dfrac{2\cdot p\cdot x+4}{(p-1)\cdot x+3}$ olduğuna göre

$f^{-1}(p)$ değerini bulunuz.

Ç) 11-28. çoktan seçmeli soruları okuyunuz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

11. $f(x)=\dfrac{1}{1+3^x}$ olduğuna göre
$f(30)+f(29)+...+f(-29)+f(-30)$
toplamının sonucu kaçtır?

A) 30 B) $\dfrac{61}{2}$ C) 60 D) $\dfrac{121}{2}$ E) 61

12. $f(x)=3x^7+2x^5+kx$ fonksiyonu verilsin.
$f(7)=28$ ise $f(-7)$ değeri kaçtır?

A) -49 B) -35 C) -28 D) -21 E) -20

13. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{4x-3}{(a-2)x+1}$ fonksiyonu
bire bir ve örten olduğuna göre $f(a)$ kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

14. $f:A\to B$ fonksiyonu bire bir ve örtendir.
Buna göre

1. $s(f(A))=s(B)$
2. $A\equiv B$
3. $s(A)>s(B)$
4. $f(A)=B$

ifadelerinden kaç tanesi doğrudur?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

15. $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$f(x)=m(x-2)+nx$ ve $g(x)=7x+6$
fonksiyonları verilsin.
$f(x)=g(x)$ olduğuna göre $m-n$ farkı kaçtır?

A) -13 B) -7 C) 0 D) 7 E) 13

16 $f(5-3x)=(m+3n)x+m-n$ biçiminde tanımlanan fonksiyon, birim fonksiyon olduğuna göre
$f(m)+f(n)$ toplamının sonucu kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

17. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, y=f(x)$ birim fonksiyondur.
$\dfrac{f(5x-2)-f(5x-8)}{f(-3x+2)+f(3x)}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 0 B) 3 C) 3x D) 5x E) 5

18. $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olmak üzere $y=h(x)$ doğrusal ve $y=g(x)$ birim fonksiyondur.
$h(g(x))=5x+3$ olduğuna göre $\dfrac{h(3)}{h(0)}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) -6 B) 0 C) 4 D) 6 E) 8

19. f birim fonksiyon, h sabit fonksiyon olmak üzere

$f(x) = (a-2)x + a + 3b$

$h(x) = (b-c)x + 2c - a$ ise

$h(2023)$ değeri kaçtır?

A) -5 B) -3 C) 0 D) 1 E) 2023

20. $s(A) = 3, s(B) = 4$ ve $f: A \rightarrow B$ olmak üzere

x tane bire bir fonksiyon,
y tane sabit fonksiyon,
z tane fonksiyon tanımlanıyor.

Buna göre $z - x - y$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 30 B) 32 C) 34 D) 36 E) 40

21. $g(x-3) = x+1, h(2x-1) = x^2 - 1$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} h(x), x \geq 2 \text{ ise} \\ g(x), x < 2 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu için $f(5) + f(0)$ toplamı kaçtır?

A) 9 B) 11 C) 12 D) 13 E) 15

22 $f(x+1) = 3x - 2$ ve $g(x+3) = 2 - x$ olduğuna göre

$(g^{-1}of)(3)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) -3 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

23. $f = \{(-1,2),(-3,4),(5,7),(-8,0)\}$ ve

$g = \{(2,-3),(4,5),(7,-8),(0,-1)\}$

fonksiyonları veriliyor.

Buna göre $(gofogofogofog)(0)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

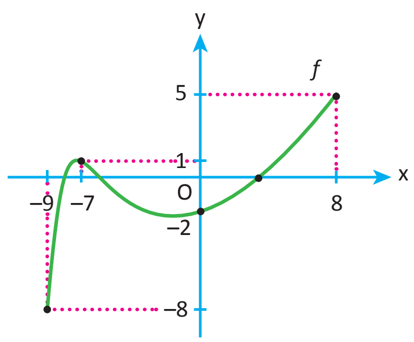
A) -8 B) -3 C) -1 D) 0 E) 4

24. $f(x) = \dfrac{5x+2}{x-3}, (gof)(x) = x$ olduğuna göre

$g^{-1}(2)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) -12 B) -10 C) -8 D) -6 E) -4

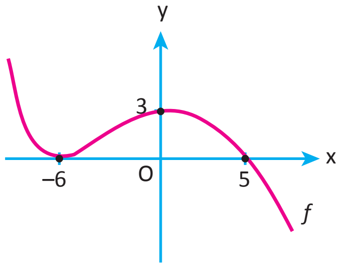
25.



Yukarıda grafiği verilen f fonksiyonunun tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[-9,8]$ B) $[-8,5]$ C) $[-7,8]$ D) $(-7,8]$ E) $(-9,8]$

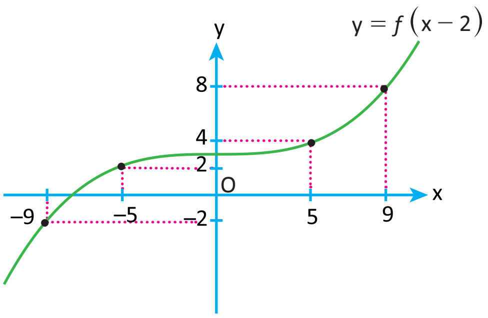
26.



Yukarıda grafiği verilen f fonksiyonununda $f(a+1)=0$ denkleminin kökler toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) -4 B) -3 C) -1 D) 0 E) 1

27.



Yukarıda verilen $y=f(x-2)$ fonksiyonunun grafiğine göre

$\dfrac{f^{-1}(4)+f^{-1}(2)+f(7)}{f(f^{-1}(-2))}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) 5 B) 4 C) 3 D) -1 E) -2

28 $f:\mathbb{R}-\left\{-\frac{5}{3}\right\}\to\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3}\right\}$ şeklinde tanımlanan $y=f(x)$ fonksiyonu için

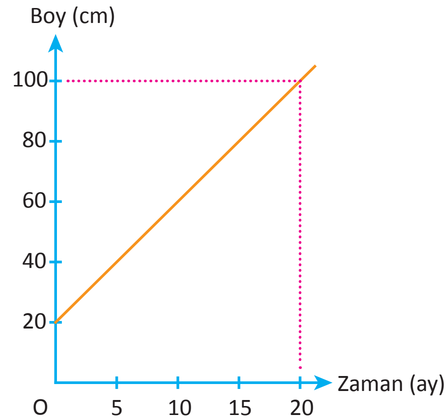
$x=\dfrac{5-5\cdot f(x)}{3\cdot f(x)+1}$ olduğuna göre

$f^{-1}(3)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

D) 29-31. soruları aşağıda verilen ortak metne göre cevaplandırınız.

Aşağıdaki grafikte bir bitkinin aylara göre boyundaki değişimi gösterilmiştir.



29 Bu bitkinin boyu ile zaman arasındaki ilişkiyi gösteren fonksiyonu bulunuz.

30. Bitkinin boyunun dikildikten 5 yıl sonra kaç cm olacağını bulunuz.

31. Bitkinin boyunun dikildikten kaç ay sonra 150 cm olacağını bulunuz.

E) 32-35. soruları aşağıda verilen ortak metne göre cevaplandırınız.

15 Temmuz Demokrasi Zaferi ve Şehitleri Anma Haftası için broşür, poster ve kitapçıklar hazırlanacaktır. Hazırlanacak olan materyaller şu şekildedir:

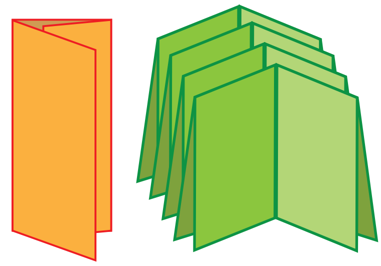
Broşürler A4, çift yön baskılı ve 3 e katlanmış,

Posterler tek yön baskılı,

Kitapçıklar 4 adet A3 kâğıda, çift yönlü baskıdan sonra 4 e katlanarak A5 kâğıdı boyutunda 32 sayfa olarak hazırlanacaktır.

Baskı makinesi, aşağıda belirtilen üç farklı ebattaki kâğıda baskı yapabilmektedir. Bu makinenin baskı özellikleri ise şu şekildedir:

- A4 boyutundaki kâğıtlarda dakikada 70 adet,
- A3 boyutundaki kâğıtlarda dakikada 35 adet,
- Poster boyutundaki kâğıtlarda dakikada 25 adet baskı yapmaktadır.



32. Baskı makinesi, sadece A4 boyutunda kâğıda baskı yaptığında zaman ve baskı adedi arasındaki ilişkiyi gösteren fonksiyonu bulunuz.

33. Baskıdan sonra dakikada 20 broşür katlanıyor ve dakikada 15 kitapçık hazırlanıyor. 5000 broşür, 200 poster ve 600 kitapçık basmanın ne kadar zaman alacağını bulunuz.

34. Arkalı önlü, renkli baskı maliyeti A4 boyutundaki kâğıtta 15 kuruş; A3 boyutundaki kâğıtta 35 kuruştur. 2000 el broşürü ve 2000 kitapçığın baskı maliyetini bulunuz.

35. Kitapçık sayısı ve maliyet arasındaki ilişkiyi gösteren fonksiyonun grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

F) 36-37. soruları aşağıda verilen ortak metne göre cevaplandırınız.

Bir fırında gerekli malzemeler katıldıktan sonra oluşan karışım kütlece %28,8 artarak ekmeklik hamur hâline geliyor.

- 280 gram hamur ile bir ekmek yapılıyor.
- 75 kg buğdaydan 50 kg un elde ediliyor.
- Ülkemizde günde yaklaşık 6 milyon adet ekmek çöpe atılıyor.

36. Gerekli buğday (kg) miktarı girilerek kaç adet ekmek üretileceğini belirten bir fonksiyon modelleyiniz.

37. Ülkemizde ekmek israfı yapılmasaydı bir ayda yaklaşık kaç ton buğday tasarruf edileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

SAYILAR VE CEBİR
10.3. POLİNOMLAR

Neler Öğreneceksiniz?

10.3.1. Polinom Kavramı ve Polinomlarda İşlemler
1. Temel Kavramlar
2. Polinomlarda İşlemler

10.3.2. Polinomların Çarpanlara Ayrılması
1. Çarpanlara Ayırma
2. Rasyonel İfadelerin Sadeleştirilmesi

Neden "Polinomları" Öğrenmelisiniz?

- Köprü ve baraj gibi yapıların mimari tasarımlarında polinomlardan yararlanılır.
- Birden fazla girdiden bir çıktı elde edilen mühendislik uygulamalarında polinomlar kullanılır.
- Lunaparklardaki hız trenleri polinom grafiklerinin şekline göre yapılır.
- Tıp biliminde hastalara uygulanan ilaç etkileşimi ve etkileşim zamanı, dünya nüfusu, astronomi gibi birçok alanda polinom uygulamaları kullanılır.

Hazırlık Çalışması

1. Bakterilere karşı kullandığınız antibiyotikler vücudunuzda ne kadar süre etkili olur? Bu etki süresinin nasıl hesaplanabileceğini düşününüz.
2. $3^{x+2}-5\cdot3^{x+1}+11\cdot3^{x}=135$ olduğuna göre x değerini bulunuz.
3. $f(x)=5x+2$ ve $(gof)(x)=2x+3$ olduğuna göre $g(-3)$ değerini bulunuz.
4. p bir doğal sayı olmak üzere

$$\begin{array}{r|l} x & 18 \\ \cline{2-2} - \quad & 2p+1 \\ \hline p^2 & \end{array}$$

işleminde x in alabileceği en büyük doğal sayı değerini bulunuz.

10.3.1. POLİNOM KAVRAMI VE POLİNOMLARDA İŞLEMLER

1. Temel Kavramlar

Tanım

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ gerçek sayılar; $a_n \neq 0$, x değişken ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ şeklindeki ifadelere bir değişkenli, gerçek (reel) katsayılı n. dereceden bir **polinom** (çok terimli) denir.

Burada

$a_nx^n, a_{n-1}x^{n-1}, \ldots, a_2x^2, a_1x, a_0$ ifadelerine polinomun terimleri,

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ gerçek sayılarına polinomun **katsayıları** denir.

Değişkeninin üssü en büyük olan terimin üssüne **polinomun derecesi** denir ve $\text{der}[P(x)]$ ile gösterilir.

Değişkenin üssü en büyük olan terimin katsayısına **polinomun başkatsayısı**,

Değişken bulundurmayan terime **polinomun sabit terimi** denir.

1. ÖRNEK

Aşağıdaki fonksiyonların polinom olup olmadığını inceleyiniz.

a) $f(x) = -2x + 3$

b) $g(x) = -5$

c) $h(x) = \sqrt{x} + 2$

ç) $t(x) = \dfrac{1}{x^2} + 3x - 2$

ÇÖZÜM

a) $f(x) = -2x + 3$ doğrusal fonksiyondur. Bu ifadede x in üssü $1 \in \mathbb{N}$ olduğundan $f(x)$ doğrusal fonksiyonu bir polinomdur.

b) $g(x) = -5$ sabit fonksiyondur. $g(x) = -5 = -5x^0$ şeklinde yazılabilir. Burada x in üssü $0 \in \mathbb{N}$ olduğundan $g(x) = -5$ sabit fonksiyonu bir polinomdur.

c) $h(x) = \sqrt{x} + 2$ köklü bir fonksiyondur. $h(x) = \sqrt{x} + 2 = x^{\frac{1}{2}} + 2$ şeklinde yazıldığında x in üssü $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$ olduğundan $h(x)$ polinom değildir.

ç) $t(x) = \dfrac{1}{x^2} + 3x - 2$ ifadesi $t(x) = \dfrac{1}{x^2} + 3x - 2 = x^{-2} + 3x - 2$ şeklinde yazıldığında x in üssü $-2 \notin \mathbb{N}$ olduğundan $t(x)$ polinom değildir.

2. ÖRNEK

$P(x) = -3x^4 + 5x^3 - 7x^2 - x + 8$ polinomu veriliyor. $P(x)$ polinomunun terimlerini, katsayılarını, derecesini, başkatsayısını ve sabit terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(x) = -3x^4 + 5x^3 - 7x^2 - x + 8$

Terimleri: $-3x^4, 5x^3, -7x^2, -x, 8$

Katsayıları: $-3, 5, -7, -1, 8$

Derecesi: Değişkeninin üssü en büyük olan terim $-3x^4$ olduğundan polinomun derecesi $\text{der}[P(x)] = 4$ olur.

Başkatsayısı: Değişkeninin üssü en büyük olan terimin katsayısı -3 olduğundan polinomun başkatsayısı -3 tür.

Sabit terimi: Değişken bulundurmayan terim 8 olduğundan polinomun sabit terimi 8 olur.

Bu sonuç $x = 0$ olarak alınırsa $P(0) = -3 \cdot 0^4 + 5 \cdot 0^3 - 7 \cdot 0^2 - 0 + 8 = 8$ şeklinde de bulunur.

3. ÖRNEK

Aşağıda verilen polinomların sabit terimlerini bulunuz.

a) $P(x) = x^3 + 2x^2 + x - 5$

b) $Q(x+3) = 2x^2 - x + 1$

c) $R(2x-1) = x^2 + \sqrt[3]{2}$

ÇÖZÜM

a) $x = 0$ için $P(0) = 0^3 + 2 \cdot 0^2 + 0 - 5 = -5$ olduğundan $P(x)$ polinomunun sabit terimi -5 bulunur.

b) $x = 0$ için $Q(0+3) = Q(3) = 2 \cdot 0^2 - 0 + 1 = 1$ olduğundan $Q(x+3)$ polinomunun sabit terimi 1 olur.

c) $x = 0$ için $R(2 \cdot 0 - 1) = R(-1) = 0^2 + \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}$ olduğundan $R(2x-1)$ polinomunun sabit terimi $\sqrt[3]{2}$ olur.

Sonuç

Bir polinomun sabit terimini bulmak için değişken yerine "0" yazılır.

4. ÖRNEK

$P(x+4) = 6x^2 - 2x + 1$ olduğuna göre $P(2x+3)$ polinomunun sabit terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(2x+3)$ polinomunun sabit terimi $x = 0$ için

$P(2 \cdot 0 + 3) = P(3)$ bulunur.

$P(x+4)$ polinomunda x yerine -1 yazılırsa

$$\begin{aligned} P(-1+4) = P(3) &= 6 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 1 \\ &= 6 \cdot 1 + 2 + 1 \\ &= 6 + 3 \\ &= 9 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

5. ÖRNEK

$P(x) = (p+5)x^7 + 2x^{q-6} - 3x + 1$ ifadesi 4. dereceden bir polinom olduğuna göre $p + q$ toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

Polinomun derecesi 4 ise

$$P(x) = \underbrace{(p+5)}_{0}x^7 + 2x^{\overbrace{q-6}^{4}} - 3x + 1$$

$p + 5 = 0$ ve $q - 6 = 4$ olmalıdır.

Buradan $p = -5$ ve $q = 10$ bulunur.

Bu durumda $p + q = (-5) + 10 = 5$ bulunur.

6. ÖRNEK

$P(x) = 2x^{n+3} + 6x^{5-n} - 8x + 12$ ifadesi bir polinom olduğuna göre n nin alabileceği değerler kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(x)$ polinomunda x lerin üssü doğal sayı olacağından

$n + 3 \geq 0$ ve $5 - n \geq 0$ olmalıdır. Bu durumda

$\left.\begin{matrix} n+3 \geq 0 \Rightarrow n \geq -3 \\ 5-n \geq 0 \Rightarrow n \leq 5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -3 \leq n \leq 5$ elde edilir. Buna göre n nin alabileceği değerler kümesi

$\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ olarak bulunur.

7. ÖRNEK

$P(x) = 3x^{m+5} - (m-2)\sqrt{x+1} + 4x + m^2 + 1$ ifadesi bir polinom olduğuna göre polinomun derecesini ve sabit terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(x)$ polinomunda x lerin üssü doğal sayıdır.

Bu durumda

$m + 5 \geq 0$ ve $m - 2 = 0$ olmalıdır. Buradan

$m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$ bulunur. Buna göre polinomun derecesi

$\text{der}[P(x)] = m + 5 \Rightarrow \text{der}[P(x)] = 2 + 5 = 7$ ve

sabit terimi $m^2 + 1 = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$ olarak bulunur.

Sıra Sizde

SORU

$P(4x + 1) = 4x^2 - mx + 5$ olmak üzere ve

$P(-3) = 7$ olduğuna göre m değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

8. ÖRNEK

$P(x) = 5x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 4x - 1$ olduğuna göre $P(x)$ polinomunun katsayıları toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

1. Yol

$P(x) = 5x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 4x - 1$ polinomunun katsayıları
5, 3, -7, 4 ve -1 dir.
Bu katsayıların toplamı
$5 + 3 + (-7) + 4 + (-1) = 4$ olarak bulunur.

2. Yol

$P(x) = 5x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 4x - 1$ polinomunda x yerine 1 yazılırsa

$$P(1) = 5 \cdot 1^4 + 3 \cdot 1^3 - 7 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 1$$
$$= 12 + (-8)$$
$$= 4 \text{ olur.}$$

Sonuç

Bir polinomun katsayıları toplamını bulmak için değişken yerine “1” yazılır.

9. ÖRNEK

$P(3x + 5) = 6x^2 - 5x + 2$ polinomunun katsayıları toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(3x + 5) = 6x^2 - 5x + 2$ polinomunun katsayıları toplamını bulmak için x yerine 1 yazılırsa

$$P(3 \cdot 1 + 5) = P(8)$$
$$= 6 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 2$$
$$= 6 - 5 + 2$$
$$= 3 \text{ olur.}$$

10. ÖRNEK

$P(x) = -x^2 + 6x$ olduğuna göre $P(4 + 5x)$ polinomunun katsayıları toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(4 + 5x)$ polinomunun katsayıları toplamı $P(4 + 5 \cdot 1) = P(9)$ olur.
$P(x) = -x^2 + 6x$ polinomunda x yerine 9 yazılırsa

$$P(9) = -9^2 + 6 \cdot 9$$
$$= -81 + 54$$
$$= -27 \text{ olur.}$$

11. ÖRNEK

$P(x+3)=12x^2-7x+3$ olduğuna göre $P(5x-3)$ polinomunun katsayıları toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(5x-3)$ polinomunun katsayıları toplamı $P(5\cdot 1-3)=P(2)$ dir.

$P(x+3)=12x^2-7x+3$ polinomunda x yerine -1 yazılırsa

$$P(-1+3)=12\cdot(-1)^2-7\cdot(-1)+3$$
$$P(2)=12+7+3$$
$$=22 \text{ olur.}$$

12. ÖRNEK

$P\left(\frac{x}{2}+1\right)=2x^2-5x+n-1$ polinomu veriliyor. $P(x)$ polinomunun sabit terimi 2 olduğuna göre n değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(x)$ polinomunun sabit terimi $P(0)$ dır. Bu durumda $P(0)=2$ dir.

$P\left(\frac{x}{2}+1\right)$ polinomunda x yerine -2 yazılırsa

$P\left(\frac{-2}{2}+1\right)=P(0)=2\cdot(-2)^2-5\cdot(-2)+n-1=2$ eşitliği elde edilir.

$$2\cdot 4+10+n-1=2$$
$$8+10+n-1=2$$
$$17+n=2 \Rightarrow n=-15 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

SORU

$P(2x-5)$ polinomunun katsayıları toplamı 3,

$Q(x-4)$ polinomunun sabit terimi 12 dir.

$P(x-6)+(2n-3)\cdot x=Q(-x-1)$ olduğuna göre n değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

13. ÖRNEK

$P(x) = (x^2 + 2x + 1)^2$ polinomunun tek ve çift dereceli terimlerinin katsayıları toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(x)$ polinomu düzenlenirse

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2 + 2x + 1)^2 \\ &= [x^2 + (2x + 1)]^2 \\ &= x^4 + 2 \cdot x^2 \cdot (2x + 1) + (2x + 1)^2 \\ &= x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 4x^2 + 4x + 1 \\ &= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \text{ şeklinde bulunur.} \end{aligned}$$

$P(x)$ polinomunda;

Çift dereceli terimler: $x^4, 6x^2, 1$

Tek dereceli terimler: $4x^3, 4x$ olur.

Çift dereceli terimlerin katsayıları toplamı: $1 + 6 + 1 = 8$

Tek dereceli terimlerin katsayıları toplamı: $4 + 4 = 8$ olarak bulunur.

Tanım

$a_n = a_{n-1} = ... = a_2 = a_1 = 0$ ve $a_0 \neq 0$ olmak üzere

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ polinomuna

sabit polinom denir.

$P(x) = a_0$ şeklinde gösterilir.

Sabit polinomun derecesi sıfırdır.

14. ÖRNEK

$P(x) = (a - 2)x^2 + (2b - a - 4)x + ab$ sabit polinom olduğuna göre $P(15)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(x) = (a - 2)x^2 + (2b - a - 4)x + ab$ sabit polinom olduğundan

$a - 2 = 0$ ve $2b - a - 4 = 0$ biçimindedir.

$a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$ ve

$$\begin{aligned} 2b - a - 4 = 0 &\Rightarrow 2b - 2 - 4 = 0 \\ &\Rightarrow 2b - 6 = 0 \\ &\Rightarrow 2b = 6 \\ &\Rightarrow b = 3 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Bulunan değerler $P(x)$ polinomunda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} P(x) &= (2 - 2)x^2 + (2 \cdot 3 - 2 - 4)x + 2 \cdot 3 \\ &= 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 6 \\ &= 6 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Bu durumda $P(15) = 6$ olur.

15. ÖRNEK

$P(x) = (n+3)x^4 + (n^2+3m)x^{m-2} - 5n + m$ polinomu sabit polinom olduğuna göre $P(-2)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(x)$ polinomu sabit polinom ise $n+3=0$ ve $m-2=0$ olmalıdır.

$n+3=0 \Rightarrow n=-3$ ve $m-2=0 \Rightarrow m=2$

$$\begin{aligned} P(x) &= (-3+3)x^4 + [(-3)^2 + 3\cdot 2]x^{2-2} - 5\cdot(-3) + 2 \\ &= (9+6) + 15 + 2 \\ &= 32 \text{ olur.} \end{aligned}$$

$P(x) = 32$ bulunur. Bu durumda $P(-2) = 32$ olur.

Tanım

$a_n = a_{n-1} = \dots = a_2 = a_1 = a_0 = 0$ olmak üzere

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ polinomuna yani tüm terimleri "0" olan polinoma **sıfır polinomu** denir.

$P(x) = 0$ şeklinde gösterilir. Sıfır polinomunun derecesi belirsizdir.

16. ÖRNEK

$P(x) = (p-5)x^3 + (2q-12)x - r + 7$ polinomu sıfır polinomu olduğuna göre $\frac{p+q}{r}$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(x)$ polinomu sıfır polinomu ise $p-5=0$, $2q-12=0$ ve $-r+7=0$ olmalıdır. Buradan

$p-5=0 \Rightarrow p=5$, $2q-12=0 \Rightarrow q=6$ ve $-r+7=0 \Rightarrow r=7$ bulunur.

$\frac{p+q}{r} = \frac{5+6}{7} = \frac{11}{7}$ olur.

17. ÖRNEK

$Q(x) = (a-1)x^6 + (b-a-8)x^4 - abc + 18$ polinomu sıfır polinomu olduğuna göre c değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$Q(x)$ sıfır polinomu olduğuna göre bütün terimlerin katsayıları sıfır olmalıdır. O hâlde

$$\left.\begin{aligned} a-1 &= 0 \\ b-a-8 &= 0 \\ -abc+18 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$a-1=0 \Rightarrow a=1$, $b-a-8=0 \Rightarrow b-1-8=0$ ve $-abc+18=0$

$\Rightarrow b=9$ $\quad -1\cdot 9\cdot c = -18 \Rightarrow c=2$ bulunur.

POLİNOMLAR

Tanım

Dereceleri eşit olan iki polinomun aynı dereceli terimlerinin katsayıları birbirine eşit ise bu iki polinoma **eşit polinomlar** denir. Buna göre

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_2x^2 + b_1x + b_0$ polinomları verilsin.

$$P(x) = Q(x) \Longleftrightarrow \left.\begin{cases} a_n = b_n \\ a_{n-1} = b_{n-1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_2 = b_2 \\ a_1 = b_1 \\ a_0 = b_0 \end{cases}\right\} \text{olur.}$$

18. ÖRNEK

$P(x) = (n+2)x^3 + 3x^2 - 5m$

$Q(x) = 5x^3 - (p+1)x^2 + qx + 10$ veriliyor.

$P(x) = Q(x)$ olduğuna göre $n + m - p \cdot q$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(x) = Q(x)$ ise aynı dereceli terimlerin katsayıları eşit olmalıdır. Bu durumda

$$\left.\begin{aligned} n + 2 &= 5 \\ 3 &= -(p+1) \\ 0 &= q \\ -5m &= 10 \end{aligned}\right\} \text{yazılır.}$$

Denklemler çözülürse $n = 3, p = -4, q = 0, m = -2$ bulunur.

$$\begin{aligned} n + m - p \cdot q &= 3 + (-2) - (-4) \cdot 0 \\ &= 1 \text{ olur.} \end{aligned}$$

19. ÖRNEK

$P(2x) + P(x-1) = 3x - 2$ olduğuna göre $P(x)$ polinomunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Toplam polinom, birinci dereceden olduğundan $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $P(x) = ax + b$ olur.

$P(2x) = 2ax + b$ ve $P(x-1) = a(x-1) + b = ax - a + b$ değerleri yerine yazılırsa

$2ax + b + ax - a + b = 3x - 2$

$3ax + (-a + 2b) = 3x - 2$

$3a = 3 \Rightarrow a = 1$

$-a + 2b = -2 \Rightarrow -1 + 2b = -2$

$\Rightarrow b = -\frac{1}{2}$

$P(x) = x - \frac{1}{2}$ olur.

Tanım

Bir P polinomu birden fazla değişken içeriyorsa bu tür polinomlara **çok değişkenli polinom** denir.
$P(x, y, ...)$ şeklinde gösterilir.

P polinomu x değişkenine göre verilmişse P(x), x ve y değişkenlerine göre verilmişse P(x, y) şeklinde gösterilir.
Çok değişkenli polinomlarda değişkenlerin kuvvetleri, tek değişkenli polinomlarda olduğu gibi doğal sayıdır.
Polinomun derecesi, terimlerin derecelerinden en büyük olanıdır.

$P(x, y) = -5x^3y^4 + 2xy^3 - 3$ iki değişkenli polinomunda
$5x^3y^4$ teriminin derecesi : $3 + 4 = 7$
$2xy^3$ teriminin derecesi : $1 + 3 = 4$
-3 teriminin derecesi : 0 olur.
Bu durumda $der[P(x, y)] = 7$ olarak bulunur.

20. ÖRNEK

$P(x, y) = 2x^2y - 3x^2y^3 + 5x + y + 6$ polinomunun derecesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(x, y)$ polinomunun derecesi, terimlerin derecelerinden en büyük olanıdır.
$P(x, y)$ polinomunun terimleri : $2x^2y, -3x^2y^3, 5x, y, 6$ dır. Bu terimlerin dereceleri
$2x^2y$ teriminin derecesi : $2 + 1 = 3$
$-3x^2y^3$ teriminin derecesi : $2 + 3 = 5$
$5x$ teriminin derecesi : 1
y teriminin derecesi : 1
6 teriminin derecesi : 0 olarak bulunur.
Bu durumda terimlerin derecelerinden en büyük olan 5 olduğundan $der[P(x, y)] = 5$ olarak bulunur.

21. ÖRNEK

$P(x, y) = -3x^2 + xy + 5x - y + 13$ polinomu için $P(-1, 2)$ ve $P(3, 1)$ değerlerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$P(-1, 2)$ değeri için $x = -1$ ve $y = 2$ alınırsa

$$\begin{aligned} P(-1,2) &= -3\cdot(-1)^2 + (-1)\cdot 2 + 5\cdot(-1) - 2 + 13 \\ &= -3 - 2 - 5 - 2 + 13 \\ &= 1 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

$P(3, 1)$ değeri için $x = 3$ ve $y = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} P(3,1) &= -3\cdot 3^2 + 3\cdot 1 + 5\cdot 3 - 1 + 13 \\ &= -27 + 3 + 15 - 1 + 13 \\ &= 3 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

2. Polinomlarda İşlemler

Sayılarda olduğu gibi polinomlarda da toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri yapılabilir. Bu işlemler yapılırken belirli kurallar kullanılır.

Polinomlarda Toplama ve Çıkarma İşlemleri

Polinomlar toplanıp çıkarılırken aynı dereceli terimler (benzer terimler) kendi aralarında toplanıp çıkarılır, farklı dereceden terimler aynen alınır. Polinomlar toplanıp çıkarıldığında elde edilen polinomun derecesi, derecesi büyük olan polinomun derecesine eşit olur. Yani

$\text{der}[P(x)] = n,\ \text{der}[Q(x)] = m$ ve $m > n$ ise $\text{der}[P(x) \mp Q(x)] = m$ olur.

1. ÖRNEK

$P(x) = 2x^2 - 5x + 3$ ve

$Q(x) = -8x^3 + 5x^2 - 2x + 4$

polinomları veriliyor.

$P(x) + Q(x)$ ve $P(x) - Q(x)$ ifadelerini bulunuz.

ÇÖZÜM

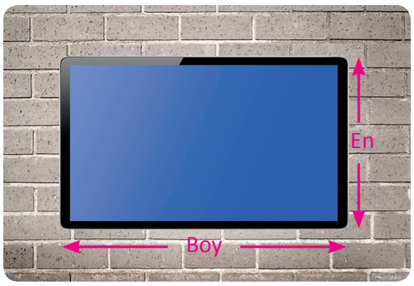
İki polinomun toplamı ya da farkı alınırken eşit dereceli terimlerin katsayıları toplanır ya da çıkarılır.

O hâlde

$$\begin{aligned}P(x) + Q(x) &= (2x^2 - 5x + 3) + (-8x^3 + 5x^2 - 2x + 4)\\ &= -8x^3 + (2+5)x^2 + (-5-2)x + (3+4)\\ &= -8x^3 + 7x^2 - 7x + 7 \text{ olur.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(x) - Q(x) &= (2x^2 - 5x + 3) - (-8x^3 + 5x^2 - 2x + 4)\\ &= 2x^2 - 5x + 3 + 8x^3 - 5x^2 + 2x - 4\\ &= 8x^3 + (2-5)x^2 + (-5+2)x + (3-4)\\ &= 8x^3 - 3x^2 - 3x - 1 \text{ olur.}\end{aligned}$$

2. ÖRNEK



Yandaki LCD televizyonun eni $(x^2 - 3x + 10)$ cm, boyu $(3x^2 + x + 20)$ cm dir.

Bu televizyonun kapladığı yüzeyin çevre uzunluğunu veren polinomu bulunuz.

ÇÖZÜM

Kısa kenar uzunlukları toplamı

$x^2 - 3x + 10 + x^2 - 3x + 10 = (2x^2 - 6x + 20)$ cm

Uzun kenar uzunlukları toplamı

$3x^2 + x + 20 + 3x^2 + x + 20 = (6x^2 + 2x + 40)$ cm

$$\begin{aligned}\text{Yüzey alanının çevresi: } Ç(x) &= 2x^2 - 6x + 20 + 6x^2 + 2x + 40\\ &= (2+6)x^2 + (-6+2)x + (20+40)\\ &= (8x^2 - 4x + 60) \text{ cm olur.}\end{aligned}$$

Polinomlarda Çarpma İşlemi

İki polinom çarpılırken birinci polinomun her bir terimi ikinci polinomun her bir terimi ile ayrı ayrı çarpılır. Elde edilen polinomda aynı dereceli terimler toplanır, farklı dereceden terimler aynen yazılır.

Özellikler

$der[P(x)] = n$, $der[Q(x)] = m$ olsun.

1. $der[P(x) \cdot Q(x)] = n + m$ olur.

2. $der[P(x)] = n$ ise $P(x) = x^n$ alınabilir.
Bu durumda $P^k(x) = (x^n)^k = x^{n \cdot k}$ ve $P(x^k) = (x^k)^n = x^{n \cdot k}$ olduğundan
$der[P^k(x)] = der[P(x^k)] = n \cdot k$ olur.

3. $der\{P[Q(x)]\} = m \cdot n$ olur.

3. ÖRNEK

$P(x) = 2x - 3$ ve $Q(x) = x^2 + 4$ olduğuna göre $P(x) \cdot Q(x)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(x)$ polinomunun her terimi ile $Q(x)$ polinomunun bütün terimleri çarpılırsa

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (2x-3) \cdot (x^2+4) \\ &= 2x \cdot x^2 + 2x \cdot 4 - 3 \cdot x^2 - 3 \cdot 4 \\ &= 2x^3 + 8x - 3x^2 - 12 \\ &= 2x^3 - 3x^2 + 8x - 12 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

4. ÖRNEK

$P(x)$ polinomunun derecesi 5, $Q(x)$ polinomunun derecesi 3 olduğuna göre $P(x^2) \cdot Q^3(x)$ polinomunun derecesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(x)$ polinomunun derecesi 5 ise $P(x) = x^5$, $Q(x)$ polinomunun derecesi 3 ise $Q(x) = x^3$ olarak seçilebilir.
Bu durumda
$P(x^2) = (x^2)^5 = x^{10}$ ve $Q^3(x) = x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 = x^9$ olur.
$P(x^2) \cdot Q^3(x) = x^{10} \cdot x^9 = x^{19}$ olduğundan $der[P(x^2) \cdot Q^3(x)] = 19$ bulunur.

5. ÖRNEK

$P(x) = x^2 + x - 1$ ve $Q(x) = x^3$ olmak üzere $der\{P[Q(x)]\}$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(x) = x^2$ alınabilir. Bu durumda
$P[Q(x)] = P(x^3) = (x^3)^2 = x^6$ olduğundan
$der\{P[Q(x)]\} = 6$ bulunur.

6. ÖRNEK

$P(x) = (x^5+1)^2 \cdot x^{5k} \cdot (2x+3)^3$ polinomunun derecesi 23 olduğuna göre k değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$Q(x) = (x^5+1)^2 \Rightarrow der[Q(x)] = 10$

$R(x) = x^{5k} \Rightarrow der[R(x)] = 5k$

$S(x) = (2x+3)^3 \Rightarrow der[S(x)] = 3$ bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} der[P(x)] &= der[Q(x) \cdot R(x) \cdot S(x)] \\ &\Rightarrow 10 + 5k + 3 = 23 \\ &\Rightarrow 13 + 5k = 23 \\ &\Rightarrow 5k = 10 \\ &\Rightarrow k = 2 \text{ olur.} \end{aligned}$$

7. ÖRNEK

Yandaki dikdörtgen şeklindeki hobi bahçesinin boyu $(5x^2+4x-3)$ metre ve eni $(3x^2-2)$ metredir. $x \geq 1$ olmak üzere bahçenin

a) Alanını veren polinomu

b) Alan polinomunun katsayıları toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Hobi bahçesi bir dikdörtgen olduğundan alanı, ardışık iki kenar uzunluğunun çarpımına eşittir.

Alan polinomu

$$\begin{aligned} A(x) &= (5x^2+4x-3) \cdot (3x^2-2) \\ &= 15x^4 - 10x^2 + 12x^3 - 8x - 9x^2 + 6 \\ &= (15x^4 + 12x^3 - 19x^2 - 8x + 6)\ m^2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

b) Alan polinomunun katsayıları toplamı $A(1)$ olduğundan

$$\begin{aligned} A(1) &= 15 \cdot 1^4 + 12 \cdot 1^3 - 19 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 6 \\ &= 15 + 12 - 19 - 8 + 6 \\ &= 6 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Sıra Sizde

SORU

$P(x)$ polinomunun derecesi 4, $Q(x)$ polinomunun derecesi 2 dir.

$R(x) = x^3 \cdot P(x^2) + (x+2) \cdot Q^3(x)$ olduğuna göre $der[R(x)]$ bulunuz.

ÇÖZÜM

Polinomlarda Bölme İşlemi

$P(x)$ ve $Q(x)$ birer polinom, $Q(x) \neq 0$ ve $der[P(x)] \geq der[Q(x)]$ olmak üzere

$$\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} & B(x) \\ \cline{1-1} K(x) & \end{array}$$

$P(x)$: Bölünen
$Q(x)$: Bölen
$B(x)$: Bölüm
$K(x)$: Kalan polinomudur.

Özellikler

1. $der[K(x)] < der[Q(x)]$
2. $K(x) = 0$ ise $P(x)$ polinomu $Q(x)$ polinomuna tam bölünür.
3. $der[P(x)] = m$ ve $der[Q(x)] = n$ ise $der\left[\dfrac{P(x)}{Q(x)}\right] = m - n$ olur.

8. ÖRNEK

Aşağıda verilen bölme işleminde $B(x)$ ve $K(x)$ polinomlarını bulunuz.

$$\begin{array}{r|l} 3x^4 + 2x^3 + x^2 - x + 2 & x^2 + 1 \\ \cline{2-2} - \qquad\qquad & B(x) = ? \\ \cline{1-1} K(x) = ? & \end{array}$$

ÇÖZÜM

$$\begin{array}{l|l} \cancel{3x^4} + 2x^3 + x^2 - x + 2 & x^2 + 1 \\ \cline{2-2} \underline{-\ \cancel{3x^4} + 3x^2} & 3x^2 + 2x - 2 = B(x) \\ \cancel{2x^3} - 2x^2 - x + 2 & \\ \underline{-\ \cancel{2x^3} + 2x} & \\ -2x^2 - 3x + 2 & \\ \underline{-\ -2x^2 - 2} & \\ -3x + 4 = K(x) \text{ olur.} & \end{array}$$

$$\frac{3x^4}{x^2} = 3x^2$$

9. ÖRNEK

$(x - 1) \cdot P(x) = x^3 + ax^2 + 4x - 1$ olduğuna göre $\dfrac{P(1)}{a}$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

a değerini bulmak için $x = 1$ alınırsa

$(1 - 1) \cdot P(1) = 1^3 + a \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 1$

$0 = 1 + a + 4 - 1$

$a = -4$ bulunur.

$P(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 4x - 1}{x - 1} = x^2 - 3x + 1$ olur. Buradan

$P(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = -1$ elde edilir.

$\dfrac{P(1)}{a} = \dfrac{-1}{-4} = \dfrac{1}{4}$ olur.

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^3} - 4x^2 + 4x - 1 & x - 1 \\ \cline{2-2} \underline{-\ \cancel{x^3} - x^2 \qquad\qquad} & x^2 - 3x + 1 \\ \cancel{-3x^2} + 4x - 1 & \\ \underline{-\ \cancel{-3x^2} + 3x \qquad} & \\ x - 1 & \\ \underline{-\ x - 1} & \\ 0 & \end{array}$$

10. ÖRNEK

$der[P(x) \cdot Q(x)] = 12$ ve

$der\left[\dfrac{P(x)}{Q(x)}\right] = 4$ olduğuna göre

$der[P(x^2) \cdot Q(x^3)]$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$der[P(x)] = m$ ve $der[Q(x)] = n$ olsun.

$der[P(x) \cdot Q(x)] = 12 \Rightarrow m + n = 12$ ve $der\left[\dfrac{P(x)}{Q(x)}\right] = 4 \Rightarrow m - n = 4$ denklemleri bulunur.

$\left.\begin{aligned} m + n &= 12 \\ m - n &= 4 \end{aligned}\right\}$ Denklem sistemi çözülürse $m = 8,\ n = 4$ bulunur.

$$\begin{aligned} der[P(x^2) \cdot Q(x^3)] &= 2 \cdot m + 3 \cdot n \\ &= 2 \cdot 8 + 3 \cdot 4 \\ &= 16 + 12 \\ &= 28 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Polinomlarda Bölme İşleminde Kalan Bulma

P(x) Polinomunun $ax + b$ ile bölümü

$$\begin{array}{r|l} P(x) & ax + b \\ \cline{2-2} & B(x) \\ \underline{-\qquad\qquad} & \\ K & \end{array}$$

$P(x) = (ax + b) \cdot B(x) + K \qquad ax + b = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{a}$

$P\left(-\dfrac{b}{a}\right) = \left(a \cdot \left(-\dfrac{b}{a}\right) + b\right) \cdot B\left(-\dfrac{b}{a}\right) + K = 0 \cdot B\left(-\dfrac{b}{a}\right) + K$

$K = P\left(-\dfrac{b}{a}\right)$

Bir $P(x)$ polinomu $ax + b$ ile tam bölünüyorsa $P\left(-\dfrac{b}{a}\right) = 0$ olur. Bu durumda $ax + b$, $P(x)$ polinomunun bir çarpanıdır. Yani

$P\left(-\dfrac{b}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow ax + b,\ P(x)$ in bir çarpanıdır.

Bir $P(x)$ polinomu, $ax + b$ ile bölündüğünde $K = P\left(-\dfrac{b}{a}\right) = 0$ ise $x = -\dfrac{b}{a}$, $P(x) = 0$ denkleminin sıfırı (kökü) olur.

11. ÖRNEK

$P(x) = x^2 - 1$ polinomunun $x + 1$ ile bölümünden kalanı bulunuz.

ÇÖZÜM

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ olur. Bu durumda $K = P(-1)$ olur.

$P(-1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$ olduğundan $K = P(-1) = 0$ bulunur.

$P(x) = x^2 - 1$ polinomunun $x + 1$ ile bölümünden kalan sıfır olduğundan

$x = -1$ polinomun sıfırı (kökü) dır.

12. ÖRNEK

$P(x) = 2x^3 - 4x^2 + ax - 2$ polinomunun $x - 3$ ile bölümünden kalan -5 olduğuna göre a değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ olduğundan $P(x)$ polinomunun $x - 3$ ile bölümünden kalan $P(3) = -5$ olur.

$$P(3) = 2 \cdot (3)^3 - 4 \cdot (3)^2 + a \cdot 3 - 2 = -5$$
$$2 \cdot 27 - 4 \cdot 9 + 3a - 2 = -5$$
$$54 - 36 - 2 + 3a = -5$$
$$16 + 3a = -5$$
$$3a = -5 - 16$$
$$3a = -21$$
$$a = -7 \text{ olur.}$$

13. ÖRNEK

$P(2x - 1) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x - 1$ polinomu veriliyor. $P(x - 1)$ polinomunun $3x + 6$ ile bölümünden kalanı bulunuz.

ÇÖZÜM

$3x + 6 = 0 \Rightarrow x = -2$ olduğundan

$P(x - 1)$ polinomunun $3x + 6$ ile bölümünden kalan $P(-2 - 1) = P(-3)$ olur.

$P(2x - 1)$ polinomunda $x = -1$ seçilirse

$P[2 \cdot (-1) - 1] = P(-3)$ elde edilir.

$$P(-3) = (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 + (-1) - 1$$
$$= 1 + 2 + 5 - 2$$
$$= 8 - 2$$
$$= 6 \text{ bulunur.}$$

14. ÖRNEK

$P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının $x + 2$ ile bölümünden kalanlar sırasıyla 3 ve -4 tür.

$(2m - 10) \cdot P(3 - x) - m \cdot Q(3 - x)$ polinomu $x - 5$ ile bölünebildiğine göre m değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(x)$ polinomunun $x + 2$ ile bölümünden kalan 3 ise $P(-2) = 3$,

$Q(x)$ polinomunun $x + 2$ ile bölümünden kalan -4 ise $Q(-2) = -4$ olur.

$(2m - 10) \cdot P(3 - x) - m \cdot Q(3 - x)$ polinomu $x - 5$ ile bölündüğünden kalan sıfır olmalıdır.

$$(2m - 10) \cdot P(3 - 5) - m \cdot Q(3 - 5) = 0$$
$$(2m - 10) \cdot P(-2) - m \cdot Q(-2) = 0$$
$$(2m - 10) \cdot 3 - m \cdot (-4) = 0$$
$$6m - 30 + 4m = 0$$
$$10m = 30$$
$$m = 3 \text{ olur.}$$

15. ÖRNEK

$P(1-3x) = x^4 - 6x^3 - x^2 + k$ polinomu veriliyor.
$P(x-7)$ polinomunun çarpanlarından biri $x-2$ olduğuna göre k değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(x-7)$ polinomunun çarpanlarından biri $x-2$ ise polinom $x-2$ ile kalansız bölünür. Yani
$P(2-7) = P(-5) = 0$ olur.
$x = 2$ için $P(1-3\cdot 2) = P(1-6) = P(-5)$ bulunur.
$P(1-3\cdot 2) = 2^4 - 6\cdot 2^3 - 2^2 + k = 0$
$\Rightarrow 16 - 48 - 4 + k = 0$
$\Rightarrow -36 + k = 0$
$\Rightarrow k = 36$ olur.

16. ÖRNEK

$P(x)$ polinomunun $x-1$ ile bölümünden kalan 5, $x+2$ ile bölümünden kalan 2 dir. Buna göre $P(x)$ polinomunun x^2+x-2 ile bölümünden kalanı bulunuz.

ÇÖZÜM

x^2+x-2 polinomu, ikinci dereceden olduğu için kalan polinomu en fazla birinci dereceden olur. Bu durumda $P(x) = (x-1)\cdot(x+2)\cdot B(x) + (mx+n)$ yazılır.

$P(x)$ in $x-1$ ile bölümünden kalan 5 ise $P(1) = (1-1)\cdot(1+2)\cdot B(1) + (m\cdot 1 + n) = 5$
$P(x)$ in $x+2$ ile bölümünden kalan 2 ise $P(-2) = (-2-1)\cdot(-2+2)\cdot B(-2) + [m\cdot(-2)+n] = 2$
eşitliklerinden elde edilen

$\left.\begin{aligned} m+n &= 5 \\ -2m+n &= 2 \end{aligned}\right\}$ denklem sistemi çözülürse $m = 1$ ve $n = 4$ bulunur.

Bu değerler $K(x) = mx + n$ ifadesinde yerine yazılırsa
$K(x) = 1\cdot x + 4 = x + 4$ kalanı elde edilir.

Sıra Sizde

SORU

$m, n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $P(x) = x^2 - (m+1)x + 36$ polinomu $x+n$ ile bölünebildiğine göre m nin kaç farklı değer alabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

ALIŞTIRMALAR-1

1. Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri örneğe uygun olarak doldurunuz.

Fonksiyon	Polinom mu? (E/H)	Polinom ise			
		Derecesi	Başkatsayısı	Sabit Terimi	Katsayılar Toplamı
$f(x)=4x^3-5x^2+8$	E	3	4	8	7
$g(x)=x^2-\sqrt{x}+1$					
$h(x)=5x^2+3x$					
$p(x)=-4$					
$q(x)=\dfrac{-2x+3}{x-1}$					
$r(x)=\sqrt{2}x-\sqrt{3}$					

2. $P(x)=4x^3-5x^{\frac{7n-6}{n}}+2x^{n-3}+1$ ifadesi bir polinom olduğuna göre n nin alabileceği değerler toplamını bulunuz.

3. $P(x)=3x^{\frac{3m-2}{m+2}}-4x^3+2x^2-x+m$ ifadesi 5. dereceden bir polinom olduğuna göre $m^{P(-1)}$ değerini bulunuz.

4. $P(x)=(2a-b+3)x^2+(a+b-9)x+a^2b$ polinomu sabit polinom olduğuna göre $P(-3)$ değerini bulunuz.

5. $P(x)=(x^3-2)^{21}+3(5x^2-4)^{12}-2x^7+3$ polinomunun katsayıları toplamını bulunuz.

6. $P(x)=(x+2)^2+(x-2)^2$ polinomunun çift dereceli terimlerinin katsayıları toplamını bulunuz.

7. $P(x) = 5x^3 - 4x^2 + x - n$ polinomunun katsayıları toplamı 3 olduğuna göre sabit terimini bulunuz.

8. $P(x) = (m^2 + 1)x^2 - 3x + m - 2$ polinomunun sabit terimi 0 olduğuna göre başkatsayısını bulunuz.

9. $P(2x + 1) = 7x^2 - 3x + m$ olmak üzere $P(3 - 2x)$ polinomunun sabit terimi 4 olduğuna göre m değerini bulunuz.

10. $P(x) = 3x^2 - (b - 2)x + 6$
$Q(x) = (a + 4)x^2 + 5x + 12c$
polinomları eşit olduğuna göre $a + b + c$ toplamını bulunuz.

11. $P(x)$ polinomu 4. dereceden bir polinom olduğuna göre $P(x^2) \cdot (x+1) \cdot P^3(x)$ polinomunun derecesini bulunuz.

12. $P(x)$ ve $Q(x)$ birer polinom olmak üzere

$\text{der}[P(x) \cdot Q(x)] = 5$

$\text{der}\left[\dfrac{P^2(x)}{Q(x)}\right] = 4$

olduğuna göre $\text{der}[Q^2(x^5)]$ değerini bulunuz.

13. $P(x) = 6x^2 + kx - 2$ polinomunun $x + 1$ ile bölümünden kalan -5 olduğuna göre k değerini bulunuz.

14. $P(2x + 3) = x^3 + 2x + 5$ polinomu veriliyor. Buna göre $P(x + 2)$ polinomunun $x - 1$ ile bölümünden kalanı bulunuz.

10.3.2. POLİNOMLARIN ÇARPANLARA AYRILMASI

1. Çarpanlara Ayırma

Tanım

$P(x)$, $A(x)$ ve $B(x)$ birer polinom olmak üzere $P(x) = A(x) \cdot B(x)$ şeklinde yazılabiliyorsa $A(x)$ ve $B(x)$ polinomları, $P(x)$ polinomunun birer çarpanıdır.

$P(x)$ polinomu, sabit polinomdan farklı iki veya daha fazla polinomun çarpımı şeklide yazılabiliyorsa $P(x)$ polinomuna **çarpanlarına ayrılabilen polinom** (indirgenebilir polinom)**,** aksi hâlde **çarpanlarına ayrılamayan polinom** (indirgenemeyen polinom) denir.

Başkatsayısı 1 olan indirgenemeyen polinom **asal polinom** olarak adlandırılır.

Bir $P(x)$ polinomunun derecesinden daha küçük iki ya da daha fazla polinomun çarpımı şeklinde yazılmasına $P(x)$ polinomunun **çarpanlara ayrılması** denir.

- $P(x) = x^2 + x - 6$ polinomu, $P(x) = (x-2) \cdot (x+3)$ şeklinde yazılabilir. $(x-2)$ ve $(x+3)$ polinomları $P(x)$ polinomunun birer çarpanıdır.
- $P(x) = 5x - 6$, $Q(x) = 2x^2 + 3$ polinomları, çarpanlarına ayrılamayan polinomlardır.
- $P(x) = x^2 + 4$, $Q(x) = x + 7$ bu polinomlar başkatsayıları 1 olan indirgenemeyen polinomlar olduğundan asal polinomlardır.

Çarpanlara Ayırma Yöntemleri

a) Ortak Çarpan Parantezine Alma Yöntemi

Bir ifade çarpanlarına ayrılırken ifadenin her teriminde ortak çarpan varsa bu ifade ortak çarpan parantezine alınarak çarpanlarına ayrılır.

$P(x) \cdot B(x) \mp P(x) \cdot C(x)$ ifadesinin her teriminde $P(x)$ polinomu ortak bir çarpandır. Bu ifade $P(x)$ ortak çarpan parantezine alınırsa

$P(x) \cdot B(x) \mp P(x) \cdot C(x) = P(x) \cdot [B(x) \mp C(x)]$

eşitliği elde edilir. Böylece bu ifade çarpanlarına ayrılmış olur.

1. ÖRNEK

Aşağıdaki ifadeleri ortak çarpan parantezine alarak çarpanlarına ayırınız.

a) $x^3y^2 - x^2y^3$

b) $5x^2 - 5x$

c) $axy + axz - axt$

ç) $2^{-20} - 5 \cdot 2^{-21} + 3 \cdot 2^{-22}$

ÇÖZÜM

a) $x^3y^2 - x^2y^3$ ifadesi $x \cdot x^2y^2 - x^2y^2 \cdot y$ şeklinde yazılabilir. x^2y^2 her terimde bulunduğundan ortak çarpan olur. Bu durumda ifade, x^2y^2 ortak çarpan parantezine alınırsa $x^3y^2 - x^2y^3 = x^2y^2 \cdot (x - y)$ sonucu elde edilir.

Benzer düşünce ile diğer ifadeler de çarpanlarına ayrılmıştır. İnceleyiniz.

b) $5x^2 - 5x = 5x \cdot (x-1)$

c) $axy + axz - axt = ax \cdot (y + z - t)$

ç) $2^{-20} - 5 \cdot 2^{-21} + 3 \cdot 2^{-22} = 2^{-22} \cdot 2^2 - 5 \cdot 2^{-22} \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^{-22}$

$= 2^{-22} \cdot (2^2 - 5 \cdot 2^1 + 3)$

$= 2^{-22} \cdot (4 - 10 + 3)$

$= -3 \cdot 2^{-22}$ olur.

Not

$n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

a) $(x-y)^{2n} = (y-x)^{2n}$

b) $(x-y)^{2n+1} = (-1)\cdot(y-x)^{2n+1}$ olur.

2. ÖRNEK

$(x-y)^2 - (y-x)^3$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

ÇÖZÜM

$(y-x)^3 = (-1)\cdot(x-y)^3$ olduğundan

$$\begin{aligned}(x-y)^2-(y-x)^3 &= (x-y)^2-(-1)\cdot(x-y)^3\\ &= (x-y)^2+(x-y)^3\\ &= (x-y)^2\cdot 1+(x-y)^2\cdot(x-y)\\ &= (x-y)^2\cdot[1+(x-y)]\\ &= (x-y)^2\cdot(1+x-y) \text{ olur.}\end{aligned}$$

3. ÖRNEK

$(a-b)^3\cdot(y-x)^2+(b-a)^2\cdot(x-y)^3$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

ÇÖZÜM

$(y-x)^2=(x-y)^2$ ve $(b-a)^2=(a-b)^2$ olduğundan

$$\begin{aligned}(a-b)^3\cdot(y-x)^2+(b-a)^2\cdot(x-y)^3 &= (a-b)^2\cdot(a-b)(x-y)^2+(a-b)^2\cdot(x-y)^2\cdot(x-y)\\ &= (a-b)^2\cdot(x-y)^2\cdot[(a-b)+(x-y)]\\ &= (a-b)^2\cdot(x-y)^2\cdot(a-b+x-y) \text{ olur.}\end{aligned}$$

Sıra Sizde

SORU

$3^{-14} - 2\cdot 9^{-7} + 30\cdot 3^{-15}$ ifadesinin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

b) Gruplandırarak Çarpanlara Ayırma Yöntemi

Verilen ifadenin bazı terimlerinde ortak çarpan bulunmayabilir. Bu durumda ortak çarpana sahip terimler ortak çarpan parantezine alınacak şekilde gruplandırılır ve çarpanlara ayırma işlemi yapılır.

$$\underbrace{A(x)\cdot B(x)}+\overbrace{D(x)\cdot C(x)}+\underbrace{A(x)\cdot C(x)}+\overbrace{D(x)\cdot B(x)}$$
$$=[A(x)\cdot B(x)+A(x)\cdot C(x)]+[D(x)\cdot C(x)+D(x)\cdot B(x)]$$
$$=A(x)\cdot[B(x)+C(x)]+D(x)\cdot[B(x)+C(x)]$$
$$=[A(x)+D(x)]\cdot[B(x)+C(x)]$$

4. ÖRNEK

Aşağıdaki ifadeleri gruplandırarak çarpanlara ayırma yöntemi ile çarpanlarına ayırınız.

a) $ax+by-ay-bx$

b) $y^3+3y^2+6y+18$

c) $a^2+3a-3b-ab$

ç) $6mn-15n+4m-10$

ÇÖZÜM

a) $ax+by-ay-bx=(ax-bx)+(-ay+by)$ (Gruplandırma)

$=x\cdot(a-b)-y\cdot(a-b)$ (Ortak çarpan parantezine alma)

$=(a-b)\cdot(x-y)$

Benzer düşünce ile diğer ifadeler çarpanlarına ayrılmıştır. İnceleyiniz.

b) $y^3+3y^2+6y+18=(y^3+3y^2)+(6y+18)$

$=y^2\cdot(y+3)+6\cdot(y+3)$

$=(y^2+6)\cdot(y+3)$

c) $a^2+3a-3b-ab=(a^2-ab)+(3a-3b)$

$=a\cdot(a-b)+3\cdot(a-b)$

$=(a-b)\cdot(a+3)$

ç) $6mn-15n+4m-10=(6mn+4m)+(-15n-10)$

$=2m\cdot(3n+2)+(-5)\cdot(3n+2)$

$=(3n+2)\cdot(2m-5)$

5. ÖRNEK

$x, y, z\in\mathbb{R}$ ve $x-y=6, y-z=4$ olduğuna göre

$x^2+yz-xy-xz$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2+yz-xy-xz=(x^2-xy)+yz-xz$

$=x\cdot(x-y)+(-z)\cdot(x-y)$

$=(x-y)\cdot(x-z)$ elde edilir.

$$\begin{array}{rl} & x\cancel{-y}=6 \\ + & \cancel{y}-z=4 \\ \hline & x-z=10 \end{array}$$

bulunur.

$(x-y)(x-z)=6\cdot10=60$ olur.

Özdeşliklerden Yararlanarak Çarpanlara Ayırma Yöntemi

Polinomlar çarpanlara ayrılırken bilinen bazı temel özdeşliklerden yararlanılır. Bu özdeşlikler aşağıda incelenmiştir.

i. İki Kare Farkı Özdeşliğinden Yararlanarak Çarpanlara Ayırma

$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ olur.

6. ÖRNEK

Aşağıdaki ifadeleri iki kare farkı özdeşliği yardımıyla çarpanlarına ayırınız.

a) $a^2 - 1$
b) $a^4 - b^4$
c) $20^2 - 19^2$
ç) $(x - y)^2 - (x + y)^2$

ÇÖZÜM

a) $a^2 - 1 = (a - 1) \cdot (a + 1)$
b) $a^4 - b^4 = (a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2 - b^2) \cdot (a^2 + b^2) = (a - b) \cdot (a + b) \cdot (a^2 + b^2)$
c) $20^2 - 19^2 = (20 - 19) \cdot (20 + 19) = 1 \cdot 39$
ç)
$$\begin{aligned}(x-y)^2-(x+y)^2 &= [(x-y)-(x+y)]\cdot[(x-y)+(x+y)]\\ &= (x-y-x-y)\cdot(x-y+x+y)\\ &= (-2y)\cdot 2x\end{aligned}$$

7. ÖRNEK

$x, y \in \mathbb{N}$ ve $x^2 - y^2 = 41$ olduğuna göre $x \cdot y$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2 - y^2 = 41$, $\underbrace{(x - y)}_{1} \cdot \underbrace{(x + y)}_{41} = 41$, (41 asal sayı olduğundan $41 = 1 \cdot 41$)

$$\begin{array}{rl} & x - y = 1 \\ + & x + y = 41 \\ \hline \end{array}$$ denklem sistemi çözülürse

$x = 21, y = 20$ bulunur.
$x \cdot y = 21 \cdot 20 = 420$ olur.

8. ÖRNEK

$35^4 - 21^4$ sayısının en büyük asal çarpanını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}35^4 - 21^4 = (35^2)^2 - (21^2)^2 = (35^2 - 21^2) \cdot (35^2 + 21^2) &= (35 - 21) \cdot (35 + 21) \cdot (7^2 5^2 + 7^2 3^2)\\ &= 14 \cdot 56 \cdot 7^2 \cdot (5^2 + 3^2)\\ &= 7 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 7^2 \cdot (25 + 9)\\ &= 7 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 7^2 \cdot 17 \cdot 2\end{aligned}$$

Bu durumda en büyük asal çarpan 17 olur.

9. ÖRNEK

$\left.\begin{array}{l} x=\sqrt{7}-1 \\ y=\sqrt{7}+1 \end{array}\right\}$ olduğuna göre $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{x^2-y^2}{xy}=\frac{(x-y)\cdot(x+y)}{xy}$ bulunur. x ve y değerleri yerine yazılırsa

$=\frac{(\sqrt{7}-1-(\sqrt{7}+1))\cdot(\sqrt{7}-1+\sqrt{7}+1)}{(\sqrt{7}-1)\cdot(\sqrt{7}+1)}=\frac{(-2)(2\sqrt{7})}{6}=\frac{-4\sqrt{7}}{6}=-\frac{2\sqrt{7}}{3}$ olur.

Not

$$
\begin{aligned}
(x+y)^2-(x-y)^2 &= (x+y+x-y)\cdot[x+y-(x-y)] \\
&= 2x\cdot 2y \\
&= 4xy \text{ olur.}
\end{aligned}
$$

10. ÖRNEK

$\left.\begin{array}{r} x-y=5 \\ x\cdot y=7 \end{array}\right\}$ olduğuna göre $(x+y)$ ifadesinin pozitif değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(x+y)^2$ ve $(x-y)^2$ ifadeleri tek özdeşlik olarak yazılırsa

$(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$ elde edilir. Verilen değerler yerine yazılırsa

$(x+y)^2-(5)^2=4\cdot 7$

$(x+y)^2=28+25$

$(x+y)^2=53$

$(x+y)=\mp\sqrt{53}$ bulunur.

$x+y=\sqrt{53}$ olur.

Sıra Sizde

SORU

$a-b=b-c=5$ olduğuna göre $a^2+c^2-2b^2$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

ii. İki Küp Farkı ve İki Küp Toplamı Özdeşliklerinden Yararlanarak Çarpanlara Ayırma

1. $x^3 - y^3 = (x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2)$ (İki küp farkı özdeşliği)
2. $x^3 + y^3 = (x + y) \cdot (x^2 - xy + y^2)$ (İki küp toplamı özdeşliği)

11. ÖRNEK

Aşağıda verilen ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a) $x^3 - 1$
b) $27a^3 - 8b^3$
c) $x^3 - 2$
ç) $y^6 - 1$

ÇÖZÜM

Verilen ifadeler, iki küp farkı-iki küp toplamı özdeşlikleri kullanılarak çarpanlarına ayrılmıştır. İnceleyiniz.

a) $x^3 - 1 = (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)$
b) $27a^3 - 8b^3 = (3a)^3 - (2b)^3 = (3a - 2b) \cdot (9a^2 + 6ab + 4b^2)$
c) $x^3 - 2 = x^3 - (\sqrt[3]{2})^3 = (x - \sqrt[3]{2}) \cdot (x^2 + x \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$
ç) $y^6 - 1 = (y^3)^2 - 1^2 = (y^3 - 1) \cdot (y^3 + 1) = (y - 1) \cdot (y^2 + y + 1) \cdot (y + 1) \cdot (y^2 - y + 1)$

Not

$n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

1. $x^n - y^n = (x - y) \cdot (x^{n-1}y^0 + x^{n-2}y^1 + ... + x^0y^{n-1})$
2. $x^n + y^n = (x + y) \cdot (x^{n-1}y^0 - x^{n-2}y^1 + ... + x^0y^{n-1})$ (n tek ise)

12. ÖRNEK

Aşağıda verilen ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a) $x^4 - 1$
b) $x^5 - 1$
c) $x^5 + 32$

ÇÖZÜM

a) $x^4 - 1 = (x - 1) \cdot (x^3 + x^2 + x + 1)$
b) $x^5 - 1 = (x - 1) \cdot (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
c) $x^5 + 32 = x^5 + 2^5$

$$= (x + 2) \cdot (x^4 - x^3 \cdot 2 + x^2 \cdot 2^2 - x \cdot 2^3 + x^0 \cdot 2^4)$$
$$= (x + 2) \cdot (x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$$

iii. Tam Kare İfadeler

1. $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
2. $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
3. $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2\cdot(xy+yz+xz)$

13. ÖRNEK

Aşağıda verilen ifadelerin eşitlerini yazınız.

a) $(x-3)^2$

b) $(3x-2y)^2$

c) $(a-b+c)^2$

ÇÖZÜM

a) $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$

b) $(3x-2y)^2 = (3x)^2 - 2\cdot(3x)\cdot(2y) + (-2y)^2$

$= 9x^2 - 12xy + 4y^2$

c) $(a-b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac$

14. ÖRNEK

$4x^2 - 24x + 36$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

ÇÖZÜM

$4x^2 - 24x + 36$ ifadesi, $(2x)^2 - 2\cdot(2x)\cdot 6 + 6^2$ şeklinde yazılabildiğinden tam kare bir ifadedir. Bu durumda

$$4x^2 - 24x + 36 = (2x)^2 - 2\cdot(2x)\cdot 6 + 6^2$$
$$= (2x-6)^2 \text{ olur.}$$

15. ÖRNEK

$\sqrt{\frac{9}{25} + \frac{49}{4} - \frac{21}{5}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen ifade düzenlenirse

$$\sqrt{\frac{9}{25} + \frac{49}{4} - \frac{21}{5}} = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{7}{2}\right)}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{3}{5} - \frac{7}{2}\right)^2}$$
$$= \left|\frac{3}{5} - \frac{7}{2}\right|$$
$$= \left|\frac{-29}{10}\right|$$
$$= \frac{29}{10} \text{ bulunur.}$$

16. ÖRNEK

$\left.\begin{array}{r} a+b-c=5 \\ a^2+b^2+c^2=39 \end{array}\right\}$ olduğuna göre $ab-ac-bc$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$a+b-c=5$ ifadesinde her iki tarafın karesi alınırsa

$(a+b-c)^2=5^2 \Rightarrow \underbrace{a^2+b^2+c^2}_{39}+2(ab-ac-bc)=25$ elde edilir. Buradan

$39+2(ab-ac-bc)=25$

$2(ab-ac-bc)=25-39$

$ab-ac-bc=\dfrac{-14}{2}$

$ab-ac-bc=-7$ bulunur.

17. ÖRNEK

$x, y \in \mathbb{R}$ için

$A=2x^2+9y^2+6x-6xy+14$ ifadesinde A nın en küçük değeri için $A+x+y$ toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen ifade

$A=(x^2+6x+9)+(x^2+9y^2-6xy)+5$ şeklinde gruplandırılırsa

$A=(x+3)^2+(x-3y)^2+5$ elde edilir. Bu ifadeyi en küçük yapan değerler

$x=-3, y=-1$ olur. Bu durumda A nın en küçük değeri $A=5$ olur.

$A+x+y=5-3-1=1$ bulunur.

Sıra Sizde

SORU

$x, y, z \in \mathbb{R}^+$ için

$x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz)-5(x+y+z)=0$ olduğuna göre $x+y+z$ toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

18. ÖRNEK

$4^{13}+4^{x}+4^{49}$ ifadesinin bir tam kare ifade olması için x in alabileceği en büyük değeri bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}4^{13}+4^{x}+4^{49} &= (2^2)^{13}+(2^2)^{x}+(2^2)^{49}\\ &= 2^{26}+2^{2x}+2^{98}\\ &= 2^{26}(1+2^{2x-26}+2^{72})\\ &= 2^{26}\left(1+(2^2)^{x-13}+2\cdot 2^{71}\right)\\ &= 2^{26}\left(1+2\cdot 2^{71}+(2^{x-13})^2\right) \quad (2^{x-13}=2^{71} \text{ seçilirse})\\ &= 2^{26}\cdot(1+2^{71})^2 \text{ olur.}\end{aligned}$$

Bu durumda $2^{x-13}=2^{71}$ olmalıdır.
Buradan
$71=x-13 \Rightarrow x=71+13 \Rightarrow x=84$ bulunur.

iv. Tam Küp İfadeler

1. $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ veya $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$
2. $(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ veya $(x-y)^3=x^3-y^3-3xy(x-y)$

19. ÖRNEK

Aşağıda verilen tam küp açılımları bulunuz.

a) $(x+1)^3$

b) $(2x-y)^3$

ÇÖZÜM

a) $(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$

b) $$\begin{aligned}(2x-y)^3 &= (2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot(-y)+3\cdot 2x\cdot(-y)^2+(-y)^3\\ &= 8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3\end{aligned}$$

20. ÖRNEK

$x^3+3x^2+3x+28$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

ÇÖZÜM

Verilen ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned}x^3+3x^2+3x+28 &= \underbrace{x^3+3x^2+3x+1}+27\\ &= (x+1)^3+3^3\\ &= (x+1+3)\left[(x+1)^2-3\cdot(x+1)+3^2\right]\\ &= (x+4)\cdot(x^2-x+7)\end{aligned}$$

21. ÖRNEK

$$\left.\begin{aligned} a^3+b^3&=10 \\ ab^2+a^2b&=\frac{17}{3}\end{aligned}\right\}$$ olduğuna göre $a+b$ toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

İkinci denklem 3 ile genişletilip denklem taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{array}{rr} & a^3+b^3=10 \\ + & 3ab^2+3a^2b=17 \\ \hline \end{array}$$

$a^3+3ab^2+3a^2b+b^3=27$ bulunur.

O hâlde

$(a+b)^3=27 \Rightarrow a+b=3$ bulunur.

22. ÖRNEK

$x=2024$ olmak üzere

$$\frac{x^9-1}{(x^6+x^3+1)\cdot(x^2+x+1)}$$

ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}\frac{x^9-1}{(x^6+x^3+1)\cdot(x^2+x+1)} &= \frac{(x^3)^3-1}{(x^6+x^3+1)\cdot(x^2+x+1)} \\ &= \frac{(x^3-1)\cdot\cancel{(x^6+x^3+1)}}{\cancel{(x^6+x^3+1)}\cdot(x^2+x+1)} \\ &= \frac{(x-1)\cdot\cancel{(x^2+x+1)}}{\cancel{(x^2+x+1)}} \\ &= x-1 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

$x=2024$ için $2024-1=2023$ elde edilir.

Sıra Sizde

SORU

$a+b=\sqrt{5}$ olduğuna göre $\dfrac{a^3+\sqrt{45}\,ab+b^3}{a+b}$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Değişken Değiştirme İle Çarpanlara Ayırma Yöntemi

Değişken değiştirme, karmaşık ifadeleri basitleştirmek için kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntemde belirlenen ifade yerine daha basit yeni bir değişken kullanılır. İfade çarpanlarına ayrıldıktan sonra yeni değişkene göre elde edilen sonuç, verilen değişkene göre düzenlenir.

23. ÖRNEK

$\sqrt{2017 \cdot 2019 + 1}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$2017 = a$ olarak seçilirse $2019 = a + 2$ olur. Bu değerler ifadede yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\sqrt{2017 \cdot 2019 + 1} &= \sqrt{a \cdot (a+2) + 1} \\ &= \sqrt{a^2 + 2a + 1} \\ &= \sqrt{(a+1)^2} \\ &= |a+1| \\ &= a+1 \\ &= 2017 + 1 \\ &= 2018 \text{ olur.}\end{aligned}$$

24. ÖRNEK

$\left(2y - \frac{1}{y}\right)^2 - 4\left(2y - \frac{1}{y}\right) + 4 = 0$ olduğuna göre $4y^2 + \frac{1}{y^2}$ toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen ifade $2y - \frac{1}{y} = k$ olarak yazıldığında $k^2 - 4k + 4 = 0$ denklemine dönüşür.
Buradan
$k^2 - 4k + 4 = 0 \Rightarrow (k-2)^2 = 0 \Rightarrow k = 2$ bulunur.

O hâlde
$2y - \frac{1}{y} = 2$ eşitliğinde her iki tarafın da karesi alındığında

$$\left(2y - \frac{1}{y}\right)^2 = 2^2 \Rightarrow 4y^2 - 2 \cdot 2\cancel{y} \cdot \frac{1}{\cancel{y}} + \frac{1}{y^2} = 4$$

$$4y^2 + \frac{1}{y^2} = 8 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

SORU

$25^x - 25^{-x}$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

ÇÖZÜM

$ax^2 + bx + c$ Biçimindeki Üç Terimli İfadelerin Çarpanlarına Ayrılması

i. $a = 1$ ise

Bu durumda $b = m + n$ ve $c = m \cdot n$ olacak şekilde $m, n \in \mathbb{R}$ gerçek sayıları varsa verilen üç terimli ifade $x^2 + bx + c = x^2 + (m + n)x + (m \cdot n) = (x + m) \cdot (x + n)$ şeklinde çarpanlarına ayrılır.

25. ÖRNEK

Aşağıda verilen ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a) $x^2 - x - 12$

b) $a^2 + 7a + 12$

c) $y^2 - 6y + 9$

ç) $x^2 - 6x + 5$

d) $a - 3\sqrt{a} - 108$

ÇÖZÜM

a) $-1 = (-4) + 3,\ -12 = (-4) \cdot 3$ olduğundan
$x^2 - x - 12 = x^2 + (-4 + 3)x + (-4 \cdot 3) = (x - 4)(x + 3)$ olur.

b) $7 = 4 + 3,\ \ 12 = 4 \cdot 3$ olduğundan
$a^2 + 7a + 12 = a^2 + (4 + 3)a + 4 \cdot 3 = (a + 4) \cdot (a + 3)$ olur.

c) $-6 = (-3) + (-3),\ 9 = (-3) \cdot (-3)$ olduğundan
$y^2 - 6y + 9 = y^2 + ((-3) + (-3))y + (-3) \cdot (-3) = (y - 3) \cdot (y - 3)$ olur.

ç) $-6 = (-5) + (-1),\ 5 = (-5) \cdot (-1)$ olduğundan
$x^2 - 6x + 5 = x^2 + ((-5) + (-1))x + (-5) \cdot (-1) = (x - 5) \cdot (x - 1)$ olur.

d) $\sqrt{a} = t$ alınırsa $a = t^2$ olur. Buradan
$a - 3\sqrt{a} - 108 = t^2 - 3t - 108$ elde edilir.
$-3 = (-12) + 9$ ve $-108 = (-12) \cdot 9$ olduğundan
$t^2 - 3t - 108 = t^2 + (-12 + 9)t + (12) \cdot 9$
$= (t + 9) \cdot (t - 12)$ bulunur.
$\sqrt{a} = t$ değeri yerine yazılırsa $a - 3\sqrt{a} - 108 = (\sqrt{a} + 9) \cdot (\sqrt{a} - 12)$ elde edilir.

26. ÖRNEK

$x^4 - 11x^2 + 30$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

ÇÖZÜM

$x^4 - 11x^2 + 30 = (x^2)^2 - 11x^2 + 30$ şeklinde yazılabilir. $x^2 = t$ seçilirse $t^2 - 11t + 30$ un ikinci derece üç terimlisi elde edilir.

$-11 = (-5) + (-6),\ \ 30 = (-5) \cdot (-6)$ olduğundan

$$\begin{aligned} t^2 - 11t + 30 &= t^2 + ((-5) + (-6))t + (-5) \cdot (-6) \\ &= (t - 5) \cdot (t - 6) \\ &= (x^2 - 5) \cdot (x^2 - 6) \\ &= (x - \sqrt{5}) \cdot (x + \sqrt{5}) \cdot (x - \sqrt{6}) \cdot (x + \sqrt{6}) \text{ olur.} \end{aligned}$$

27. ÖRNEK

$9^x+3^x-6=0$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

ÇÖZÜM

$9^x+3^x-6=(3^2)^x+3^x-6$

$\qquad\qquad=(3^x)^2+3^x-6$ şeklinde yazılabilir.

$3^x=t$ olarak seçilirse

$(3^x)^2+3^x-6=t^2+t-6$ olur. Burada

$1=3+(-2)$ ve $-6=3\cdot(-2)$ olduğundan

$t^2+t-6=t^2+(3+(-2))\cdot t+3\cdot(-2)$

$\qquad\qquad=(t+3)\cdot(t-2)$ olur.

$t=3^x$ değeri yerine yazılırsa $9^x+3^x-6=(3^x+3)\cdot(3^x-2)$ bulunur.

ii. $a\neq 1$ ise

$a=m\cdot s$

$c=n\cdot r$

$b=m\cdot r+n\cdot s$ olacak biçimde m, n, r ve s gerçek sayıları varsa

$ax^2+bx+c=(mx+n)\cdot(sx+r)$ şeklinde çarpanlarına ayrılır.

$$ax^2+\boxed{bx}+c=(mx+n)\cdot(sx+r)$$

$$\begin{array}{ll} mx & n \\ sx & r \end{array}$$ Çarpanlar

$$mx\cdot r+sx\cdot n=(m\cdot r+n\cdot s)\cdot x=\boxed{bx}$$

28. ÖRNEK

$7x^2-4x-3$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

ÇÖZÜM

$$7x^2\boxed{-4x}-3=(7x+3)\cdot(x-1)\ \text{olur.}$$

$$\begin{array}{ll} x & -1 \\ 7x & 3 \end{array}$$ Çarpanlar

$$7x\cdot(-1)+3\cdot x=-7x+3x=\boxed{-4x}$$

29. ÖRNEK

$18x^2-25x+7$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

ÇÖZÜM

$$18x^2\boxed{-25x}+7=(18x-7)\cdot(x-1)\ \text{olur.}$$

$$\begin{array}{ll} 18x & -7 \\ x & -1 \end{array}$$ Çarpanlar

$$18x\cdot(-1)+x\cdot(-7)=-18x-7x=\boxed{-25x}$$

Terim Ekleyip Çıkarma Yoluyla Çarpanlarına Ayırma

Bilinen yöntemlerle çarpanlarına ayrılamayan ifadeler; uygun terimler eklenip çıkarılarak bilinen özdeşlik, tam kare gibi ifadelere benzetilerek çarpanlarına ayrılır.

30. ÖRNEK

$9a^4+5a^2b^2+b^4$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

ÇÖZÜM

$9a^4+5a^2b^2+b^4$ ifadesine a^2b^2 eklenip çıkarılırsa

$$\begin{aligned}9a^4+5a^2b^2+b^4 &= 9a^4+5a^2b^2+b^4+a^2b^2-a^2b^2\\ &= \underbrace{(3a^2)^2+6a^2b^2+(b^2)^2}-a^2b^2\\ &= (3a^2+b^2)^2-(ab)^2 \text{ (İki kare farkı)}\\ &= (3a^2+b^2+ab)\cdot(3a^2+b^2-ab) \text{ olur.}\end{aligned}$$

31. ÖRNEK

x^5+x^3+x ifadesini çarpanlarına ayırınız.

ÇÖZÜM

$x^5+x^3+x=x\cdot(x^4+x^2+1)$ yazılabilir.

x^4+x^2+1 ifadesine x^2 terimi eklenip çıkarılırsa

$$\begin{aligned}&= x\cdot(x^4+x^2+1+x^2-x^2)\\ &= x\cdot(x^4+2x^2+1-x^2)\\ &= x\cdot\left[(x^2+1)^2-x^2\right] \text{ (İki kare farkı)}\\ &= x\cdot(x^2+1+x)\cdot(x^2+1-x)\\ &= x\cdot(x^2+x+1)\cdot(x^2-x+1) \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

32. ÖRNEK

x^8+x^4+1 ifadesini çarpanlarına ayırınız.

ÇÖZÜM

x^8+x^4+1 ifadesine x^4 eklenip çıkarılırsa

$$\begin{aligned}x^8+x^4+1 &= x^8+x^4+1+x^4-x^4\\ &= \underbrace{(x^4)^2+2x^4+1}-x^4 \text{ (Tam kare ifade)}\\ &= (x^4+1)^2-(x^2)^2 \text{ (İki kare farkı)}\\ &= (x^4+1+x^2)\cdot(x^4+1-x^2)\\ &= (x^4+x^2+1)\cdot(x^4-x^2+1)\\ &= (x^4+x^2+1+x^2-x^2)\cdot(x^4-x^2+1)\end{aligned}$$

(x^4+x^2+1) ifadesine x^2 terimi eklenip çıkarılırsa

$$\begin{aligned}&= \left(\underbrace{x^4+2x^2+1}_{(x^2+1)^2}-x^2\right)\cdot(x^4-x^2+1)\\ &= \left[(x^2+1)^2-x^2\right]\cdot(x^4-x^2+1) \text{ (İki kare farkı)}\\ &= (x^2+1+x)\cdot(x^2+1-x)\cdot(x^4-x^2+1)\\ &= (x^2+x+1)\cdot(x^2-x+1)\cdot(x^4-x^2+1) \text{ şeklinde çarpanlarına ayrılmış olur.}\end{aligned}$$

33. ÖRNEK

$a^{4x} + a^{2x} + 1$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

ÇÖZÜM

$a^{4x} + a^{2x} + 1 = (a^x)^4 + (a^x)^2 + 1$ şeklinde yazılabilir.

$a^x = t$ alınırsa $t^4 + t^2 + 1$ olur. Bu ifadeye t^2 eklenip çıkarılırsa

$$t^4 + t^2 + 1 = t^4 + t^2 + 1 + t^2 - t^2$$
$$= \underline{t^4 + 2t^2 + 1} - t^2$$
$$= (t^2 + 1)^2 - t^2 \text{ (İki kare farkı)}$$
$$= (t^2 - t + 1) \cdot (t^2 + t + 1) \quad t = a^x \text{ değeri yerine yazılırsa}$$
$$a^{4x} + a^{2x} + 1 = ((a^x)^2 - a^x + 1) \cdot ((a^x)^2 + (a^x) + 1)$$
$$= (a^{2x} - a^x + 1) \cdot (a^{2x} + a^x + 1) \text{ elde edilir.}$$

34. ÖRNEK

$5^{4x} + 1$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

ÇÖZÜM

$5^{4x} + 1 = (5^x)^4 + 1$ denkleminde $5^x = t$ değişken değişimi yapılırsa

$5^{4x} + 1 = t^4 + 1$ olur. Elde edilen denklemde $2t^2$ eklenip çıkarılırsa

$$t^4 + 1 = t^4 + 1 + 2t^2 - 2t^2$$
$$= (t^2 + 1)^2 - 2t^2$$
$$= (t^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}\,t)^2 \text{ (İki kare farkı)}$$
$$= (t^2 - \sqrt{2}\,t + 1) \cdot (t^2 + \sqrt{2}\,t + 1) \text{ bulunur. } t = 5^x \text{ değeri yerine yazılırsa}$$
$$= ((5^x)^2 - \sqrt{2} \cdot 5^x + 1) \cdot ((5^x)^2 + \sqrt{2} \cdot 5^x + 1)$$
$$= (5^{2x} - \sqrt{2} \cdot 5^x + 1) \cdot (5^{2x} + \sqrt{2} \cdot 5^x + 1) \text{ elde edilir.}$$

Sıra Sizde

SORU

$x^2 - y^2 + 2x - 4y - 3$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

ÇÖZÜM

2. Rasyonel İfadelerin Sadeleştirilmesi

$P(x)$ ve $Q(x)$ gerçek katsayılı iki polinom ve $Q(x) \neq 0$ olmak üzere

$R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ifadesi rasyonel bir ifadedir.

$P(x)$ ve $Q(x)$ polinomları, uygun yöntemlerle çarpanlarına ayrılır. Ortak çarpan varsa pay ve payda ortak çarpana bölünür.
Bu işlem, rasyonel ifadenin sadeleştirilmesi şeklinde adlandırılır.

1. ÖRNEK

$x \neq y$ olmak üzere $\dfrac{(x-y)^2}{(y-x)^3}$ ifadesini sadeleştiriniz.

ÇÖZÜM

$$\frac{(x-y)^2}{(y-x)^3} = \frac{(y-x)^2}{(y-x)^3} = \frac{\cancel{(y-x)^2}}{\cancel{(y-x)^2}\cdot(y-x)} = \frac{1}{y-x} \text{ bulunur.}$$

2. ÖRNEK

$x \neq 1$ ve $x \neq 4$ olmak üzere $\dfrac{7x^2-4x-3}{x^2-5x+4}$ ifadesini sadeleştiriniz.

ÇÖZÜM

Pay ve paydada bulunan ifadeler çarpanlarına ayrılıp yerlerine yazılırsa

$$7x^2 - 4x - 3 = (7x+3)\cdot(x-1)$$

$$\begin{array}{ccc} 7x & \times & 3 \\ x & & -1 \end{array}$$

$$x^2 - 5x + 4 = x^2 + [(-4)+(-1)]\cdot x + (-4)\cdot(-1)$$

$$= (x-4)\cdot(x-1)$$

$$\frac{7x^2-4x-3}{x^2-5x+4} = \frac{\cancel{(x-1)}\cdot(7x+3)}{(x-4)\cdot\cancel{(x-1)}} = \frac{7x+3}{x-4} \text{ elde edilir.}$$

3. ÖRNEK

$a \neq -1, a \neq 1$ ve $a \neq 2$ olmak üzere $\dfrac{a^2+2a-3}{a^2+2a+1} : \left(\dfrac{a^2-a-2}{a^2-3a+2}\right)^{-1}$ ifadesini sadeleştiriniz.

ÇÖZÜM

$$\frac{a^2+2a-3}{a^2+2a+1} : \left(\frac{a^2-a-2}{a^2-3a+2}\right)^{-1} = \frac{a^2+2a-3}{a^2+2a+1} : \frac{a^2-3a+2}{a^2-a-2}$$

$$= \frac{(a-1)\cdot(a+3)}{(a+1)^2} : \frac{\cancel{(a-2)}\cdot(a-1)}{\cancel{(a-2)}\cdot(a+1)}$$

$$= \frac{\cancel{(a-1)}\cdot(a+3)}{(a+1)^{\cancel{2}1}} \cdot \frac{\cancel{(a+1)}}{\cancel{(a-1)}}$$

$$= \frac{a+3}{a+1} \text{ sonucu bulunur.}$$

4. ÖRNEK

$|m| \neq |n|$ ve $m \neq 0$ olmak üzere $\dfrac{m^3-n^3}{3m^2-3n^2} \cdot \dfrac{mn+n^2}{m^3+m^2n+mn^2}$ ifadesini sadeleştiriniz.

ÇÖZÜM

$$\frac{m^3-n^3}{3m^2-3n^2} \cdot \frac{mn+n^2}{m^3+m^2n+mn^2} = \frac{\cancel{(m-n)} \cdot \cancel{(m^2+mn+n^2)}}{3 \cdot \cancel{(m+n)} \cdot \cancel{(m-n)}} \cdot \frac{n \cdot \cancel{(m+n)}}{m \cdot \cancel{(m^2+mn+n^2)}}$$

$$= \frac{n}{3m} \text{ olur.}$$

5. ÖRNEK

$a \neq 0, x \neq \dfrac{1}{b}$ ve $x \neq -\dfrac{3}{a}$ olmak üzere $\dfrac{3}{a} + \dfrac{a^2x^2-9}{a} : \dfrac{abx^2+(3b-a) \cdot x-3}{bx-1}$ işleminin en sade şeklini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{3}{a} + \frac{a^2x^2-9}{a} : \frac{abx^2+(3b-a) \cdot x-3}{bx-1} = \frac{3}{a} + \frac{\cancel{(ax+3)} \cdot (ax-3)}{a} \cdot \frac{\cancel{bx-1}}{\cancel{(ax+3)} \cdot \cancel{(bx-1)}}$$

$$= \frac{3}{a} + \frac{ax-3}{a}$$

$$= \frac{\cancel{3}+ax-\cancel{3}}{a}$$

$$= \frac{\cancel{a}x}{\cancel{a}}$$

$$= x \text{ sonucu bulunur.}$$

6. ÖRNEK

$x = y+5$ olmak üzere $\dfrac{x^2-y^2-10x+5}{x^2-y^2-10x-10}$ ifadesinin en sade şeklini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{x^2-y^2-10x+5}{x^2-y^2-10x-10} = \frac{(x+y) \cdot (x-y) - 5 \cdot (2x-1)}{(x+y) \cdot (x-y) - 10 \cdot (x+1)} \qquad (x = y+5 \Rightarrow x-y=5 \text{ olur.})$$

$$= \frac{(x+y) \cdot 5 - 5 \cdot (2x-1)}{(x+y) \cdot 5 - 10 \cdot (x+1)}$$

$$= \frac{\cancel{5} \cdot (x+y-2x+1)}{\cancel{5} \cdot (x+y-2x-2)}$$

$$= \frac{(-x+y)+1}{(-x+y)-2} \qquad (x = y+5 \Rightarrow y-x=-5 \text{ olur.})$$

$$= \frac{-5+1}{-5-2}$$

$$= \frac{-4}{-7}$$

$$= \frac{4}{7} \text{ sonucu bulunur.}$$

7. ÖRNEK

$\dfrac{x^2-kx+42}{(x-3)\cdot(x+7)}$ kesri sadeleşebilir bir kesir olduğuna göre k nin alabileceği değerler toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$\dfrac{x^2-kx+42}{(x-3)\cdot(x+7)}$ kesri sadeleşebilir bir kesir olduğuna göre

$P(x)=x^2-kx+42$ polinomu, $x-3$ veya $x+7$ ile tam bölünüyor demektir. Bu durumda

$x-3=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow P(3)=0$ veya $x+7=0 \Rightarrow x=-7 \Rightarrow P(-7)=0$ bulunur. Bu durumda

$$P(3)=3^2-k\cdot 3+42=0 \Rightarrow 9-3k+42=0$$
$$-3k+51=0$$
$$3k=51$$
$$k=17 \text{ veya}$$

$$P(-7)=(-7)^2-k\cdot(-7)+42 \Rightarrow 49+7k+42=0$$
$$7k+91=0$$
$$7k=-91$$
$$k=-13 \text{ olur.}$$

Bu durumda k nin alabileceği değerler toplamı $17+(-13)=17-13=4$ olarak bulunur.

8. ÖRNEK

$\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{5}-\sqrt{3}-1}{\sqrt{15}-\sqrt{5}-\sqrt{3}+1}$ işleminin en sade şeklini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{\sqrt{15}+\sqrt{5}-\sqrt{3}-1}{\sqrt{15}-\sqrt{5}-\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{5}\cdot(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{5}\cdot(\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}-1)}$$
$$=\frac{(\sqrt{3}+1)\cdot\cancel{(\sqrt{5}-1)}}{(\sqrt{3}-1)\cdot\cancel{(\sqrt{5}-1)}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}+1}{\underset{(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}-1}}$$
$$=\frac{(\sqrt{3})^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot 1+1^2}{(\sqrt{3})^2-1^2}$$
$$=\frac{3+2\sqrt{3}+1}{3-1}$$
$$=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$$

9. ÖRNEK

$\dfrac{x^2+y^2-z^2-2xy}{y^2+z^2-x^2-2yz}$ ifadesinin en sade şeklini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}\frac{x^2+y^2-z^2-2xy}{y^2+z^2-x^2-2yz} &= \frac{x^2-2xy+y^2-z^2}{y^2-2yz+z^2-x^2}\\ &= \frac{(x-y)^2-z^2}{(y-z)^2-x^2}\\ &= \frac{(x-y+z)\cdot(x-y-z)}{(y-z+x)\cdot(y-z-x)}\\ &= \frac{\overbrace{\cancel{(x-y+z)}}^{-1}\cdot(x-y-z)}{(x+y-z)\cdot\cancel{(-x+y-z)}}\\ &= \frac{-x+y+z}{x+y-z} \text{ sonucuna ulaşılır.}\end{aligned}$$

10. ÖRNEK

$x-1=5^{\frac{1}{4}}$ ise $\dfrac{(\sqrt[8]{5}-1)\cdot(\sqrt[8]{5}+1)}{\sqrt{5}-1}$ ifadesinin en sade şeklini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}\frac{(\sqrt[8]{5}-1)\cdot(\sqrt[8]{5}+1)}{\sqrt{5}-1} &= \frac{\cancel{\sqrt[4]{5}-1}}{\cancel{(\sqrt[4]{5}-1)}\cdot(\sqrt[4]{5}+1)} \text{ şeklinde yazılırsa}\\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{5}+1} \quad \left(x-1=5^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{5} \text{ yerine yazılırsa}\right)\\ &= \frac{1}{x-\cancel{1}+\cancel{1}}\\ &= \frac{1}{x} \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Sıra Sizde

SORU

$\dfrac{a^4-40a^2+144}{(a^2-12a+36)\cdot(2a-4)}$ ifadesinin en sade şeklini bulunuz.

ÇÖZÜM

11. ÖRNEK

$\left(\dfrac{(y-x)^3-(x-y)^2}{x^2+x-y+y^2-2xy}\right)\cdot\dfrac{y}{y-x}$ ifadesinin en sade şeklini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\left(\frac{(y-x)^3-(x-y)^2}{x^2+x-y+y^2-2xy}\right)\cdot\frac{y}{y-x}=\left(\frac{(y-x)^3-(y-x)^2}{x^2-2xy+y^2+x-y}\right)\cdot\frac{y}{y-x} \qquad \left((x-y)^2=(y-x)^2\right)$$

$$=\left(\frac{(y-x)^2\cdot(y-x-1)}{(x-y)^2+x-y}\right)\cdot\frac{y}{y-x}$$

$$=\frac{\overbrace{\cancel{(y-x)}^2}^{-1}\cdot\overbrace{\cancel{(y-x-1)}}^{-1}}{\underbrace{\cancel{(x-y)}}_{1}\cdot\underbrace{\cancel{(x-y+1)}}_{1}}\cdot\frac{y}{\underbrace{\cancel{y-x}}_{1}}$$

$= y$ bulunur.

12. ÖRNEK

$\dfrac{5^{18}-3^{18}}{(5^6-5^3\cdot3^3+3^6)\cdot(5^6+5^3\cdot3^3+3^6)}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{5^{18}-3^{18}}{(5^6-5^3\cdot3^3+3^6)\cdot(5^6+5^3\cdot3^3+3^6)}=\frac{(5^9)^2-(3^9)^2}{(5^6-5^3\cdot3^3+3^6)\cdot(5^6+5^3\cdot3^3+3^6)}$$

$$=\frac{\left[(5^3)^3+(3^3)^3\right]\cdot\left[(5^3)^3-(3^3)^3\right]}{(5^6-5^3\cdot3^3+3^6)\cdot(5^6+5^3\cdot3^3+3^6)}$$

$$=\frac{\left[(5^3+3^3)\cdot\cancel{(5^6-5^3\cdot3^3+3^6)}\right]\cdot\left[(5^3-3^3)\cdot\cancel{(5^6+5^3\cdot3^3+3^6)}\right]}{\cancel{(5^6-5^3\cdot3^3+3^6)}\cdot\cancel{(5^6+5^3\cdot3^3+3^6)}}$$

$$=\left[(5+3)\cdot(5^2-5\cdot3+3^2)\right]\cdot\left[(5-3)\cdot(5^2+5\cdot3+3^2)\right]$$

$$=\left[8\cdot(25-15+9)\right]\cdot\left[2\cdot(25+15+9)\right]$$

$$=\left[8\cdot19\right]\cdot\left[2\cdot49\right]$$

$$=2^4\cdot7^2\cdot19$$

$= 14\,896$ bulunur.

13. ÖRNEK

$\dfrac{x^2-4x+3}{x^3-9x}:\dfrac{x^3+1}{x^3-x^2+x}$ ifadesinin en sade şeklini bulunuz.

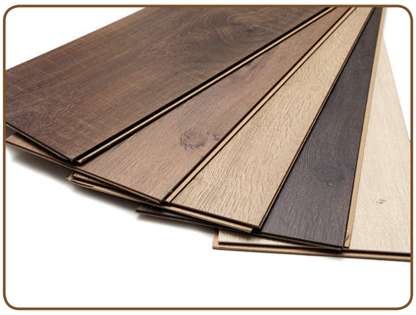
ÇÖZÜM

$$\frac{x^2-4x+3}{x^3-9x}:\frac{x^3+1}{x^3-x^2+x}=\frac{(x-1)\cdot(x-3)}{x\cdot(x-3)\cdot(x+3)}:\frac{(x+1)\cdot(x^2-x+1)}{x\cdot(x^2-x+1)}$$

$$=\frac{(x-1)\cdot\cancel{(x-3)}}{\cancel{x}\cdot\cancel{(x-3)}\cdot(x+3)}\cdot\frac{\cancel{x}\cdot\cancel{(x^2-x+1)}}{(x+1)\cdot\cancel{(x^2-x+1)}}$$

$=\dfrac{x-1}{(x+3)\cdot(x+1)}$ sonucu elde edilir.

14. ÖRNEK



Ebatları $(12x+1)$ ve $(16x+2)$ birim olan dikdörtgen şeklinde bir salonun tabanına parke döşenecektir.

Döşenecek parkeler dikdörtgen şeklinde olup ebatları $\left(x+\frac{1}{12}\right)$ ve $\left(x+\frac{1}{8}\right)$ birimdir $(x>0)$.

Her kutuda 6 tane parke olmak üzere parkelerin bir kutusu 22 TL dir.

Parkelerin bir kutusu 3 TL ye döşenmektedir.

Buna göre

a) Salonun taban alanını veren polinomu bulunuz.

b) Salon için gerekli olan parke sayısını bulunuz.

c) Salonun parke döşemesi için toplam kaç lira ödendiğini bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Dikdörtgenin alanı, kısa kenar ile uzun kenarın uzunlukları çarpımına eşit olduğundan salonun alanı

$$(12x+1)\cdot(16x+2)=192x^2+24x+16x+2$$
$$=192x^2+40x+2 \text{ olur.}$$

b) Salon için gerekli parke sayısı, salonun alanının bir parkenin alanına bölümüdür.

Buradan parke sayısı

$$\frac{192x^2+40x+2}{\left(x+\frac{1}{12}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{8}\right)}=\frac{2\cdot(\cancel{12x+1})\cdot(\cancel{8x+1})}{\left(\frac{\cancel{12x+1}}{12}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{8x+1}}{8}\right)}=2\cdot12\cdot8$$
$$=192 \text{ adet bulunur.}$$

c) Bir kutuda 6 parke olduğundan $192:6=32$ kutu parkeye ihtiyaç vardır.

Bir kutu parkenin fiyatı ile işçilik ücreti $22+3=25$ liradır.

Buna göre salonun parke döşemesi için $32\cdot25=800$ lira ödenecektir.

Sıra Sizde

SORU

$(x^4+x^3+x^2+x+1)+\dfrac{x^2-x^5}{x-1}$ toplamının en sade biçimini bulunuz.

ÇÖZÜM

ALIŞTIRMALAR-2

1. $\dfrac{\sqrt{30}-2\sqrt{3}+2\sqrt{6}-\sqrt{15}}{\sqrt{10}-2+2\sqrt{2}-\sqrt{5}}$
işleminin sonucunu bulunuz.

2. $\sqrt{41\cdot42\cdot43\cdot44+1}$ işleminin sonucunu bulunuz.

3. $a-b=b-c=6$ ise $a^2+c^2-2b^2$ işleminin sonucunu bulunuz.

4. $a=\sqrt{3}-3$ ve $b=\sqrt{3}+3$ olmak üzere $a^2-b^2+(a+b)^2+12\sqrt{3}$ işleminin sonucunu bulunuz.

5. Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.
a) 9^x-3^x-2
b) $12x^2+16x-11$

6. 19^6-1 sayısının <u>en büyük</u> asal bölenini bulunuz.

7. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=2$ olmak üzere $x\cdot y$ nin alabileceği kaç tam sayı değeri olduğunu bulunuz.

8. $x^2-5x-1=0$ ise $x+\dfrac{1}{x}$ işleminin sonucunu bulunuz.

9. $x, y, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere $A=5x^2-12xy+9y^2-4x+6$ ifadesinde A <u>en küçük</u> değeri aldığında $x\cdot y$ çarpımını bulunuz.

10. $\left.\begin{aligned} m-n+k&=4 \\ -mk+mn+kn&=-2 \end{aligned}\right\}$ olduğuna göre $m^2+n^2+k^2$ toplamını bulunuz.

11. $a=\frac{1}{3}$ için

$(2a-3)^3+3(2a-3)^2+3(2a-3)+\frac{67}{27}$

ifadesinin değerini bulunuz.

12. $a, b, c \in \mathbb{R}-\{0, \mp 1\}$ birbirinden farklı gerçek sayılar olmak üzere ve

$\left.\begin{aligned} 3a+4b&=7c \\ 3a^3+4b^3&=7c^3 \end{aligned}\right\}$ olduğuna göre

$a+b+c$ toplamını bulunuz.

13. $x-\frac{1}{x}=5$ olduğuna göre $x^3-\frac{1}{x^3}$ farkını bulunuz.

14. x^4+4y^4 ifadesini çarpanlarına ayırınız.

15. t bir tam sayı olmak üzere

$\frac{x^2+tx+10}{x^2-5x+6}$

ifadesi sadeleşebilir bir kesir olduğuna göre t değerini bulunuz.

16. y^4+3y^2+4 ifadesini çarpanlarına ayırınız.

17. $3x^2-4y^2-12x-4xy+9$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

18. $m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\frac{x^2-m\cdot x+18}{(x-3)\cdot(x+5)}$ ifadesi sadeleşebilir bir kesir ise m değerini bulunuz.

19. $\frac{x^2-3x+9}{x^2-9}\cdot\frac{(x^2+3x)^3}{x^5+27x^2}$

ifadesinin en sade şeklini bulunuz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A) 1-4. sorularda boş bırakılan yerleri uygun olacak şekilde doldurunuz.

1. Polinomlarda en büyük dereceli terimin katsayısına polinomun .... denir.

2. Sabit polinomun derecesi .... olur.

3. P(x) polinomunun katsayılar toplamı ile sabit teriminin toplamı .... olur.

4. $\text{der}[P(x)] = 4$ ise $\text{der}[x^3 \cdot P(x^2)] =$ .... olur.

B) 5. soruda numaralarla verilen ifadeleri, harf ile verilen ifadelerle doğru şekilde eşleştiriniz.

5.

$P(x) = 1 - (x+1)^5$ polinomunun çift dereceli terimlerinin katsayıları toplamı	1	a	-15
$\text{der}[P(x)] = 2$, $\text{der}[Q(x)] = 3$ ise $\text{der}[x^2 \cdot P(x^3) + Q^4(x)] =$	2	b	25
$P(x+3) = x^3 - 2x + 4$ olduğuna göre $P(x+4)$ polinomunun $x+1$ ile bölümünden kalan	3	c	20
$x + y = 8$, $x^2 + y^2 = 24$ olduğuna göre $x \cdot y$ değeri	4	ç	4
		d	12
		e	15

C) 6-13. soruların cevaplarını boş bırakılan alanlara yazınız.

6. $P(x) = 7x^{n-7} - 2x^3 + 4x^{7-n} - 3x + 2$ polinomunun sabit terimini bulunuz.

7. $P(x) = x^{n-4} + x^{\frac{24}{n}} + x^{\frac{n}{2}} + x^{13-n} + 1$ ifadesi polinom olduğuna göre n nin alabileceği değerler toplamını bulunuz.

8. $P(x) = 5 \cdot x^{\frac{24}{m+1}} + 4x^{m-3} - 2x$ bir polinom olduğuna göre derecesinin <u>en çok</u> kaç olabileceğini bulunuz.

9. $(x-2) \cdot P(x) = x^3 - 5x^2 + mx - 6$ eşitliği veriliyor. $P(x)$ in $(x-2)$ ile bölümünden kalanın kaç olacağını bulunuz.

10. $P(x)$ ve $Q(x)$ birer polinomdur.

$$\left.\begin{array}{l} der\left[\left(P(x)\cdot Q^2(x)\right)\right]=17 \\ der\left[\dfrac{P(x^2)}{Q(x)}\right]=4 \end{array}\right\} \text{ olduğuna göre}$$

$der\left[\left(P^2(x^3-1)\cdot Q(x^2)\right)\right]$ değerini bulunuz.

11. $P(x-1)+P(x+1)=2x^2+2x+k$ veriliyor. $P(3x^2-5x+4)$ polinomunun katsayıları toplamı 7 olduğuna göre k değerini bulunuz.

12. $x+z=5,\ x+y=3$ olduğuna göre $x^2+xy+xz+yz$ değerini bulunuz.

13. $2\cdot 5^{2x}+13\cdot 5^{x}-7$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

Ç) 14-32. çoktan seçmeli soruları okuyunuz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

14. $P(x)=x^{13}+x^{12}+...+x+1$ ve $Q(x)=x^5+x^4+...+x+1$ polinomları veriliyor.

$P(x)$ polinomunun $Q(x)$ polinomuna bölümünden elde edilen kalan polinomunun katsayıları toplamı kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

15. 3. dereceden bir $P(x)$ polinomunda $P(-1)=P(2)=P(3)=0$ ve $P(1)=8$ olduğuna göre

$P(3x+1)$ polinomunun $(x-1)$ ile bölümünden kalan kaçtır?

A) -8 B) -4 C) 0 D) 10 E) 20

16. 3. dereceden bir $P(x)$ polinomunun sırasıyla $(x-2), (x-3)$ ve $(x-4)$ ile bölümlerinden kalanlar 5, 7 ve 9 dur.

$P(x)$ in sabit terimi -47 olduğuna göre $P(x)$ in katsayıları toplamı kaçtır?

A) -12 B) -9 C) -6 D) 0 E) 4

17. $a \in \mathbb{R}^+, a + \frac{7}{\sqrt{a}} = 50$ olduğuna göre

$a + 7\sqrt{a}$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$

D) $2\sqrt{3}$ E) 12

18. $\sqrt{2017^2 - 2015 \cdot 2019}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 9

D) 25 E) 81

19. $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ve $a^2 + a \cdot c + 2 \cdot a \cdot b = 121$ olduğuna göre $a + b$ toplamının sonucu kaçtır?

A) 9 B) 10 C) 11

D) 12 E) 13

20. Aşağıdakilerden hangisi

$x^8 + x^7 + x^6 + ... + x + 1$ ifadesinin çarpanlarından biridir?

A) $x^2 - x + 1$

B) $x^6 - x^3 + 1$

C) $x - 1$

D) $x^2 + x + 1$

E) $x^2 + 1$

21. $\frac{P(x) - (x+1) \cdot Q(x+2)}{x+4} = 4x - 3$ ve

$P(x)$ in $(x-2)$ ile bölümünden kalan 9 olduğuna göre $Q(x)$ in $(x-4)$ ile bölümünden kalan kaçtır?

A) -15 B) -12 C) -10

D) -8 E) -7

22. $\left.\begin{aligned} x^3 + 3xy^2 &= 62 \\ y^3 + 3x^2y &= 63 \end{aligned}\right\}$ eşitliklerini sağlayan

kaç (x, y) gerçek sayı ikilisi vardır?

A) 0 B) 1 C) 2

D) 3 E) 4

23. $m^3 + n^3 = 12\sqrt{3}$

$mn - m^2 = n^2 - 3\sqrt{2}$ olduğuna göre $m + n$ değeri kaçtır?

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{6}$

D) $2\sqrt{6}$ E) $3\sqrt{3}$

24. $m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $m^2 + 6m + 50$ sayısı tam kare olacak şekilde kaç m sayısı vardır?

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

25. $\sqrt{2027+\frac{1}{2025}}-\frac{1}{45}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 25 B) 30 C) 35 D) 40 E) 45

26. $m^4-7m^2n^2+n^4$ ifadesinin çarpanlarından biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) m^2+n^2+3mn
B) m^2-n^2+3mn
C) m^2-n^2-3mn
D) m^2+n^2+mn
E) m^2+n^2-mn

27. $\frac{a^2-b^2-2a+1}{a^2-b^2-a-b}:\left(1-\frac{1}{a+b}\right)$ işleminin <u>en sade</u> şekli aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a-1$ B) $a-b$ C) $a+b$ D) $a\cdot b$ E) 1

28. $x\neq -5$ ve $x\neq -2$ olmak üzere

$\frac{x^2+k\cdot x-15}{x^2+7x+10}$ ifadesi sadeleşebilir bir kesir ise k nin alabileceği tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

29. $\frac{7^{12}+1}{7^8-7^4+1}$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) 7^4 B) 7^4-1 C) 7^6-1 D) 7^6+1 E) 7^4+1

30. $\frac{23^3-1}{23^2+24}+\frac{37^3+1}{37^2-36}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) 40 B) 50 C) 60 D) 70 E) 80

31. $x=\frac{2}{3}$ için $\frac{x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x^8-1}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) -4 B) -3 C) $-\frac{2}{3}$ D) 0 E) 1

32. $a+b+c=0$ ise $a^3+b^3+c^3-3abc$ işleminin sonucunu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-a$ B) $-b$ C) 0 D) $a+b$ E) $a-b$

D) 33-35. soruları aşağıda verilen ortak metne ve görsele göre cevaplandırınız.

33. Yandaki görselde bulunan okulun alanını veren polinomu bulunuz.

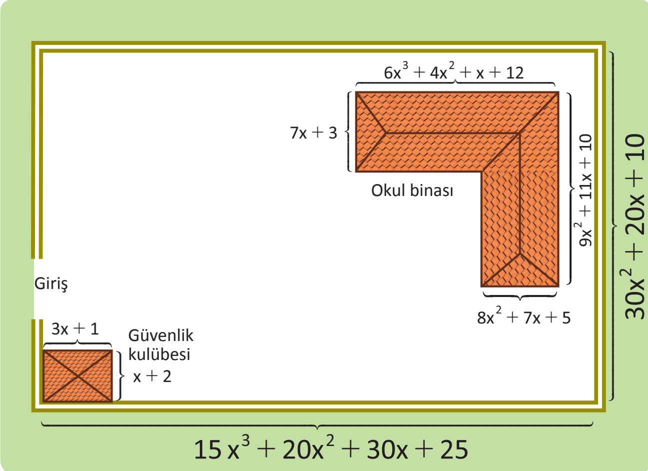
34. Okulun bahçesinin alanını veren polinomu bulunuz.

35. Okul bahçesine alanı $162x^2 + 27x + 1$ polinomu olan bir voleybol sahasının yapılması planlanmaktadır.

Voleybol sahasının zemini,

boyutları $\left(x + \frac{1}{9}\right)$ ve $\left(x + \frac{1}{18}\right)$ olan

bir A malzemesi ile kaplanacaktır. Buna göre kullanılacak malzeme sayısını bulunuz.



(Görselde verilen okul krokisinde kenarlar birbirine dik ve $x > 0$ olmalıdır.)

ÇÖZÜM

E) 36-37. soruları aşağıda verilen ortak metne göre cevaplandırınız.

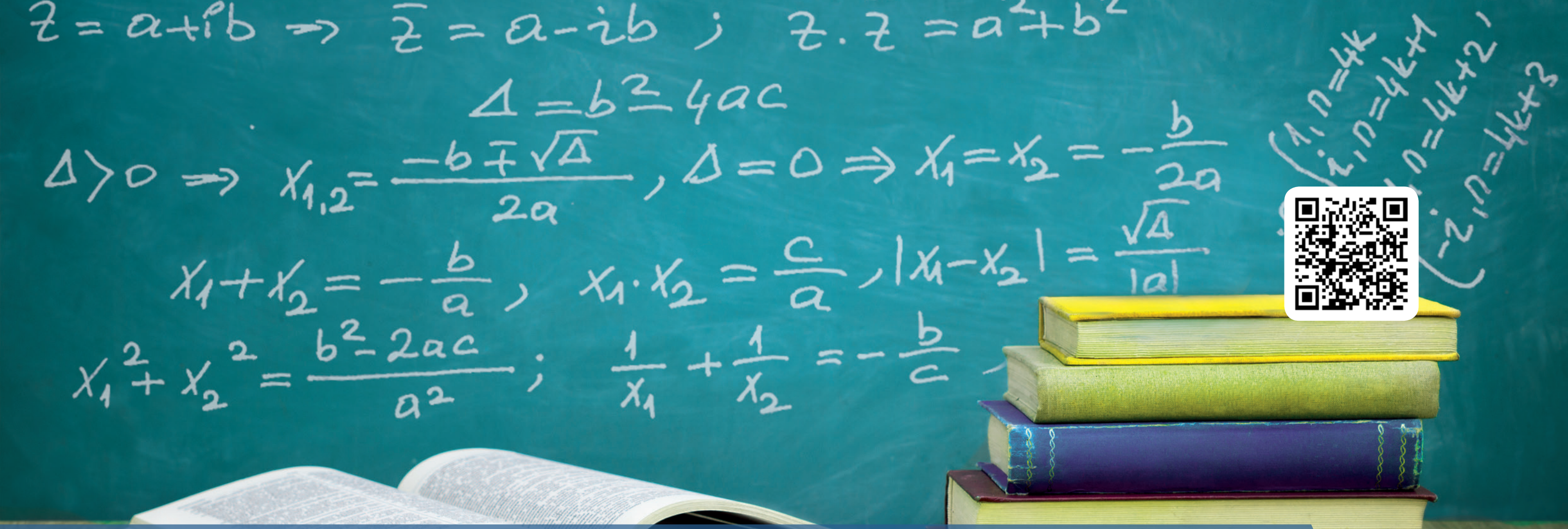
Bir nehrin üzerine 20 metre genişliğinde köprü yapılacaktır.

36. Planlanan köprünün orta noktası orijin noktası, köprü ayaklarının yapılacağı noktalar $P(x) = x^4 - (35^2 + 15^2)x^2 + (15 \cdot 35)^2$ polinomunun sıfırlarıdır.

Buna göre köprünün ayak sayısı ve ayaklarının oturduğu noktaların koordinatlarının apsislerini bulunuz.

37. Planlanan köprünün komşu iki ayağı arasındaki en uzun ve en kısa mesafenin kaç metre olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



SAYILAR VE CEBİR
10.4. İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER

Neler Öğreneceksiniz?

10.4.1. İKİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEMLER

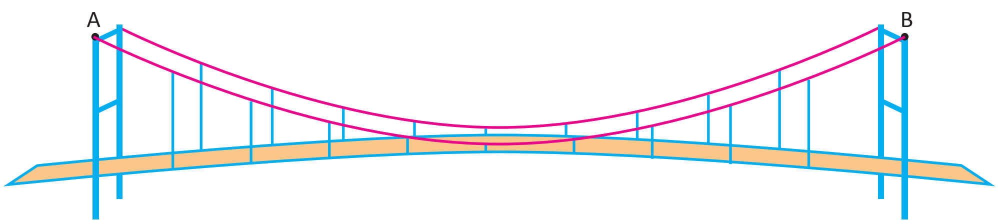
1. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler
2. Karmaşık Sayılar
3. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Kökleri ile Katsayıları Arasındaki İlişkiler

Neden "İkinci Dereceden Denklemleri" Öğrenmelisiniz?

- Hız, zaman ve yörünge problemleri gibi mekanik fizik problemlerinin çözümünde ikinci dereceden denklemlerden yararlanılır.
- Günlük hayatta birbiri cinsinden yazılabilen iki çokluk, çarpım şeklinde ifade edildiğinde ikinci dereceden denklemler kullanılır.
- Elektromanyetizma, elektrik ve alternatif akım uygulamalarında karmaşık sayılar kullanılır.
- Dinamik fizik uygulamalarında ve bilgisayar grafikleri ile hazırlanan filmlerde karmaşık sayılar kullanılır.

Hazırlık Çalışması

1. $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $P(x) = ax + b$ ve $Q(x) = ax^2 + bx + c$ polinomlarının sıfırı ifadesinden ne anladığınızı tartışınız.
2. $x^2 - 3x + 2 = 0$ ve $5x^2 + 14x - 6 = 0$ ifadelerini çarpanlarına ayırınız.



3. Şekildeki asma köprünün taşıyıcı çelik halatının orta noktası orijindir. Çelik halatın kule bağlantı noktalarının apsisleri $x + 60 = 0$ ve $x - 90 = 0$ denklemlerinin kökleri olduğuna göre köprünün kuleleri arasındaki uzaklığı bulunuz.

10.4.1. İKİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEMLER

Tarih Köşesi

Türk ve Müslüman bir bilim insanı olan Abdülhamid İbn Türk, dokuzuncu yüzyılda yaşamıştır. Matematikle ilgili dört büyük eser yazmış, ilim ve faziletinin üstünlüğünden dolayı kendisine "Ebü'l-Fazl" künyesi verilmiştir.

Kendisiyle ilgili verilen bilgilere göre en önemli eseri yedi bölümden meydana gelen "Kitâb-ül-Câmi fil-hesâp ve Kitâb-ül-muâmelât"tır. Diğer önemli eseri ise "Kitâb-ün-nevâdir il-hesap havas el-a'dâd" olup bu eserleri günümüze kadar ulaşmamıştır.

Abdülhamid İbn Türk, "Kitab-ül muamelat" isimli kitabında Harezmî'nin kitabında bulunan $ax^2 = bx$, $ax^2 + c = bx$, $ax^2 = bx + c$ tiplerdeki denklemlerin çözümünde kullanılan geometrik düşünce biçimini geliştirerek çözümler yapmıştır.

Matematik ve gökbilimle uğraşan Hintli Matematikçi Bramagupta, $ax + by = c$ tipinden herhangi bir belirsiz denklemi gerçekleyebilecek bütün tam sayı köklerini araştırmış, ayrıca $xy = ax + by + c$ tipi bir denklemi çözmeyi başarmıştır. Hintli matematikçi, cebirsel ifadeleri gösterirken kısaltmaları kullanmıştır.

Görsel 4.1.1: Harezmî

Harezmî (Görsel 4.1.1) Özel miras problemlerinin ortaya çıkardığı denklemleri çözme durumunda kalan Harezmî, bugünkü bilinen anlamıyla cebire yönelmiştir. Bu alanda yaptığı çalışmaları, daha sonra matematiğin bir kolu olarak bilinen "cebir" adını alacağı "Hesab-ül Cebir vel- Mukabele" adlı kitabında toplamıştır. Kitabı üç bölümden oluşmaktadır. Harezmî, kitabının birinci bölümünde cebirsel eşitlikleri çözme sürecini açıklamıştır. Tüm lineer ve ikinci dereceden denklemlerin $ax^2 = bx$, $ax^2 = b$, $ax = b$, $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$, $ax^2 = bx + c$ olacak şekilde altı biçime indirgenebileceğini ifade etmiştir.

Harezmî, kitabının ikinci bölümünde 4. tipteki $x^2 + 10x = 39$ eşitliğinin çözümünü şu şekilde yapmıştır: "Şeylerin sayısının yarısını al, 5; onu kendisi ile çarp, 25; buna 39'u ekle, 64; bunun karekökünü al, 8; bunu şeylerin sayısının yarısından çıkar. Sonuç 3'tür." Harezmî, bilinmeyen için "şey" sözcüğünü kullanmıştır. Harezmî, yaptığı çözümleri geometrik şekillerle göstererek doğrulamıştır.

Kaynakça: İslam Tarihî Ansiklopedisi C 7, s. 196
Türk Matematik ve Bilgisayar Eğitimi Dergisi (http://dergipark.gov.tr/download/article-file/201321)

1. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

Tanım

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denklemine **ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem** denir.

a, b, c denklemin katsayıları, x denklemin bilinmeyenidir.

Denklemi sağlayan x_1 ve x_2 sayılarına **denklemin kökleri**, köklerin oluşturduğu kümeye ise **denklemin çözüm kümesi** denir. Çözüm kümesi $Ç = \{x_1, x_2\}$ biçiminde gösterilir.

$x^2 - 3x + 1 = 0, x^2 + x = 0, 3x^2 - 4 = 0$ ve $-2x^2 = 0$ denklemleri ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerdir.

1. ÖRNEK

$(2a-3) \cdot x^3 + 2x^2 - 5x + 3 = 0$ ifadesi, x e bağlı ikinci dereceden bir denklem olduğuna göre a değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen denklemin ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olması için denklemde x^3 lü terim olmamalıdır. En büyük dereceli terim x^2 li olmalıdır. Bu durumda

$2a - 3 = 0$ olur.

$2a - 3 = 0 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$ bulunur.

İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER

2. ÖRNEK

$(m^2-9)\cdot x^3+2x^{3n-7}+3x-7=0$ ifadesi, x e bağlı ikinci dereceden bir denklem olduğuna göre $m+n$ toplamının en küçük değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen denklemin ikinci dereceden olması için denklemde en büyük dereceli terimin x^2 li bir terim olması gerekir.

Bu durumda x^3 lü terimin katsayısı 0 ve $2x^{3n-7}$ teriminde x in kuvveti 2 olmalıdır.

$m^2-9=0 \Rightarrow m^2=9$ ve $3n-7=2 \Rightarrow 3n=2+7$

$m=\mp 3$ $\quad$ $3n=9$

$n=3$ bulunur.

O hâlde $m+n$ toplamının en küçük değeri

$m+n=(-3)+3=0$ olur.

3. ÖRNEK

$3x^{|a-3|}+4x+1=0$ denklemi, ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olduğuna göre a nın alabileceği değerler toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$3x^{|a-3|}+4x+1=0$ denkleminin ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olması için x li terimlerde en büyük kuvvet 2 olmalıdır.

Bu durumda $3x^{|a-3|}$ teriminde x in kuvveti 2 olmalıdır.

$|a-3|=2 \Rightarrow a-3=2$ veya $a-3=-2$ demektir.

$a=2+3$ $\quad$ $a=-2+3$

$a_1=5$ $\quad$ $a_2=1$ bulunur.

a nın alabileceği değerler toplamı $a_1+a_2=5+1=6$ olur.

4. ÖRNEK

$(m+1)\cdot x^m+(m-3)\cdot x^{2m}+(m-1)\cdot x^{3m}+3=0$ denklemi, ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olduğuna göre m değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(m+1)\cdot x^m+(m-3)\cdot x^{2m}+(m-1)\cdot x^{3m}+3=0$ denkleminin ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olması için x li terimlerde en büyük kuvvet 2 olmalıdır.

Bu durumda

$m=2 \Rightarrow 3x^2-x^4+x^6+3=0$ denklemi elde edilir.

Bu denklem, 6. dereceden bir denklemdir.

$2m=2 \Rightarrow m=1$ olur.

Bu durumda $2x-2x^2+3=0$ ikinci derece denklemi elde edilir.

O hâlde $m=1$ olmalıdır.

5. ÖRNEK

$3x^2 - 5x + 2m - 1 = 0$ denkleminin bir kökü $x_1 = 2$ olduğuna göre m değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x_1 = 2$ denklemin kökü ise denklemi sağlar.

$$3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 2m - 1 = 0$$
$$12 - 10 + 2m - 1 = 0$$
$$2m + 1 = 0$$
$$2m = -1$$
$$m = -\frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

6. ÖRNEK

$x^2 + mx - 2m - 6 = 0$ denkleminin bir kökü $x_1 = -m + 4$ olduğuna göre m değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x_1 = -m + 4$ denklemin kökü olduğundan denklemi sağlar.

$$(-m+4)^2 + m \cdot (-m+4) - 2m - 6 = 0$$
$$\cancel{m^2} - 8m + 16 - \cancel{m^2} + 4m - 2m - 6 = 0$$
$$-6m + 10 = 0$$
$$6m = 10$$
$$m = \frac{10}{6}$$
$$m = \frac{5}{3} \text{ olur.}$$

7. ÖRNEK

$x^2 - px + 5 = 0$ ve $x^2 - 5x + p = 0$ denklemlerinin birer kökü ortak olduğuna göre ortak kökü bulunuz.

ÇÖZÜM

$m \in \mathbb{R}$ her iki denklemi sağlayan ortak kök olarak seçilirse m sayısı iki denklemi de sağlar. Buna göre $m^2 - pm + 5 = 0$ ve $m^2 - 5m + p = 0$ olur. Bu iki denklem ortak çözülürse

$$\cancel{m^2} - pm + 5 = \cancel{m^2} - 5m + p$$
$$-pm + 5m = p - 5$$
$$-m(p-5) = p - 5$$
$$m = -1 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

SORU

$5x^2 - (5m - 3)x + 4m - 7 = 0$ denkleminin bir kökü $x_1 = m - 2$ olduğuna göre m değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER

İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Çözümü

İkinci derece denklemler çözülürken farklı yöntemler kullanılır. Bu yöntemler çarpanlara ayırma (tam kareye tamamlama, iki kare farkı, değişken değiştirme) ve diskriminant yöntemi olarak özetlenebilir.

$ax^2+bx+c=0$ Denkleminin Çarpanlarına Ayırma Yöntemi ile Çözümü

$ax^2+bx+c=0$ denkleminin sol tarafı çarpanlarına ayrılabilen türden ise her bir çarpan ayrı ayrı sıfıra eşitlenerek denklemin kökleri bulunur.

8. ÖRNEK

$2x^2+6x=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen denklem çarpanlarına ayrılırsa

$2x^2+6x=0 \Rightarrow 2x\cdot(x+3)=0$ elde edilir. Bu durumda $2x=0$ veya $x+3=0$ olur. Buradan

$x_1=0$ veya $x_2=-3$ bulunur.

Denklemin çözüm kümesi $Ç=\{-3,0\}$ olur.

Sonuç

$ax^2+bx+c=0$ denkleminde $c=0$ ise denklemin köklerinden en az biri sıfır olur.

9. ÖRNEK

$3x^2-48=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$3x^2-48=0 \Rightarrow x^2-16=0$$
$$x^2-4^2=0 \quad (\text{İki kare farkı})$$
$$(x-4)\cdot(x+4)=0$$
$x_1=4$ veya $x_2=-4$ bulunur.

Denklemin çözüm kümesi $Ç=\{-4,4\}$ olur.

10. ÖRNEK

$7x^2-6x-1=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$7x^2-6x-1=(7x+1)\cdot(x-1)$$

$7x \quad 1$

$x \quad -1$

Çarpanlar

$7x+1=0$ veya $x-1=0$

$x_1=-\frac{1}{7}$ veya $x_2=1$ bulunur.

Denklemin çözüm kümesi $Ç=\left\{-\frac{1}{7},1\right\}$ olur.

11. ÖRNEK

$x^2-5x+4=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$x^2-5x+4=x^2+[(-1)+(-4)]x+(-4)\cdot(-1)=0$$
$$(x-1)\cdot(x-4)=0$$
$$x-1=0 \text{ veya } x-4=0$$
$$x_1=1 \text{ veya } \quad x_2=4 \text{ bulunur.}$$

Denklemin çözüm kümesi $Ç=\{1,4\}$ olur.

Sonuç

Katsayıları toplamı sıfır olan polinom denklemlerin köklerinden biri daima 1 dir.

12. ÖRNEK

$2017x^2-2015x-2=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen denklemin katsayıları 2017, -2015 ve -2 dir. Bu katsayıların toplamı $2017+(-2015)+(-2)=0$ olduğundan denklemin bir kökü $x_1=1$ olur.

$2017\cdot 1^2-2015\cdot 1-2=2017-2017=0$

Denklemin ikinci kökü için denklem $x-1$ ile bölünürse

$$\begin{array}{r|l} 2017x^2-2015x-2 & x-1 \\ \cline{2-2} -\quad 2017x^2-2017x & 2017x+2 \\ \hline 2x-2 & \\ -\quad 2x-2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$2017x+2=0 \Rightarrow 2017x=-2$

$$x_2=-\frac{2}{2017} \text{ bulunur.}$$

Denklemin çözüm kümesi $Ç=\left\{-\frac{2}{2017},1\right\}$ olur.

13. ÖRNEK

$2x^2+8x+8=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Denklem 2 parantezine alınırsa

$2x^2+8x+8=2\cdot(x^2+4x+4)=0$

$x^2+4x+4=0$ denklemi elde edilir. Bu denklem tam kare olduğundan

$(x+2)^2=0$ yazılır.

$(x+2)\cdot(x+2)=0$

$x+2=0$ veya $x+2=0$

$x_1=-2$ veya $x_2=-2$ bulunur.

Denklemin çözüm kümesi $Ç=\{-2\}$ olur.

Sonuç

$ax^2+bx+c=0$ denkleminin sol tarafı bir tam kare ifade şeklinde yazılabiliyorsa denklemin kökleri birbirine eşittir.

14. ÖRNEK

$x^2-2x-8=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Denkleme 1 eklenip çıkarılırsa

$x^2-2x-8=\underbrace{x^2-2x+1}_{(x-1)^2}-1-8=0$ olur.

$(x-1)^2-9=0$

$(x-1)^2-3^2=0$ (İki kare farkı)

$(x-1+3)\cdot(x-1-3)=0$

$(x+2)\cdot(x-4)=0$

$x+2=0$ veya $x-4=0$

$x_1=-2$ veya $x_2=4$ bulunur.

Denklemin çözüm kümesi $Ç=\{-2,4\}$ olur.

15. ÖRNEK

$2x^2-4x-8=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Denklem 2 parantezine alınırsa

$2x^2-4x-8=2\cdot(x^2-2x-4)=0$

$x^2-2x-4=0$ olur. Denkleme 1 eklenip çıkarılırsa

$\underbrace{x^2-2x+1}_{(x-1)^2}-1-4=0$

$(x-1)^2-5=0$

$(x-1)^2-(\sqrt{5})^2=0$ (İki kare farkı)

$(x-1+\sqrt{5})\cdot(x-1-\sqrt{5})=0$

$x-1+\sqrt{5}=0$ veya $x-1-\sqrt{5}=0$

$x_1=1-\sqrt{5}$ veya $x_2=1+\sqrt{5}$ bulunur.

Denklemin çözüm kümesi $Ç=\{1-\sqrt{5},1+\sqrt{5}\}$ olur.

Sıra Sizde

SORU

$x^2+6x+10=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

16. ÖRNEK

$\dfrac{3x^2-4xy+5y^2}{y^2}=4$ olduğuna göre $\dfrac{x}{y}$ ifadesinin alabileceği değerler toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\dfrac{3x^2-4xy+5y^2}{y^2}=4 \Rightarrow 3x^2-4xy+5y^2=4y^2 \text{ yazılır.}$$

$$3x^2-4xy+y^2=0$$
$$(3x-y)\cdot(x-y)=0$$
$$3x-y=0 \text{ veya } x-y=0$$
$$3x=y \text{ veya } x=y$$
$$\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{3} \text{ veya } \dfrac{x}{y}=1 \text{ olur.}$$

Bu durumda $\dfrac{x}{y}$ ifadesinin alabileceği değerler toplamı $\dfrac{1}{3}+1=\dfrac{4}{3}$ olur.

17. ÖRNEK

$x\cdot y>0$ olmak üzere

$3x^2-2xy=5y^2$ olduğuna göre $\dfrac{3x+y}{2x-3y}$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$3x^2-2xy=5y^2 \Rightarrow 3x^2-2xy-5y^2=0$$
$$(3x-5y)\cdot(x+y)=0$$
$$3x-5y=0 \text{ veya } x+y=0$$
$$\Rightarrow 3\underbrace{x}_{5k}=5\underbrace{y}_{3k} \text{ veya } \underbrace{x=-y}_{\text{olamaz}}$$

$[x\cdot y>0 \Rightarrow (x>0 \text{ ve } y>0) \text{ veya } (x<0 \text{ ve } y<0) \text{ olur.}]$

Bu durumda
$$\dfrac{3x+y}{2x-3y}=\dfrac{3\cdot 5k+3k}{2\cdot 5k-3\cdot 3k}$$
$$=\dfrac{15k+3k}{10k-9k}$$
$$=\dfrac{18k}{k}=18 \text{ olur.}$$

18. ÖRNEK

$x^2+4x-6=0$ denkleminin köklerinden biri x_1 dir. Buna göre $(x_1^2+7x_1+10)\cdot(x_1^2+x_1-2)$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$(x_1^2+7x_1+10)\cdot(x_1^2+x_1-2)=(x_1+2)\cdot(x_1+5)\cdot(x_1+2)\cdot(x_1-1)$$
$$=[(x_1+2)\cdot(x_1+2)]\cdot[(x_1+5)\cdot(x_1-1)]$$
$$=(x_1^2+4x_1+4)\cdot(x_1^2+4x_1-5)$$
$$=\left[\underbrace{(x_1^2+4x_1-6)}_{0}+10\right]\cdot\left[\underbrace{(x_1^2+4x_1-6)}_{0}+1\right]$$
$$=10\cdot 1$$
$$=10 \text{ bulunur.}$$

19. ÖRNEK

$3x^2 - x - 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.
$x_1 > x_2$ olduğuna göre $3x_1 - 5x_2$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$3x^2 - x - 4 = 0$$

$$\begin{array}{cc} 3x & -4 \\ x & 1 \end{array}$$

Çarpanlar

$$(3x-4)\cdot(x+1) = 0 \Rightarrow 3x - 4 = 0 \text{ veya } x + 1 = 0$$
$$3x = 4 \text{ veya } x = -1$$
$$x = \frac{4}{3} \text{ veya } x = -1$$
$$x_1 = \frac{4}{3} \text{ veya } x_2 = -1$$
$$3x_1 - 5x_2 = \cancel{3}\cdot\frac{4}{\cancel{3}} - 5\cdot(-1)$$
$$= 4 + 5$$
$$= 9 \text{ bulunur.}$$

20. ÖRNEK

$x^2 = x - 4$ olduğuna göre $x^4 + 7x + 16$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$x^4 + 7x + 16 = (x^2)^2 + 7x + 16 \quad (x^2 = x - 4 \text{ değeri yazılırsa})$$
$$= (x-4)^2 + 7x + 16$$
$$= x^2 - 8x + 16 + 7x + 16 \quad (x^2 = x - 4 \text{ değeri yazılırsa})$$
$$= (x-4) - 8x + 16 + 7x + 16$$
$$= 28 \text{ bulunur.}$$

21. ÖRNEK

$x^2 + 6x + 1 = 0$ denkleminin köklerinden biri x_1 dir. Buna göre $x_1 + \frac{1}{x_1}$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2 + 6x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = -6x$ elde edilir. Denklemin her iki tarafı x ile bölünürse

$x + \frac{1}{x} = -6$ olur. Denklemin bir kökü x_1 olduğundan

$x_1 + \frac{1}{x_1} = -6$ bulunur.

22. ÖRNEK

$(x^2-7x)^2+16x^2-112x+60=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(x^2-7x)^2+16x^2-112x+60=0$ denklemi
$(x^2-7x)^2+16(x^2-7x)+60=0$ şeklinde yazılabilir.

$x^2-7x=t$ değişken değişimi yapılırsa
$t^2+16t+60=0$ ikinci derece denklemi elde edilir.
$(t+6)\cdot(t+10)=0$ olduğundan $t_1=-6$ veya $t_2=-10$ bulunur.

$t_1=-6$ için $x^2-7x=-6$
$x^2-7x+6=0 \Rightarrow (x-1)\cdot(x-6)=0$
$x_1=1,\quad x_2=6$ ve

$t_2=-10$ için $x^2-7x=-10$
$x^2-7x+10=0 \Rightarrow (x-2)\cdot(x-5)=0$
$x_3=2,\quad x_4=5$ bulunur.

Bu durumda denklemin çözüm kümesi $Ç=\{1,2,5,6\}$ olur.

23. ÖRNEK

$25^x-6\cdot5^{x+1}+125=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$25^x-6\cdot5^{x+1}+125=0$ denklemi
$(5^x)^2-6\cdot5^x\cdot5+125=(5^x)^2-30\cdot5^x+125=0$ şeklinde yazılabilir.

$5^x=t$ değişken değişimi yapılırsa
$t^2-30t+125=0$ ikinci derece denklemi elde edilir.
$(t-5)\cdot(t-25)=0$ olduğundan $t_1=5$ veya $t_2=25$ bulunur.

$t_1=5$ için $5^x=5 \Rightarrow x_1=1$ ve
$t_2=25$ için $5^x=25 \Rightarrow 5^x=5^2$
$x_2=2$ bulunur.

Bu durumda denklemin çözüm kümesi $Ç=\{1,2\}$ olur.

İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER

$ax^2 + bx + c = 0$ Denkleminin Diskriminant Yöntemi ile Çözümü

$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$ denklemi a parantezine alınırsa

$$a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \text{ olur.}$$

İfadeyi tam kareye dönüştürmek için $\frac{b}{a}x$ teriminin katsayısının yarısının karesi eklenip çıkarılır.

$$\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \text{ olur.}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \underset{(4a)}{\frac{c}{a}} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \qquad \text{Her iki tarafın karekökü alınırsa}$$

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|2a|}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ veya } x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ veya } x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{veya} \quad = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{kökleri bulunur.}$$

Bu durumda denklemin çözüm kümesi

$Ç = \left\{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right\}$ olarak yazılır. Burada $b^2 - 4ac$ ifadesi Δ olarak seçilirse

$Ç = \left\{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$ olur. ($\Delta = b^2 - 4ac$ ifadesi delta veya diskriminant olarak adlandırılır.)

Sonuçlar

1. $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ise $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin iki farklı gerçek kökü vardır. Bu kökler
   $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ veya $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ve denklemin çözüm kümesi $Ç = \left\{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$ olur.

2. $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ise $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin birbirine eşit (çakışık) iki gerçek kökü vardır.
   Bu kökler
   $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ ve denklemin çözüm kümesi $Ç = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$ olur.

3. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ise $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$ olduğundan $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin gerçek kökü yoktur.
   Bu durumda denklemin çözüm kümesi $Ç = \emptyset$ olur.

24. ÖRNEK

$x^2 - 8x + 12 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Denklemde $a = 1, b = -8$ ve $c = 12$ olur. Bu katsayılar yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12\\ &= 64 - 48\\ &= 16 > 0 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Bu durumda denklemin farklı iki gerçek kökü vardır. Bu kökler

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8+\sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{8+4}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

veya

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8-\sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{8-4}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ olarak bulunur.}$$

Denklemin çözüm kümesi $Ç = \{6, 2\}$ olur.

25. ÖRNEK

$-3x^2 + 6x + 4 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= 6^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 4\\ &= 36 + 48\\ &= 84 > 0 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Bu durumda denklemin farklı iki gerçek kökü vardır. Bu kökler

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6+\sqrt{84}}{2 \cdot (-3)} = \frac{-6+\sqrt{4 \cdot 21}}{-6} = \frac{-6}{-6} + \frac{2 \cdot \sqrt{21}}{-6} = 1 - \frac{\sqrt{21}}{3}$$

veya

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-\sqrt{84}}{2 \cdot (-3)} = \frac{-6-\sqrt{4 \cdot 21}}{-6} = \frac{-6}{-6} - \frac{2 \cdot \sqrt{21}}{-6} = 1 + \frac{\sqrt{21}}{3} \text{ bulunur.}$$

Denklemin çözüm kümesi $Ç = \left\{1 - \frac{\sqrt{21}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{21}}{3}\right\}$ olur.

26. ÖRNEK

$x^2+4\sqrt{3}x+9=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &= (4\sqrt{3})^2-4\cdot1\cdot9\\ &= 48-36\\ &= 12>0 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Bu durumda denklemin farklı iki gerçek kökü vardır. Bu kökler

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4\sqrt{3}+\sqrt{12}}{2\cdot1}=\frac{-4\sqrt{3}+\sqrt{4\cdot3}}{2}=\frac{-4\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2}=\frac{-2\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$$

veya

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4\sqrt{3}-\sqrt{12}}{2\cdot1}=\frac{-4\sqrt{3}-\sqrt{4\cdot3}}{2}=\frac{-4\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{2}=\frac{-6\sqrt{3}}{2}=-3\sqrt{3} \text{ olarak bulunur.}$$

$Ç=\{-3\sqrt{3},-\sqrt{3}\}$ olur.

27. ÖRNEK

$x^2-5x+a-2=0$ denkleminin farklı iki gerçek kökü olduğuna göre a nın değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Denklemin farklı iki gerçek kökü olduğundan $\Delta>0$ olmalıdır.

$$\begin{aligned}\Delta=b^2-4ac&>0\\ (-5)^2-4\cdot1\cdot(a-2)&>0\\ 25-4a+8&>0\\ -4a+33&>0\\ 4a&<33\\ a&<\frac{33}{4}\end{aligned}$$

Bu durumda a nın değer aralığı $\left(-\infty,\frac{33}{4}\right)$ olur.

Sıra Sizde

SORU

$x^2+4\sqrt{2}\cdot x+|a|=0$ denkleminin gerçek iki kökü olduğuna göre a nın değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

28. ÖRNEK

$2x^2-(a+1)\cdot x-7=0$ denkleminin farklı iki gerçek kökü olduğuna göre a nın değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Denklemin farklı iki gerçek kökü olduğuna göre $\Delta>0$ olmalıdır.

$$b^2-4ac>0$$
$$(-(a+1))^2-4\cdot 2\cdot(-7)>0$$
$$a^2+2a+1+56>0$$
$$a^2+2a+57>0 \text{ olur.}$$
$$a^2+2a+57=\underbrace{a^2+2a+1}_{(a+1)^2}+56$$
$$=(a+1)^2+56>0$$

Her a değeri için $a^2+2a+57>0$ olduğundan a nın değer aralığı $\mathbb{R}$ olur.

29. ÖRNEK

$x^2-6x+9=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2-6x+9=0$ denkleminde köklerin varlığı diskriminant yöntemiyle incelenirse

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$=(-6)^2-4\cdot 1\cdot 9$$
$$=36-36$$
$$=0 \text{ bulunur.}$$

Bu durumda denklemin çakışık iki gerçek kökü vardır. Bu kökler

$x_{1,2}=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-6}{2\cdot 1}=\dfrac{6}{2}=3$ olarak bulunur. Denklemin çözüm kümesi $Ç=\{3\}$ olur.

30. ÖRNEK

$a\neq 0$ olmak üzere $ax^2+(2a-1)\cdot x+a-2=0$ denkleminin çakışık iki gerçek kökü olduğuna göre a değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Denklemin çakışık iki gerçek kökü olduğuna göre $\Delta=0$ olmalıdır.

$$\Delta=b^2-4ac=0$$
$$(2a-1)^2-4\cdot a\cdot(a-2)=0$$
$$\cancel{4a^2}-4a+1-\cancel{4a^2}+8a=0$$
$$4a+1=0$$
$$4a=-1$$
$$a=-\frac{1}{4} \text{ bulunur.}$$

31. ÖRNEK

$a \neq 1$ olmak üzere $(2a-2)\cdot x^2-(4a+2)x+2a-4=0$ denkleminin gerçek kökü olmadığına göre a nın değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

$(2a-2)\cdot x^2-(4a+2)x+2a-4=0$ denkleminin gerçek kökü yoksa $\Delta<0$ olur. Bu durumda

$$\Delta=b^2-4ac<0$$
$$[-(4a+2)]^2-4\cdot(2a-2)\cdot(2a-4)<0$$
$$16a^2+16a+4-4\cdot(4a^2-8a-4a+8)<0$$
$$16a^2+16a+4-4\cdot(4a^2-12a+8)<0$$
$$\cancel{16a^2}+16a+4-\cancel{16a^2}+48a-32<0$$
$$64a-28<0$$
$$64a<28$$
$$a<\frac{28}{64}$$
$$a<\frac{7}{16} \text{ bulunur.}$$

Buna göre a nın değer aralığı $\left(-\infty,\frac{7}{16}\right)$ olur.

32. ÖRNEK

Dondurulmuş gıdalar çözülmeye başlayınca ortam sıcaklığına bağlı olarak bakteri üretmeye başlar.
c: sıcaklık (C°) N: birim miktardaki bakteri sayısı ve $2\leq c\leq 14$ olmak üzere
$N=20c^2-80c+500$ ile modellenmiştir. Buna göre

a) Dondurulmuş bir gıda çözünüp sıcaklığı $5\,C^\circ$ ya ulaştığında birim miktarda ortalama kaç bakteri ürediğini bulunuz.
b) Dondurulmuş bir gıda çözünüp sıcaklığı kaç dereceye çıktığında birim miktardaki bakteri sayısının 2420 olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

a) $5\,C^\circ$ da $N=20\cdot 5^2-80\cdot 5+500$
$$=20\cdot 25-400+500$$
$$=500+100$$
$$=600 \text{ bakteri üretir.}$$

b) $2420=20c^2-80c+500$
$$20c^2-80c-1920=0$$
$$20\cdot(c^2-4c-96)=0$$
$$(c-12)\cdot(c+8)=0$$
$$c-12=0 \text{ veya } c+8=0$$
$$c=12 \text{ veya } c=-8\notin[2,14] \text{ bulunur.}$$

Buna göre $12\,C^\circ$ da birim miktarda ortalama bakteri sayısı 2420 olur.

33. ÖRNEK

$m \in \mathbb{R}^-$ olmak üzere

$x^2 - 4\sqrt{2} \cdot x + 8 - m^2 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2 - 4\sqrt{2} \cdot x + 8 - m^2 = 0$ denklemi diskriminant yöntemiyle çözülürse

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$\quad = (-4\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (8 - m^2)$

$\quad = \cancel{32} - \cancel{32} + 4m^2$

$\quad = 4m^2 > 0$

$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4\sqrt{2} + |2m|}{2} = 2\sqrt{2} - m$ veya $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4\sqrt{2} - |2m|}{2} = 2\sqrt{2} + m$ olur.

$Ç = \{2\sqrt{2} + m, 2\sqrt{2} - m\}$ bulunur.

34. ÖRNEK

$x^2 - 7x + \dfrac{k}{4} = 0$ denkleminin köklerinin rasyonel sayı olması için k nin alabileceği doğal sayıların kaç tane olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen denklemin köklerinin rasyonel sayı olması için $\Delta \geq 0$ ve $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{Q}$ olmalıdır. Bu durumda

$\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$

$\quad = (-7)^2 - \cancel{4} \cdot 1 \cdot \dfrac{k}{\cancel{4}}$

$\quad = 49 - k \geq 0$

$\sqrt{\Delta} \in \mathbb{Q}$ olması için $(49 - k)$ ifadesini 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 şeklinde tam kare yapan k doğal sayıları 8 tanedir.

35. ÖRNEK

$x \geq -3$ olmak üzere $x - 5 = 2 \cdot \sqrt{x + 3}$ eşitliğini sağlayan x gerçek sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

$x - 5 = 2 \cdot \sqrt{x + 3}$ eşitliğinde her iki tarafın karesi alınırsa

$(x - 5)^2 = 4 \cdot (x + 3)$

$x^2 - 10x + 25 = 4x + 12$

$x^2 - 14x + 13 = 0$ bulunur. Denklem çarpanlarına ayrılırsa

$(x - 13) \cdot (x - 1) = 0$

$x_1 = 13$ veya $x_2 = 1$ olur. Bu köklerden ilk denklemi sağlayanlar çözüm olarak alınır.

$x_1 = 13$ için $13 - 5 = 2 \cdot \sqrt{13 + 3}$

$8 = 2 \cdot \sqrt{16}$

$8 = 2 \cdot 4$

$8 = 8$ olduğundan $x_1 = 13$ denklemi sağlar.

$x_2 = 1$ için $1 - 5 = 2 \cdot \sqrt{1 + 3}$

$-4 = 2 \cdot \sqrt{4}$

$-4 = 4$ olamayacağından $x_2 = 1$ denklemi sağlamaz.

Bu durumda denklemi sağlayan x gerçek sayısı 13 bulunur.

36. ÖRNEK

Şekildeki gibi hareket eden bir golf topunun t. saniye sonunda, yerden yüksekliğini metre cinsinden veren denklem

$h(t) = -t^2 + 11t - 4$ şeklinde modelleniyor.

Buna göre topun kaçıncı saniyelerde yerden yüksekliğinin 20 m olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

t. saniyede topun yerden yüksekliği 20 m olsun. Bu durumda $h(t) = 20$ olur. Buradan

$-t^2 + 11t - 4 = 20 \Rightarrow -t^2 + 11t - 24 = 0$

$-(t-3)\cdot(t-8) = 0$

$t_1 = 3$ veya $t_2 = 8$ bulunur. Buna göre 3 veya 8. saniyelerde golf topunun yerden yüksekliği 20 m olarak bulunur.

37. ÖRNEK

x kişiden oluşan Aksoy ailesinin Ramazan Bayramı'ndaki toplam bayramlaşma sayısı

$f(x) = x^2 - 6x + 14$ denklemi ile modelleniyor.

Ailenin her bireyi birbiriyle bayramlaştığında 21 bayramlaşma gerçekleştiğine göre Aksoy ailesinin kaç kişi olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Toplam bayramlaşma sayısı 21 olduğundan $f(x) = 21$ olur. Buradan

$f(x) = x^2 - 6x + 14 = 21 \Rightarrow x^2 - 6x - 7 = 0$

$(x+1)\cdot(x-7) = 0$

$x_1 = -1$ veya $x_2 = 7$ bulunur.

Buna göre Aksoy ailesi 7 kişiden oluşmaktadır.

38. ÖRNEK

Bir A ilacı kullanıldıktan bir süre sonra vücutta etkileşime girer. t: zaman (saat), e: ilacın etkisi olmak üzere $e = -\frac{2}{5}\cdot(4t^2 - 24t + 11)$ ile modellenmiştir. Buna göre

a) Bu ilaç kullanıldıktan sonra etkisinin ne zaman başlayıp ne zaman biteceğini bulunuz.

b) Bu ilaç kullanıldıktan 2, 3 ve 4 saat sonraki etkisini karşılaştırınız.

ÇÖZÜM

a) $-\frac{2}{5}\cdot(4t^2 - 24t + 11) = 0$

$(2t-1)\cdot(2t-11) = 0$

$2t - 1 = 0$ veya $2t - 11 = 0$

$2t = 1$ veya $2t = 11$

$t = \frac{1}{2}$ veya $t = \frac{11}{2}$ bulunur. Buna göre A ilacı kullanıldıktan yarım saat sonra etkisini gösterir ve bu ilacın etkisi 5,5 saat sonra sona erer.

b) $t = 2$ için $e = -\frac{2}{5}\cdot(4\cdot 2^2 - 24\cdot 2 + 11) = -\frac{2}{5}\cdot(4\cdot 4 - 48 + 11) = -\frac{2}{5}\cdot(16 - 37) = -\frac{2}{5}\cdot(-21) = \frac{42}{5}$

$t = 3$ için $e = -\frac{2}{5}\cdot(4\cdot 3^2 - 24\cdot 3 + 11) = -\frac{2}{5}\cdot(4\cdot 9 - 72 + 11) = -\frac{2}{5}\cdot(36 - 61) = -\frac{2}{5}\cdot(-25) = 10$

ve

$t = 4$ için $e = -\frac{2}{5}\cdot(4\cdot 4^2 - 24\cdot 4 + 11) = -\frac{2}{5}\cdot(4\cdot 16 - 96 + 11) = -\frac{2}{5}\cdot(64 - 85) = -\frac{2}{5}\cdot(-21) = \frac{42}{5}$

bulunur. Buna göre ilacın 2 ve 4. saatteki etkisi aynı, 3. saatteki etkisi ise bu saatlere göre daha yüksektir.

ALIŞTIRMALAR-1

1. $(m^2-4)\cdot x^5 - x^{n^3+10} - 3x + 8 = 0$ denklemi ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olduğuna göre $m+n$ toplamının alabileceği değerleri bulunuz.

2. $x^{|a-2|} + ax - 4 = 0$ ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerinin çözüm kümesini bulunuz.

3. $-2x^2 - 3x + m + 2 = 0$ denkleminin bir kökü $x_1 = -3$ olduğuna göre m değerini bulunuz.

4. $x^2 - (m-1)\cdot x + m - 11 = 0$ denkleminin bir kökü $x_1 = m+1$ olduğuna göre m değerini bulunuz.

5. $2x^2 - 7x - 9 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

6. $5x^2 - 11x + 6 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

7. $|a| \neq |2b|$ olmak üzere $(a^2 - 4b^2)\cdot x^2 + 4ax + 4 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

8. $-x^2 - (2a-1)\cdot x - 9 = 0$ denkleminin farklı iki gerçek kökü varsa a nın değer aralığını bulunuz.

9. $x^2 - 6\sqrt{2} \cdot x + |a+1| = 0$ denkleminin iki gerçek kökü varsa a nın değer aralığını bulunuz.

10. $x^2 + 4x + a + 3 = 0$ denkleminin gerçek kökü yoksa a nın değer aralığını bulunuz.

11. $7x^2 + 4x - 3 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. $x_1 > x_2$ olduğuna göre $4x_1 + 3x_2$ değerini bulunuz.

12. $x^2 - 8x - 2 = 0$ denkleminin kökleri m ve n dir.
Buna göre $(m^2 - 8m) \cdot 4n - n^2$ ifadesinin değerini bulunuz.

13. $x^2 - 5x + 1 = 0$ denkleminin köklerinden biri x_1 dir.
Buna göre $x_1 + \frac{1}{x_1}$ ifadesinin değerini bulunuz.

14. $x^2 - 2x - 5 = 0$ denkleminin köklerinden biri x_1 dir.
Buna göre $(x_1^2 - 5x_1 + 4) \cdot (x_1^2 + x_1 - 2)$ ifadesinin değerini bulunuz.

15. $x^2 = -x + 7$ olduğuna göre $x^4 + 15x - 13$ ifadesinin değerini bulunuz.

2. Karmaşık Sayılar

Tanım

$x+5=2$ ise $x=2-5=-3$ olduğundan denklemin doğal sayılar kümesindeki çözüm kümesi boş kümedir. Bu durumda doğal sayılar kümesi yetersiz kaldığından yeni bir sayı kümesine ihtiyaç duyulmuştur. Bu sayı kümesine **tam sayılar kümesi** adı verilir ve $\mathbb{Z}$ ile gösterilir.

$\mathbb{Z}=\{...,-2,-1,0,1,2...\}$ ve $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$ olur.

$2x=5$ ise $x=\frac{5}{2}\notin\mathbb{Z}$ olduğundan denklemin tam sayılar kümesinde çözümü yoktur.

Bu durumda tam sayılar kümesine kesirli sayıların ilave edilmesiyle yeni bir sayı kümesi elde edilmiştir. Bu sayı kümesine **rasyonel sayılar kümesi** denir ve $\mathbb{Q}$ ile gösterilir.

$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\,\middle|\, a,b\in\mathbb{Z},\ \text{EBOB}(a,b)=1 \text{ ve } b\neq 0\right\}$ ve $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$ olur.

$x^2=2$ denkleminin rasyonel sayılar kümesinde çözümü yoktur. $x_1=-\sqrt{2}, x_2=\sqrt{2}$ ve benzer sayıları içeren yeni bir sayı kümesi tanımlanmıştır.

Bu sayı kümesine **irrasyonel sayılar kümesi** adı verilir ve $\mathbb{Q}'$ ile gösterilir.

$\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'=\mathbb{R}$ kümesine **gerçek sayılar kümesi** denir ve $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ olur.

$x^2+4=0$ denkleminde $x^2=-4$ olduğundan karesi negatif olan gerçek sayı olmadığından bu denklemin gerçek sayılar kümesinde çözümü yoktur. Bu nedenle yeni bir sayı kümesine ihtiyaç duyulmuştur.

Bu durumda "gerçek sayı olmayan ve karesi -1 e eşit olan" sayı tanımlanmıştır.

$\sqrt{-1}$ sayısına **sanal sayı** (imajiner sayı) **birimi** denir.

$i=\sqrt{-1}$ veya $i^2=-1$ biçiminde gösterilir.

1. ÖRNEK

$i^2=-1$ olmak üzere $\sqrt{-4},\sqrt{-9},\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9},\sqrt{-48}$ ifadelerinin eşitlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$i^2=-1$ olmak üzere

$\sqrt{-4}=\sqrt{(-1)\cdot 4}=\sqrt{i^2\cdot 2^2}=2i$

$\sqrt{-9}=\sqrt{(-1)\cdot 9}=\sqrt{i^2\cdot 3^2}=3i$

$\sqrt{-48}=\sqrt{(-1)\cdot 48}=\sqrt{i^2\cdot 3\cdot 16}=\sqrt{i^2\cdot 3\cdot 4^2}=4\sqrt{3}\cdot i$

$$\begin{aligned}\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9}&=\sqrt{(-1)\cdot 4}\cdot\sqrt{(-1)\cdot 9}\\&=\sqrt{i^2\cdot 2^2}\cdot\sqrt{i^2\cdot 3^2}\\&=2i\cdot 3i\\&=6i^2\\&=6\cdot(-1)\\&=-6 \text{ olur.}\end{aligned}$$

$\sqrt{-4},\sqrt{-9}\notin\mathbb{R}$ olduğundan $\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9}\neq\sqrt{(-4)\cdot(-9)}$ olduğu görülür.

Not

$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

i) $a, b \geq 0$ için $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

ii) $a, b < 0$ için $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \neq \sqrt{a \cdot b}$

2. ÖRNEK

$\dfrac{\sqrt{-5} \cdot \sqrt{-15} \cdot \sqrt{-16}}{\sqrt{48}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$i^2 = -1$ olmak üzere

$$\frac{\sqrt{-5} \cdot \sqrt{-15} \cdot \sqrt{-16}}{\sqrt{48}} = \frac{\sqrt{(-1) \cdot 5} \cdot \sqrt{(-1) \cdot 15} \cdot \sqrt{(-1) \cdot 16}}{\sqrt{16 \cdot 3}}$$

$$= \frac{\sqrt{i^2 \cdot 5} \cdot \sqrt{i^2 \cdot 3 \cdot 5} \cdot \sqrt{i^2 \cdot 4^2}}{\sqrt{4^2 \cdot 3}}$$

$$= \frac{\sqrt{5} \cdot i \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \cdot i \cdot 4i}{4\sqrt{3}}$$

$$= \frac{i^2 \cdot 5 \cdot \cancel{4\sqrt{3}} \cdot i}{\cancel{4\sqrt{3}}}$$

$$= 5 \cdot (-1) \cdot i$$

$= -5i$ bulunur.

Sanal Sayı Biriminin Kuvvetleri

i sayısının kuvvetleri aşağıda hesaplanmıştır. İnceleyiniz.

$i = \sqrt{-1}$

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i \cdot i^2 = i \cdot (-1) = -i$

$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

$i^5 = i \cdot i^4 = i \cdot 1 = i$

$i^6 = i^2 \cdot i^4 = (-1) \cdot 1 = -1$

$i^7 = i \cdot i^6 = (-1) \cdot i = -i$

....

....

$n, k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$i^n = \begin{cases} 1, & n = 4k \\ i, & n = 4k+1 \\ -1, & n = 4k+2 \\ -i, & n = 4k+3 \end{cases}$$ şeklinde tanımlanır.

3. ÖRNEK

Aşağıdaki sayıların eşitlerini bulunuz.

a) i^{81}

b) i^{1071}

c) i^{-26}

ç) i^{-43}

ÇÖZÜM

$i^2=-1$ olmak üzere

a) $i^{81}=i^{4\cdot(20)+1}=(i^4)^{20}\cdot i^1=1^{20}\cdot i=1\cdot i=i$

b) $i^{1071}=i^{4\cdot(267)+3}=(i^4)^{267}\cdot i^3=1^{267}\cdot(-i)=1\cdot(-i)=-i$

c) $i^{-26}=i^{4\cdot(-7)+2}=(i^4)^{-7}\cdot i^2=1^{-7}\cdot(-1)=1\cdot(-1)=-1$

ç) $i^{-43}=i^{4\cdot(-11)+1}=(i^4)^{-11}\cdot i^1=1^{-11}\cdot i=1\cdot i=i$

4. ÖRNEK

$i^2=-1$ olmak üzere

$i-i^2+i^3-i^4+\ ...\ -i^{128}+i^{129}$ toplamının sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}i-i^2+i^3-i^4+\ ...\ -i^{128}+i^{129}&=i-i^2+i^3-i^4+\ ...\ +i^{125}-i^{126}+i^{127}-i^{128}+i^{129}\\&=i-i^2+i^3-i^4+\ ...\ +i^{4.31+1}-i^{4.31+2}+i^{4.31+3}-i^{4.31+4}+i^{4.32+1}\\&=i-i^2+i^3-i^4+\ ...\ +i-i^2+i^3-i^4+i\\&=\underbrace{i-(-1)+(-i)-1}_{0}+\ ...+\underbrace{i-(-1)+(-i)-1}_{0}+i\\&=i \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Sıra Sizde

SORU

$i^2=-1$ olmak üzere

$i+i^2+i^3+i^4+\ ...\ +i^{128}$ toplamının sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

5. ÖRNEK

$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}\cdot\ldots\cdot\sqrt{-43}$ çarpımının sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$i^2=-1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3}\cdot\ldots\cdot\sqrt{-43} &= \sqrt{(-1)\cdot 1}\cdot\sqrt{(-1)\cdot 2}\cdot\sqrt{(-1)\cdot 3}\cdot\ldots\cdot\sqrt{(-1)\cdot 43}\\ &= \sqrt{i^2\cdot 1}\cdot\sqrt{i^2\cdot 2}\cdot\sqrt{i^2\cdot 3}\cdot\ldots\cdot\sqrt{i^2\cdot 43}\\ &= i\sqrt{1}\cdot i\sqrt{2}\cdot i\sqrt{3}\cdot\ldots\cdot i\sqrt{43}\\ &= i^{43}\cdot\sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 43}\\ &= i^{4\cdot 10+3}\cdot\sqrt{43!}\\ &= i^3\cdot\sqrt{43!}\\ &= -i\cdot\sqrt{43!} \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Tanım

$a,b\in\mathbb{R}$ ve i sanal sayı birimi olmak üzere
$z=a+ib$ biçimindeki sayılara **karmaşık** (kompleks) **sayı** denir. Karmaşık sayılar kümesi $\mathbb{C}$ ile gösterilir.
$\mathbb{C}=\{z \mid z=a+ib \text{ ve } a,b\in\mathbb{R}\}$ olarak gösterilir.

$z=a+ib$ karmaşık sayısında a sayısına karmaşık sayının **gerçek kısmı** denir ve $\mathrm{Re}(z)=a$ biçiminde gösterilir.

$z=a+ib$ karmaşık sayısında b sayısına karmaşık sayının **sanal** (imajiner) **kısmı** denir ve $\mathrm{Im}(z)=b$ biçiminde gösterilir.

$0=0+0\cdot i,\ 6=6+0\cdot i,\ -7=-7+0\cdot i,\ \frac{3}{2}=\frac{3}{2}+0\cdot i,\ -\sqrt{5}=-\sqrt{5}+0\cdot i$
olduğundan bütün gerçek sayılar aynı zamanda karmaşık sayıdır.
Bu durumda $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$ ve $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$ olur.

6. ÖRNEK

Aşağıdaki sayıların gerçek ve sanal kısımlarını bulunuz.

a) $z_1=4+3i$	b) $z_2=-4-i\sqrt{3}$	c) $z_3=5$	ç) $z_4=3i$	d) $z_5=0$	e) $z_6=\frac{9+i}{4}$

ÇÖZÜM

a)	$z_1=4+3i$ karmaşık sayısının gerçek kısmı $\mathrm{Re}(z_1)=4$, sanal kısmı $\mathrm{Im}(z_1)=3$
b)	$z_2=-4-i\sqrt{3}$ karmaşık sayısının gerçek kısmı $\mathrm{Re}(z_2)=-4$, sanal kısmı $\mathrm{Im}(z_2)=-\sqrt{3}$
c)	$z_3=5$ karmaşık sayısının gerçek kısmı $\mathrm{Re}(z_3)=5$, sanal kısmı $\mathrm{Im}(z_3)=0$
ç)	$z_4=3i$ karmaşık sayısının gerçek kısmı $\mathrm{Re}(z_4)=0$, sanal kısmı $\mathrm{Im}(z_4)=3$
d)	$z_5=0$ karmaşık sayısının gerçek kısmı $\mathrm{Re}(z_5)=0$, sanal kısmı $\mathrm{Im}(z_5)=0$
e)	$z_6=\frac{9+i}{4}=\frac{9}{4}+\frac{1}{4}i$ karmaşık sayısının gerçek kısmı $\mathrm{Re}(z_6)=\frac{9}{4}$, sanal kısmı $\mathrm{Im}(z_6)=\frac{1}{4}$

bulunur.

Tanım

$z_1 = a + ib$ ve $z_2 = c + id$ karmaşık sayıları eşit ise sayıların gerçek ve sanal kısımları birbirine eşittir.

Yani $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c$ ve $b = d$ olur.

7. ÖRNEK

$z_1 = 4 - xi$ ve $z_2 = y + 5i$ karmaşık sayıları eşit olduğuna göre $x^2 + y^2$ toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$z_1 = z_2$ ise $4 - xi = y + 5i$ yazılır. Buradan

$4 = y$ ve $-x = 5, x = -5$ olur.

$$x^2 + y^2 = (-5)^2 + 4^2$$
$$= 25 + 16$$
$$= 41 \text{ bulunur.}$$

8. ÖRNEK

i sanal sayı birimi olmak üzere

$z = \dfrac{m + 2 + i(m-1)}{3}$ karmaşık sayısının sanal kısmı 2 olduğuna göre gerçek kısmını bulunuz.

ÇÖZÜM

$z = \dfrac{m + 2 + i(m-1)}{3} = \dfrac{m+2}{3} + i\dfrac{m-1}{3}$ yazılırsa

$\operatorname{Re}(z) = \dfrac{m+2}{3}$ ve $\operatorname{Im}(z) = \dfrac{m-1}{3}$ olur.

$\operatorname{Im}(z) = 2$ olduğundan $\dfrac{m-1}{3} = 2 \Rightarrow m - 1 = 6$

$m = 7$ olur.

$\operatorname{Re}(z) = \dfrac{m+2}{3}$ olduğundan $\operatorname{Re}(z) = \dfrac{7+2}{3} = \dfrac{9}{3} = 3$ bulunur.

Sıra Sizde

SORU

a) a, b birer gerçek sayı ve $i^2 = -1$ olmak üzere

$z_1 = -2a + 12i$

$z_2 = 4ai + b$

$z_1 = z_2$ olduğuna göre b değerini bulunuz.

b) m, n birer gerçek sayı ve $i^2 = -1$ olmak üzere

$2m - 3 + (3n - 4m)i = 0$ olduğuna göre $m \cdot n$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Tanım

$a, b \in \mathbb{R}$ ve i sanal sayı birimi olmak üzere $z = a + ib$ karmaşık sayısı verildiğinde $a + i(-b)$ sayısına z sayısının **eşleniği** denir ve $\overline{z}$ ile gösterilir. Yani
$z = a + ib \Rightarrow \overline{z} = a - ib$ olur.

9. ÖRNEK

Aşağıda verilen karmaşık sayıların eşleniklerini bulunuz.

a) $z_1 = 4 + 3i$

b) $z_2 = -4 - i\sqrt{3}$

c) $z_3 = 5$

ç) $z_4 = 3i$

d) $z_5 = 0$

e) $z_6 = \dfrac{9+i}{4}$

ÇÖZÜM

a) $z_1 = 4 + 3i$ sayısının eşleniği $\overline{z_1} = 4 - 3i$

b) $z_2 = -4 - i\sqrt{3}$ sayısının eşleniği $\overline{z_2} = -4 + i\sqrt{3}$

c) $z_3 = 5$ sayısının eşleniği $\overline{z_3} = 5$

ç) $z_4 = 3i$ sayısının eşleniği $\overline{z_4} = -3i$

d) $z_5 = 0$ sayısının eşleniği $\overline{z_5} = 0$

e) $z_6 = \dfrac{9+i}{4} = \dfrac{9}{4} + \dfrac{1}{4}i$ sayısının eşleniği $\overline{z_6} = \dfrac{9}{4} - \dfrac{1}{4}i = \dfrac{9-i}{4}$ olur.

10. ÖRNEK

i sanal sayı birimi olmak üzere
$z = 2\overline{z} + 3 - 12i$ ise z karmaşık sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

$z = a + ib$ olarak seçilirse $\overline{z} = a - ib$ olur.
$a + ib = 2 \cdot (a - ib) + 3 - 12i$
$a + ib = 2a - 2bi + 3 - 12i$
$-a + 3bi = 3 - 12i \Rightarrow -a = 3$ ve $3b = -12$
$a = -3 \qquad b = -4$ bulunur. Bu durumda $z = -3 - 4i$ olur.

Sıra Sizde

SORU

x ve y birer gerçek sayı olmak üzere $z = 3y - 3x + (x - y)i + 2i$
karmaşık sayısının eşleniğinin sanal kısmı -3 olduğuna göre gerçek kısmını bulunuz.

ÇÖZÜM

Karmaşık Sayılarda İşlemler

a) Toplama ve Çıkarma İşlemleri

Karmaşık sayılarda toplama veya çıkarma işlemleri yapılırken gerçek kısımlar gerçek kısımlarla, sanal kısımlar da sanal kısımlarla toplanır veya çıkarılır.

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve i sanal sayı birimi olmak üzere $z_1 = a + ib$ ve $z_2 = c + id$ ise

a) $z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$ ve

b) $z_1 - z_2 = (a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$ bulunur.

11. ÖRNEK

$i^2 = -1$ olmak üzere

$z_1 = 5 + 12i$ ve $z_2 = 3 - 4i$ ise $z_1 + z_2$ ve $z_1 - z_2$ işlemlerinin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$z_1 + z_2 = (5 + 12i) + (3 - 4i) = (5 + 3) + i(12 - 4) = 8 + 8i$

$z_1 - z_2 = (5 + 12i) - (3 - 4i) = (5 - 3) + i(12 + 4) = 2 + 16i$ bulunur.

12. ÖRNEK

$i^2 = -1$ olmak üzere

$z_1 = 5 + 4i$, $z_2 = -3i$ ve $z_3 = 4 + i$ ise $z_1 + z_2 + z_3$, $z_1 - z_2 - z_3$ ve $z_1 - z_2 + z_3$ işlemlerinin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &= (5 + 4i) + (-3i) + (4 + i) \\ &= (5 + 0 + 4) + (4 - 3 + 1)i \\ &= 9 + 2i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 - z_3 &= (5 + 4i) - (-3i) - (4 + i) \\ &= (5 - 0 - 4) + (4 + 3 - 1)i \\ &= 1 + 6i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 + z_3 &= (5 + 4i) - (-3i) + (4 + i) \\ &= (5 - 0 + 4) + (4 + 3 + 1)i \\ &= 9 + 8i \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Sıra Sizde

SORU

i sanal sayı birimi olmak üzere $i^{15} + i^7 + i^{2016}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

b) Çarpma İşlemi

Karmaşık sayılarda çarpma işlemi yapılırken çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemleri üzerine dağılma özelliği kullanılır.

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve i sanal sayı birimi olmak üzere $z_1 = a + ib$ ve $z_2 = c + id$ ise

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a + ib) \cdot (c + id) \\ &= a \cdot c + a \cdot id + ib \cdot c + ib \cdot id \\ &= a \cdot c + (a \cdot d + b \cdot c)i + i^2(b \cdot d) \\ &= (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)i \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

13. ÖRNEK

$i^2 = -1$ olmak üzere $z_1 = 2 + i$ ve $z_2 = 1 + 2i$ ise $z_1 \cdot z_2$ ve $z_1 \cdot \overline{z_2}$ işlemlerinin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (2 + i) \cdot (1 + 2i) \\ &= 2 + 4i + i + 2i^2 \\ &= 2 + 5i - 2 \\ &= 5i \text{ olur.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot \overline{z_2} &= (2 + i) \cdot (1 - 2i) \\ &= 2 - 4i + i - 2i^2 \\ &= 2 - 3i + 2 \\ &= 4 - 3i \text{ olur.} \end{aligned}$$

14. ÖRNEK

$i^2 = -1$ ve $z = -2 + 2i$ olmak üzere $z \cdot \overline{z}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$z = -2 + 2i$ ise $\overline{z} = -2 - 2i$ olur.

$$\begin{aligned} z \cdot \overline{z} &= (-2 + 2i) \cdot (-2 - 2i) \\ &= 4 + \cancel{4i} - \cancel{4i} - 4i^2 \\ &= 4 + 4 \\ &= 8 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Sonuç

i sanal sayı birimi ve $z = a + ib$ olmak üzere $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$ olur.

15. ÖRNEK

$i^2 = -1$ olmak üzere

$(3 + 4i)^5 \cdot (3 - 4i)^5$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} (3 + 4i)^5 \cdot (3 - 4i)^5 &= [(3 + 4i) \cdot (3 - 4i)]^5 \\ &= [9 - \cancel{12i} + \cancel{12i} - 16i^2]^5 \\ &= (9 + 16)^5 \\ &= 25^5 \\ &= (5^2)^5 \\ &= 5^{10} \text{ olur.} \end{aligned}$$

16. ÖRNEK

$i^2=-1$ olmak üzere

$(1+i)^6+(1-i)^6$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}(1+i)^6+(1-i)^6&=((1+i)^2)^3+((1-i)^2)^3\\&=(1+2i+i^2)^3+(1-2i+i^2)^3\\&=(1+2i-1)^3+(1-2i-1)\\&=(2i)^3+(-2i)^3\\&=8i^3-8i^3\\&=0 \text{ olur.}\end{aligned}$$

17. ÖRNEK

$i^2=-1$ olmak üzere

$z=3+3i$ olduğuna göre z^8 karmaşık sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}z^8&=(3+3i)^8\\&=[3\cdot(1+i)]^8\\&=3^8\cdot(1+i)^8\\&=3^8\cdot[(1+i)^2]^4\\&=3^8\cdot(1+2i+i^2)^4\\&=3^8\cdot(1+2i-1)^4\\&=3^8\cdot(2i)^4\\&=3^8\cdot2^4\cdot i^4\\&=3^8\cdot2^4 \text{ olur.}\end{aligned}$$

18. ÖRNEK

$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ve $f(z)=i\cdot\overline{z}$ olmak üzere

$\underbrace{(fofof...fof)}_{129\text{ tane}}(1+i)$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(1+i)=i\cdot(1-i)=i-i^2=i+1$

$(fof)(1+i)=f(f(1+i))=f(i+1)=i\cdot(-i+1)=-i^2+i=1+i$

$(fofof)(1+i)=f(f(f(1+i)))=f(1+i)=i\cdot(1-i)=i-i^2=i+1$

....

$\underbrace{(fofof...fof)}_{129\text{ tane}}(1+i)=1+i$ olur.

c) Bölme İşlemi

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve i sanal sayı birimi olmak üzere $z_1 = a + ib$ ve $z_2 = c + id$ ise

$\frac{z_1}{z_2}, z_2 \neq 0$ işlemi, kesrin $\overline{z_2}$ karmaşık sayısı kullanılarak genişletilmesiyle yapılır. Yani

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+ib)}{(c+id)} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}$$

$$= \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2} \text{ olur.}$$

19. ÖRNEK

$i^2 = -1$ olmak üzere $\frac{2+i}{1-i}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{2+i}{1-i} = \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+2i+i+i^2}{1-i^2} = \frac{2+3i-1}{1-(-1)}$$

$$= \frac{1+3i}{2} \text{ olur.}$$

20. ÖRNEK

$i^2 = -1$ olmak üzere $z = 3 + 4i$ olduğuna göre $\frac{1}{z}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3+4i} = \frac{1\cdot(3-4i)}{(3+4i)\cdot(3-4i)} = \frac{3-4i}{3^2+4^2}$$

$$= \frac{3-4i}{25} \text{ bulunur.}$$

21. ÖRNEK

$i^2 = -1$ olmak üzere $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8 = \left(\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\right)^8 = \left(\frac{-\cancel{2}i}{\cancel{2}}\right)^8$$

$$= (-i)^8$$

$$= 1 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

SORU

$i^2 = -1$ olmak üzere, $\left(1 + \frac{2i}{1-i}\right)^{10}$ ifadesinin değerini bulunuz.

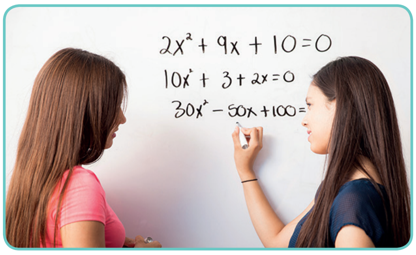
ÇÖZÜM

Karmaşık Sayılarda İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Çözümü

$ax^2+bx+c=0$ denkleminin çözümünde $\Delta=b^2-4ac<0$ ise denklemin gerçek kökünün olmadığı ifade edilmişti.

$ax^2+bx+c=0$ denkleminde $\Delta=b^2-4ac<0$ ise denklemin karmaşık sayılar kümesinde çözümü vardır. Denklemin kökleri

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ veya $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ olur.



22. ÖRNEK

$x^2+2x+4=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2+2x+4=0$ denkleminde $a=1, b=2$ ve $c=4$ olur.

$$\begin{aligned}\Delta&=b^2-4ac\\&=2^2-4\cdot1\cdot4\\&=4-16\\&=-12<0\end{aligned}$$ olduğundan denklemin karmaşık kökü vardır. Bu kökler

$$\begin{aligned}x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}&=\frac{-2+\sqrt{-12}}{2\cdot1}\\&=\frac{-2+2\sqrt{3}i}{2}\\&=-1+\sqrt{3}i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}&=\frac{-2-\sqrt{-12}}{2\cdot1}\\&=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{2}\\&=-1-\sqrt{3}i\end{aligned}$$ olarak bulunur.

$Ç=\{-1+\sqrt{3}i,-1-\sqrt{3}i\}$ olur.

Sonuç

i sanal sayı birimi olmak üzere gerçek katsayılı $ax^2+bx+c=0$ denkleminin bir kökü $m+ni$ ise diğer kökü bu kökün eşleniği olan $m-ni$ dir.

23. ÖRNEK

$x^2-2x+5=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot1\cdot5=4-20=-16<0$ olduğundan denklemin karmaşık kökü vardır.

$$\begin{aligned}x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}&=\frac{-(-2)+\sqrt{-16}}{2\cdot1}\\&=\frac{2+4i}{2}=1+2i\end{aligned}$$ olur.

Denklemin ikinci kökü bu kökün eşleniği olan $x_2=1-2i$ olur. Bu durumda $Ç=\{1+2i,1-2i\}$ olur.

24. ÖRNEK

$x^2 - x + (-3 + 5m) = 0$ denkleminin sanal kökü olduğuna göre m nin alabileceği en küçük pozitif iki tam sayının çarpımını bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2 - x + (-3 + 5m) = 0$ denkleminin gerçek kökü yoksa $\Delta < 0$ olur.

$$b^2 - 4ac < 0$$
$$(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3 + 5m) < 0$$
$$1 + 12 - 20m < 0$$
$$13 - 20m < 0$$
$$13 < 20m$$
$$m > \frac{13}{20} \text{ bulunur.}$$

m nin alabileceği en küçük iki tam sayı 1 ve 2 olduğundan bu değerlerin çarpımı $1 \cdot 2 = 2$ olur.

25. ÖRNEK

$2x^2 - 3x + 6 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$2x^2 - 3x + 6 = 0$ denkleminde $a = 2,\ b = -3$ ve $c = 6$ dır. O hâlde

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 9 - 48 = -39 < 0$ olduğundan karmaşık kök vardır.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) + \sqrt{-39}}{2 \cdot 2} = \frac{3 + i\sqrt{39}}{4} = \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{39}}{4}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) - \sqrt{-39}}{2 \cdot 2} = \frac{3 - i\sqrt{39}}{4} = \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{39}}{4} \text{ kökleri bulunur.}$$

$$Ç = \left\{\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{39}}{4}, \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{39}}{4}\right\} \text{ olur.}$$

Sıra Sizde

SORU

k bir gerçek sayı olmak üzere

$5x^2 - kx + 2 = 0$ denkleminin köklerinden biri $x_1 = 1 + 2i$ olduğuna göre k değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

3. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Kökleri ile Katsayıları Arasındaki İlişkiler

$ax^2+bx+c=0$ denkleminin kökleri $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ve $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ olmak üzere

<table>
<tr><td>1. Kökler Toplamı</td><td colspan="2">$x_1+x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-b\cancel{+\sqrt{\Delta}}-b\cancel{-\sqrt{\Delta}}}{2a}=\dfrac{-\cancel{2}b}{\cancel{2}a}=-\dfrac{b}{a}$
$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ olur.</td></tr>
<tr><td>2. Kökler Çarpımı</td><td colspan="2">$x_1\cdot x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\cdot\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{(-b+\sqrt{\Delta})\cdot(-b-\sqrt{\Delta})}{2a\cdot 2a}=\dfrac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}$
$=\dfrac{b^2-\Delta}{4a^2}=\dfrac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\dfrac{\cancel{b^2}-\cancel{b^2}+4ac}{4a^2}=\dfrac{\cancel{4}\cancel{a}c}{\cancel{4}a^{\cancel{2}}}=\dfrac{c}{a}$
$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$ olur.</td></tr>
<tr><td>3. Kökler Farkının Mutlak Değeri</td><td colspan="2">$|x_1-x_2|=\left|\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}-\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right|$
$=\left|\dfrac{\cancel{-b}+\sqrt{\Delta}\cancel{+b}+\sqrt{\Delta}}{2a}\right|$
$=\left|\dfrac{\cancel{2}\sqrt{\Delta}}{\cancel{2}a}\right|$
$=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$
$|x_1-x_2|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ olur.</td></tr>
<tr><td>4. Köklerin Çarpmaya Göre Terslerinin Toplamı</td><td colspan="2">$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=\dfrac{-\frac{b}{\cancel{a}}}{\frac{c}{\cancel{a}}}=-\dfrac{b}{c}$
$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=-\dfrac{b}{c}$ olur.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5. Köklerin Kareleri ve Küpleri Toplamı</td><td>a) Köklerin Kareleri Toplamı</td><td>b) Köklerin Küpleri Toplamı</td></tr>
<tr><td>$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2\cdot(x_1\cdot x_2)$
$=\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2-2\cdot\dfrac{c}{a}$
$=\dfrac{b^2}{a^2}-2\cdot\dfrac{c}{a}$
$=\dfrac{b^2-2ac}{a^2}$ olur.</td><td>$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1\cdot x_2\cdot(x_1+x_2)$
$=\left(-\dfrac{b}{a}\right)^3-3\cdot\dfrac{c}{a}\cdot\left(-\dfrac{b}{a}\right)$
$=-\dfrac{b^3}{a^3}+\dfrac{3bc}{a^2}$
$=\dfrac{3abc-b^3}{a^3}$ olur.</td></tr>
</table>

1. ÖRNEK

$\frac{-x^2}{2}+\frac{3}{4}x+\frac{2}{5}=0$ denkleminin kökler toplamı ve kökler çarpımını bulunuz.

ÇÖZÜM

$\frac{-x^2}{2}+\frac{3}{4}x+\frac{2}{5}=0$ denkleminde $a=-\frac{1}{2}, b=\frac{3}{4}$ ve $c=\frac{2}{5}$ tir. Denklemin

Kökler toplamı: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$

$$=-\frac{\frac{3}{4}}{\frac{-1}{2}}$$

$$=\frac{3}{2}$$

Kökler çarpımı: $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{-1}{2}}=-\frac{4}{5}$ olur.

2. ÖRNEK

$x^2+bx+2b=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere
$x_1+x_2+x_1\cdot x_2=9$ olduğuna göre b değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2+bx+2b=0$ denkleminde

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{b}{1}=-b$ ve $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{2b}{1}=2b$ olur.

$(x_1+x_2)+(x_1\cdot x_2)=9$

$-b+2b=9$

$b=9$ bulunur.

3. ÖRNEK

$x^2-8x+4=0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 olduğuna göre $(3x_1-1)\cdot(3x_2-1)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(3x_1-1)\cdot(3x_2-1)$ ifadesi düzenlenirse

$(3x_1-1)\cdot(3x_2-1)=9\cdot x_1\cdot x_2-3x_1-3x_2+1$

$=9\cdot x_1\cdot x_2-3\cdot(x_1+x_2)+1$ olur.

$x^2-8x+4=0$ denkleminde

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-8}{1}=8$ ve $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{4}{1}=4$ olur. Bulunan değerler yerlerine yazılırsa

$9\cdot x_1\cdot x_2-3\cdot(x_1+x_2)+1=9\cdot 4-3\cdot 8+1$

$=36-24+1$

$=13$ olur.

4. ÖRNEK

$x^2+4x+6=0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 olmak üzere $x_1^2+4x_1+\dfrac{12}{x_2^2+4x_2}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2+4x+6=0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 ise bu kökler denklemi sağlar.

$x_1^2+4x_1+6=0$ ise $x_1^2+4x_1=-6$ bulunur. Benzer düşünceyle

$x_2^2+4x_2+6=0$ ise $x_2^2+4x_2=-6$ eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler verilen ifadede yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} x_1^2+4x_1+\frac{12}{x_2^2+4x_2} &= -6+\frac{12}{-6} \\ &= -6-2 \\ &= -8 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

5. ÖRNEK

$x^2+bx+32=0$ denkleminin kökleri x_1, x_2 olmak üzere $x_1^2 \cdot x_2=64$ olduğuna göre b değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2+bx+32=0$ denkleminde kökler çarpımı

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \frac{c}{a} \\ &= \frac{32}{1}=32 \text{ olur.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^2 \cdot x_2 = 64 \text{ ise } x_1 \cdot (x_1 \cdot x_2) &= 64 \\ x_1 \cdot 32 &= 64 \\ x_1 &= 2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Bu değer, denklemin kökü olduğundan denklemi sağlar.

$$\begin{aligned} 2^2+b\cdot 2+32 &= 0 \\ 4+2b+32 &= 0 \\ 2b &= -36 \\ b &= -18 \text{ olur.} \end{aligned}$$

6. ÖRNEK

$x^2-3x-2=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

Buna göre $\dfrac{x_1^2-2}{x_2}+\dfrac{x_2^2-2}{x_1}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Kökler toplamı: $x_1+x_2=-\dfrac{(-3)}{1}=3$

Kökler çarpımı: $x_1 \cdot x_2=\dfrac{(-2)}{1}=-2$ dir. Bu değerler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{x_1^2-2}{x_2}+\frac{x_2^2-2}{x_1} &= \frac{x_1^3-2x_1+x_2^3-2x_2}{x_1\cdot x_2}=\frac{x_1^3+x_2^3-2(x_1+x_2)}{x_1\cdot x_2} \\ &= \frac{(x_1+x_2)^3-3x_1\cdot x_2(x_1+x_2)-2(x_1+x_2)}{x_1\cdot x_2} \\ &= \frac{(3)^3-3\cdot(-2)\cdot 3-2\cdot 3}{-2} \\ &= \frac{27+18-6}{-2} \\ &= -\frac{39}{2} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

7. ÖRNEK

$x^2+6x-3=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. Buna göre $x_1^2-6x_2+6$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2+6x-3=0$ denklemin bir kökü x_1 olduğundan denklemi sağlar. Bu durumda
$x_1^2+6x_1-3=0 \Rightarrow x_1^2=-6x_1+3$ elde edilir. Bu eşitlik, verilen ifadede yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
x_1^2-6x_2+6 &= -6x_1+3-6x_2+6 \\
&= -6\underbrace{(x_1+x_2)}_{-\frac{b}{a}}+9 \\
&= -6\cdot(-6)+9 \\
&= 36+9 \\
&= 45 \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

8. ÖRNEK

$x^2-136x+16=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre $\sqrt[4]{x_1}+\sqrt[4]{x_2}$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Denklemde kökler toplamı $x_1+x_2=136$ ve kökler çarpımı $x_1\cdot x_2=16$ olur.

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)^2 &= x_1+2\cdot\sqrt{x_1\cdot x_2}+x_2 \\
&= x_1+x_2+2\cdot\sqrt{x_1\cdot x_2} \\
&= 136+8 \\
&= 144 \text{ olduğundan} \\
\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2} &= 12 \text{ bulunur.} \\
\left(\sqrt[4]{x_1}+\sqrt[4]{x_2}\right)^2 &= \sqrt{x_1}+2\cdot\sqrt[4]{x_1\cdot x_2}+\sqrt{x_2} \\
&= \underbrace{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}_{12}+2\cdot\sqrt[4]{x_1\cdot x_2} \\
&= 12+2\cdot\sqrt[4]{16} \\
&= 12+2\cdot\sqrt[4]{2^4} \\
&= 12+4 \\
&= 16 \text{ olur. Buradan}
\end{aligned}$$

$$\left(\sqrt[4]{x_1}+\sqrt[4]{x_2}\right)^2=16 \Rightarrow \sqrt[4]{x_1}+\sqrt[4]{x_2}=4 \text{ bulunur.}$$

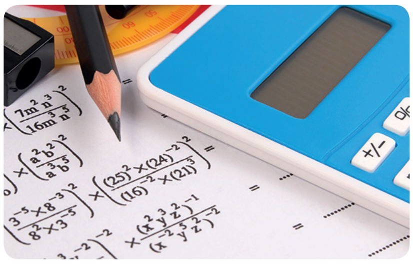
Sıra Sizde

SORU

$x^2+(2-x_1)x+x_2+8=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre $x_1^2+x_2^2$ ve $x_1^3+x_2^3$ değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Kökleri Verilen İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemin Yazılması



$a \neq 0$ olmak üzere $ax^2+bx+c=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun.

$\dfrac{ax^2+bx+c}{a}=\dfrac{0}{a} \Rightarrow \dfrac{ax^2}{a}+\dfrac{bx}{a}+\dfrac{c}{a}=0$

$x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0$

$x^2-\left(-\dfrac{b}{a}\right)x+\dfrac{c}{a}$ bulunur.

$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ ve $x_1 \cdot x_2=\dfrac{c}{a}$ değerleri yerlerine yazılırsa

$x^2-(x_1+x_2)\cdot x+(x_1 \cdot x_2)=0$ elde edilir.

9. ÖRNEK

Kökleri $x_1=2$ ve $x_2=3$ olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi bulunuz.

ÇÖZÜM

Aranan denklemin

Kökler toplamı: $x_1+x_2=2+3=5$

Kökler çarpımı: $x_1 \cdot x_2=2 \cdot 3=6$ olur.

Kökleri x_1 ve x_2 olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem

$x^2-(x_1+x_2)\cdot x+(x_1 \cdot x_2)=0$ şeklindedir. Buna göre kökleri 2 ve 3 olan ikinci dereceden denklem

$x^2-5x+6=0$ olur.

10. ÖRNEK

Köklerinden biri $2-\sqrt{3}$ olan rasyonel katsayılı ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi bulunuz.

ÇÖZÜM

İkinci dereceden bir bilinmeyenli rasyonel katsayılı denklemin köklerinden biri $2-\sqrt{3}$ ise diğer kök bu sayının eşleniği olan $2+\sqrt{3}$ olur. Bu durumda aranan denklemin

Kökler toplamı: $x_1+x_2=2\cancel{-\sqrt{3}}+2\cancel{+\sqrt{3}}=4$ ve

Kökler çarpımı: $x_1 \cdot x_2=(2-\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3})$

$=4+\cancel{2\sqrt{3}}-\cancel{2\sqrt{3}}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$

$=4-3$

$=1$

$x^2-4x+1=0$ bulunur.

11. ÖRNEK

Köklerinden biri $2+3i$ olan gerçek katsayılı ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi bulunuz.

ÇÖZÜM

İkinci dereceden gerçek katsayılı bir bilinmeyenli denklemin karmaşık köklerinden biri $2+3i$ ise denklemin diğer kökü bu karmaşık sayının eşleniği olan $2-3i$ olur. Bu durumda aranan denklemin

Kökler toplamı: $x_1+x_2=2+3i+2-3i=4$ olur.
Kökler çarpımı: $x_1\cdot x_2=(2+3i)\cdot(2-3i)=4-6i+6i-9i^2=4+9=13$ olarak bulunur.

Buna göre kökleri $2+3i$ ve $2-3i$ olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem
$x^2-4x+13=0$ şeklinde bulunur.

12. ÖRNEK

$5x^2-4x-3=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. Kökleri $\frac{x_1}{2}+1$ ve $\frac{x_2}{2}+1$ olan ikinci dereceden denklemi bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen denklemde $x_1+x_2=-\frac{(-4)}{5}=\frac{4}{5}$ ve $x_1\cdot x_2=-\frac{3}{5}$ bulunur.
Aranan denklemin
Kökler toplamı: $\left(\frac{x_1}{2}+1\right)+\left(\frac{x_2}{2}+1\right)=\frac{x_1+x_2}{2}+2$ ve

Kökler çarpımı: $\left(\frac{x_1}{2}+1\right)\cdot\left(\frac{x_2}{2}+1\right)=\frac{x_1}{2}\cdot\frac{x_2}{2}+\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{2}+1=\frac{x_1\cdot x_2}{4}+\frac{x_1+x_2}{2}+1$ olur.

Buna göre aranan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem

$$x^2-\left(\frac{x_1+x_2}{2}+2\right)\cdot x+\left(\frac{x_1\cdot x_2}{4}+\frac{x_1+x_2}{2}+1\right)=0$$

$$x^2-\left(\frac{\frac{4}{5}}{2}+2\right)\cdot x+\left(\frac{-\frac{3}{5}}{4}+\frac{\frac{4}{5}}{2}+1\right)=0$$

$$x^2-\frac{12}{5}x+\frac{5}{4}=0 \text{ olarak bulunur.}$$

Sıra Sizde

SORU

$x^2+mx+k=0$ denkleminde $m,k\in\mathbb{Q}$ ve $x_1=-1+\sqrt{3}$ ise $m+k$ toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

ALIŞTIRMALAR-2

1. $z_1 = 2 + 3i, z_2 = -5i$ ve $z_3 = 4 + i$ olduğuna göre $2z_1 + z_2 - 5z_3$ işleminin sonucunu bulunuz.

2. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$f(x) = x^2 + 2x$ olduğuna göre $(fof)(1 - i)$ ifadesinin eşitini bulunuz.

3. $i^2 = -1$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere
$\dfrac{i^{8n-2} \cdot i^{24n+3}}{i^{48n+47} \cdot i^{16n-17}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

4. $i^2 = -1$ olmak üzere
$z_1 = 6 + 4i$, $z_2 = 5 - 2i$ karmaşık sayıları veriliyor.
Buna göre $\text{Im}(2z_1 - 3z_2)$ değerini bulunuz.

5. $i^2 = -1$ olmak üzere
$4z - 15i = 2\overline{z} + 2$ veriliyor.
Buna göre z karmaşık sayısını bulunuz.

6. $z \cdot (2 - 3i) = 3 + 4i$ olduğuna göre z karmaşık sayısını bulunuz.

7. $i^2 = -1$ olmak üzere
$z = 3 + 2i$ veriliyor.
Buna göre **z** karmaşık sayısının eşleniğinin çarpma işlemine göre tersinin gerçek kısmını bulunuz.

8. $x^2 + 5x + 3 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre kökleri $x_1 + 2$ ve $x_2 + 2$ olan ikinci derece denklemini bulunuz.

9. $x^2+4x+13=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

10. $x^2-4x+5=0$ denklemin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre $\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}$ değerini bulunuz.

11. $x^2-12x-6=0$ denklemin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre $(4x_1-1)(4x_2-1)$ değerini bulunuz.

12. $3x^2-15x+8=0$ denklemin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre $x_1^2 \cdot x_2+x_1 \cdot x_2^2$ toplamını bulunuz.

13. $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2+bx+c=0$ denklemin kökleri x_1 ve x_2 ise $|x_1^2-x_2^2|=\frac{|b| \cdot \sqrt{\Delta}}{a^2}$ olduğunu gösteriniz.

14. Kökleri $\frac{3}{4}$ ve $\frac{5}{2}$ olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi bulunuz.

15. Köklerinden biri $x_1=-3+i$ olan gerçek katsayılı ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi bulunuz.

16. $x^2-12x-6=0$ denklemin köklerinin birer fazlasını kök kabul eden ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi bulunuz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A) 1-4. sorularda boş bırakılan yerleri uygun olacak şekilde doldurunuz.

1. $a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ ikinci dereceden bir bilinmeyenli denkleminin diskriminantı $\Delta =$ .... ile hesaplanır.

2. $a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi tam kare ise denklemin çözüm kümesi Ç = {.........} olur.

3. $a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ ikinci dereceden bir bilinmeyenli denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olmak üzere $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 =$ ...... olur.

4. Kat sayıları rasyonel olan $ax^2 + bx + c = 0$ ikinci dereceden bir bilinmeyenli denkleminin köklerinden biri $x_1 = p - \sqrt{q}$ ise diğer kökü $x_2 =$ .... olur.

B) 5. soruda numaralarla verilen ifadeleri, harf ile verilen ifadelerle doğru şekilde eşleştiriniz.

5.

$(a+2)x^3 - 4x^{-b+3} + 5 = 0$ ifadesi, x e bağlı ikinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem olduğuna göre $a \cdot b$	1	a	$x^2 - 2x + 15 = 0$
$x^2 - 3x + 3k + 1 = 0$ denkleminin gerçek kökü olmadığına göre k nin alabileceği en küçük iki tam sayının toplamı	2	b	3
$3x^2 - 10x + 2 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre $(3x_1 + 2)(3x_2 + 2)$ çarpımının değeri	3	c	-2
Kökleri -3 ve 5 olan ikinci derceden bir bilinmeyenli denklem	4	ç	30
		d	$x^2 - 2x - 15 = 0$
		e	12

C) 6-12. açık uçlu soruların cevaplarını boş bırakılan alanlara yazınız.

6. $x^{|m^2-2|} + 2x + 3 = 0$ denklemi ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olduğuna göre m nin alabileceği değerler toplamını bulunuz.

7. $2x^2 - 7x - 3m^2 + 5 = 0$ denkleminin bir kökü $x = -2$ olduğuna göre m nin alabileceği değerler çarpımını bulunuz.

8. $x^2 - (m-2)x + 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$x_1 + \frac{1}{x_2} = -5$ olduğuna göre m değerini bulunuz.

9. $x^2 - 7x - 2 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.
Buna göre
$x_1^3 + 4x_1 - x_1 \cdot x_2^2 - 7x_1^2 + 4x_2 + 3$
toplamının sonucunu bulunuz.

10. $3x^2 - 2x + a + 1 = 0$ denkleminin iki farklı gerçek kökü olduğuna göre a nın değer aralığını bulunuz.

11. $x^2 - 4x + m + 2 = 0$ denkleminin birbirine eşit iki gerçek kökü olduğuna göre m nin kaç olduğunu bulunuz.

12. $(2-\sqrt{3})x^2 + (\sqrt{3}+1)x - 3 = 0$ denkleminin kökleri m ve n dir.

$$\left.\begin{aligned} m+n &= K \\ m\cdot n &= L \\ \frac{1}{m}+\frac{1}{n} &= N \end{aligned}\right\}$$ olduğuna göre $N\cdot L + K$ işleminin sonucunu bulunuz.

Ç) 13-30. çoktan seçmeli soruları okuyunuz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

13. $x^2 + 4x + |a-1| = 0$ denkleminin iki gerçek kökü olduğuna göre a nın değer aralığı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-3,5)$
B) $[-3,5)$
C) $(-3,5]$
D) $[-3,5]$
E) $(3,5)$

14. $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ve $x_1 \neq 0$ olmak üzere $x_1x^2 + (x_1+x_2)x + x_2 = 0$ ikinci dereceden denklemin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-1,1\}$
B) $\{-2,1\}$
C) $\left\{-1, \frac{x_1}{x_2}\right\}$
D) $\left\{-\frac{x_2}{x_1}\right\}$
E) $\left\{-1, -\frac{x_2}{x_1}\right\}$

15. $3x^2 - 6x + a = 0$ denkleminin hangi aralıktaki a değerleri için gerçek kökü yoktur?

A) $a < 3$
B) $a > 2$
C) $3 < a < 6$
D) $a > 3$
E) $a < 2$

16. $i^2=-1$ olmak üzere $z+(4-i)\overline{z}=12-6i$ olduğuna göre $\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(\overline{z})$ işleminin sonucu kaçtır?

A) $\frac{2}{3}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{9}{4}$ E) 3

17. $2^{3x^2-(3+\sqrt{2})x+\sqrt{2}}=1$ denkleminin köklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$ D) 2 E) 3

18. $x^2-4\sqrt{5}x-5=0$ denklemin kökleri x_1 ve x_2 dir.

Buna göre $|x_1-x_2|$ değeri kaçtır?

A) $2\sqrt{15}$ B) $3\sqrt{15}$ C) $4\sqrt{15}$ D) 9 E) 10

19. $m\neq\frac{2}{3}$ olmak üzere

$(3m-2)x^2-(2m+1)x+3m^2+4m-4=0$

denkleminin kökler çarpımı 3 olduğuna göre m kaçtır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

20. $x^2+mx+2\sqrt{2}=0$ denklemin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$x_1^3\cdot x_2^2=16$ olduğuna göre $m+2$ kaçtır?

A) -2 B) $-\sqrt{2}$ C) 0 D) $\sqrt{2}$ E) $2+\sqrt{2}$

21. $x^2-(x_1+8)x+2x_2=0$ denklemin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre denklemin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-2,8\}$ B) $\{2,-8\}$ C) $\{-2,-8\}$ D) $\{2,8\}$ E) $\{2,4\}$

22. $x^2+4x+8=0$ denklemin kökleri x_1 ve x_2 olduğuna göre

$x_1^2+4x_1+\dfrac{24}{x_2^2+4x_2}$ işleminin sonucu kaçtır?

A) -14 B) -12 C) -11 D) 11 E) 12

23. $z=i^{-2017}\cdot(2+i)-i^{2017}(2i-1)$ karmaşık sayısının gerçek kısmı kaçtır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

24. Bir kökü $2+3i$ olan gerçek katsayılı ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2-4x-13=0$
B) $x^2+4x-13=0$
C) $x^2+4x+13=0$
D) $x^2-4x-5=0$
E) $x^2-4x+13=0$

25. $x^2-(m+3)x+8=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$x_1\cdot x_2^2+x_1^2\cdot x_2=32$ olduğuna göre m kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3

26. $x^2-(m+6)x+36=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.
Kökleri arasında $x_1=3x_2$ bağıntısı olduğuna göre m değeri aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $-8\sqrt{3}-6$
B) $-6\sqrt{3}-8$
C) $-8\sqrt{3}+6$
D) $8\sqrt{3}+6$
E) $6\sqrt{3}+8$

27. $2x^2-x-2=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. Buna göre kökleri $2x^2-x-2=0$ denkleminin köklerinin çarpmaya göre terslerinin 1 fazlası olan ikinci dereceden denklem aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2x^2+3x+1=0$
B) $2x^2-2x-1=0$
C) $3x^2+2x-1=0$
D) $2x^2+3x-1=0$
E) $2x^2-3x-1=0$

28. $x^2 = x + 3$ olduğuna göre
$x^4 - 6x + 7$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x + 19$ B) $x + 5$ C) $x + 12$ D) 19 E) 5

29. $x^2 + 3x - 1 = 0$ denkleminin köklerinden biri x_1 dir.
Buna göre $(x_1^2 + x_1 - 6) \cdot (x_1^2 + 5x_1)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) -12 B) -9 C) 0 D) 9 E) 12

30. $px^2 + qx + r = 0$ denkleminin köklerinin aritmetik ortalaması, geometrik ortalamasına eşit ise denklemin diskriminatının değeri kaçtır?

A) -12 B) 0 C) 4 D) 9 E) 12

31. $k \in \mathbb{R}$, $x^2 - (k^2 - 9)x - 2k - 19 = 0$ denklemi ile ilgili olarak

I. $k = 3$ ise denklemin kökler toplamı 0 dır.
II. $k = 0$ ise denklemin diskriminantı 0 dan küçüktür.
III. $k = -3$ ise denklemin kökleri rasyonel sayıdır.
IV. $k = -1$ ise denklemin diskriminantı tam kare sayıdır.

ifadelerinden hangisi veya hangileri <u>yanlıştır</u>?

A) Yalnız I
B) Yalnız II
C) I ve II
D) III ve IV
E) II, III ve IV

32. $(x^2 + x - 1)^{x^2 - 5x - 14} = 1$ denkleminin çözüm kümesi kaç elemanlıdır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

33. x e bağlı ikinci dereceden
$x^2 - 3ax - 4a^2 = 0$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-a, 4a\}$ B) $\{a, 4a\}$ C) $\{-a, -4a\}$ D) $\{4a\}$ E) $\{a, -4a\}$

D) 34-36. soruları aşağıda verilen ortak metne göre cevaplandırınız.

Bir futbol müsabakasında yapılan serbest vuruşta topun yerden yüksekliği h (metre), yatay pozisyonda aldığı mesafe d (metre) olmak üzere h ve d arasındaki ilişki

$h = -\frac{1}{75}d^2 + \frac{2d}{5}$ biçimindedir. Buna göre

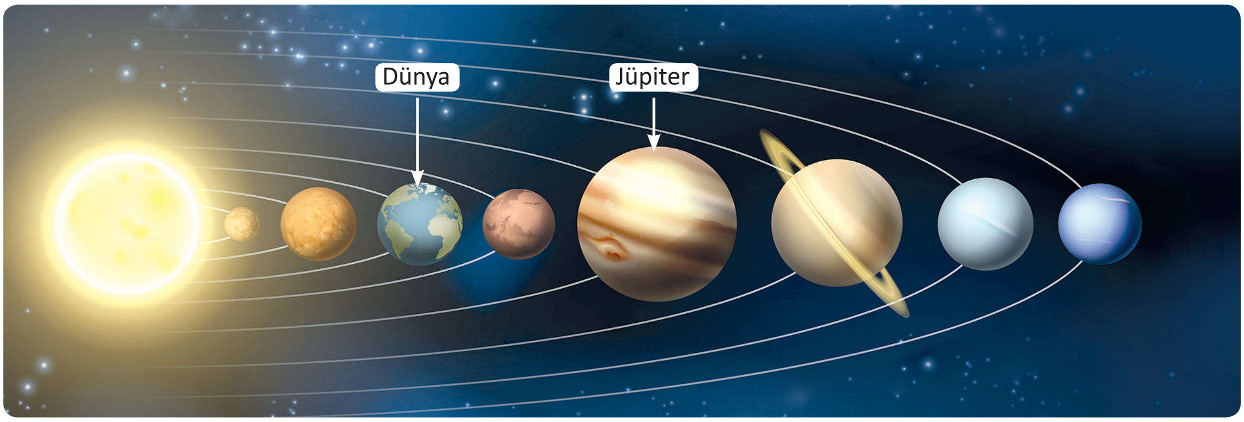
34. Serbest vuruş yapıldıktan sonra top yere çarptığı ilk anda yatay pozisyonda vuruşu gerçekleştiren futbolcudan ne kadar uzaklıkta olur?

35. Top, ikinci defa yerden 2 metre yükselikte bulunduğu anda yatay pozisyonda vuruşu gerçekleştiren futbolcuya uzaklığı ne kadar olur?

36. Serbest vuruş, kaleye 25 metre uzaklıktan kullanılmaktadır. Top 9,15 metre mesafeyle kurulan oyuncu barajının üzerinden geçerken topun yerden yüksekliğinin ne kadar olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

E) 37-38. soruları aşağıda verilen ortak metne göre cevaplandırınız.



Belirli bir yükseklikten serbest bırakılan cismin yere düşme denklemi $h = h_0 - \frac{1}{2}g \cdot t^2$ eşitliği ile hesaplanmaktadır. Bu eşitlikte t cismin yere düşme zamanını (saniye), h_0 cismin bırakıldığı yüksekliği, h ise t. saniyede yerden yüksekliğini ve g de yer çekimi kuvvetini ifade etmektedir.

Dünya'nın yer çekimi $g = 9{,}8\ m/s^2$ ve Jüpiter'in yer çekimi $g = 23{,}1\ m/s^2$ olduğuna göre

37. 500 metre yükseklikten bırakılan bir cismin hangi gezegende yere önce düşeceğini bulunuz.

38. 1000 metre yükseklikten bırakılan cismin 5. saniyede her iki gezegende ayrı ayrı olmak üzere yerden yüksekliğinin kaç metre olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

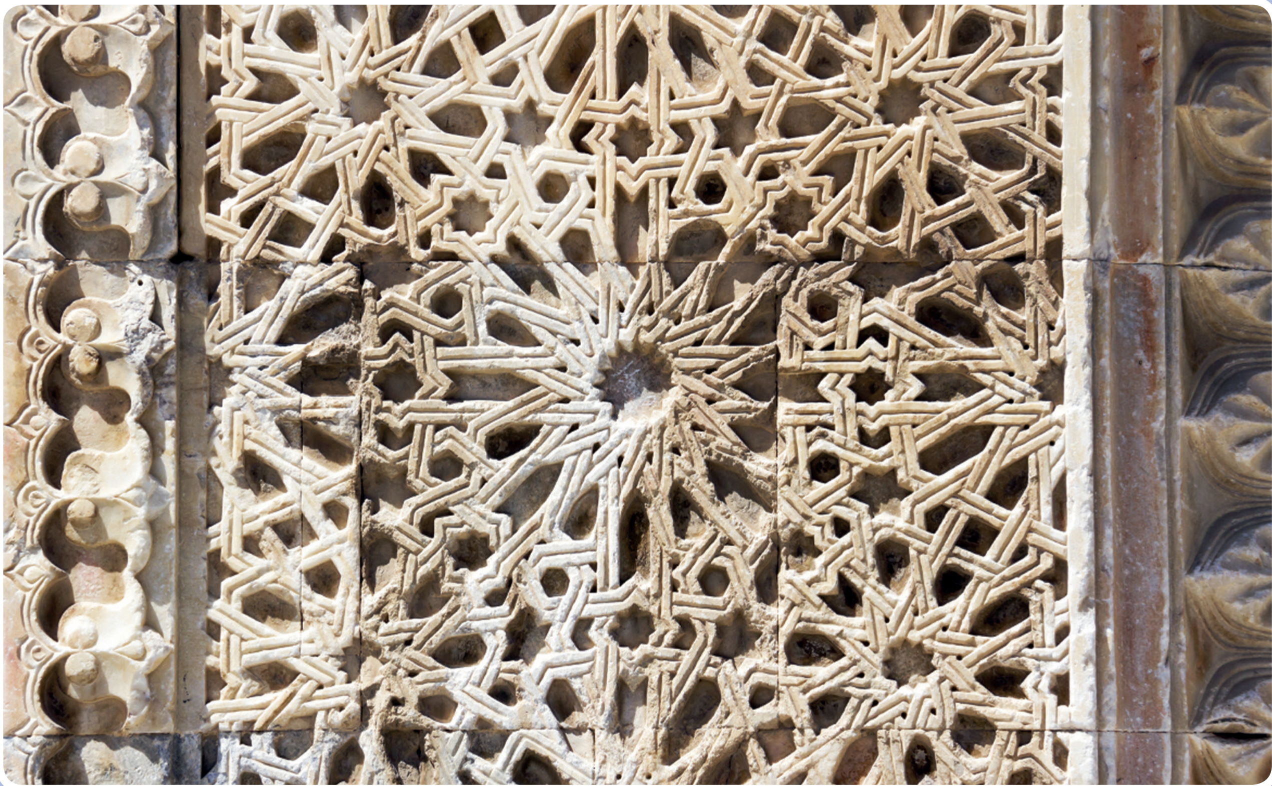
GEOMETRİ
10.5. DÖRTGENLER VE ÇOKGENLER

Neler Öğreneceksiniz?

Neden "Dörtgenleri ve Çokgenleri" Öğrenmelisiniz?

- Çokgenler ve dörtgenler genellikle yapı ve endüstride kullanılır.
- Geleneksel mimaride ve sanat eserlerinde çokgen ve dörtgenlere yer verilir.
- Bal petekleri, örümcek ağları, kar taneleri ve kaplumbağaların kabukları gibi tabiatın çeşitli yerlerinde çokgen ve dörtgenler vardır.
- İnşaat sektöründeki binaların ve apartman dairelerinin alanları gibi hesaplamalar, çokgenlerin alanları hesaplanarak bulunur.

Hazırlık Çalışması



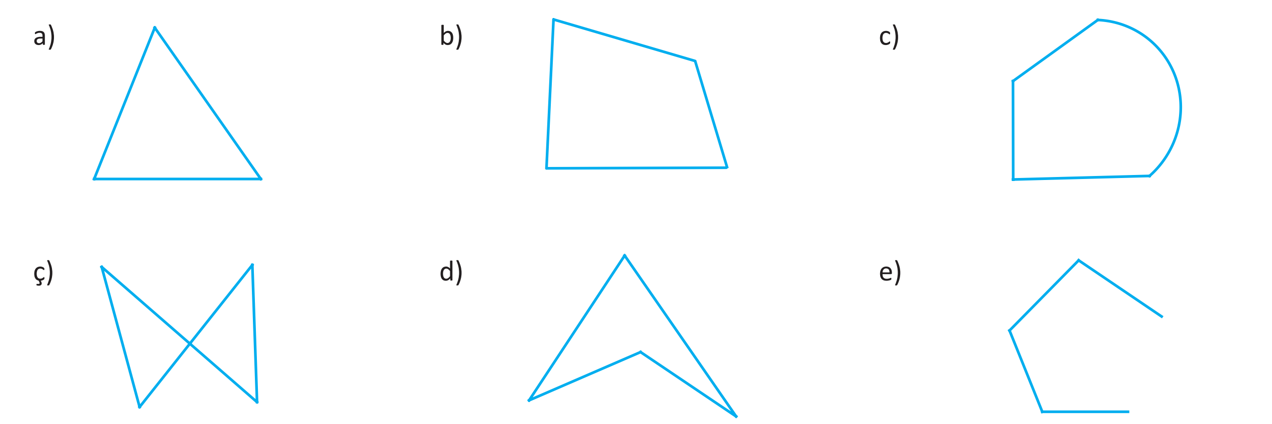
1. **Sınıfınızdaki geometrik şekilleri sınıflandırınız.**
2. **Bir üçgenin çevresi ve alanı arasındaki farkları arkadaşlarınızla tartışınız.**
3. **Yaşadığınız şehirdeki tarihî yapıları düşününüz, kullanılan geometrik şekilleri listeleyiniz. Geometrik şekillerin kullanılma gerekçesini arkadaşlarınızla tartışınız.**

10.5.1. ÇOKGENLER

1. Çokgen ve Temel Elemanları

Tanım

$n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ ve $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ bir düzlemin ardışık üçü doğrusal olmayan n noktası olmak üzere $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ noktalarında kesişen $[A_1A_2], [A_2A_3], [A_3A_4], ..., [A_{n-1}A_n], [A_nA_1]$ doğru parçalarının birleşimiyle oluşan kapalı şekle $\mathbf{A_1A_2A_3...A_n}$ **çokgeni** veya **n-gen** denir.
Bir çokgende yalnız bir kapalı bölge vardır.
$A_1, A_2, ..., A_n$ noktalarına **çokgenin köşeleri**
$[A_1A_2], [A_2A_3], [A_3A_4], ..., [A_{n-1}A_n], [A_nA_1]$ doğru parçalarına **çokgenin kenarları** denir.
Çokgenler kenar sayısına göre adlandırılır. Üç kenarlı çokgene üçgen, dört kenarlı çokgene dörtgen ve n kenarlı çokgene **n-gen** adı verilir.

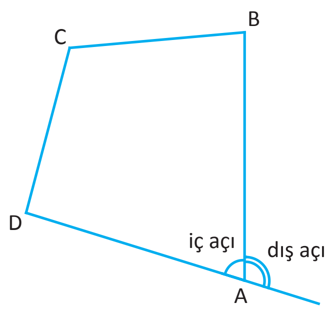


Şekil 5.1.1

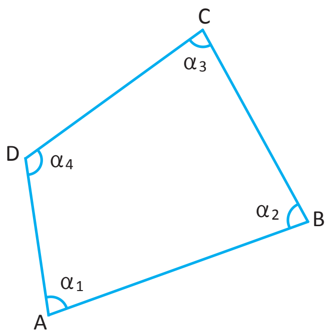
a, b ve d şekilleri birer çokgen iken c, ç ve e şekilleri çokgen değildir. Çünkü a, b ve d şekilleri tek kapalı bölgeye sahiptir. ç şeklinin iki kapalı bölgesi, c şeklinin her ardışık iki köşesini birleştiren noktalar kümesi doğru parçası ve e şekli kapalı olmadığından çokgen değildir (Şekil 5.1.1).

Tanım

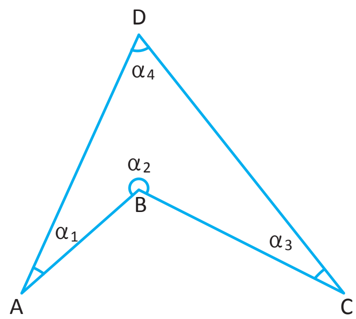
Bir çokgenin (Şekil 5.1.2) ardışık iki kenarının oluşturduğu açılardan iç bölgede kalanlara **iç açı**, iç açının komşu bütünleri olan açılara **dış açı** denir.
Bir çokgenin her bir iç açısının ölçüsü 180° den küçükse veya hiçbir kenarının uzantısı diğer kenarı kesmiyorsa çokgene **dışbükey** (konveks) **çokgen** (Şekil 5.1.3), en az bir kenarının uzantısı çokgeni kesiyorsa çokgene **içbükey** (konkav) **çokgen** denir (Şekil 5.1.4).



Şekil 5.1.2



Şekil 5.1.3

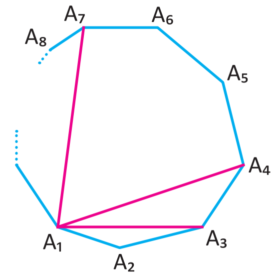


Şekil 5.1.4

Bölümün konusu dışbükey çokgenler olduğundan çokgen kavramından dışbükey çokgen anlaşılacaktır.

Tanım

Bir çokgende ardışık olmayan (komşu olmayan) iki köşeyi birleştiren doğru parçasına **köşegen** denir.
Şekildeki çokgende $[A_1A_3], [A_1A_4], [A_1A_5], \ldots$ doğru parçaları çokgenin bazı köşegenleridir (Şekil 5.1.5).



Şekil 5.1.5

n kenarlı bir çokgende köşegenlerin sayısı $\dfrac{n\cdot(n-3)}{2}$ dir.

İspat

n kenarlı çokgende köşe sayısı n tanedir. n köşeden (noktadan) $C(n,2)$ tane doğru geçer. Bu noktalardan n tanesi kenar olduğundan n kenarlı çokgenin köşegenlerinin sayısı $C(n,2)-n$ olur.

$$C(n,2)-n=\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}-n$$

$$=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}\cdot 2}-n$$

$$=\frac{n^2-n-2n}{2}=\frac{n^2-3n}{2}=\frac{n\cdot(n-3)}{2} \text{ bulunur.}$$

1. ÖRNEK

Köşegen sayısı kenar sayısının 3 katı olan çokgenin kenar sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

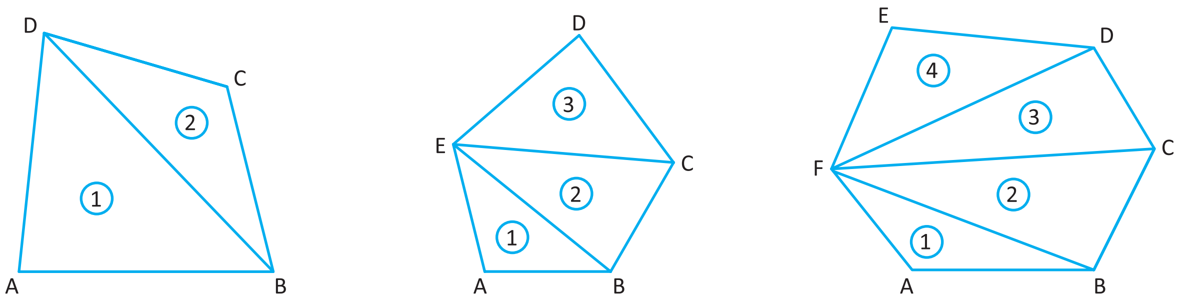
n kenarlı bir çokgenin köşegen sayısı $\dfrac{n\cdot(n-3)}{2}$ tanedir. Buradan

$$\frac{n\cdot(n-3)}{2}=3n$$

$$\cancel{n}\cdot(n-3)=6\cancel{n}$$

$$n=9 \text{ bulunur.}$$

Aşağıda bir çokgenin bir köşesinden çizilebilecek köşegenlerin sayısı, köşegenlerin oluşturduğu üçgen sayısı ve iç açıların ölçüleri toplamı incelenmiştir.



Çokgen	Bir köşeden çizilen köşegen sayısı	Oluşan üçgen sayısı	İç açılar toplamı
Dörtgen	$4-3=1$	$4-2=2$	$2\cdot180^\circ=360^\circ$
Beşgen	$5-3=2$	$5-2=3$	$3\cdot180^\circ=540^\circ$
Altıgen	$6-3=3$	$6-2=4$	$4\cdot180^\circ=720^\circ$
...	...	...	...
n-gen	$n-3$	$n-2$	$(n-2)\cdot180^\circ$

Çokgende Açı Bağıntıları

Özellikler

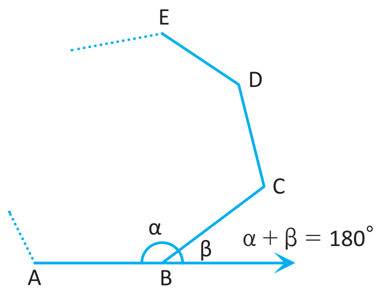
1. n kenarlı bir çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamı $(n-2)\cdot 180^\circ$ dir.
2. n kenarlı bir çokgenin dış açılarının ölçüleri toplamı 360° dir.

İspat

Bir köşedeki iç ve dış açıların ölçüleri toplamı 180° olduğundan n kenarlı bir çokgenin iç ve dış açılarının ölçüleri toplamı $n\cdot 180^\circ$ olur (Şekil 5.1.6).

Dış açıların ölçüleri toplamı = İç ve dış açıların ölçüleri toplamı − İç açıların ölçüleri toplamı

$$= n\cdot 180^\circ - (n-2)\cdot 180^\circ$$
$$= \cancel{180^\circ\cdot n} - \cancel{180^\circ\cdot n} + 2\cdot 180^\circ$$
$$= 360^\circ \text{ bulunur.}$$



Şekil 5.1.6: n-gen

2. ÖRNEK

Bir köşesinden 12 tane köşegen çizilebilen bir çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamının kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

n kenarlı çokgende bir köşeden çizilebilecek köşegen sayısı $n-3$ tane olduğundan
$n-3=12$

$n=15$ bulunur. Buna göre onbeşgenin iç açılarının ölçüleri toplamı
$(15-2)\cdot 180^\circ = 13\cdot 180^\circ$

$= 2340^\circ$ bulunur.

3. ÖRNEK

İç açılarından üç tanesi $120^\circ, 145^\circ, 165^\circ$ ve diğerlerinden her biri 130° olan çokgenin kenar sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

n kenarlı bir çokgende dış açıların sayısı n tanedir. $120^\circ, 145^\circ$ ve 165° lik iç açılara ait dış açıların ölçüleri sırasıyla $60^\circ, 35^\circ, 15^\circ$ ve geriye kalan $n-3$ tane dış açının her birinin ölçüsü 50° dir.
Dış açıların ölçüleri toplamı 360° olduğundan

$$60^\circ + 35^\circ + 15^\circ + (n-3)\cdot 50^\circ = 360^\circ$$
$$110^\circ + (n-3)\cdot 50^\circ = 360^\circ$$
$$(n-3)\cdot 50^\circ = 360^\circ - 110^\circ$$
$$(n-3)\cdot 50^\circ = 250^\circ$$
$$n-3=5$$
$$n=8 \text{ bulunur.}$$

4. ÖRNEK

Konveks bir çokgende en çok kaç dış açının geniş açı olabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Çokgende geniş dış açılar $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_k\}$, dik veya dar dış açılar $= \{\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \alpha_{k+3}, ..., \alpha_n\}$ olsun. Buradan

$$\begin{array}{lcl} 90^\circ < \alpha_1 < 180^\circ & & 0^\circ < \alpha_{k+1} \le 90^\circ \\ 90^\circ < \alpha_2 < 180^\circ & \text{ve} & 0^\circ < \alpha_{k+2} \le 90^\circ \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ +\ 90^\circ < \alpha_k < 180^\circ & & +\ 0^\circ < \alpha_n \le 90^\circ \\ \hline k \cdot 90^\circ < \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k < k \cdot 180^\circ & & 0^\circ < \alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + ... + \alpha_n \le (n-k) \cdot 90^\circ \end{array}$$

elde edilir.

Bu iki eşitsizlik de taraf tarafa toplanırsa

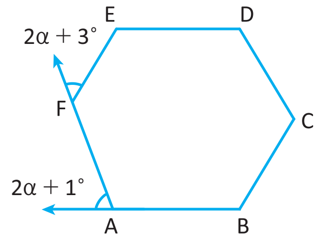
$$\begin{array}{l} k \cdot 90^\circ < \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_k < k \cdot 180^\circ \\ +\quad 0^\circ < \alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + ... + \alpha_n < (n-k) \cdot 90^\circ \\ \hline k \cdot 90^\circ < \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n < (n-k+2k) \cdot 90^\circ \end{array}$$

$k \cdot 90^\circ < 360^\circ$ ve $360^\circ < (n+k) \cdot 90^\circ$ elde edilir. $k < \dfrac{360^\circ}{90^\circ}$ ve $\dfrac{360^\circ}{90^\circ} < n + k$ buradan da

$k < 4$ ve $4 < n + k$ elde edilir. Buna göre en çok üç dış açı geniş açı olabilir.

5. ÖRNEK

Şekildeki konveks ABCDEF altıgeninde dış açıların ölçüsü ardışık tek sayılar olduğuna göre en küçük iç açısının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.



ÇÖZÜM

$2\alpha + 1^\circ, 2\alpha + 3^\circ, 2\alpha + 5^\circ, 2\alpha + 7^\circ, 2\alpha + 9^\circ, 2\alpha + 11^\circ$ dış açılar ise

$(2\alpha + 1^\circ) + (2\alpha + 3^\circ) + (2\alpha + 5^\circ) + (2\alpha + 7^\circ) + (2\alpha + 9^\circ) + (2\alpha + 11^\circ) = 360^\circ$ olur.

$$12\alpha + 36^\circ = 360^\circ$$
$$12\alpha = 360^\circ - 36^\circ$$
$$12\alpha = 324^\circ$$
$$\alpha = 27^\circ \text{ bulunur.}$$

En büyük dış açı $2\alpha + 11^\circ = 2 \cdot 27^\circ + 11^\circ$

$= 54^\circ + 11^\circ$

$= 65^\circ$ olur. Bu durumda en küçük iç açı $180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$ bulunur.

Sıra Sizde

SORU

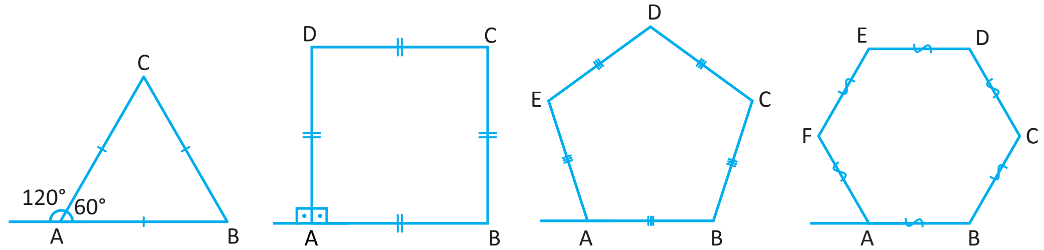
Bir dörtgenin dış açılarının ölçüleri 2, 4, 5 ve 7 sayıları ile orantılıdır.
Buna göre dörtgenin en büyük iç açısının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

2. Düzgün Çokgenler

Tanım

Tüm kenarlarının uzunlukları birbirine eşit ve tüm açılarının ölçüleri birbirine eşit olan çokgenlere **düzgün çokgen** denir (Şekil 5.1.7).



Eşkenar üçgen | Kare | Düzgün beşgen | Düzgün altıgen

Şekil 5.1.7

Düzgün Çokgenlerde Açı ve Kenar Bağıntıları

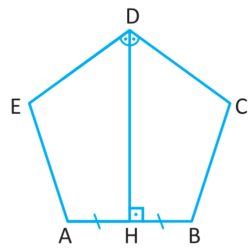
Özellikler

n kenarlı düzgün bir çokgende

1. Tüm iç açılarının ölçüleri birbirine eşit ve $\dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n} = 180^\circ - \dfrac{360^\circ}{n}$ ile bulunur.

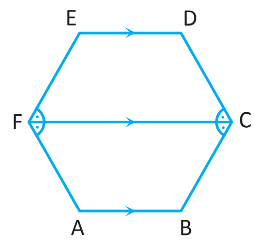
2. Tüm dış açılarının ölçüleri birbirine eşit ve $\dfrac{360^\circ}{n}$ ile bulunur.

3. n tek sayı ise bir köşeden çizilen açıortay, karşı kenarı dik ortalar. Bu açıortay çokgenin simetri doğrusudur (Şekil 5.1.8).



Şekil 5.1.8

4. n çift sayı ise çokgenin karşılıklı kenarları paraleldir karşı köşeleri birleştiren açıortay doğrusu simetri doğrusudur (Şekil 5.1.9).



Şekil 5.1.9

1. ÖRNEK

18 kenarlı bir düzgün çokgenin bir iç ve dış açısının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Düzgün çokgenin bir dış açısının ölçüsü $\dfrac{360^\circ}{n}$ dir. $n = 18$ olduğundan bir dış açısının ölçüsü $\dfrac{360^\circ}{18} = 20^\circ$ olur.

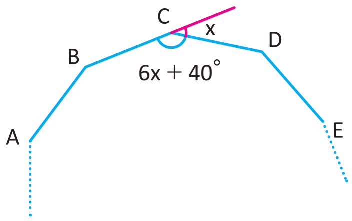
Çokgenin aynı köşeye ait bir dış açısı ile bir iç açısının ölçüleri toplamı 180° dir.

Buna göre düzgün onsekizgenin bir iç açısının ölçüsü $180^\circ - 20^\circ = 160^\circ$ olur.

2. ÖRNEK

Bir iç açısının ölçüsü bir dış açısının ölçüsünün 6 katından 40° fazla olan düzgün çokgenin kenar sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM



n kenarlı düzgün çokgenin bir dış açısının ölçüsü x olarak seçilirse bir iç açısının ölçüsü $6x + 40^\circ$ olur. Çokgende aynı köşeye ait bir iç ve bir dış açının ölçüleri toplamı 180° olduğundan

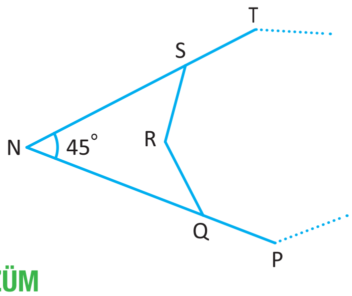
$$6x + 40^\circ + x = 180^\circ$$

$$7x = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$$

$$x = 20^\circ \text{ bulunur.}$$

Düzgün çokgenin bir dış açısının ölçüsü $\dfrac{360^\circ}{n}$ dir. O hâlde $20^\circ = \dfrac{360^\circ}{n} \Rightarrow n = 18$ bulunur.

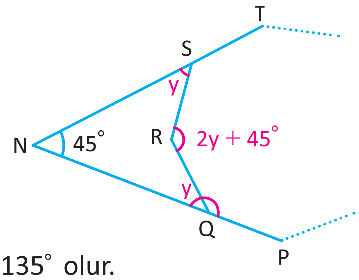
3. ÖRNEK



Yanda verilen şekilde ...PQRST... bir düzgün çokgendir.
$[PQ \cap [TS = \{N\}$ ve $m(\widehat{PNT}) = 45^\circ$ olduğuna göre düzgün çokgenin bir iç açısının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Düzgün çokgende tüm iç ve dış açıların ölçüleri kendi aralarında eşittir.
$m(\widehat{NQR}) = m(\widehat{NSR}) = y$ seçilirse NQRS içbükey dörtgeninde
$m(\widehat{QRS}) = 2y + 45^\circ$ olur. Bu değer düzgün çokgenin bir iç açısıdır.
$m(\widehat{NQR}) + m(\widehat{PQR}) = 180^\circ$ olduğundan

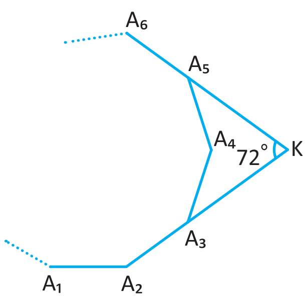


$$2y + 45^\circ + y = 180^\circ$$

$$3y = 180^\circ - 45^\circ$$

$3y = 135^\circ \Rightarrow y = 45^\circ$ bulunur. Bir iç açının ölçüsü $2 \cdot 45^\circ + 45^\circ = 135^\circ$ olur.

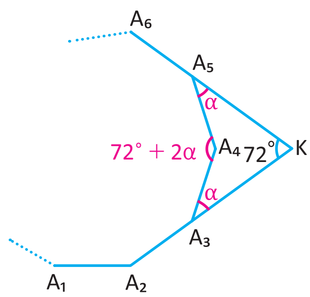
4. ÖRNEK



Şekildeki $A_1A_2A_3...A_n$ düzgün çokgen, A_2, A_3, K ve A_5, A_6, K noktaları doğrusaldır. $m(\widehat{A_3KA_5}) = 72^\circ$ olduğuna göre çokgenin köşegen sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

Yandaki şekildeki n kenarlı düzgün çokgenin bir dış açısının ölçüsü α alınırsa



$2\alpha + 72^\circ + \alpha = 180^\circ$ olur.

$$3\alpha + 72^\circ = 180^\circ$$

$$3\alpha = 108^\circ$$

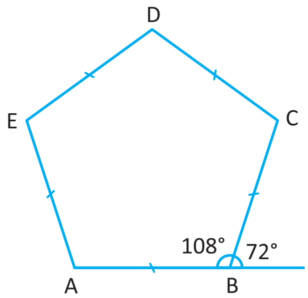
$\alpha = 36^\circ$ bulunur. 2. özellikten $36^\circ = \dfrac{360^\circ}{n} \Rightarrow n = 10$ bulunur.

Bu durumda köşegen sayısı $= \dfrac{n \cdot (n-3)}{2} = \dfrac{10 \cdot (10-3)}{2} = 35$ olur.

Düzgün Beşgen

Tanım

Tüm kenarları ve iç açı ölçüleri eşit olan beşgene **düzgün beşgen** denir (Şekil 5.1.10).



Şekil 5.1.10: Düzgün beşgen

Bir iç açısının ölçüsü $\dfrac{(5-2)\cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$ bulunur.

Bir dış açısının ölçüsü $\dfrac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ dir.

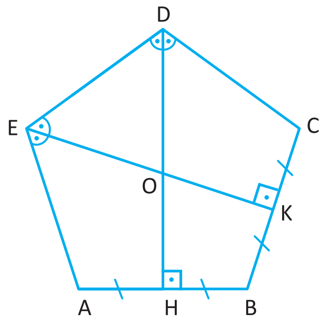
Özellikler

1. Düzgün beşgende bir köşeden çizilen açıortay karşı kenarı dik ortalar. Düzgün beşgenin içaçıortayları tek bir noktada kesişir (Şekil 5.1.11).

$[DH] \perp [AB]$ ise

$|AH| = |BH|$ ve

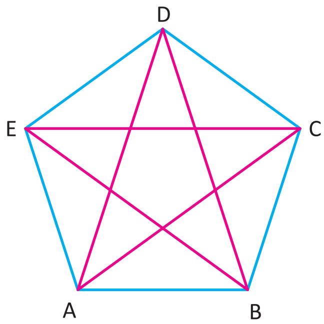
$m(\widehat{CDH}) = m(\widehat{EDH}) = 54^\circ$ olur.



Şekil 5.1.11

2. Düzgün beşgende köşegen uzunlukları birbirine eşittir (Şekil 5.1.12).

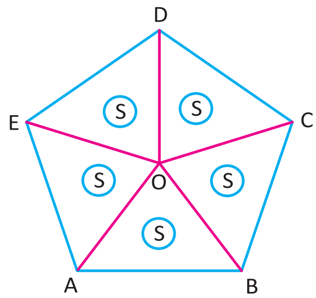
$|AC| = |AD| = |BD| = |BE| = |CE|$ olur.



Şekil 5.1.12

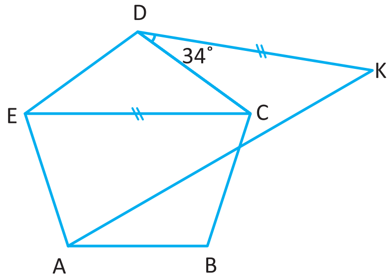
3. Düzgün beşgenin iç açıortaylarının kesim noktası ile köşeler birleştirildiğinde 5 eş üçgen oluşur (Şekil 5.1.13).

$A(\widehat{AOB}) = S$ ise $A(ABCDE) = 5S$ olur.



Şekil 5.1.13

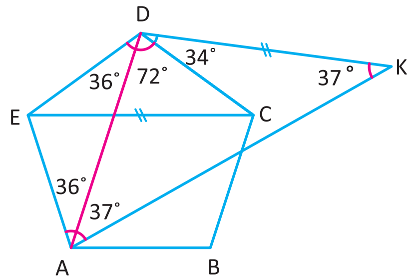
5. ÖRNEK



Şekilde verilen ABCDE düzgün beşgeninde
$|EC| = |DK|$
$m(\widehat{KDC}) = 34^\circ$ olduğuna göre
$m(\widehat{KAB})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Düzgün beşgenin tüm köşegen uzunlukları eşit ve her bir iç açısının ölçüsü 108° dir. Yandaki şekilde AD köşegeni çizilirse $|DK| = |EC| = |AD|$ olur. Bu durumda

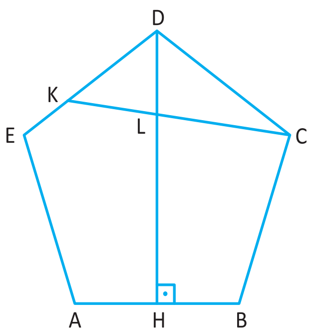


AED ikizkenar üçgen olduğundan $m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{DAE}) = 36^\circ$ ve $m(\widehat{ADC}) = 72^\circ$ bulunur.

Benzer şekilde ADK ikizkenar üçgen olduğundan $m(\widehat{DAK}) = m(\widehat{DKA}) = 37^\circ$ olur.

$$m(\widehat{KAB}) = 108^\circ - (36^\circ + 37^\circ)$$
$$= 108^\circ - 73^\circ$$
$$= 35^\circ \text{ bulunur.}$$

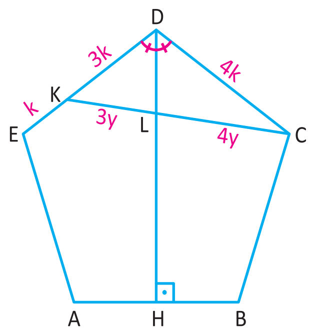
6. ÖRNEK



Şekildeki ABCDE düzgün beşgeninde $[CK] \cap [DH] = \{L\}$, $[DH] \perp [AB]$, $|DK| = 3 \cdot |EK|$ ve $|CK| = 21$ cm olduğuna göre $|DK|$ nun en küçük tam sayı değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$|DK| = 3 \cdot |EK|$ eşitliğinde $|EK| = k$ seçilirse $|DK| = 3k$ olur.
Bu durumda düzgün çokgenin bir kenar uzunluğu $4k$ bulunur.
Şekilde $[DH]$ ABCDE düzgün beşgeninin simetri doğrusu olduğundan $\widehat{CDE}$ nın açıortayıdır.



DKC üçgeninde iç açıortay teoremi uygulanırsa

$\dfrac{|DK|}{|DC|} = \dfrac{|KL|}{|LC|} \Rightarrow \dfrac{3k}{4k} = \dfrac{|KL|}{|LC|}$ eşitliğinden

$|KL| = 3y, |LC| = 4y$ bulunur. O hâlde

$|KC| = 7y = 21$ cm $\Rightarrow y = 3$ cm olur. Üçgen eşitsizliğinden

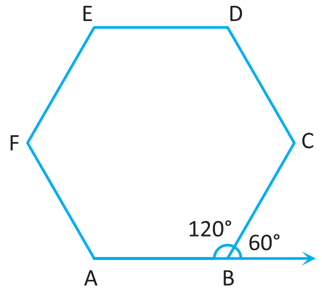
$$|CK| < |CD| + |DK|$$
$$21 < 4k + 3k$$
$$21 < 7k$$
$$k > 3$$

$3k > 9$ elde edilir. Buradan $|DK|$ nun en küçük tam sayı değeri 10 cm olur.

Düzgün Altıgen

Tanım

Tüm kenar uzunlukları ve iç açılarının ölçüleri eşit olan altıgene **düzgün altıgen** denir (Şekil 5.1.14).



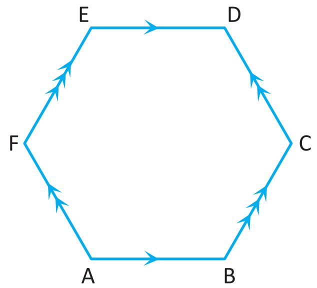
Şekil 5.1.14: Düzgün altıgen

Bir iç açısının ölçüsü $\dfrac{(6-2)\cdot 180^\circ}{6} = 120^\circ$ dir.

Bir dış açısının ölçüsü $\dfrac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ dir.

Özellikler

1. Düzgün altıgenin karşılıklı kenarları paraleldir (Şekil 5.1.15).



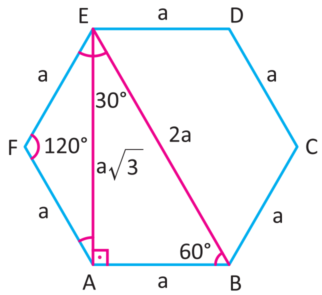
Şekil 5.1.15

$[AB] \mathbin{/\!/} [DE]$

$[AF] \mathbin{/\!/} [CD]$

$[BC] \mathbin{/\!/} [EF]$ olur.

2. Düzgün altıgenin iki farklı uzunluğa sahip köşegeni vardır (Şekil 5.1.16).



Şekil 5.1.16

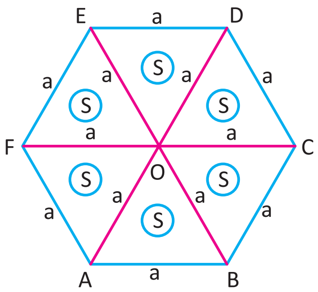
$|AB| = a$ ise

$|AE| = a\sqrt{3}$ ve

$|BE| = 2a$ olur.

(EAB üçgeninin 30° - 60° - 90° dik üçgeni olduğuna dikkat ediniz.)

3. Düzgün altıgenin karşılıklı köşelerini birleştiren köşegenler düzgün altıgeni 6 tane eşkenar üçgene ayırır (Şekil 5.1.17).



Şekil 5.1.17

$Ç(ABCDEF) = 6a$

$A(ABCDEF) = 6 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$A(\widehat{AOB}) = S$ ise $A(ABCDEF) = 6S$ olur.

7. ÖRNEK

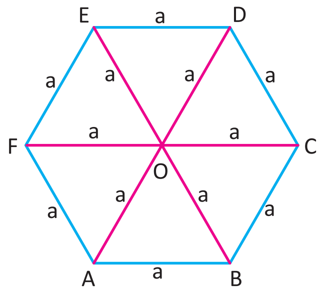
En uzun köşegeni 10 cm olan düzgün altıgenin çevresinin kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

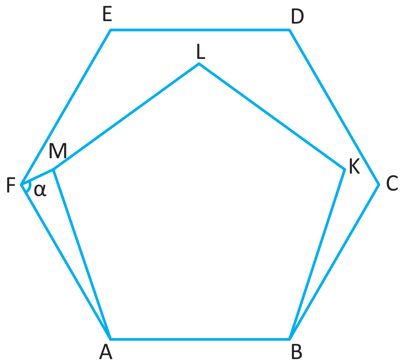
Yandaki şekilde görüldüğü gibi bir kenarı a cm olan bir düzgün altıgende en uzun köşegenin uzunluğu 2a olur. Buna göre

$a = |AB| = \frac{|AD|}{2} = \frac{10}{2} = 5\,\text{cm}$ olur.

Buradan $Ç(ABCDEF) = 6 \cdot 5 = 30\,\text{cm}$ bulunur.



8. ÖRNEK



Şekilde ABCDEF düzgün altıgeni ve ABKLM düzgün beşgeninde $[AB]$ ortak olduğuna göre $m(\widehat{AFM}) = \alpha$ nın kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Şekilde $[AB]$ kenarı ortak olduğundan bu iki düzgün çokgenin bütün kenar uzunlukları birbirine eşittir.

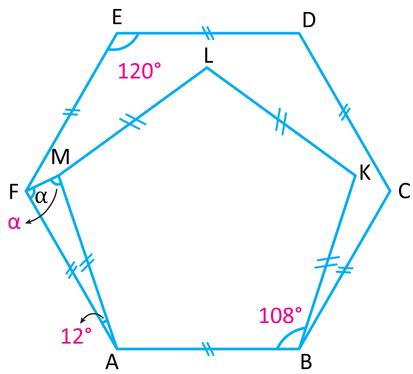
Buna göre $|FA| = |MA|$ olduğundan

$\widehat{AFM}$ ikizkenar üçgendir. İkizkenar üçgende taban açılarının ölçüleri eşit olduğundan

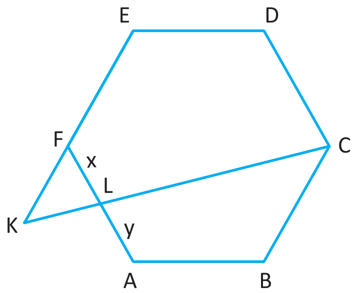
$m(\widehat{AFM}) = m(\widehat{FMA}) = \alpha$ bulunur.

$m(\widehat{MAF}) + 2\alpha = 180^\circ$ olur. $m(\widehat{MAF}) = 120^\circ - 108^\circ = 12^\circ$

$$12^\circ + 2\alpha = 180^\circ$$
$$2\alpha = 180^\circ - 12^\circ$$
$$2\alpha = 168^\circ$$
$$\alpha = 84^\circ \text{ bulunur.}$$



9. ÖRNEK



Şekildeki ABCDEF düzgün altıgeninde K, F ve E noktaları doğrusal, $[AF] \cap [KC] = \{L\}$

$|KL| = 2$ birim

$|LC| = 7$ birim

$|LF| = x$

$|LA| = y$

olduğuna göre $\frac{y}{x}$ oranını bulunuz.

ÇÖZÜM

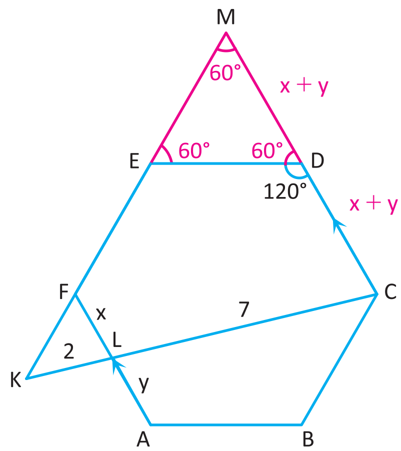
Şekildeki KCDE dörtgeninde CD ve KE kenarları uzatılırsa $\overset{\frown}{KCM}$ elde edilir. Bu durumda

$\overset{\frown}{KLF} \sim \overset{\frown}{KCM}$ olur.

$$\frac{|KL|}{|KC|} = \frac{|LF|}{|CM|} \Rightarrow \frac{2}{9} = \frac{x}{2 \cdot (x+y)}$$

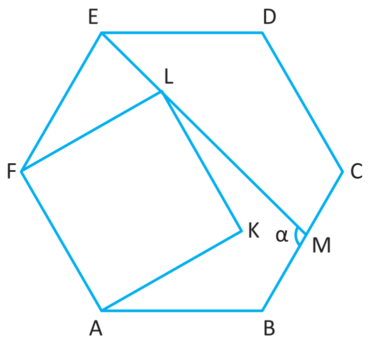
$$9x = 4x + 4y$$

$$5x = 4y \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{|AL|}{|LF|} = \frac{5}{4} \text{ bulunur.}$$



Sıra Sizde

SORU

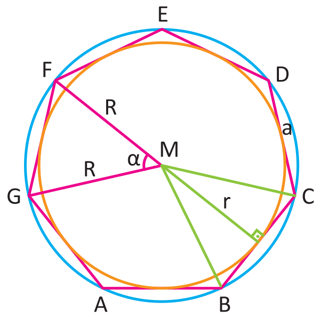


Şekilde ABCDEF düzgün altıgeni ve FAKL karesinde FA kenarları ortaktır. E, L, M noktaları doğrusal olduğuna göre $m(\overset{\frown}{LMB}) = \alpha$ açısının kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Düzgün Çokgenlerde Alan Bağıntısı

n kenarlı düzgün bir çokgenin çevrel çemberinin merkezi, iç teğet çemberinin merkezi ve ağırlık merkezi aynı noktadır (Şekil 5.1.18).



Şekil 5.1.18

$$A(ABCD...) = n \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot r\right) = \frac{n \cdot a \cdot r}{2} \text{ veya}$$

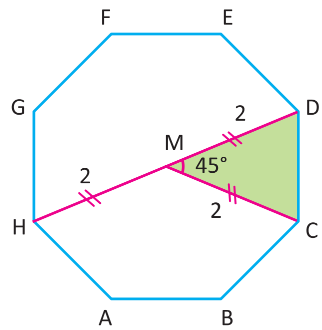
$$A(ABCD...) = n \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \sin\alpha\right) \text{ olur. } \left(\alpha = \frac{360}{n}\right)$$

10. ÖRNEK

En uzun köşegeni 4 cm olan düzgün sekizgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Düzgün sekizgenin alanı, içinde oluşan 8 eş üçgenin alanları toplamına eşittir.



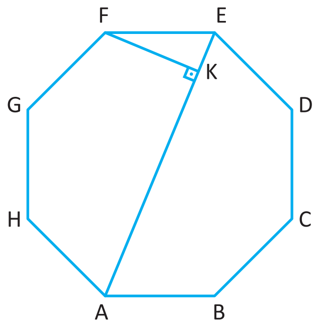
$$m(\widehat{DMC}) = a = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ \text{ olur. } A(\widehat{DMC}) = \frac{1}{2} \cdot |MC| \cdot |MD| \cdot \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot \sin 45^\circ$$

$$= \cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \sqrt{2} \text{ cm}^2 \text{ olur.}$$

Bu durumda $A(ABCDEFGH) = 8 \cdot A(\widehat{DMC}) = 8\sqrt{2}$ cm^2 bulunur.

11. ÖRNEK



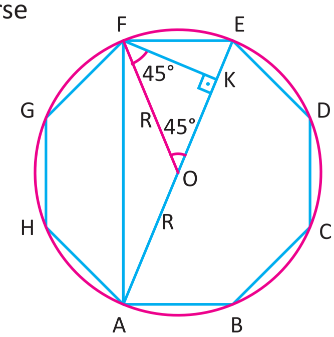
Şekildeki düzgün sekizgende

$[FK] \perp [AE]$ ve $|FK| = 4$ cm

olduğuna göre düzgün sekizgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Şekilde düzgün sekizgenin çevrel çemberinin merkezi ile F noktası birleştirilirse $\widehat{OKF}$ ikizkenar dik üçgen olur. Bu durumda



$$R^2 = 4^2 + 4^2$$

$$= 16 + 16$$

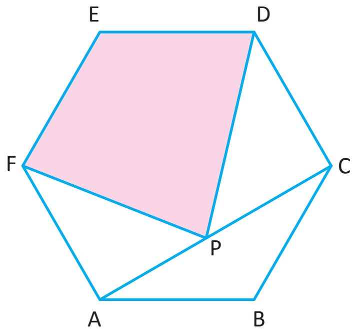
$$= 32 \Rightarrow R = 4\sqrt{2} \text{ cm bulunur.}$$

$$A = n \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \sin\alpha\right) = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ \quad \left(\alpha = \frac{360}{8}\right)$$

$$= 8 \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{8}{\cancel{16}} \cdot \cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}$$

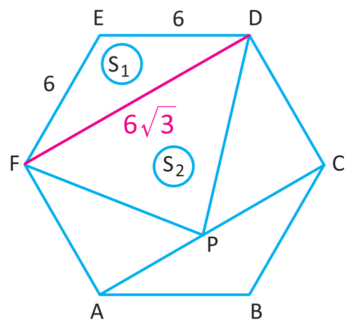
$$= 64\sqrt{2} \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$

12. ÖRNEK



Şekildeki ABCDEF düzgün altıgen A, P, C doğrusal noktalar ve $|AB| = 6\,cm$ olduğuna göre $A(PDEF)$ nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Şekildeki düzgün altıgende $[FD]$ çizilirse PDEF dörtgeni iki üçgene ayrılır. Düzgün altıgenin bir iç açısı 120° ve FED ikizkenar üçgen olduğundan $|FD| = 6\sqrt{3}$ bulunur.

$A(\overset{\frown}{FED}) = S_1$ ve $A(\overset{\frown}{FPD}) = S_2$ olsun. Bu durumda

$A(PDEF) = S_1 + S_2$ olur.

$$S_1 = \frac{1}{\cancel{2}_1} \cdot \overset{3}{\cancel{6}} \cdot 6 \cdot \sin 120^\circ = \overset{9}{\cancel{18}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}_1} = 9\sqrt{3}\ cm^2$$

$$S_2 = \frac{|FD| \cdot |DC|}{2}, \quad ([FD] \perp [DC])$$

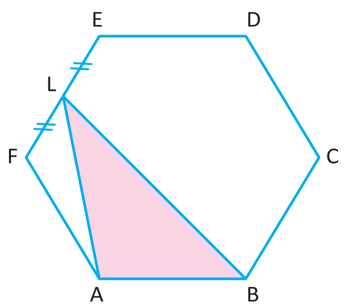
$$= \frac{6\sqrt{3} \cdot 6}{2}$$

$$= 18\sqrt{3}\ cm^2$$

$A(PDEF) = S_1 + S_2 = 9\sqrt{3} + 18\sqrt{3} = 27\sqrt{3}\ cm^2$ bulunur.

Sıra Sizde

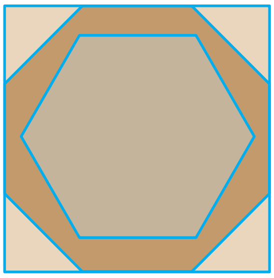
SORU



Şekildeki ABCDEF düzgün altıgen $|FL| = |LE|$ ve $|DC| = 8$ cm olduğuna göre $A(\overset{\frown}{ABL})$ nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

13. ÖRNEK



Bir iş yeri sahibi, iş yerinin tabanını şekildeki gibi üzerinde düzgün sekizgen ve düzgün altıgen motifleri olan kare fayanslarla döşetecektir. Kare şeklindeki fayansların bir kenar uzunluğu $30\sqrt{2}$ cm, İş yerinin taban ebatları $(1200+600\sqrt{2})\times(3000+1500\sqrt{2})\,\text{cm}^2$ dir.

$\tan 22,5^\circ = \sqrt{2}-1$ olduğuna göre iş yerine döşenen fayanslarda düzgün sekizgenler ile düzgün altıgenlerin arasında kalan bölgelerin alanları toplamının kaç m^2 olduğunu bulunuz.

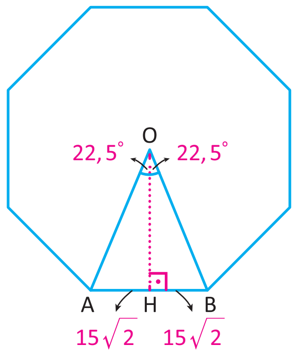
ÇÖZÜM

Düzgün sekizgende bir dış açının ölçüsü $\dfrac{360^\circ}{8} = 45^\circ$ olur.

Buradan kare ile düzgün sekizgen arasında kalan üçgenin ikizkenar dik üçgen olduğu görülür. Buna göre ikizkenar dik üçgenin hipotenüsü $30\sqrt{2}$ cm olduğundan dik kenarların uzunluğu 30 cm olur. O hâlde kare şeklindeki fayansların bir kenar uzunluğu $(60+30\sqrt{2})$ cm olur.İş yerine döşenecek fayans sayısını bulmak için taban alanı bir fayans alanına bölünürse

$$\frac{(1200+600\sqrt{2})\cdot(3000+1500\sqrt{2})}{(60+30\sqrt{2})\cdot(60+30\sqrt{2})} = 20\cdot 50 = 1000 \text{ adet bulunur.}$$

Şekildeki gibi düzgün sekizgende köşeler düzgün sekizgenin merkezi olan O noktası ile birleştirilirse sekiz tane eş ikizkenar üçgen oluşur. Buradan OAB ikizkenar üçgeninde OH yüksekliği çizilirse taban iki eş parçaya bölünür. OHB dik üçgeninde tanjant



$$\tan 22,5^\circ = \frac{|HB|}{|OH|} = \frac{15\sqrt{2}}{|OH|} = \sqrt{2}-1$$

$$\Rightarrow |OH| = \frac{15\sqrt{2}}{\underset{(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}-1}} = (30+15\sqrt{2})\,\text{cm olur.}$$

Buna göre eş ikizkenar üçgenlerden birinin alanı

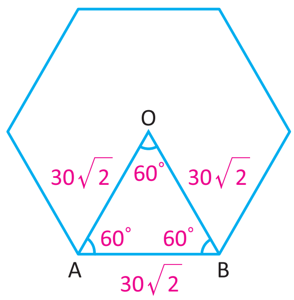
$$A(\widehat{OAB}) = \frac{|AB|\cdot|OH|}{2}$$

$$= \frac{30\sqrt{2}\cdot(30+15\sqrt{2})}{2} = (450+450\sqrt{2})\,\text{cm}^2 \text{ olur.}$$

O hâlde düzgün sekizgenlerden birinin alanı

$A = 8\cdot(450+450\sqrt{2}) = (3600+3600\sqrt{2})\,\text{cm}^2$ olur.

Şekildeki gibi düzgün altıgende köşeler düzgün altıgenin merkezi olan O noktası ile birleştirilirse altı tane eşkenar üçgen oluşur. Buna göre eşkenar üçgenlerden birinin alanı



$$A(\widehat{OAB}) = \frac{(30\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = 450\sqrt{3}\,\text{cm}^2 \text{ olur.}$$

O hâlde düzgün altıgenlerden birinin alanı

$A = 6\cdot 450\sqrt{3} = 2700\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ olur.

Buna göre bir fayansta düzgün sekizgen ile düzgün altıgen arasında kalan bölgenin alanı $A = (3600+3600\sqrt{2}-2700\sqrt{3})\,\text{cm}^2$ olur.

İş yerine 1000 adet fayans döşeneceğinden düzgün sekizgenler ile düzgün altıgenlerin arasında kalan bölgelerin alanları toplamı

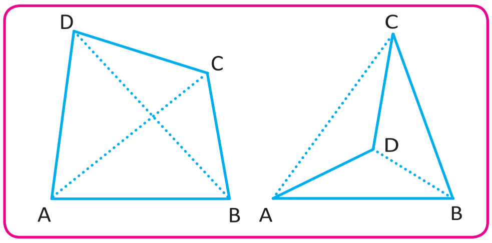
$$1000\cdot(3600+3600\sqrt{2}-2700\sqrt{3}) = (3\,600\,000+3\,600\,000\sqrt{2}-2\,700\,000\sqrt{3})\,\text{cm}^2$$

$$= (360+360\sqrt{2}-270\sqrt{3})\,\text{m}^2 \text{ bulunur.}$$

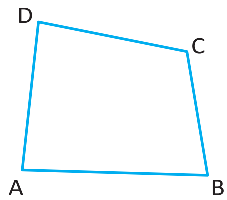
10.5.2. DÖRTGENLER VE ÖZELLİKLERİ

Dörtgenler ve Temel Elemanları

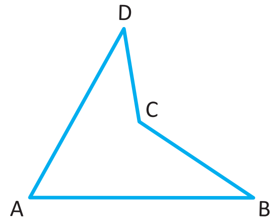
A, B, C, D noktaları dörtgenin köşeleri, [AB], [BC], [CD], [DA] dörtgenin kenarları [AC] ve [BD] dörtgenin köşegenleridir (Şekil 5.2.1).



Şekil 5.2.1



Şekil 5.2.2 Konveks dörtgen



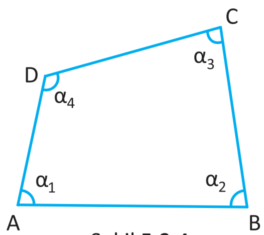
Şekil 5.2.3 Konkav dörtgen

Bölümün konusu dışbükey dörtgenler olduğundan dörtgen kavramından dışbükey dörtgen anlaşılacaktır (Şekil 5.2.2, Şekil 5.2.3).

Dörtgenlerde Açı ve Uzunluk Bağıntıları

Özellikler

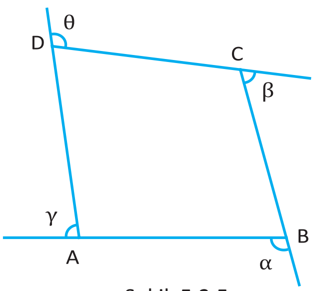
1.



Şekil 5.2.4

Bir dörtgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 360° dir. n kenarlı bir çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamı $(n-2)\cdot 180^\circ$ dir. Dörtgende $n=4$ olduğundan dörtgenin iç açılarının ölçüleri toplamı $(4-2)\cdot 180^\circ = 2\cdot 180^\circ = 360^\circ$ bulunur (Şekil 5.2.4).

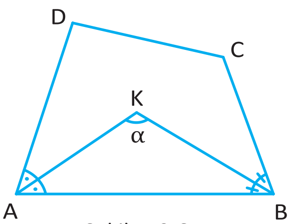
2.



Şekil 5.2.5

Bir dörtgenin dış açılarının ölçüleri toplamı 360° dir. $\alpha+\beta+\theta+\gamma=360^\circ$ (Şekil 5.2.5).

3.

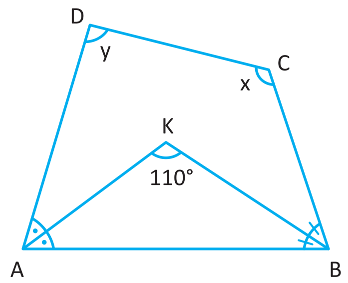


Şekil 5.2.6

Bir dörtgende komşu iki iç açının açıortayları arasındaki açının ölçüsü, diğer iki açının ölçüleri toplamının yarısıdır (Şekil 5.2.6).

$$\alpha=\frac{m(\widehat{D})+m(\widehat{C})}{2}$$

1. ÖRNEK



Şekildeki ABCD dörtgeninde
$m(\widehat{BCD}) = x, (\widehat{ADC}) = y$
$m(\widehat{AKB}) = 110^\circ$
$[AK], [BK]$ açıortay ve $x - y = 30^\circ$ veriliyor.
Buna göre y nin kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

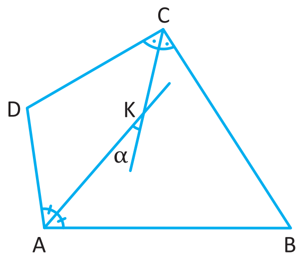
$\frac{x+y}{2} = 110^\circ \Rightarrow x + y = 220^\circ$ olur. Buradan

$x + y = 220^\circ$
$+ \quad -1/ x - y = 30^\circ$

$2y = 190^\circ \Rightarrow y = 95^\circ$ bulunur.

Özellikler

4.

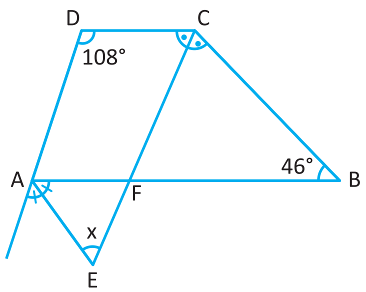


Şekil 5.2.7

Bir dörtgende karşılıklı iki açının açıortayları arasındaki dar açının ölçüsü, diğer iki açının ölçüleri farkının mutlak değerinin yarısıdır (Şekil 5.2.7).

$$\alpha = \frac{|m(\widehat{D}) - m(\widehat{B})|}{2}$$

2. ÖRNEK



Şekildeki ABCD dörtgeninde $[AE]$ ve $[CE]$ açıortaylardır.
$m(\widehat{ADC}) = 108^\circ, m(\widehat{ABC}) = 46^\circ$ ise $m(\widehat{AEC})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

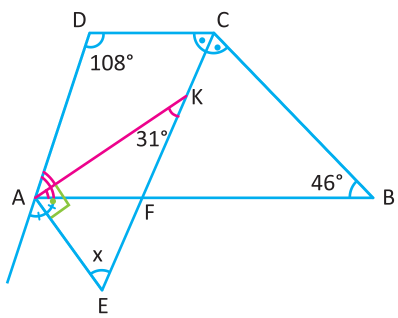
ÇÖZÜM

Şekilde $\widehat{DAF}$ nın açıortayının $[CE]$ nı kestiği nokta K olarak alınırsa

$m(\widehat{AKF}) = \frac{108^\circ - 46^\circ}{2} = \frac{62^\circ}{2} = 31^\circ$ elde edilir.

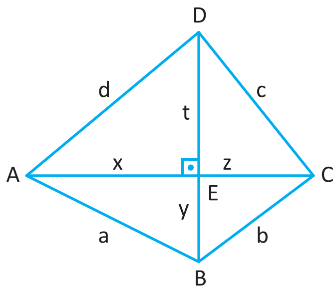
$m(\widehat{KAE}) = 90^\circ$ dir. Bu durumda

$m(\widehat{AEC}) + 90^\circ + 31^\circ = 180^\circ$
$m(\widehat{AEC}) + 121^\circ = 180^\circ$
$m(\widehat{AEC}) = 180^\circ - 121^\circ$
$m(\widehat{AEC}) = 59^\circ$ bulunur.



Özellikler

5. Köşegenleri dik kesişen dörtgenlerde, karşılıklı kenarların uzunluklarının kareleri toplamı eşittir (Şekil 5.2.8).



Şekil 5.2.8

$|AB| = a, |BC| = b, |CD| = c, |DA| = d,$
$|AE| = x, |BE| = y, |CE| = z, |DE| = t,$
$[AC] \perp [BD]$ ise
$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ olur.

İspat

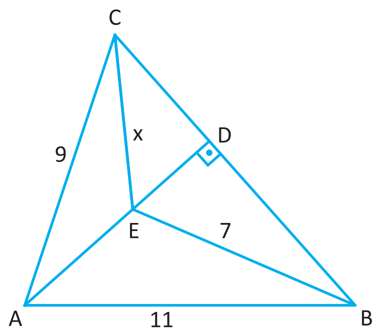
Şekildeki her bir dik üçgen için Pisagor teoremi uygulanırsa

$$\left.\begin{array}{l} \text{AEB dik üçgeninde } a^2 = x^2 + y^2 \\ \text{DEC dik üçgeninde } c^2 = z^2 + t^2 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \ldots.(1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{AED dik üçgeninde } d^2 = x^2 + t^2 \\ \text{BEC dik üçgeninde } b^2 = y^2 + z^2 \end{array}\right\} \Rightarrow b^2 + d^2 = x^2 + t^2 + y^2 + z^2 \ldots.(2)$$

(1) ve **(2)** den $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ elde edilir.

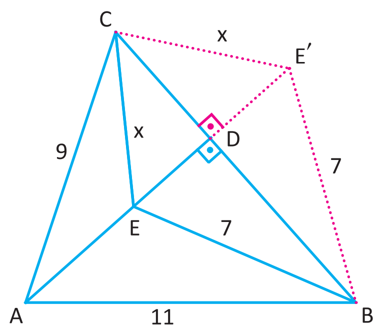
3. ÖRNEK



Şekildeki $\overset{\frown}{ABC}$ nde
$[AD] \perp [BC]$
$E \in [AD]$
$|BE| = 7$ cm
$|AB| = 11$ cm
$|AC| = 9$ cm veriliyor.
Buna göre $|CE| = x$ in kaç cm olduğunu bulunuz.

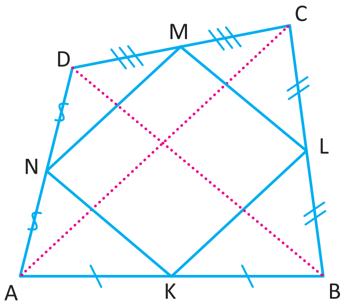
ÇÖZÜM

Şekilde $\overset{\frown}{BCE}$ nin $[BC]$ na yansıması $\overset{\frown}{BCE'}$ dir.
$|CE| = |CE'| = x$
$|BE| = |BE'| = 7$ cm olur. Yukarıda verilen 5. özellik kullanılırsa
$x^2 + 11^2 = 9^2 + 7^2$
$x^2 + 121 = 81 + 49$
$x^2 = 130 - 121$
$x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$ cm bulunur.



Özellikler

6. Bir dörtgenin kenarlarının orta noktaları bir paralelkenarın köşeleridir (Şekil 5.2.9).

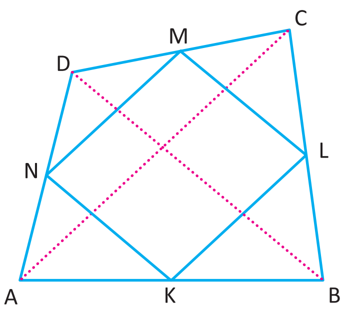


Şekil 5.2.9

$[KL] \parallel [AC] \parallel [NM]$ ve $|KL| = |NM| = \dfrac{|AC|}{2}$

$[ML] \parallel [DB] \parallel [NK]$ ve $|ML| = |NK| = \dfrac{|DB|}{2}$ olur.

4. ÖRNEK

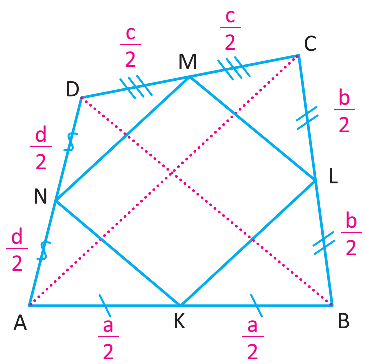


Şekilde ABCD dörtgeninde K, L, M, N bulundukları kenarların orta noktalarıdır. $|AC| = 18$ cm ve $|BD| = 16$ cm veriliyor.

Buna göre KLMN dörtgeninin çevre uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Yandaki şekilde kenarların orta noktalarının sınırladıkları uzunluklar incelenirse



$\widehat{CML} \sim \widehat{CDB}$ ve $\widehat{AKN} \sim \widehat{ABD}$ (K.A.K) olduğu görülür.

Bu durumda

$\dfrac{|ML|}{|BD|} = \dfrac{1}{2}$ ve $\dfrac{|KN|}{|BD|} = \dfrac{1}{2}$ olduğundan $\dfrac{|ML|}{|BD|} = \dfrac{|KN|}{|BD|} = \dfrac{1}{2}$ bulunur.

$|ML| = |KN| = \dfrac{|BD|}{2} = \dfrac{16}{2} = 8\,\text{cm}$

$\widehat{NDM} \sim \widehat{ADC}$ ve $\widehat{KBL} \sim \widehat{ABC}$ (K.A.K)

$\dfrac{|NM|}{|AC|} = \dfrac{1}{2}$ ve $\dfrac{|KL|}{|AC|} = \dfrac{1}{2}$ olduğundan $\dfrac{|NM|}{|AC|} = \dfrac{|KL|}{|AC|} = \dfrac{1}{2}$ olur.

$|NM| = |KL| = \dfrac{|AC|}{2} = \dfrac{18}{2} = 9\,\text{cm}$ bulunur.

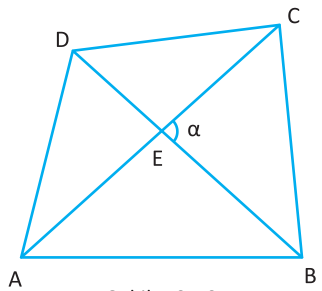
$$\begin{aligned} Ç(KLMN) &= 2 \cdot (8 + 9) \\ &= 2 \cdot 17 \\ &= 34\,\text{cm bulunur.} \end{aligned}$$

Dörtgende Alan Bağıntısı

Bir dörtgenin alanı, köşegen uzunlukları ile köşegenler arasında kalan açının sinüs değeriyle çarpımının yarısına eşittir (Şekil 5.2.10).

$|AC| = e$ ve $|BD| = f$ olmak üzere

$$A(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin\alpha$$
$$= \frac{1}{2} \cdot e \cdot f \cdot \sin\alpha$$

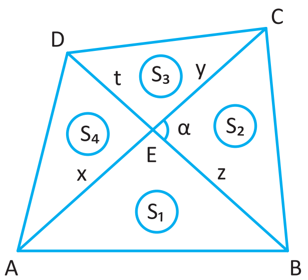


Şekil 5.2.10

İspat

$|AE| = x$, $|EC| = y$, $|BE| = z$ ve $|DE| = t$ olmak üzere

S_1, S_2, S_3, S_4 bulundukları bölgenin alanı olsun (Şekil 5.2.11). Bu durumda $\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$ olduğundan $A(ABCD) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ olur.



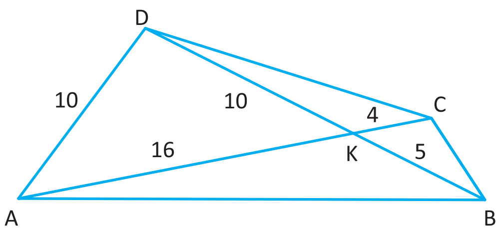
Şekil 5.2.11

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \cdot x \cdot z \cdot \sin\alpha \\ S_2 &= \frac{1}{2} \cdot y \cdot z \cdot \sin\alpha \\ S_3 &= \frac{1}{2} \cdot y \cdot t \cdot \sin\alpha \\ S_4 &= \frac{1}{2} \cdot x \cdot t \cdot \sin\alpha \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\Rightarrow S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \\ &= \frac{1}{2} \cdot [x \cdot z + y \cdot z + y \cdot t + x \cdot t] \cdot \sin\alpha \\ &= \frac{1}{2} \cdot [z \cdot (x+y) + t \cdot (y+x)] \cdot \sin\alpha \\ &= \frac{1}{2} \cdot [(x+y) \cdot (z+t)] \cdot \sin\alpha \\ &= \frac{1}{2} \cdot e \cdot f \cdot \sin\alpha \text{ olur.} \end{aligned}$$

Sonuç

Köşegenleri dik kesişen dörtgenin alanı $A(ABCD) = \dfrac{|AC| \cdot |BD|}{2} = \dfrac{e \cdot f}{2}$ olur ($\sin 90^\circ = 1$).

5. ÖRNEK



Şekildeki ABCD dörtgeninde A, K, C ve D, K,B doğrusal

$|AD| = |DK| = 10$ cm

$|AK| = 16$ cm

$|BK| = 5$ cm

$|KC| = 4$ cm veriliyor.

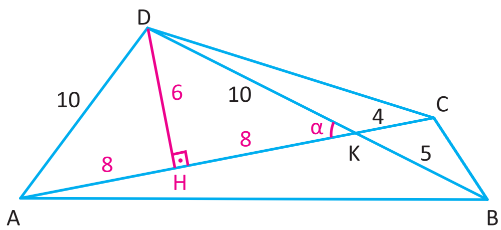
Buna göre $A(ABCD)$ nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Şekildeki ADK ikizkenar üçgeninde tabana ait yükseklik çizilirse

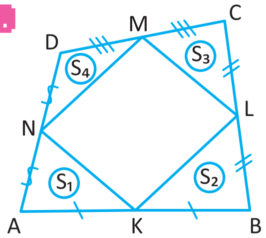
$\sin\alpha = \dfrac{6}{10}$ olur. Buradan

$$A(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin\alpha$$
$$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{2}{\cancel{20}} \cdot 15 \cdot \frac{6}{\cancel{10}}$$
$$= 90 \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$



Özellik

1.

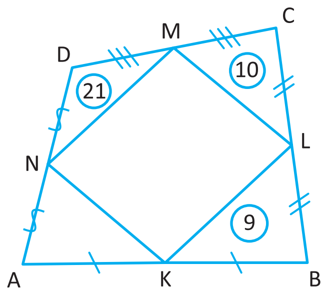


Şekil 5.2.12

K, L, M ve N kenarların orta noktaları S_1, S_2, S_3, S_4 yazıldıkları üçgenlerin alanını göstermek üzere (Şekil 5.2.12)

$$S_1+S_3=S_2+S_4=\frac{A(KLMN)}{2}=\frac{A(ABCD)}{4} \text{ olur.}$$

6. ÖRNEK



Şekilde ABCD bir dörtgen ve K, L, M, N noktaları bulundukları kenarların orta noktalarıdır.

$A(\widehat{DMN})=21\text{ cm}^2, A(\widehat{KBL})=9\text{ cm}^2, A(\widehat{CLM})=10\text{ cm}^2$ veriliyor.

Buna göre $A(\widehat{KAN})$ nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

K, L, M, N noktaları ABCD dörtgeninde bulundukları kenarların orta noktaları ise

$A(\widehat{DMN})+A(\widehat{KBL})=A(\widehat{CLM})+A(\widehat{AKN})$ olur.

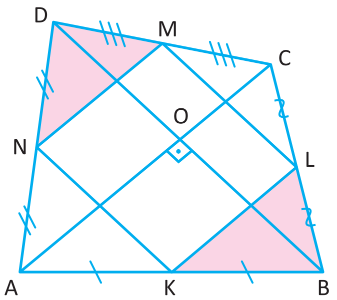
$21+9=10+A(\widehat{AKN})$

$30=10+A(\widehat{AKN})$

$A(\widehat{AKN})=30-10$

$A(\widehat{AKN})=20\text{ cm}^2$ bulunur.

7. ÖRNEK



Şekilde ABCD bir dörtgen ve K, L, M, N noktaları bulundukları kenarların orta noktalarıdır.

$m(\widehat{AOB})=90°, [AC]\cap[BD]=\{O\}$

$|AC|=8$ cm, $|BD|=9$ cm veriliyor.

Buna göre boyalı üçgenlerin alanları toplamının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

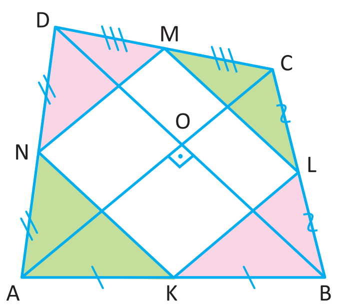
Şekilde 1. özellik gereği $A(\widehat{MND})+A(\widehat{KBL})=\dfrac{A(ABCD)}{4}$ olmalıdır.

$A(ABCD)=\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BD|\cdot\sin 90°$

$=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 9\cdot 1$

$=36\text{ cm}^2$ bulunur.

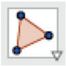
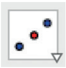
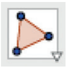
Bu durumda $A(\widehat{MND})+A(\widehat{KBL})=\dfrac{36}{4}=9\text{ cm}^2$ bulunur.



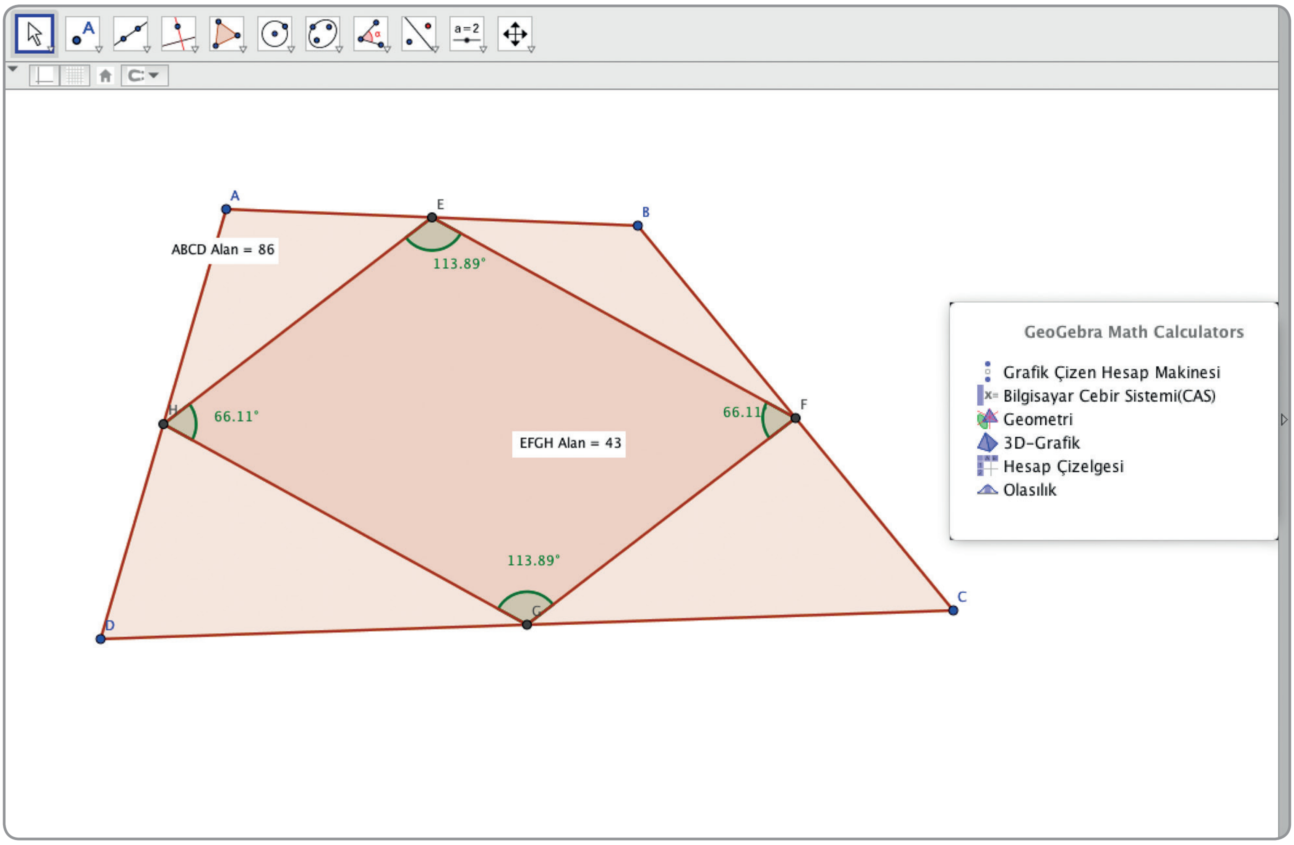
Teknoloji Uygulaması

Aşağıda Tablo 5.2.1'de GeoGebra programı kullanılarak bir dörtgenin kenarlarının orta noktalarının birleştirilmesiyle oluşan dörtgen incelenmiştir.

Tablo 5.2.1

Geometri	Programı çalıştırdığınızda **Geometri** kutucuğunu seçiniz.
	**Çokgen** aracını seçiniz. Bir ABCD dörtgeni oluşturunuz.
	**Orta Nokta** veya **Merkez Aracını** seçiniz. ABCD dörtgeninin kenarlarının orta noktalarını belirleyiniz.
	**Çokgen** aracını seçiniz. ABCD dörtgeninin kenarlarında işaretlenen orta noktaları birleştiriniz.
	**Alan** aracını seçiniz. ABCD dörtgeni ve kenarların orta noktalarından oluşan EFGH dörtgeninin alanlarını bulunuz.
	**Açı** aracını seçiniz. EFGH dörtgeninin iç açılarını belirleyiniz.

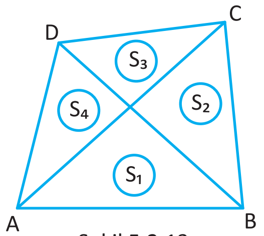
ABCD dörtgeninin köşelerini fare yardımıyla hareket ettirdiğinizde iki dörtgenin alanları arasındaki ilişkiyi inceleyiniz. EFGH dörtgeninin paralelkenar olduğuna dikkat ediniz (Görsel 5.2.1).



Görsel 5.2.1

Özellik

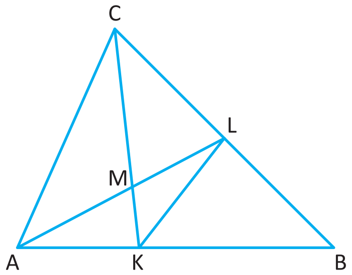
2.



Şekil 5.2.13

S_1, S_2, S_3, S_4 yazıldıkları üçgenlerin alanını göstermek üzere $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$ olur (Şekil 5.2.13).

8. ÖRNEK



Şekildeki $\widehat{ABC}$ nde

$[AL] \cap [CK] = \{M\}$

$A(\widehat{CAM}) = 6\,cm^2$

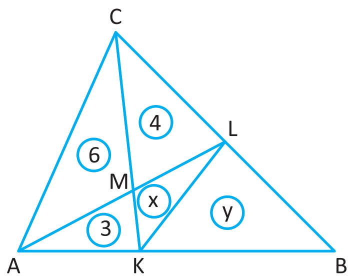
$A(\widehat{CML}) = 4\,cm^2$

$A(\widehat{AKM}) = 3\,cm^2$

$A(\widehat{KLM}) = x$ ve

$A(\widehat{KBL}) = y$ olduğuna göre x ve y nin kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Şekilde 2. özellik gereği AKLC dörtgeninde

$6 \cdot x = 3 \cdot 4$

$6x = 12$

$x = 2\,cm^2$ bulunur.

Yükseklikleri eşit olan üçgenlerin alanlara oranı bu yüksekliklere ait taban uzunlukları oranına eşittir. Bu nedenle

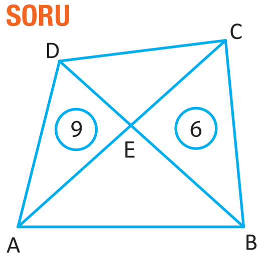
$$\frac{A(\widehat{ALC})}{A(\widehat{ABL})} = \frac{|CL|}{|LB|}, \quad \frac{6+4}{3+2+y} = \frac{10}{5+y} = \frac{|CL|}{|LB|} \quad \text{ve} \quad \frac{A(\widehat{KLC})}{A(\widehat{KBL})} = \frac{|CL|}{|LB|}, \quad \frac{2+4}{y} = \frac{6}{y} = \frac{|CL|}{|LB|} \text{ bulunur.}$$

Bu eşitliklerden $\frac{10}{5+y} = \frac{6}{y} \Rightarrow 10y = 30 + 6y$ elde edilir. Buradan $4y = 30$

$y = \frac{15}{2}\,cm^2$ bulunur.

Sıra Sizde

SORU



Şekildeki ABCD dörtgeninde

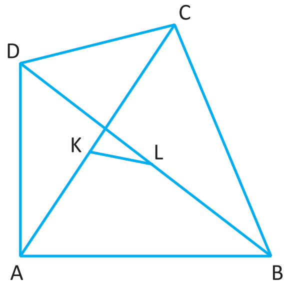
$[AC]$ ve $[BD]$ köşegen

$\frac{A(\widehat{DCE})}{A(\widehat{ABE})} = \frac{1}{3}$, $A(\widehat{ADE}) = 9\,cm^2$, $A(\widehat{BCE}) = 6\,cm^2$ olduğuna göre

$A(\widehat{DCE})$ nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

9. ÖRNEK



Şekildeki ABCD dörtgeninde AC ve BD köşegen
$|AK| = |KC|$
$|DL| = |BL|$
$|AD| = 6$ cm, $|BC| = 10$ cm veriliyor.
Buna göre $|KL|$ nun alabileceği en küçük tam sayı değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

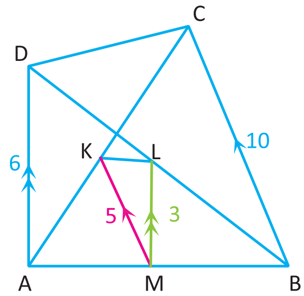
Şekilde $M \in [AB]$ olmak üzere K ve L noktaları AB kenarının orta noktası M ile birleştirilise ABD üçgeninin orta tabanı $|LM| = \frac{6}{2} = 3$ ve ABC üçgeninin orta tabanı $|KM| = \frac{10}{2} = 5$ bulunur.

$\widehat{MLK}$ nde üçgen eşitsizliği yazılırsa

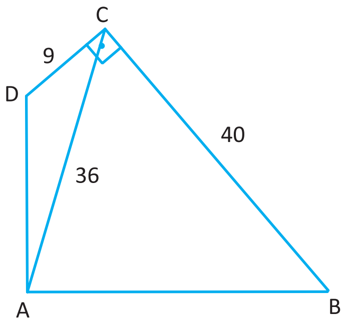
$5 - 3 < |KL| < 5 + 3$

$2 < |KL| < 8$ bulunur.

Bu durumda $|KL|$ nun alabileceği en küçük tam sayı değeri 3 olur.



10. ÖRNEK



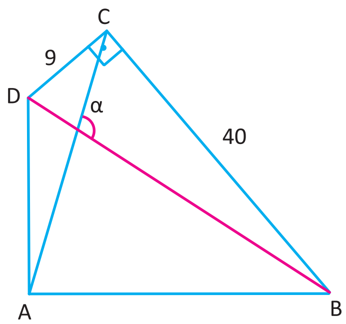
Şekildeki ABCD dörtgeninde
$[BC] \perp [DC]$
$|DC| = 9$ cm
$|BC| = 40$ cm
$|AC| = 36$ cm veriliyor.
Buna göre $A(ABCD)$ nın en büyük değerinin kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

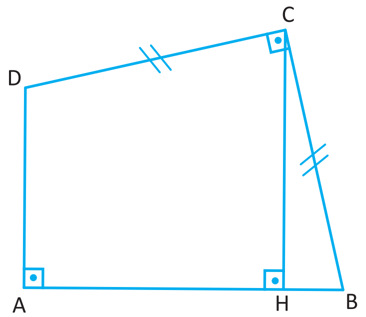
Şekilde ABCD dörtgeninde BD köşegeni çizilip köşegenler arasındaki açı α olarak seçilirse BCD dik üçgeninde

$$|BD|^2 = 9^2 + 40^2$$
$$= 81 + 1600$$
$$= 1681 \Rightarrow |BD| = 41 \text{ cm olur.}$$

$$A(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin\alpha$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 36 \cdot 41 \cdot \underbrace{\sin\alpha}_{1}, \qquad \{\alpha \in [0, 180^\circ], 0 \le \sin\alpha \le 1\}$$
$$= 18 \cdot 41$$
$$= 738 \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$



11. ÖRNEK



Şekildeki ABCD dörtgeninde

$[AD] \perp [AB]$

$[BC] \perp [DC]$

$[CH] \perp [AB]$

$|DC| = |BC|$ ve $|HC| = 12$ cm veriliyor.

Buna göre $A(ABCD)$ nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM:

Şekilde $[DK] \perp [HC]$ olacak şekilde $[DK]$ çizilirse $\widehat{HBC}$ ve $\widehat{KCD}$ üçgenleri eş olur (A.K.A).

Bu durumda

$|HB| = |KC| = x, |AD| = |HK| = 12 - x$

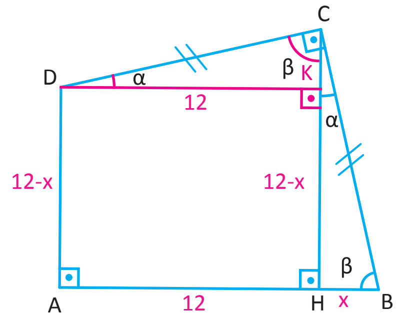
ve $|HC| = |DK| = |AH| = 12$ cm olur.

$A(ABCD) = 2 \cdot A(\widehat{DKC}) + A(AHKD)$

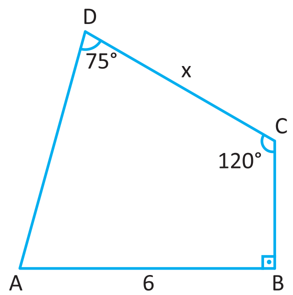
$A(ABCD) = \cancel{2} \cdot \left(\dfrac{x \cdot 12}{\cancel{2}}\right) + 12 \cdot (12 - x)$

$= \cancel{12x} + 144 - \cancel{12x}$

$= 144\ cm^2$ bulunur.



12. ÖRNEK



Şekildeki ABCD dörtgeninde

$[CB] \perp [AB]$

$|AB| = 2 \cdot |BC| = 6$ cm

$m(\widehat{BCD}) = 120^\circ$

$m(\widehat{ADC}) = 75^\circ$ veriliyor.

Buna göre $|CD| = x$ değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

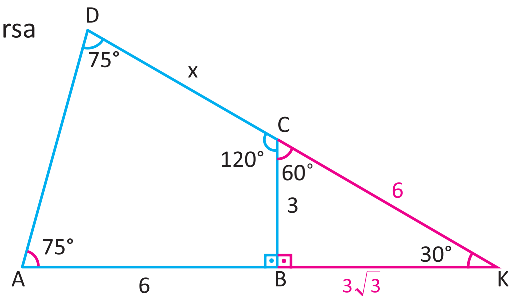
Şekilde DC ve AB kenarları uzatılarak dörtgen üçgene tamamlanırsa ADK ikizkenar üçgeni ve KCB $(30^\circ - 60^\circ - 90^\circ)$ dik üçgeni elde edilir.

Buradan

$|KB| = 3\sqrt{3}$ cm ve $|KC| = 6$ cm olur.

ADK üçgeninde $|KD| = |KA|$

$x + 6 = 6 + 3\sqrt{3} \Rightarrow x = 3\sqrt{3}$ cm bulunur.



13. ÖRNEK

Görselde verilen çini yüzeyde düzgün altıgenler ve düzgün altıgen parçaları kullanılmıştır.
Altıgenlerin bir kenarı 10 cm olduğuna göre

a) Görseldeki altıgenler ile altıgen parçalarının alanları toplamının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.
b) Görseldeki koyu renkli tüm üçgenlerin alanlar toplamının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Görselde verilen tam ve yarım altıgenler beşer tanedir. Çini yüzeyde verilen altıgenlerin alanlarının bulunabilmesi için toplam 7 tam ve 1 yarım altıgenin alanının hesaplanması gerekir. Buna göre

Bir kenar uzunluğu a cm olan düzgün altıgenin alanı

$\dfrac{6 \cdot a^2\sqrt{3}}{4}$ olduğundan çini yüzeydeki tüm altıgenlerin alanı

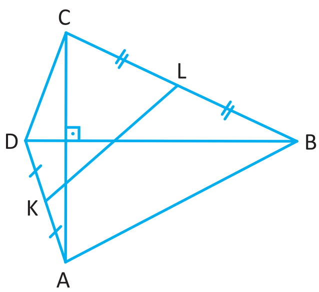
$$7 \cdot \frac{6 \cdot 10^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6 \cdot 10^2\sqrt{3}}{4} = 7 \cdot 150\sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot 150\sqrt{3}$$
$$= 1050\sqrt{3} + 75\sqrt{3}$$
$$= 1125\sqrt{3}\ cm^2 \text{ bulunur.}$$

b) Görselde verilen koyu renkli tam eşkenar üçgenlerin sayısı 12 tanedir. Koyu renkli yarım eşkenar üçgenlerin sayısı ise 6 dır. Bu durumda çini yüzeydeki eşkenar üçgenlerin alanlarının bulunabilmesi için 15 eşkenar üçgenin alanı hesaplanmalıdır. Buna göre eşkenar üçgenlerin alanları toplamı

$$15 \cdot \frac{10^2\sqrt{3}}{4} = 15 \cdot 25\sqrt{3} = 375\sqrt{3}\ cm^2 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

SORU

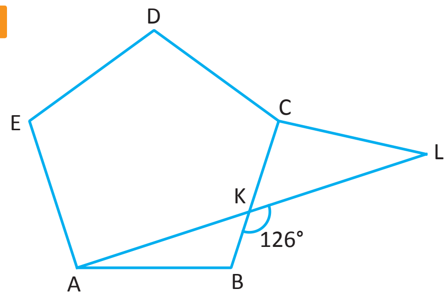


Şekildeki ABCD dörtgeninin köşegenleri dik kesişmektedir.
$|AC| = 10$ cm
$|BD| = 24$ cm
K ve L bulundukları kenarların orta noktalarıdır.
Buna göre KL kenarının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

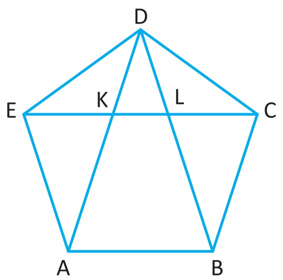
ALIŞTIRMALAR-1

1.



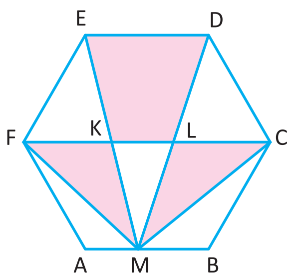
Şekildeki düzgün beşgende A, K, L doğrusal $m(\widehat{BKL}) = 126^\circ$ $|BC| = |CL|$ veriliyor.
Buna göre $m(\widehat{CLK})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

2.



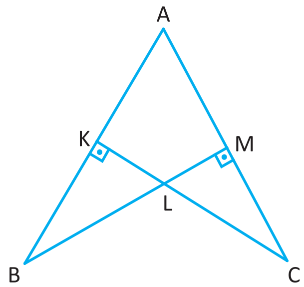
Şekildeki düzgün beşgende E, K, L ve C doğrusal;
$|KL| = 1$ cm veriliyor.
Buna göre düzgün beşgenin çevresini cm cinsinden bulunuz.

3.



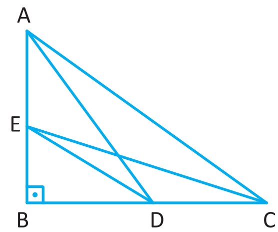
Şekildeki düzgün altıgende
F, K, L ve C doğrusal;
$M \in [AB]$
$A(\widehat{MKF}) = 3 \text{ cm}^2$
$A(\widehat{MCL}) = 4 \text{ cm}^2$
veriliyor.
Buna göre KLDE dörtgeninin alanını cm^2 cinsinden bulunuz.

4. Aşağıdaki $\widehat{ABM}$ ve $\widehat{AKC}$ dik üçgenlerinde



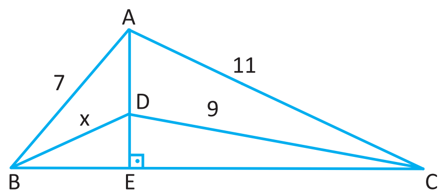
$[AB] \perp [CK]$,
$[AC] \perp [BM]$
$|AC| = 10$ cm,
$|BL| = 4$ cm ve
$|LC| = \sqrt{35}$ cm
veriliyor.
Buna göre AB kenarının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

5. Aşağıdaki ABC dik üçgeninde



$E \in [AB]$
$D \in [BC]$
$|AC| = 12$ cm
$|EC| = 9$ cm
$|ED| = 2$ cm veriliyor.
Buna göre AD kenarının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

6.



Şekildeki ABC üçgeninde B, E, C doğrusal
$[AE] \perp [BC]$
$|AB| = 7$ cm
$|DC| = 9$ cm
$|AC| = 11$ cm veriliyor.
Buna göre $|BD| = x$ değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

10.5.3. ÖZEL DÖRTGENLER

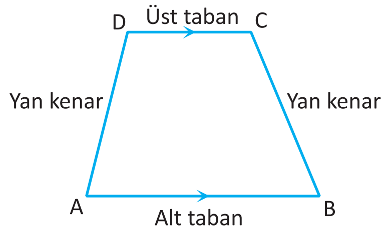
Dörtgenler, kenar ve açı özelliklerine göre özel adlar alır. Bunlar yamuk, paralelkenar, eşkenar dörtgen, dikdörtgen, kare ve deltoiddir.

1. Yamuk

Tanım

En az iki kenarı paralel olan dörtgene **yamuk** denir. Paralel olan kenarlara **alt ve üst tabanlar**, diğer kenarlara **yan kenarlar** denir.

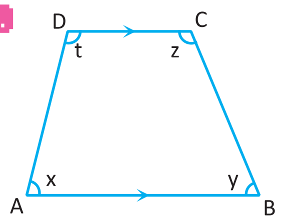
Şekilde $[AB] \parallel [DC]$ olduğundan $[AB]$ ve $[DC]$ sırasıyla alt ve üst tabanlar, $[AD]$ ile $[BC]$ yan kenarlardır (Şekil 5.3.1).



Şekil 5.3.1

Özellik

1.

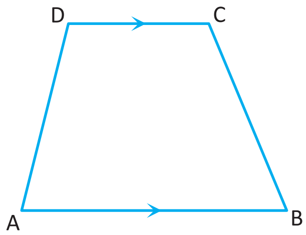


Şekil 5.3.2

Yamukta tabanların bir yan kenarla oluşturduğu iç açıların ölçüleri toplamı 180° olur (Şekil 5.3.2).

$x + t = 180°$
$y + z = 180°$

1. ÖRNEK



ABCD yamuğunda $[AB] \parallel [CD]$ ve $n, k \in \mathbb{Z}^+$

$m(\widehat{A}) = 2x$

$m(\widehat{B}) = 5x$

$m(\widehat{C}) = nx$

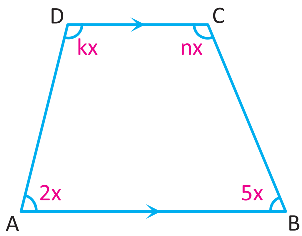
$m(\widehat{D}) = kx$ veriliyor.

Buna göre $k - n$ değerini bulunuz.

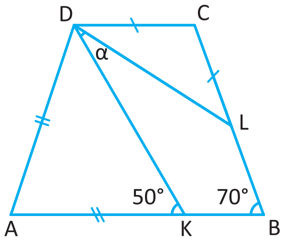
ÇÖZÜM

$m(\widehat{A}) + m(\widehat{D}) = 180°$ ve $m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180°$ olduğundan

$$2x + kx = 5x + nx$$
$$kx - nx = 5x - 2x$$
$$(k - n) \cdot x = 3x$$
$$k - n = 3 \text{ olur.}$$

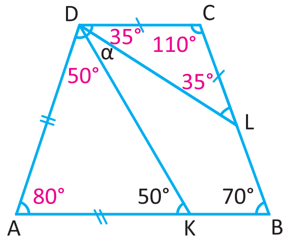


2. ÖRNEK



ABCD yamuğunda $[AB] \parallel [CD]$,
$|AD| = |AK|$
$|CD| = |CL|$
$m(\widehat{ABC}) = 70^\circ$
$m(\widehat{AKD}) = 50^\circ$ verilmiştir.
Buna göre $m(\widehat{KDL}) = \alpha$ kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



$m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ$

$70^\circ + m(\widehat{C}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{C}) = 110^\circ$

$|CD| = |CL|$ olduğundan LCD ikizkenar üçgendir. Şekilde $m(\widehat{CDL}) = x$ olsun

$m(\widehat{L}) + m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 180^\circ$

$x + x + 110^\circ = 180^\circ$

$2x = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ \Rightarrow x = 35^\circ$

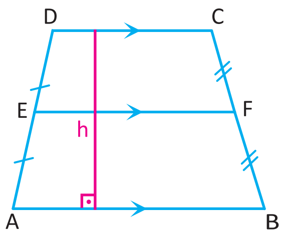
$m(\widehat{AKD}) = m(\widehat{KDC}) = 50^\circ$ (İç ters açılar)

$\alpha + 35^\circ = 50^\circ \Rightarrow \alpha = 50^\circ - 35^\circ = 15^\circ$ bulunur.

Tanım

Bir yamukta yan kenarların orta noktalarını birleştiren doğru parçasına **yamuğun orta tabanı** denir.

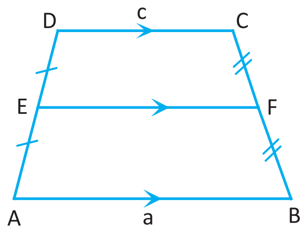
Bir yamukta alt ve üst taban arasındaki en kısa uzaklığa **yamuğun yüksekliği** denir (Şekil 5.3.3).



Şekil 5.3.3

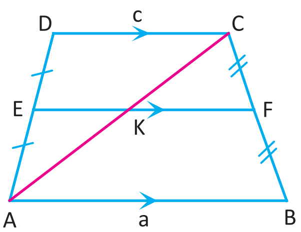
Özellik

2. Bir yamukta orta taban uzunluğu, alt ve üst taban uzunlukları toplamının yarısına eşittir. Orta taban, diğer tabanlara paraleldir (Şekil 5.3.4).



Şekil 5.3.4

İspat



Şekil 5.3.5

$|AB| = a, |DC| = c$ ve $[AC] \cap [EF] = \{K\}$ olsun.

Bir üçgende orta taban uzunluğu, taban uzunluğunun yarısıdır.

Buna göre

ABC üçgeninde $[KF] \parallel [AB], |KF| = \frac{a}{2}$ ve

DCA üçgeninde $[KE] \parallel [DC], |EK| = \frac{c}{2}$ olur (Şekil 5.3.5).

$|EF| = |EK| + |KF|$

$= \frac{a}{2} + \frac{c}{2}$

$= \frac{a + c}{2}$ bulunur.

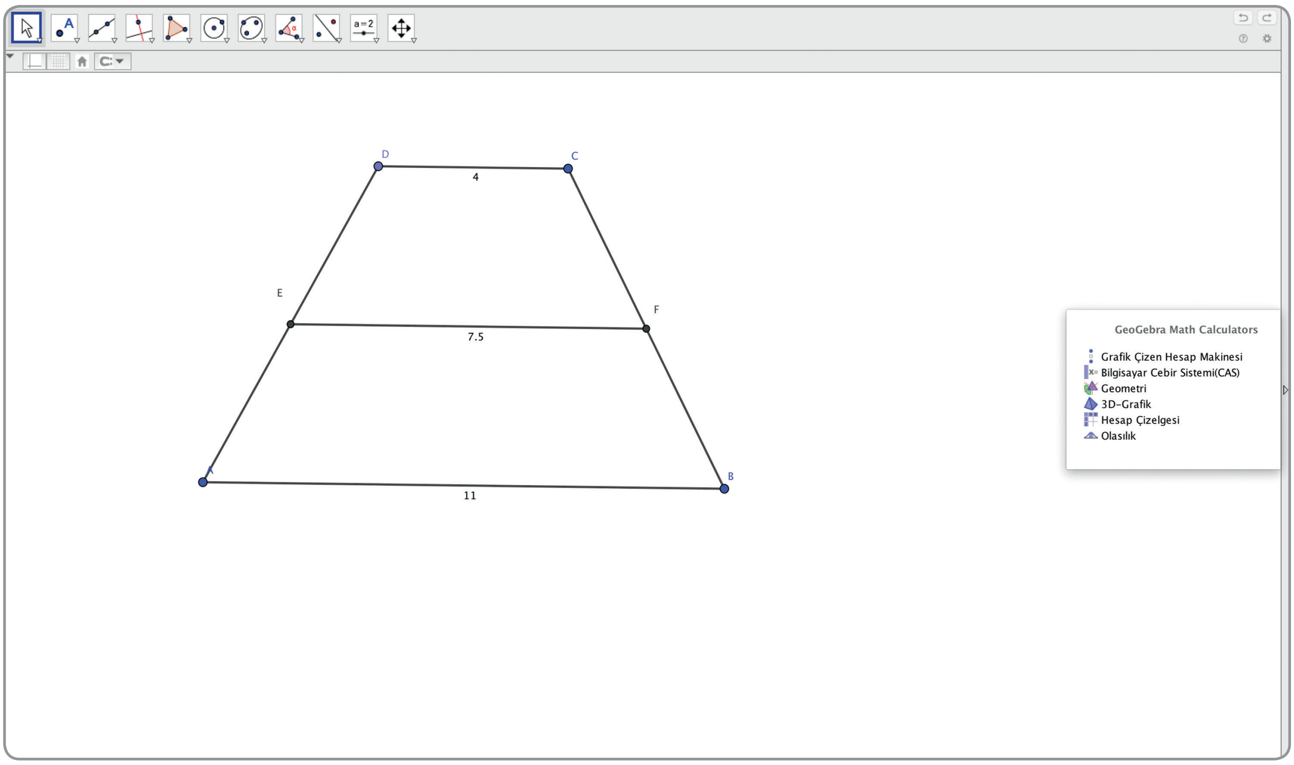
Teknoloji Uygulaması

Tablo 5.3.1'de GeoGebra programı kullanılarak yamukta orta taban uzunluğu incelenmiştir.

Tablo 5.3.1

Geometri	Programı çalıştırdığınızda **Geometri** kutucuğunu seçiniz.
	Nokta aracını seçiniz. 3 nokta işaretleyiniz.
	Doğru Parçası aracını seçiniz. A ile B noktalarını birleştiriniz.
	Paralel Doğru aracını seçiniz. AB doğru parçasını ve C noktasını işaretleyiniz. Oluşturduğunuz doğru üzerinde bir D noktası belirleyiniz.
	Doğru Parçası aracını seçiniz. A ile D ve B ile C noktalarını birleştiriniz. Daha sonra paralel doğruyu seçip farenin sağ tuşuna basınız. **Nesneyi Göster** seçeneğini işaretleyiniz.
	Doğru Parçası aracını seçiniz. C ile D noktasını birleştirirerek ABCD yamuğunu oluşturunuz.
	Orta Nokta veya **Merkez** aracını seçiniz. AD ve BC doğru parçalarının orta noktalarını belirleyiniz.
	Doğru Parçası aracını seçiniz. Yan kenarların orta noktaları olan E ve F noktalarını birleştiriniz. EF orta tabanını oluşturunuz.
	Uzaklık veya **Uzunluk** aracını seçiniz. AB, EF ve CD doğru parçalarının uzunluklarını bulunuz.

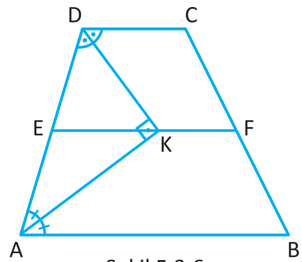
ABCD yamuğunun köşelerini fare yardımıyla hareket ettirdiğinizde alt taban, üst taban ve orta taban arasındaki ilişkiyi inceleyiniz (Görsel 5.3.1).



Görsel 5.3.1

Özellik

3. Bir yamukta tabanların bir yan kenarla oluşturduğu iç açıların açıortay doğruları orta taban üzerinde dik kesişir (Şekil 5.3.6).



Şekil 5.3.6

İspat

A ile D bütünler açılar olduğundan A ile D açılarının açıortayları arasındaki açı 90° dir.

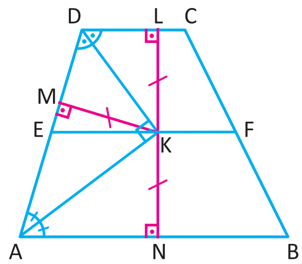
$[AB] \parallel [DC]$ olmak üzere

$[AK]$ A açısının açıortayı ve

$[DK]$ D açısının açıortayı ise

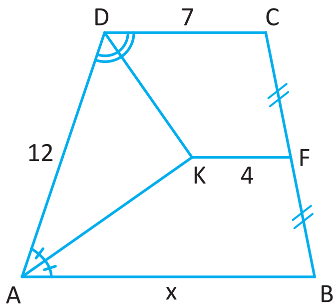
K noktasından A ve D açılarının kollarına çizilen dikmelerin uzunlukları birbirine eşittir.

Bu durumda $|KL| = |KN| = |KM|$ olduğundan $K \in [EF]$ olur (Şekil 5.3.7).



Şekil 5.3.7

3. ÖRNEK



Şekildeki ABCD yamuğunda $[AB] \parallel [KF] \parallel [DC]$, $[AK]$ ve $[DK]$ açıortaydır.

$|BF| = |CF|$

$|AD| = 12$ cm

$|CD| = 7$ cm

$|KF| = 4$ cm verilmiştir.

Buna göre $|AB| = x$ değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

ABCD yamuğunda $[AK]$ A açısının, $[DK]$ D açısının açıortayı ve $m(\widehat{A}) + m(\widehat{D}) = 180^\circ$ olduğundan $m(\widehat{AKD}) = 90^\circ$ dir. Hipotenüse ait kenarortay uzunluğu, hipotenüs uzunluğunun yarısı olduğundan

AKD üçgeninde $|EK| = \dfrac{|AD|}{2}$

$= \dfrac{12}{2} = 6$ cm olur.

$|EF| = |EK| + |KF|$

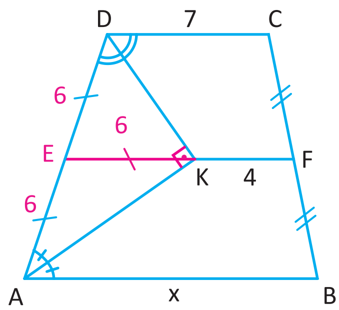
$= 6 + 4$

$= 10$ cm

$|EF| = \dfrac{|AB| + |DC|}{2}$

$10 = \dfrac{x+7}{2} \Rightarrow 20 = x + 7$

$x = 13$ cm bulunur.



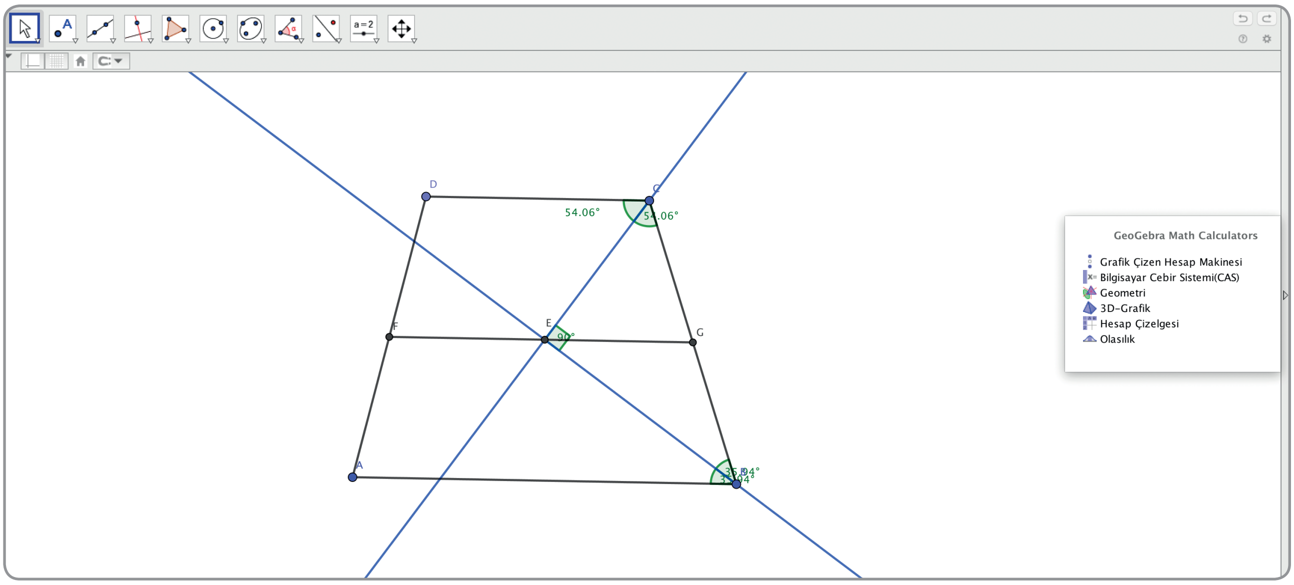
Teknoloji Uygulaması

Tablo 5.3.2'de GeoGebra programı kullanılarak yamukta orta taban ve yan kenar üzerindeki açıortaylar arasındaki ilişki incelenmiştir.

Tablo 5.3.2

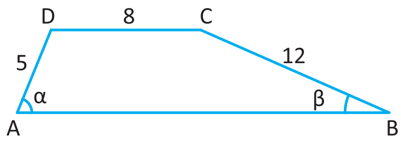
Geometri	Programı çalıştırdığınızda **Geometri** kutucuğunu seçiniz.
	Nokta aracını seçiniz. 3 nokta işaretleyiniz.
	Doğru Parçası aracını seçiniz. A ile B noktalarını birleştiriniz.
	Paralel Doğru aracını seçiniz. AB doğru parçasını ve C noktasını işaretleyiniz. Oluşturduğunuz doğru üzerinde bir D noktası belirleyiniz.
	Doğru Parçası aracını seçiniz. A ile D ve B ile C noktalarını birleştiriniz. Daha sonra paralel doğruyu seçip farenin sağ tuşuna basınız. **Nesneyi Göster** seçeneğini işaretleyiniz.
	Doğru Parçası aracını seçiniz. C ile D noktasını birleştirirerek ABCD yamuğunu oluşturunuz.
	Açıortay aracını seçiniz. D, C ve B noktalarını seçerek C açısının açıortayını, benzer şekilde A, B ve C noktalarını seçerek B açısının açıortayını oluşturunuz.
	Kesiştir aracını seçiniz. Çizilen açıortayların kesim noktasını belirleyiniz.
	Açı aracını seçiniz. Sırasıyla B, E ve C noktalarını seçiniz. Benzer şekilde DEC, ECB, CBE ve EBA açılarını seçiniz. Açıortaylar arasındaki açının 90 derece olduğuna dikkat ediniz.
	Orta Nokta veya **Merkez** aracını seçiniz. AD ve BC doğru parçalarının orta noktalarını belirleyiniz.
	Doğru Parçası aracını seçiniz. Yan kenarların orta noktaları olan G ve F noktalarını birleştiriniz. GF orta tabanını oluşturunuz.

ABCD yamuğunun köşelerini fare yardımıyla hareket ettirdiğinizde yan kenar üzerindeki açıortayların orta taban üzerinde dik kesiştiğine dikkat ediniz (Görsel 5.3.2).



Görsel 5.3.2

4. ÖRNEK



Şekildeki ABCD yamuğunda $[AB] \parallel [DC]$, $m(\widehat{BAD}) = \alpha$, $m(\widehat{ABC}) = \beta$

$\alpha + \beta = 90^\circ$

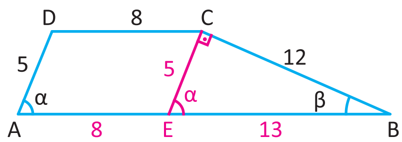
$|AD| = 5$ cm

$|DC| = 8$ cm

$|CB| = 12$ cm verilmiştir.

Buna göre $|AB| = x$ değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Şekilde ABCD yamuğunda $[AD] \parallel [CE]$ olacak şekilde $[CE]$ çizilirse $|DC| = |AE| = 8$ cm ve yöndeş açı özelliğinden $m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{CEB}) = \alpha$ olur.

Şekilden de görüldüğü gibi

$\alpha + \beta = 90^\circ$ olduğundan $m(\widehat{ECB}) = 90^\circ$ olur.

ECB dik üçgeninde Pisagor teoreminden

$|EB|^2 = 5^2 + 12^2$

$= 25 + 144$

$= 169 \Rightarrow |EB| = 13$ cm olur. Buradan

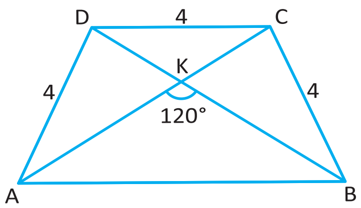
$|AB| = |AE| + |EB|$

$= 8 + 13$

$= 21$ cm bulunur.

Sıra Sizde

SORU



Şekildeki ABCD yamuğunda A, K, C ve D, K, B doğrusal

$[AB] \parallel [DC]$

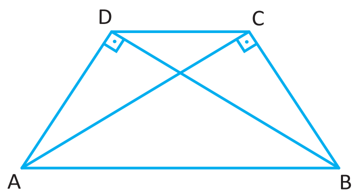
$m(\widehat{AKB}) = 120^\circ$

$|AD| = |DC| = |BC| = 4$ cm veriliyor.

Buna göre $[AB]$ nın uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

SORU



Şekildeki ABCD yamuğunda

$[AB] \parallel [DC]$

$[AD] \perp [BD]$ ve $|DC| = 2$ cm

$[AC] \perp [BC]$ $|AB| = 6$ cm veriliyor.

Buna göre yamuğun yüksekliğinin kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

İkizkenar Yamuk

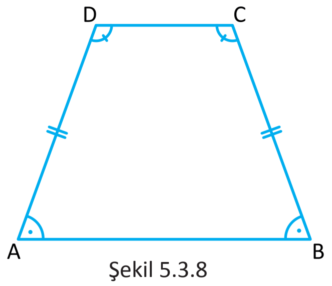
Tanım

Bir tabanına ait taban açılarının ölçüleri birbirine eşit olan yamuğa **ikizkenar yamuk** denir (Şekil 5.3.8).

İkizkenar yamukta taban açılarının ölçüleri birbirine eşittir.

ABCD ikizkenar yamuğunda $[AB] \parallel [DC]$ olmak üzere $|AD| = |BC|$,

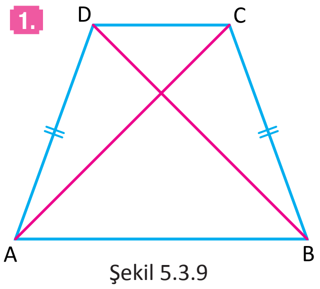
$m(\widehat{A}) = m(\widehat{B})$ ve dolayısıyla $m(\widehat{C}) = m(\widehat{D})$ olur.



Şekil 5.3.8

Özellik

1.

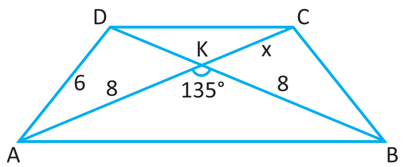


Şekil 5.3.9

$[AB] \parallel [CD]$ ve $|AD| = |BC|$ olmak üzere ikizkenar yamukta köşegen uzunlukları birbirine eşittir (Şekil 5.3.9).

$|AC| = |BD|$

5. ÖRNEK



Şekildeki ABCD yamuğunda

$[AB] \parallel [DC]$

$[AC] \cap [BD] = \{K\}$

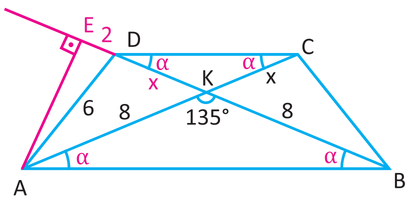
$m(\widehat{AKB}) = 135^\circ$

$|AK| = |KB| = 8$ cm

$|DA| = 6$ cm veriliyor.

Verilenlere göre $m(\widehat{KDA}) > 90^\circ$ ise $|KC| = x$ değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



KAB ikizkenar üçgeninde taban açıları α alınırsa

$m(\widehat{KDC}) = m(\widehat{KCD}) = \alpha$ olur. (İç ters açılar)

Buradan $|KC| = |KD| = x$ olur.

$m(\widehat{AKB}) = 135^\circ \Rightarrow m(\widehat{AKD}) = 45^\circ$ olur.

AKD üçgeninde DK kenarına ait yükseklik çizilirse AKE üçgeni ikizkenar dik üçgen olur.

Pisagor teoreminden $|AE| = |KE| = 4\sqrt{2}$ cm bulunur.

ADE dik üçgeninde $|AD|^2 = |EA|^2 + |ED|^2$

$$6^2 = (4\sqrt{2})^2 + |ED|^2$$

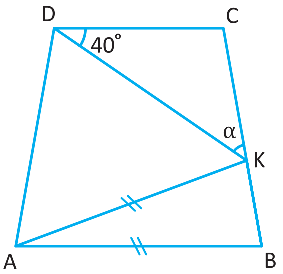
$$36 = 32 + |ED|^2$$

$$|ED|^2 = 36 - 32$$

$$|ED|^2 = 4 \Rightarrow |ED| = 2 \text{ cm olur.}$$

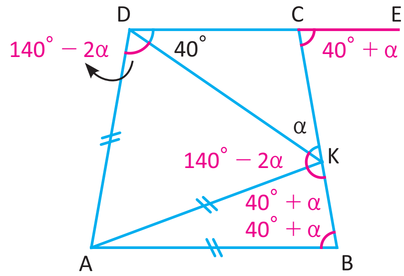
$|KE| = 4\sqrt{2} = 2 + x \Rightarrow x = 4\sqrt{2} - 2$ cm bulunur.

6. ÖRNEK



Şekilde ABCD ikizkenar yamuk.
$[AB] \parallel [DC]$
$m(\widehat{CDK}) = 40^\circ$
$|AB| = |AK| = |BC| = |AD|$ verilmiştir.
$m(\widehat{DKC}) = \alpha$ nın kaç derece olduğunu bulunuz.

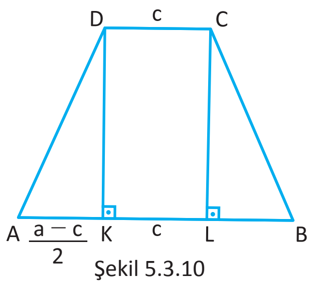
ÇÖZÜM



Şekilde DKC üçgeninde C dış açısının ölçüsü
$m(\widehat{BCE}) = 40^\circ + \alpha = m(\widehat{ABC})$ dir (İç ters açılar).
$|AB| = |AK|$ olduğundan $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{AKB}) = 40^\circ + \alpha$ bulunur.
$|AB| = |AK| = |AD|$ olduğundan
$m(\widehat{AKD}) = m(\widehat{ADK}) = 180^\circ - \alpha - (40^\circ + \alpha) = 140^\circ - 2\alpha$ olur.
$m(\widehat{ADC}) = 140^\circ - 2\alpha + 40^\circ = 180^\circ - 2\alpha$
$m(\widehat{A}) + m(\widehat{D}) = 180^\circ$ olduğundan $m(\widehat{A}) = 2\alpha$ olur.
ABCD ikizkenar yamuğunda $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B})$ eşitliğinden
$\alpha + 40^\circ = 2\alpha \Rightarrow \alpha = 40^\circ$ bulunur.

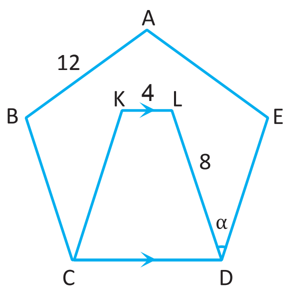
Özellik

2. Şekil 5.3.10'daki $[AB] \parallel [CD]$ ABCD ikizkenar yamuğunda $[AB] \perp [DK]$, $[AB] \perp [CL]$
$|AB| = a$ ve $|DC| = c$
olmak üzere
$|AK| = |LB| = \dfrac{a-c}{2}$ olur.



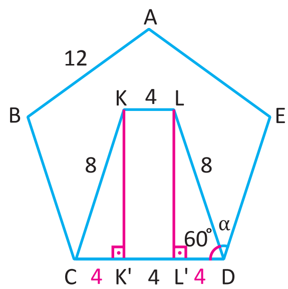
Şekil 5.3.10

7. ÖRNEK



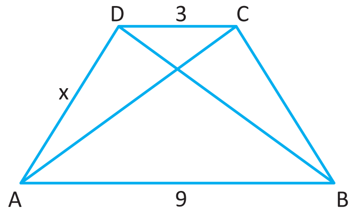
Şekildeki ABCDE bir düzgün beşgen, CDLK ikizkenar yamuk
$[CD] \parallel [KL]$, $|CK| = |DL| = 8$ cm, $|AB| = 12$ cm, $|KL| = 4$ cm olduğuna göre $m(\widehat{LDE}) = \alpha$ nın kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Şekilde CDLK ikizkenar yamuğunda K ve L köşelerinden CD kenarına ait yükseklikler çizilirse $|CK'| = |DL'| = \dfrac{12-4}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$ cm olur.
LL'D dik üçgeni $|L'D| = \dfrac{|LD|}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$ cm olduğundan $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ özel üçgeni olur.
Buradan $m(\widehat{CDL}) = 60^\circ$ ve $m(\widehat{LDE}) = 108^\circ - 60^\circ = 48^\circ$ olur.

8. ÖRNEK



Şekilde ABCD bir yamuk ve $[AB] \mathbin{/\!/} [DC]$

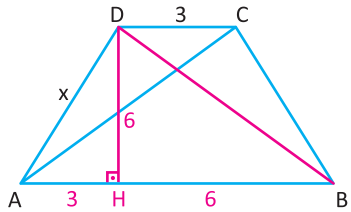
$|AC| = |BD| = 6\sqrt{2}$ cm

$|AB| = 9$ cm

$|DC| = 3$ cm verilmiştir.

Buna göre $|AD|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Şekilde $|AC| = |BD|$ olduğundan ABCD ikizkenar yamuktur.

D köşesinden AB alt tabanına DH yüksekliği çizilirse

$|AH| = \dfrac{9-3}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$ cm olur. Buradan $|HB| = 9 - 3 = 6$ cm olur.

DHB dik üçgeninde Pisagor teoreminden

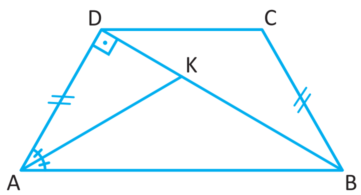
$$|DH|^2 + |HB|^2 = |DB|^2$$
$$|DH|^2 + 6^2 = (6\sqrt{2})^2$$
$$|DH|^2 + 36 = 72$$
$$|DH|^2 = 36$$
$$|DH| = 6 \text{ cm bulunur.}$$

Yine DHA dik üçgeninde Pisagor teoreminden $|DH|^2 + |AH|^2 = |AD|^2$

$$6^2 + 3^2 = x^2$$
$$36 + 9 = x^2$$
$$x^2 = 45$$
$$x = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ cm bulunur.}$$

Sıra Sizde

SORU



Şekilde ABCD ikizkenar yamuk B, K, D doğrusal

$[AB] \mathbin{/\!/} [DC]$, $[AD] \perp [BD]$ ve $[AK]$ açıortay,

$|AD| = |BC|$

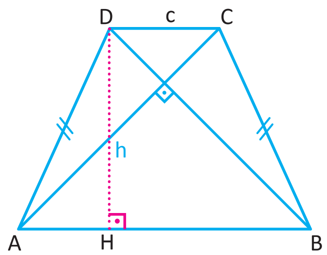
$|DK| = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$ cm, $|BK| = \dfrac{9}{\sqrt{5}}$ cm verilmiştir.

Buna göre $|DC| = x$ değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Özellik

3. Köşegenleri dik kesişen ABCD ikizkenar yamuğunda
$[AB] \parallel [DC]$,
$|AB| = a$, $|DC| = c$ ve
$|DH| = h$ olmak üzere
$h = \frac{a+c}{2}$ olur (Şekil 5.3.11).



Şekil 5.3.11

İspat

Şekilde $[AC] \cap [BD] = \{K\}$ noktasından tabanlara ait dikme çizilirse $[KL]$ ve $[KM]$ dikmeleri, sırasıyla ABK ve CDK ikizkenar dik üçgenlerinde hipotenüse ait kenarortaydır (Şekil 5.3.12).

İkizkenar dik üçgende hipotenüse çizilen kenarortay hem açıortay hem de yükseklik olduğundan

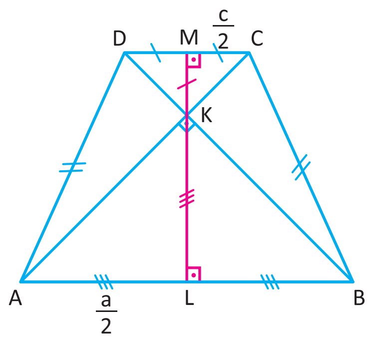
$|KL| = |AL| = |LB| = \frac{|AB|}{2} = \frac{a}{2}$ ve

DCK ikizkenar dik üçgeninde

$|KM| = |DM| = |MC| = \frac{|DC|}{2} = \frac{c}{2}$ olur.

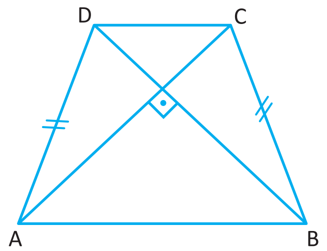
ABCD yamuğunun yüksekliği

$h = |KL| + |KM| = \frac{a}{2} + \frac{c}{2} = \frac{a+c}{2}$ bulunur.



Şekil 5.3.12

9. ÖRNEK



Şekildeki ABCD ikizkenar yamuğunda $[AB] \parallel [CD]$, $[AC] \perp [BD]$,
$|AD| = |BC|$
$|AC| + |BD| = 12\sqrt{2}$ cm olmak üzere
ABCD ikizkenar yamuğunun yüksekliğini cm cinsinden bulunuz.

ÇÖZÜM

ABCD ikizkenar yamuk olduğundan $|AC| = |BD| = 6\sqrt{2}$ cm dir.
$|AB| = a$ ve $|DC| = c$ olsun.

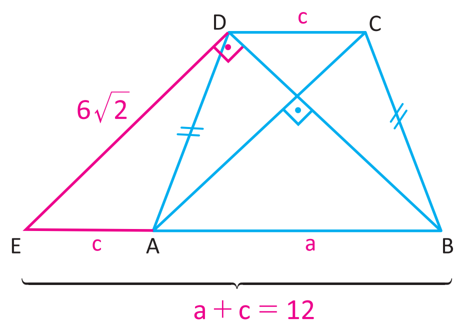
$[AC] \parallel [DE]$ olacak şekilde yandaki çizim yapılırsa
$|DE| = |AC| = 6\sqrt{2}$ cm, $|DC| = |AE| = c$ olur.

$m(\widehat{BDE}) = 90^\circ$ olduğundan BDE dik üçgeninde Pisagor teoreminden

$$|EB|^2 = |DE|^2 + |DB|^2$$
$$(a+c)^2 = (6\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{2})^2$$
$$= 72 + 72$$
$$= 144 \Rightarrow a + c = 12 \text{ cm olur.}$$

İkizkenar yamukta köşegenler dik kesiştiğinden

$h = \frac{a+c}{2} = \frac{12}{2} = 6$ cm bulunur.



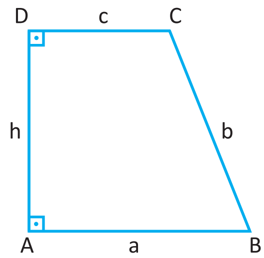
Dik Yamuk

Tanım

Bir yan kenarı tabanlara dik olan yamuğa **dik yamuk** denir (Şekil 5.3.13).

ABCD dik yamuğunda

$[DA] \perp [AB]$ ve $m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) = 90^\circ$ olur.

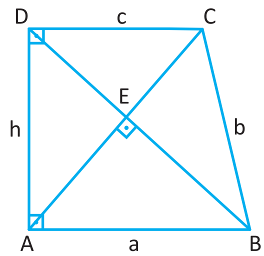


Şekil 5.3.13

Özellik

1. Köşegenleri dik kesişen dik yamukta yükseklik alt taban ve üst taban uzunluklarının çarpımlarının kareküküdür (Şekil 5.3.14).

$h = \sqrt{a \cdot c}$



Şekil 5.3.14

İspat

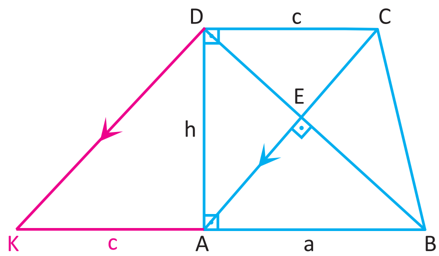
Şekilde ABCD dik yamuğunda AB kenarı uzatılıp D köşesinden $[AC] \mathbin{/\!/} [DK]$ olacak şekilde $[DK]$ çizilirse

$m(\widehat{AEB}) = m(\widehat{KDB}) = 90^\circ$ olur. DKB dik üçgeninde Öklid teoremi uygulanırsa

$|DA|^2 = |AB| \cdot |AK|$

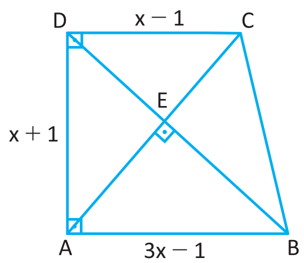
$h^2 = a \cdot c$

$h = \sqrt{a \cdot c}$ olur (Şekil 5.3.15).



Şekil 5.3.15

10. ÖRNEK



Şekilde ABCD yamuğunda $[AB] \mathbin{/\!/} [DC]$, $[AD] \perp [AB]$ ve $[AC] \perp [BD]$,

$|AB| = (3x - 1)$ cm

$|AD| = (x + 1)$ cm

$|DC| = (x - 1)$ cm

olduğuna göre $|AD|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

ABCD dik yamuğunda $[AC] \perp [BD]$ olduğundan

$$|AD|^2 = |AB| \cdot |DC|$$

$$(x+1)^2 = (3x-1) \cdot (x-1)$$

$$x^2 + 2x + 1 = 3x^2 - 3x - x + 1$$

$$2x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x \cdot (2x - 6) = 0$$

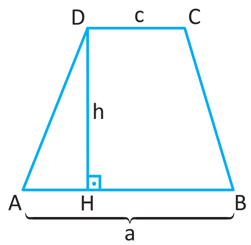
$$x_1 = 0 \ \vee \ 2x - 6 = 0 \Rightarrow x_2 = 3 \text{ olur.}$$

$x - 1 > 0$ olduğundan $|AD| = x + 1 \Rightarrow |AD| = 3 + 1 = 4$ cm bulunur.

Yamuğun Alanı

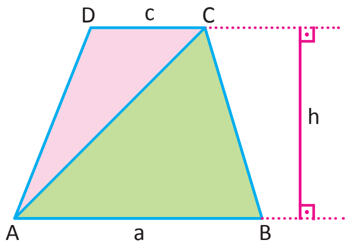
Yamuğun alanı, taban uzunlukları toplamının yükseklik ile çarpımının yarısına eşittir (Şekil 5.3.16).

$A(ABCD)=\dfrac{(a+c)\cdot h}{2}$ olur.



Şekil 5.3.16

İspat



Şekil 5.3.17

ABCD yamuğunda AC köşegeni çizilirse yamuk ABC ve ACD üçgenlerine ayrılır. Bu durumda

$$\begin{aligned} A(ABCD) &= A(\widehat{ABC})+A(\widehat{ACD}) \\ &= \frac{a\cdot h}{2}+\frac{c\cdot h}{2} \\ &= \frac{(a+c)\cdot h}{2} \end{aligned}$$

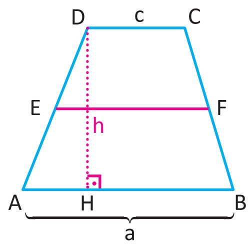
bulunur (Şekil 5.3.17).

Sonuç

$[EF]$ orta taban olmak üzere ABCD yamuğunun alanı

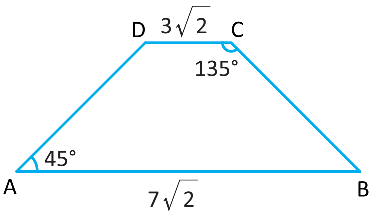
$$\begin{aligned} A(ABCD) &= \frac{(a+c)\cdot h}{2} \\ &= |EF|\cdot h \end{aligned}$$

olur (Şekil 5.3.18).



Şekil 5.3.18

11. ÖRNEK



Şekildeki ABCD yamuğunda $[AB]\,/\!/\,[CD]$

$m(\widehat{DAB})=45^\circ$

$m(\widehat{DCB})=135^\circ$

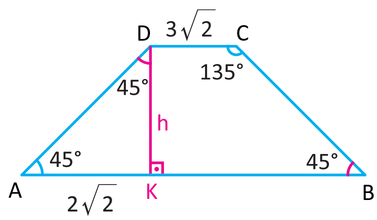
$|AB|=7\sqrt{2}$ cm

$|DC|=3\sqrt{2}$ cm veriliyor.

Buna göre $A(ABCD)$ nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

ABCD yamuğunda $m(\widehat{C})=135^\circ$ ve $m(\widehat{B})=45^\circ \Rightarrow m(\widehat{A})=m(\widehat{B})$ olur. Bu durumda ABCD ikizkenar yamuktur. Şekilde görüldüğü gibi D köşesinden AB tabanına h yüksekliği çizilirse



$|AK|=\dfrac{|AB|-|DC|}{2}=\dfrac{7\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$ cm olur.

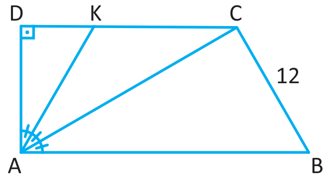
AKD ikizkenar dik üçgen olduğundan

$h=|AK|=2\sqrt{2}$ cm olur. Bu durumda yamuğun alanı

$$\begin{aligned} A(ABCD) &= \frac{(|AB|+|CD|)\cdot h}{2} \\ &= \frac{(7\sqrt{2}+3\sqrt{2})\cdot \cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}} \\ &= 10\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=20\,cm^2 \end{aligned}$$

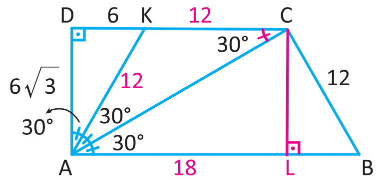
bulunur.

12. ÖRNEK



Şekilde ABCD dik yamuk $[AB] \parallel [DC]$ ve $[AD] \perp [AB]$ olmak üzere $|BC| = 2 \cdot |DK| = 12$ cm
$m(\widehat{DAK}) = m(\widehat{KAC}) = m(\widehat{CAB})$ veriliyor.
Buna göre $A(ABCD)$ nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



ABCD yamuğunda $m(\widehat{DAB}) = 90^\circ$ olduğundan
$3 \cdot m(\widehat{DAK}) = 90^\circ$
$m(\widehat{DAK}) = 30^\circ$ olur.

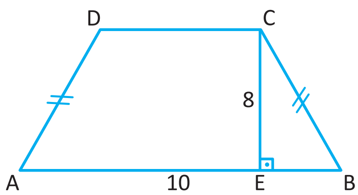
$\widehat{DAK}$ $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ özel üçgeni olduğundan
$|DK| = 6$ cm
$|DA| = 6\sqrt{3}$ cm
$|AK| = 12$ cm olur.
$m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{ACD}) = 30^\circ$ dir (İç ters açılar).

KAC üçgeninde $m(\widehat{KAC}) = m(\widehat{ACD}) = 30^\circ$ olduğundan $|AK| = |KC| = 12$ cm bulunur.
Şekildeki gibi C köşesinden $[AB]$ na $[CL]$ dik olarak çizilirse $|DC| = |AL| = 18$ cm olur.
CLB dik üçgeninde Pisagor teoreminden $|LB| = 6$ cm bulunur.

$$|AB| = |AL| + |LB|$$
$$= 18 + 6$$
$$= 24 \text{ cm olur. Buradan } A(ABCD) = \frac{(a+c) \cdot h}{2}$$
$$= \frac{(24+18) \cdot \overset{3}{\cancel{6}}\sqrt{3}}{\underset{1}{\cancel{2}}}$$
$$= 42 \cdot 3\sqrt{3}$$
$$= 126\sqrt{3} \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

SORU



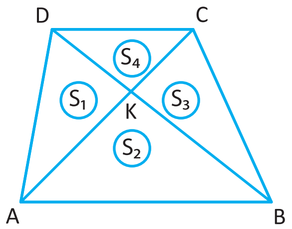
Şekildeki ABCD ikizkenar yamuğunda $[AB] \parallel [CD]$, $|AD| = |BC|$
$[CE] \perp [AB]$
$|CE| = 8$ cm
$|AE| = 10$ cm dir.
Buna göre ABCD ikizkenar yamuğunun alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Özellik

2. Şekildeki ABCD yamuğunda köşegenlerle oluşan üçgenlerin alanları arasında aşağıdaki bağıntılar vardır (Şekil 5.3.19).

$S_1 = S_3$ ve $S_1^2 = S_2 \cdot S_4 = S_3^2$ olur.



Şekil 5.3.19

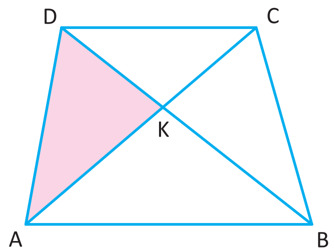
İspat

$A(\widehat{ACD}) = A(\widehat{DBC})$ olduğundan $S_1 + S_4 = S_4 + S_3 \Rightarrow S_1 = S_3$ olur.

$\dfrac{|KC|}{|KA|} = \dfrac{A(\widehat{BKC})}{A(\widehat{AKB})} = \dfrac{S_3}{S_2}$ ve $\dfrac{|KC|}{|KA|} = \dfrac{A(\widehat{DKC})}{A(\widehat{AKD})} = \dfrac{S_4}{S_1}$ olduğundan

$$\frac{|KC|}{|KA|} = \frac{S_3}{S_2} = \frac{S_4}{S_1} \Rightarrow S_1^2 = S_2 \cdot S_4 = S_3^2 \text{ olur.}$$

13. ÖRNEK



Şekilde ABCD bir yamuktur. A, K, C ve B, K, D doğrusal

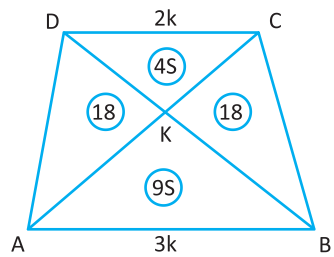
$[AB] \mathbin{/\!/} [DC]$

$2 \cdot |AB| = 3 \cdot |DC|$

$A(\widehat{DAK}) = 18 \text{ cm}^2$ veriliyor.

Buna göre ABCD yamuğunun alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



$2 \cdot |AB| = 3 \cdot |DC|$ olduğundan $|AB| = 3k$ ve $|DC| = 2k$ yazılabilir.

$\widehat{AKB} \sim \widehat{CKD}$ dir $(A.A.A)$. Bu durumda

$$\frac{A(\widehat{AKB})}{A(\widehat{CKD})} = \left(\frac{3k}{2k}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \text{ olur.}$$

Şekilden de görüldüğü gibi $A(\widehat{AKB}) = 9S$ ve $A(\widehat{CKD}) = 4S$ alınırsa

2. özellik gereği

$9S \cdot 4S = 18 \cdot 18$

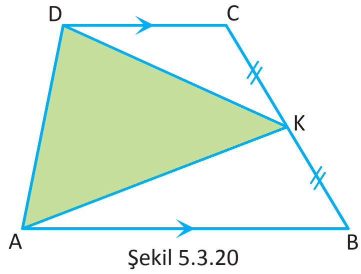
$\cancel{36} \cdot S^2 = \cancel{(2 \cdot 18)} \cdot 9$

$S^2 = 9 \text{ cm}^2 \Rightarrow S = 3 \text{ cm}$ bulunur.

$$\begin{aligned} A(ABCD) &= 9S + 4S + 18 + 18 \\ &= 13 \cdot S + 36 \\ &= 13 \cdot 3 + 36 \\ &= 39 + 36 \\ &= 75 \text{ cm}^2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Özellik

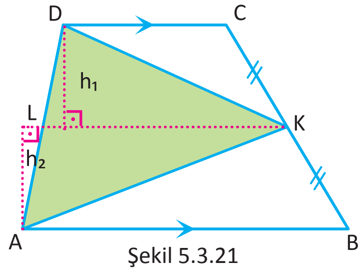
3. $[AB] \parallel [CD]$ olmak üzere
ABCD yamuğunda $|BK| = |CK|$ ise
$A(\widehat{AKD}) = \dfrac{A(ABCD)}{2}$ ve
$A(\widehat{AKD}) = A(\widehat{DKC}) + A(\widehat{ABK})$ olur (Şekil 5.3.20).



Şekil 5.3.20

İspat

$[KL] \parallel [AB]$ çizilirse $[KL]$ orta taban olur.

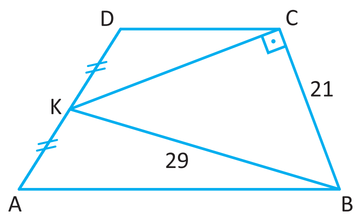


Şekil 5.3.21

$$A(\widehat{AKD}) = A(\widehat{AKL}) + A(\widehat{LKD})$$
$$= \frac{1}{2}\cdot|KL|\cdot h_2 + \frac{1}{2}\cdot|KL|\cdot h_1$$
$$= \frac{1}{2}\cdot|KL|\cdot(h_2 + h_1)$$
$$= \frac{|KL|\cdot h}{2} \quad \left(|KL| = \frac{a+c}{2}, h = h_1 + h_2\right)$$
$$= \frac{\left(\frac{a+c}{2}\cdot h\right)}{2}$$

$= \dfrac{A(ABCD)}{2}$ olur. Bu durumda $A(\widehat{AKD}) = (\widehat{ABK}) + (\widehat{KDC})$ olur (Şekil 5.3.21).

14. ÖRNEK



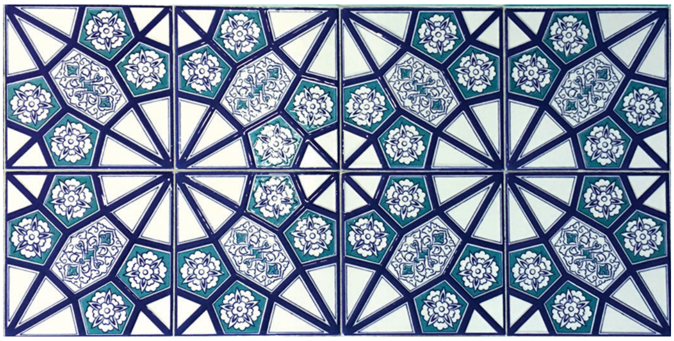
Şekilde ABCD yamuk
$[AB] \parallel [DC]$, $[KC] \perp [BC]$ ve $|DK| = |KA|$ olmak üzere
$|BK| = 29$ cm
$|BC| = 21$ cm olduğuna göre ABCD yamuğunun alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

CKB dik üçgeninde Pisagor teoreminden $|KB|^2 = |CK|^2 + |CB|^2$
$$29^2 = |CK|^2 + 21^2$$
$$841 = |CK|^2 + 441$$
$$|CK|^2 = 841 - 441$$
$$= 400 \Rightarrow |CK| = 20 \text{ cm olur.}$$

Bu durumda $A(ABCD) = 2\cdot A(\widehat{CKB})$
$$= \cancel{2}\cdot\frac{|CK|\cdot|CB|}{\cancel{2}}$$
$$= 20\cdot 21$$
$$= 420 \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$

15. ÖRNEK



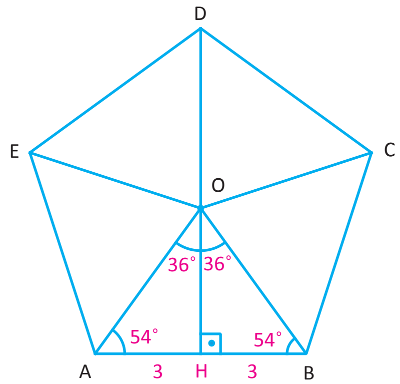
Görseldeki geleneksel süsleme örneğinde düzgün geometrik şekiller ve ikizkenar yamuklar kullanılmıştır. Düzgün beşgenlerden birinin kenar uzunluğu 6 cm, $\tan 54^\circ \cong 1,37$, $\tan 75^\circ \cong 3,73$, $\tan 67,5^\circ \cong 2,4$ ve $\sin 72^\circ \cong 0,95$ olmak üzere

a) Görseldeki düzgün beşgenlerin alanları toplamını bulunuz.
b) Görseldeki düzgün onikigenler ve onikigen parçalarının alanları toplamını bulunuz.
c) Görseldeki düzgün sekizgen ve sekizgen parçalarının alanları toplamını bulunuz.
ç) Görseldeki ikizkenar yamukların alanları toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Şekildeki gibi düzgün beşgende köşeler düzgün beşgenin merkezi olan O noktası ile birleştirilirse beş tane eş ikizkenar üçgen oluşur. Buradan OAB ikizkenar üçgeninde OH yüksekliği çizilirse taban iki eş parçaya bölünür. OHB dik üçgeninde tanjant

$$\tan 54^\circ = \frac{|OH|}{|HB|} = \frac{|OH|}{\frac{6}{2}} = \frac{|OH|}{3} \cong 1,37 \Rightarrow |OH| \cong 4,11\text{ cm olur.}$$



Buna göre eş ikizkenar üçgenlerden birinin alanı

$$A(\widehat{OAB}) = \frac{|AB|\cdot|OH|}{2} = \frac{6\cdot 4,11}{2} = 12,33\text{ cm}^2 \text{ olur.}$$

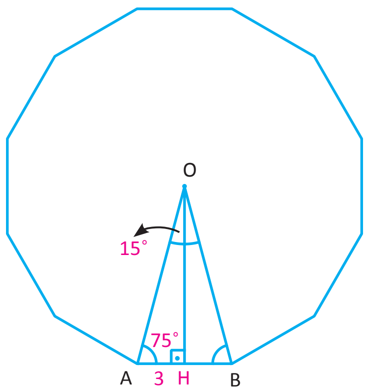
O hâlde düzgün beşgenlerden birinin alanı

$$A(ABCDE) = 5\cdot 12,33 = 61,65\text{ cm}^2 \text{ olur.}$$

Görselde 32 adet düzgün beşgen olduğundan düzgün beşgenlerin alanları toplamı $32\cdot 61,65 = 1972,8\text{ cm}^2$ bulunur.

b) Şekildeki gibi düzgün on ikigende köşeler düzgün on ikigenin merkezi olan O noktası ile birleştirilirse on iki tane eş ikizkenar üçgen oluşur. Buradan OAB ikizkenar üçgeninde OH yüksekliği çizilirse taban iki eş parçaya bölünür. OHB dik üçgeninde tanjant

$$\tan 75^\circ = \frac{|OH|}{|HB|} = \frac{|OH|}{\frac{6}{2}} = \frac{|OH|}{3} \cong 3,73 \Rightarrow |OH| \cong 11,19\text{ cm olur.}$$



Buna göre eş ikizkenar üçgenlerden birinin alanı

$$A(\widehat{OAB}) = \frac{|AB|\cdot|OH|}{2} = \frac{6\cdot 11,19}{2} = 33,57\text{ cm}^2 \text{ olur.}$$

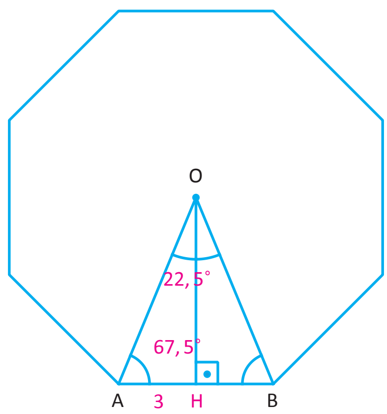
O hâlde düzgün on ikigenlerden birinin alanı

$$A = 12\cdot 33,57 = 402,84\text{ cm}^2 \text{ olur.}$$

Görselde 2 adet düzgün on ikigen, 2 adet yarım düzgün on ikigen ve 4 adet çeyrek düzgün on ikigen olduğundan 4 adet tam düzgün on ikigen vardır. Buna göre görseldeki düzgün on ikigenler ve on ikigen parçalarının alanları toplamı $4\cdot 402,84 = 1611,36\text{ cm}^2$ bulunur.

c) Şekildeki gibi düzgün sekizgende köşeler düzgün sekizgenin merkezi olan O noktası ile birleştirilirse sekiz tane eş ikizkenar üçgen oluşur. Buradan OAB ikizkenar üçgeninde OH yüksekliği çizilirse taban iki eş parçaya bölünür. OHB dik üçgeninde tanjant

$$\tan 67,5^\circ = \frac{|OH|}{|HB|} = \frac{|OH|}{\frac{6}{2}} = \frac{|OH|}{3} \cong 2,4 \Rightarrow |OH| \cong 7,2\,\text{cm olur.}$$



Buna göre eş ikizkenar üçgenlerden birinin alanı

$$A(\widehat{OAB}) = \frac{|AB|\cdot|OH|}{2} = \frac{6\cdot 7,2}{2} = 21,6\,\text{cm}^2 \text{ olur.}$$

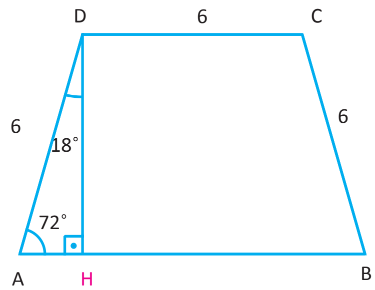
O hâlde düzgün sekizgenlerden birinin alanı

$A = 8\cdot 21,6 = 172,8\,\text{cm}^2$ olur.

Görselde 1 adet düzgün sekizgen ve 6 adet yarım düzgün sekizgen olduğundan 4 adet tam düzgün sekizgen vardır. Buna göre görseldeki düzgün sekizgenler ve sekizgen parçalarının alanları toplamı $4\cdot 172,8 = 691,2\,\text{cm}^2$ bulunur.

ç) Şekildeki yamukta D köşesinden AB kenarına yükseklik çizilirse DHA dik üçgeninde sinüs

$$\sin 72^\circ = \frac{|DH|}{|DA|} = \frac{|DH|}{6} \cong 0,95 \Rightarrow |DH| \cong 5,7\,\text{cm olur.}$$



DHA dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

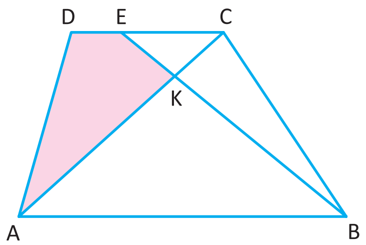
$$|DA|^2 = |AH|^2 + |DH|^2$$
$$6^2 = |AH|^2 + (5,7)^2$$
$$36 = |AH|^2 + 32,49$$
$$|AH|^2 = 36 - 32,49$$
$$= 3,51 \Rightarrow |AH| = \sqrt{3,51} \cong 1,9\,\text{cm olur.}$$

Buradan ABCD ikizkenar yamuk olduğundan C köşesinden yükseklik çizildiğinde tabanda kalan parçanın uzunluğu da $1,9\,\text{cm}$ olur.
Buradan $|AB| = 2\cdot 1,9 + 6 = 9,8\,\text{cm}$ olur.
Buna göre yamuklardan birinin alanı

$$A(ABCD) = \frac{(|AB|+|DC|)\cdot|DH|}{2} = \frac{(9,8+6)\cdot 5,7}{2} = 45,03\,\text{cm}^2 \text{ olur.}$$

Görselde 16 adet ikizkenar olduğundan ikizkenar yamukların alanları toplamı
$16\cdot 45,03 = 720,48\,\text{cm}^2$ bulunur.

16. ÖRNEK



Şekilde ABCD bir yamuk

$[AB] \parallel [DC]$ ve $[AC] \cap [BE] = \{K\}$ olmak üzere

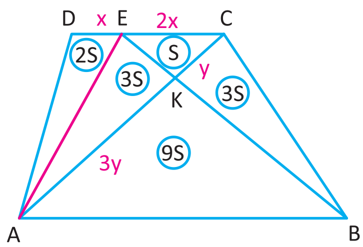
$|EC| = 2|DE|$

$|AK| = 3|KC|$

$A(AKED) = 15\ cm^2$ olduğuna göre

ABCD yamuğunun alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



$|EC| = 2|DE|$ olduğundan $|DE| = x$ seçilirse $|EC| = 2x$ ve

$|AK| = 3|KC|$ olduğundan $|KC| = y$ seçilirse $|AK| = 3y$ olur.

Şekilde ABK ve CKE üçgenleri benzerdir. Bu durumda

$$\frac{A(\widehat{AKB})}{A(\widehat{CKE})} = k^2 = \left(\frac{3y}{y}\right)^2 = 3^2 = 9$$

$A(\widehat{CKE}) = S$ alınırsa $A(\widehat{AKB}) = 9S$ olur.

$S_1 = A(\widehat{AKE}), S_2 = A(\widehat{AKB}), S_3 = A(\widehat{BKC}), S_4 = A(\widehat{CKE})$ alınırsa

$S_2 = 9S$ ve $S_4 = S$ olur.

$S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$ ve $S_1 = S_3$ olduğundan

$S_1^2 = 9S.S = 9S^2 \Rightarrow S_1 = 3S = S_3$ elde edilir.

Yükseklikleri eşit olan üçgenlerin alanları oranının, tabanları oranına eşit olduğundan

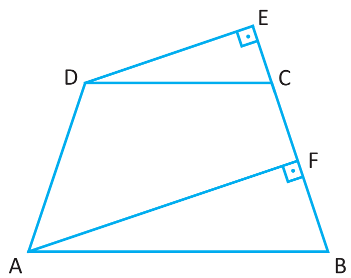
$A(\widehat{AEC}) = 4S$ ve $A(\widehat{ADE}) = 2S$ olur.

$A(AKED) = 5S = 15\,cm^2 \Rightarrow S = 3\,cm^2$ olur

$A(ABCD) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + A(\widehat{ADE})$

$= 3S + 9S + 3S + S + 2S = 18S$ olur. $A(ABCD) = 54\,cm^2$ olur.

17. ÖRNEK



Şekilde ABCD bir yamuk ve AFED dik yamuktur.

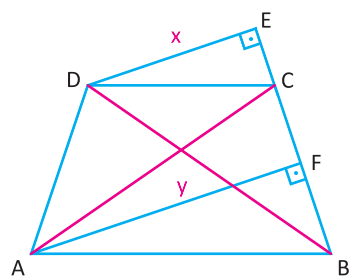
$[AB] \parallel [DC]$, $[AF] \parallel [DE]$

$[AF] \perp [BE]$, $[DE] \perp [BE]$

$|DE| + |AF| = 8$ cm veriliyor.

$|BC| = 10$ cm olduğuna göre $A(ABCD)$ değerinin kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Şekilde ABCD yamuğunda AC ve BD köşegenler, $|DE| = x, |AF| = y$ olsun.

$A(\widehat{ACD}) = A(\widehat{BCD}) = \dfrac{|BC| \cdot |DE|}{2} = \dfrac{10x}{2} = 5x\ cm^2$ ve

$A(\widehat{ABC}) = \dfrac{|BC| \cdot |AF|}{2} = \dfrac{10y}{2} = 5y\ cm^2$ olur. Buradan

$A(ABCD) = A(\widehat{ABC}) + A(\widehat{ACD})$

$= 5y + 5x$

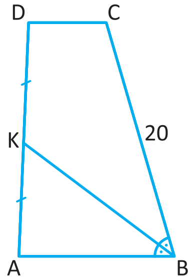
$= 5 \cdot (x + y)$

$= 5 \cdot 8 \qquad (|DE| + |EF| = x + y = 8)$

$= 40\,cm^2$ bulunur.

ALIŞTIRMALAR-2

1. Şekildeki ABCD yamuğunda $[AB] \parallel [DC]$



$m(\widehat{CBK}) = m(\widehat{KBA})$

$|DK| = |AK|$

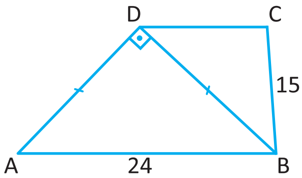
$3|DC| = 2|AB|$

$|BC| = 20$ cm

veriliyor.

Buna göre DC kenarının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

2. Şekildeki ABCD yamuğunda $[AB] \parallel [DC]$



$[AD] \perp [BD]$

$m(\widehat{DCB}) > 90$

$|AD| = |BD|$

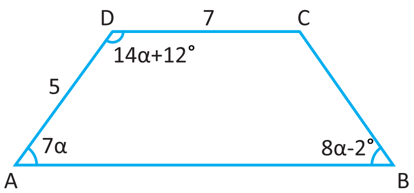
$|AB| = 24$ cm

$|BC| = 15$ cm

veriliyor.

Buna göre DC kenarının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

3.



Şekildeki ABCD yamuğunda

$[AB] \parallel [DC]$

$m(\widehat{A}) = 7\alpha$

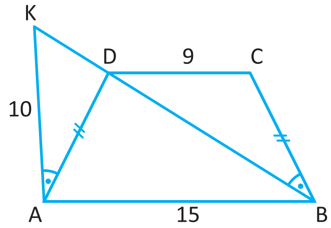
$m(\widehat{B}) = 8\alpha - 2^\circ$

$m(\widehat{D}) = 14\alpha + 12^\circ$

$|DC| = 7$ cm, $|AD| = 5$ cm veriliyor.

Buna göre AB kenarının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

4. Şekildeki ABCD yamuğunda K, D, B doğrusal



$[AB] \parallel [DC]$

$m(\widehat{KBC}) = m(\widehat{DAK})$

$|BC| = |AD|$

$|DC| = 9$ cm

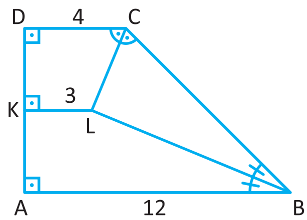
$|AB| = 15$ cm

$|AK| = 10$ cm

veriliyor.

Buna göre DK kenarının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

5. Şekildeki ABCD dik yamuğunda



$[AB] \parallel [DC]$

$[KL] \perp [AD]$

$[BL]$ ve $[CL]$ açıortay

$|DC| = 4$ cm

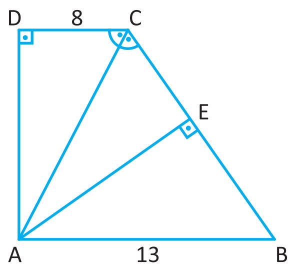
$|KL| = 3$ cm

$|AB| = 12$ cm

veriliyor.

Buna göre BC kenarının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

6. Şekildeki ABCD dik yamuğunda $[AE] \perp [BC]$



$[AB] \parallel [DC]$

$[AD] \perp [CD]$

$[AC]$ açıortay

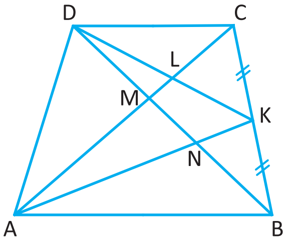
$|DC| = 8$ cm

$|AB| = 13$ cm

veriliyor.

Buna göre AE kenarının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

7. Şekildeki ABCD yamuğunda D, M, N, B ve C, L, M, A doğrusal



$[AB] \parallel [DC]$

$m(\widehat{AMN}) = m(\widehat{DKN})$

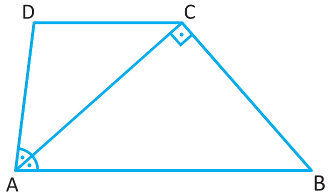
$|CK| = |KB|$

$|AK| = |BD|$

$|DK| = 6$ cm dir.

Buna göre AC kenarının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

8. Şekildeki ABCD yamuğunda



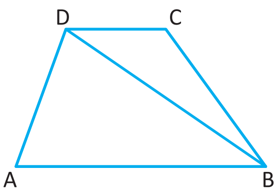
$[AB] \parallel [DC]$

$[AC] \perp [BC]$

$m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{CAB})$ veriliyor.

Buna göre $\dfrac{A(\widehat{ADC})}{A(\widehat{ABC})}$ oranını bulunuz.

9. Şekildeki ABCD yamuğunda



$[AB] \parallel [DC]$

$2m(\widehat{DBA}) = m(\widehat{DAB})$

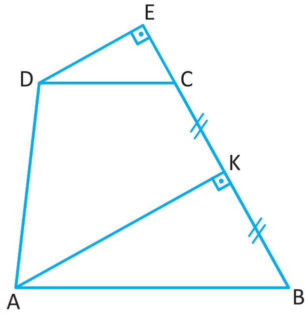
$|AB| = 23$ cm

$|DC| = 5$ cm

$|AD| = 13$ cm dir.

Buna göre ABCD yamuğunun alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

10. Şekildeki ABCD yamuğunda



$[AB] \parallel [DC]$

$[AK] \perp [BC]$

$[DE] \perp [BE]$

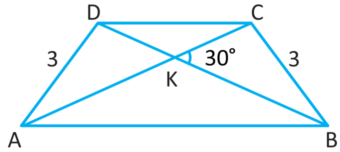
$|CK| = |KB|$

$|EK| = 8$ cm

$|AK| = 10$ cm dir.

Buna göre ABCD yamuğunun alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

11. Şekildeki ABCD ikizkenar yamuğunda $[AC]$ ve $[BD]$ köşegen



$[AB] \parallel [DC]$

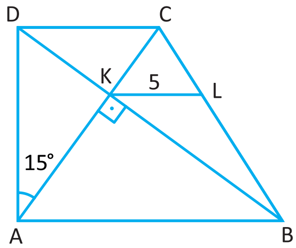
$m(\widehat{BKC}) = 30^\circ$

$|AB| \cdot |DC| = 40\ cm^2$

$|BC| = |AD| = 3$ cm dir.

Buna göre ABCD yamuğunun alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

12. Şekildeki ABCD dik yamuğunda



$[AB] \parallel [DC] \parallel [KL]$

$[AC] \perp [BD]$

$[AD] \perp [AB]$

$m(\widehat{DAC}) = 15^\circ$

$|KL| = 5$ cm dir.

Buna göre KBC üçgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

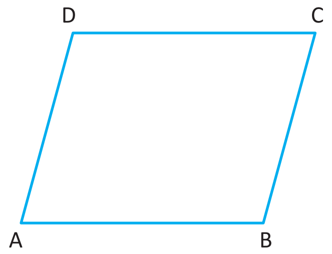
2. Paralelkenar

Tanım

Karşılıklı kenarları paralel olan dörtgene **paralelkenar** denir (Şekil 5.3.22).

$[AB] \parallel [DC]$ ve $[AD] \parallel [BC]$ olur.

Paralelkenar yamuğun tüm özelliklerini sağlar.



Şekil 5.3.22

Özellik

1. Bir paralelkenarda (Şekil 5.3.23)

a) Karşılıklı kenar uzunlukları eşittir.

$|AB| = |DC|$ ve $|AD| = |BC|$ olur.

b) $m(\widehat{A}) = m(\widehat{C})$ ve

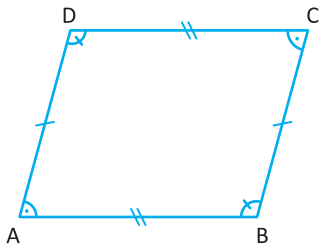
$m(\widehat{B}) = m(\widehat{D})$ olur.

c) $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) = 180^\circ$

$m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ$

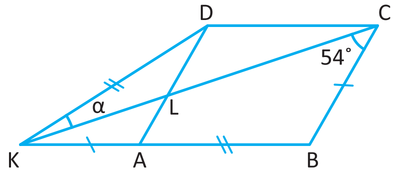
$m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 180^\circ$

$m(\widehat{A}) + m(\widehat{D}) = 180^\circ$ olur.



Şekil 5.3.23

1. ÖRNEK



Yandaki şekilde ABCD paralelkenar K, L, C ve K, A, B doğrusal

$|BC| = |AK|$

$|AB| = |DK|$ ve

$m(\widehat{KCB}) = 54^\circ$ veriliyor.

Buna göre $m(\widehat{DKL}) = \alpha$ nın kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

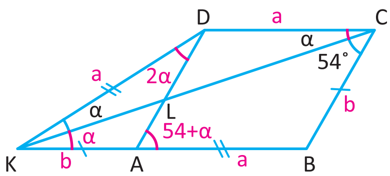
$|AB| = |DC|$ olduğundan $|DC| = |DK|$ tir. Buradan KDC ikizkenar üçgen olur.

$m(\widehat{DKC}) = m(\widehat{DCK}) = \alpha$ ve

$m(\widehat{DCK}) = m(\widehat{CKB}) = \alpha$ olur (İç ters açıdan).

Şekilde $|AD| = |AK|$ olduğundan $\widehat{KAD}$ ikizkenar üçgen ve

$m(\widehat{DKA}) = m(\widehat{ADK}) = 2\alpha$ olur.



$m(\widehat{DAB}) = 4\alpha$

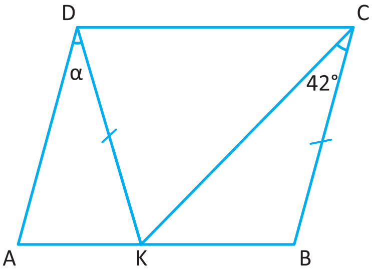
$m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{DCB})$ olduğundan

$4\alpha = \alpha + 54^\circ$

$3\alpha = 54^\circ$

$\alpha = 18^\circ$ bulunur.

2. ÖRNEK



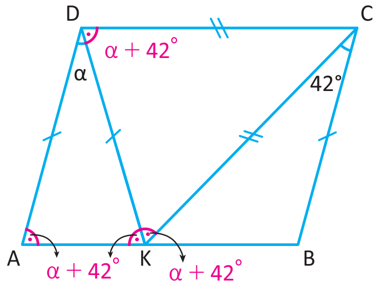
Şekilde ABCD paralelkenar

$m(\widehat{BCK}) = 42^\circ$

$|BC| = |DK|$

$|AB| = |CK|$ olduğuna göre $m(\widehat{ADK}) = \alpha$ nın kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Şekilde $|BC| = |AD| = |DK|$ ve $|AB| = |DC| = |CK|$ olur.

$[AD] \parallel [BC]$ olduğundan

$m(\widehat{DKC}) = m(\widehat{ADK}) + m(\widehat{KCB}) = m(\widehat{KDC}) = \alpha + 42^\circ$ dir.

$[AB] \parallel [DC]$ olduğundan $\widehat{CDK}$ ve $\widehat{AKD}$ nın iç ters açılarının ölçüleri eşittir.

$m(\widehat{CDK}) = m(\widehat{AKD}) = m(\widehat{DAK}) = \alpha + 42^\circ$ dir.

$m(\widehat{D}) = 2\alpha + 42^\circ$ ve $m(\widehat{A}) + m(\widehat{D}) = 180^\circ$ olduğundan

$\alpha + 42^\circ + 2\alpha + 42^\circ = 180^\circ$

$3\alpha + 84^\circ = 180^\circ$

$3\alpha = 180^\circ - 84^\circ$

$3\alpha = 96^\circ$

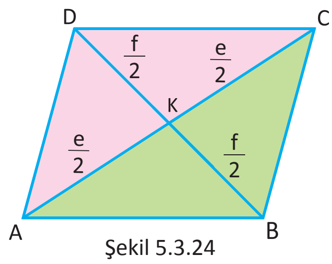
$\alpha = 32^\circ$ bulunur.

Özellik

2. Paralelkenarda köşegenler birbirini ortalar.

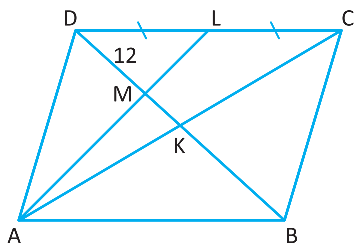
$|AC| = e$ ve $|BD| = f$ alınırsa

$|AK| = |KC| = \frac{e}{2}, |BK| = |KD| = \frac{f}{2}$ olur (Şekil 5.3.24).



Şekil 5.3.24

3. ÖRNEK

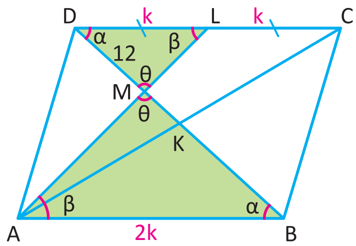


Şekildeki ABCD paralelkenarında

$[AC] \cap [BD] = \{K\}$, $[AL] \cap [BD] = \{M\}$ ve $|DL| = |LC|$

$|DM| = 12$ cm olduğuna göre $|KB|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



$|AB| = 2k$ alınırsa $|DL| = |LC| = k$ olur.

$\widehat{ABM} \sim \widehat{LDM}$, (A.A.) olduğundan

$$\frac{|AB|}{|LD|} = \frac{|BM|}{|MD|}$$

$$\frac{2k}{k} = \frac{|BM|}{12} \Rightarrow |BM| = 24 \text{ cm olur.}$$

$$|BD| = |DM| + |MB|$$
$$= 12 + 24$$
$$= 36 \text{ cm}$$

Bu durumda $|KB| = \frac{|BD|}{2} = \frac{36}{2} = 18$ cm bulunur.

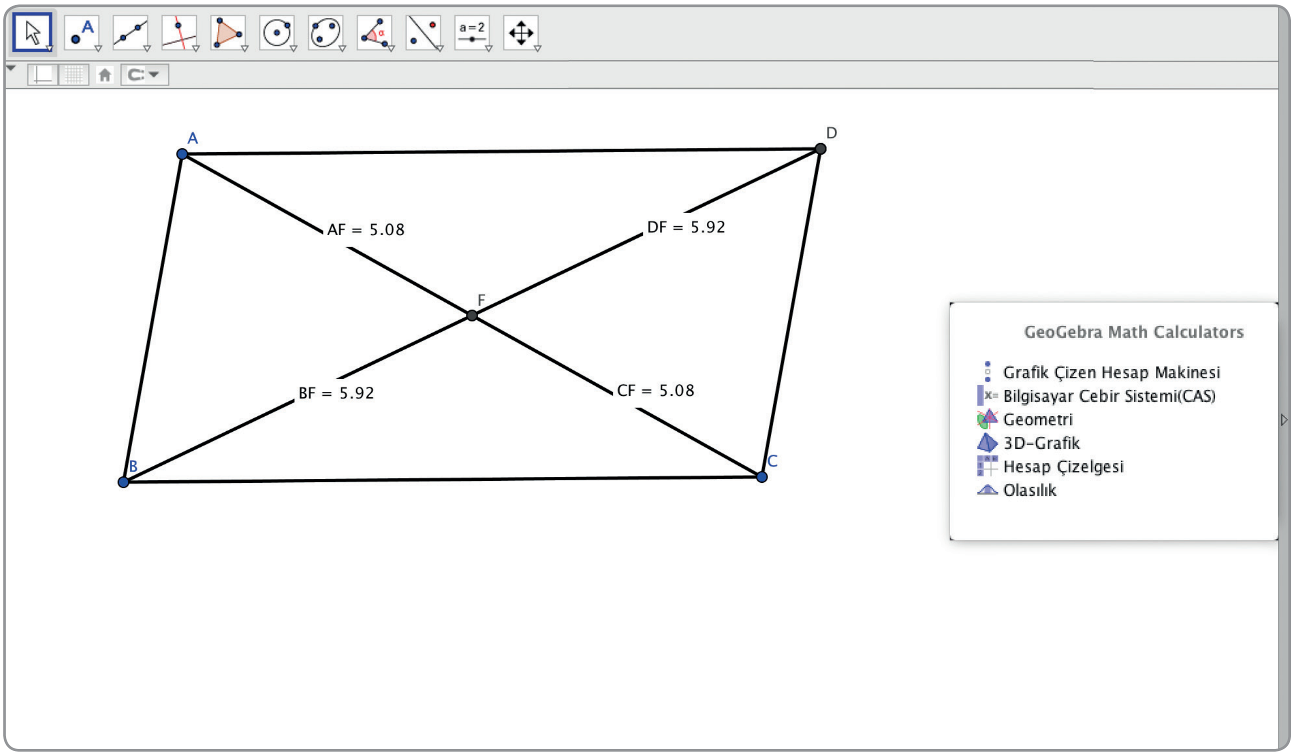
Teknoloji Uygulaması

Tablo 5.3.3’te GeoGebra programı kullanılarak bir paralelkenarda köşegenlerin birbirini ortaladığı incelenmiştir.

Tablo 5.3.3

Geometri	Programı çalıştırdığınızda **Geometri** kutucuğunu seçiniz.
	Nokta aracını seçiniz. 3 nokta işaretleyiniz.
	Doğru Parçası aracını seçiniz. A ile B ve B ile C noktalarını birleştiriniz.
	Paralel Doğru aracını seçiniz. AB doğru parçasını ve C noktasını işaretleyiniz. Benzer biçimde BC doğru parçasını ve A noktasını işaretleyiniz.
	Kesiştir aracını seçiniz. Çizilen paralel doğruları işaretleyiniz. Kesim noktasını belirledikten sonra paralel doğruları seçip farenin sağ tuşuna basınız. **Nesneyi Göster** seçeneğini işaretleyiniz.
	Doğru Parçası aracını tekrar seçiniz. C ile D ve A ile D noktalarını birleştiriniz. ABCD paralelkenarını oluşturunuz.
	Doğru Parçası aracını seçiniz. A ile C ve B ile D noktalarını birleştiriniz. Paralelkenarın köşegenlerini oluşturunuz.
	Kesiştir aracını seçiniz. Paralelkenarın köşegenlerini işaretleyerek F kesim noktasını bulunuz.
	Uzaklık veya **Uzunluk** aracını seçiniz. A, B, C ve D noktalarının sırasıyla F noktasına uzaklıklarını bulunuz.

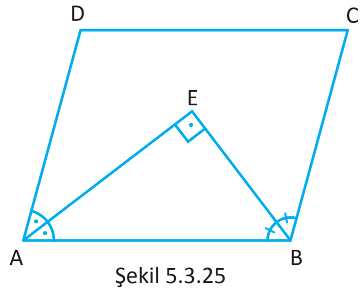
ABCD paralelkenarının köşelerini fare yardımıyla hareket ettirdiğinizde köşegenlerin birbirini ortaladığını gözlemleyiniz (Görsel 5.3.3).



Görsel 5.3.3

Özellik

3. Paralelkenarda ardışık iki açının açıortayları birbirine diktir. $[AE] \perp [BE]$ olur (Şekil 5.3.25).

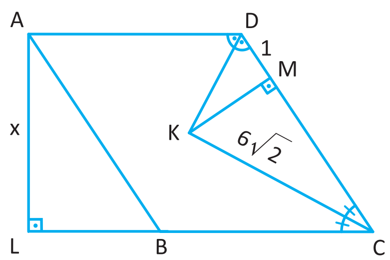


Şekil 5.3.25

İspat

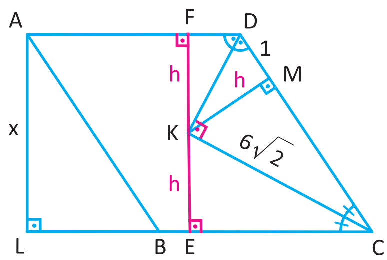
$[AE]$, A açısının açıortayı ve $[BE]$, B açısının açıortayı olmak üzere
$m(\widehat{A}) = 2\alpha$ ve $m(\widehat{B}) = 2\beta$ alınırsa $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) = 180^\circ$ olduğundan
$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$
$\alpha + \beta = 90^\circ$ olur.
$\overset{\frown}{ABE}$ nde $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{E}) = 180^\circ$
$\alpha + \beta + m(\widehat{E}) = 180^\circ$
$90^\circ + m(\widehat{E}) = 180^\circ$
$m(\widehat{E}) = 90^\circ$ olur.

4. ÖRNEK



Şekilde ABCD paralelkenar ve C, B, L noktaları doğrusal $[CK]$ ve $[DK]$ açıortay
$[KM] \perp [DC]$
$[LA] \perp [CL]$
$|DM| = 1$ cm
$|CK| = 6\sqrt{2}$ cm olduğuna göre
$|AL| = x$ değerini cm cinsinden bulunuz.

ÇÖZÜM



Paralelkenarda ardışık iki açının açıortayları dik kesiştiğinden
$[KD] \perp [KC]$ olur.
DKC dik üçgeninde Öklid teoreminden
$|KC|^2 = |CM| \cdot |CD|$ olduğundan
$(6\sqrt{2})^2 = |CM| \cdot (|CM| + 1) \Rightarrow 72 = \underbrace{|CM|}_{8} \cdot \underbrace{(|CM| + 1)}_{8+1}$ dir.
$|KM|^2 = |CM| \cdot |MD|$ olduğundan
$|KM|^2 = 8 \cdot 1 = 8 \Rightarrow |KM| = 2\sqrt{2}$ cm bulunur.

Açıortay üzerindeki bir noktadan açının kollarına çizilen dikmelerin uzunlukları eşit olduğundan
$|KE| = |KM| = |KF| = 2\sqrt{2}$ cm ve
$|EF| = 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ cm olur.
$[EF] \mathbin{/\!/} [AL]$ olduğundan $|EF| = |AL| = x = 4\sqrt{2}$ cm bulunur.

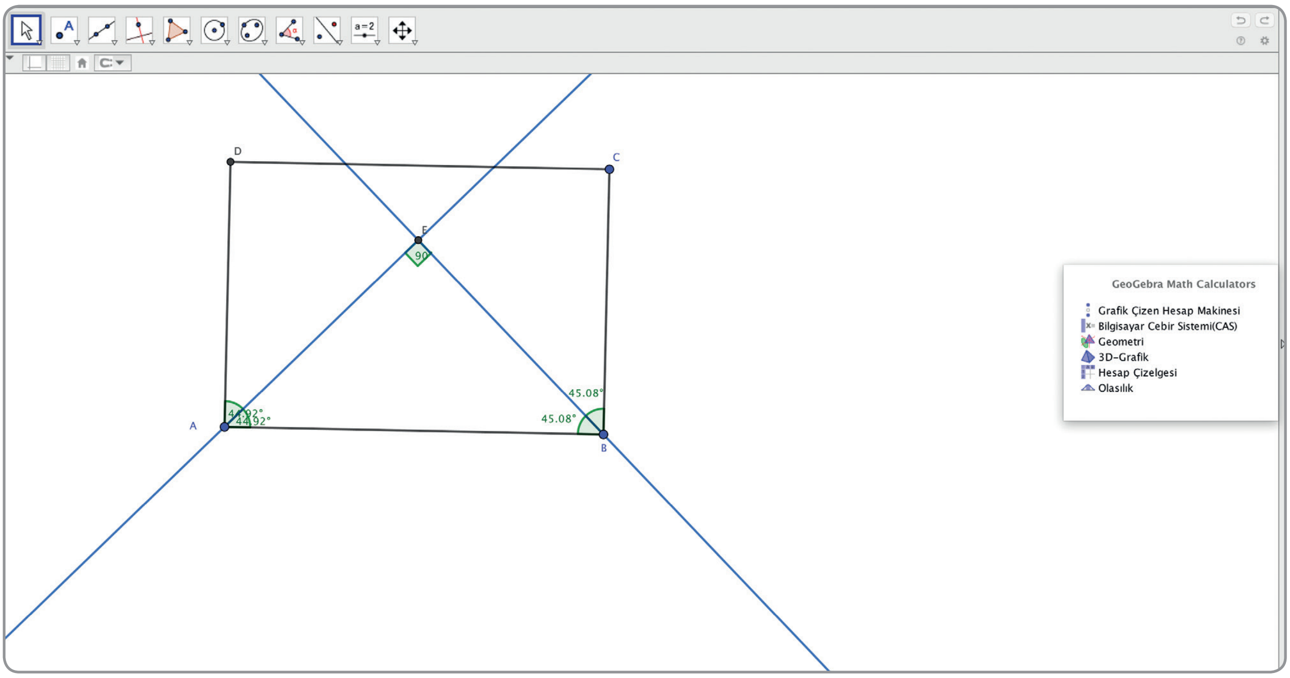
Teknoloji Uygulaması

Tablo 5.3.4'te GeoGebra programı kullanılarak bir paralelkenarda komşu olan açıların açıortayları incelenmiştir.

Tablo 5.3.4

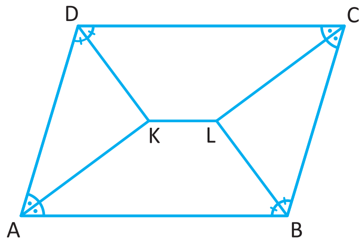
Geometri	Programı çalıştırdığınızda **Geometri** kutucuğunu seçiniz.
	Nokta aracını seçiniz. 3 nokta işaretleyiniz.
	Doğru Parçası aracını seçiniz. A ile B ve B ile C noktalarını birleştiriniz.
	Paralel Doğru aracını seçiniz. AB doğru parçasını ve C noktasını işaretleyiniz. Benzer biçimde BC doğru parçasını ve A noktasını işaretleyiniz.
	Kesiştir aracını seçiniz. Çizilen paralel doğruları işaretleyiniz. Kesim noktasını belirledikten sonra paralel doğruları seçip farenin sağ tuşuna basınız. **Nesneyi Göster** seçeneğini işaretleyiniz.
	Doğru Parçası aracını tekrar seçiniz. C ile D ve A ile D noktalarını birleştiriniz. ABCD paralelkenarını oluşturunuz.
	Açıortay aracını seçiniz. B, A ve D noktalarını işaretleyiniz. A açısının açıortayını çiziniz. Benzer şekilde C, B ve A noktalarını işaretleyiniz. B açısının açıortayını çiziniz.
	Kesiştir aracını seçiniz. A ve B açısının açıortaylarını işaretleyiniz. E kesim noktasını belirleyiniz.
	Açı aracını seçiniz. Sırasıyla A, E ve B noktalarını işaretleyiniz. Benzer şekilde EAD, BAE, CBE ve EBA açılarının ölçülerini bulunuz.

ABCD paralelkenarının köşelerini fare yardımıyla hareket ettirdiğinizde açıortaylar arasındaki açının değişmediğine dikkat ediniz (Görsel 5.3.4).



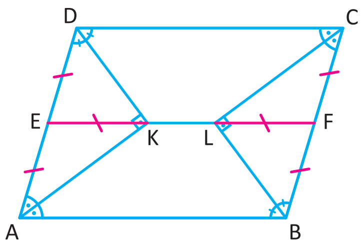
Görsel 5.3.4

5. ÖRNEK



Şekilde ABCD paralelkenar
$[AK], [DK], [BL]$ ve $[CL]$ açıortay
$|DC| = 14$ cm,
$|BC| = 8$ cm olduğuna göre $|KL|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

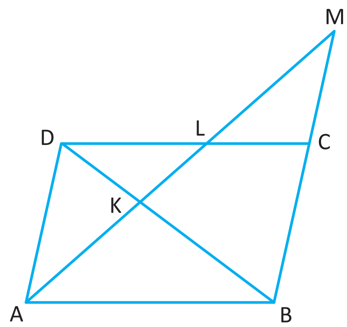


$[AK]$, A açısının ve $[DK]$, D açısının açıortayı olduğundan
$m(\widehat{AKD}) = 90^\circ$
$[BL]$, B açısının ve $[CL]$, C açısının açıortayı olduğundan
$m(\widehat{BLC}) = 90^\circ$ bulunur. Şekilden de görüldüğü gibi
AKD dik üçgeninde $[EK]$, hipotenüse ait kenarortay ve
BLC dik üçgeninde $[LF]$, hipotenüse ait kenarortay olduğundan
$|EK| = \dfrac{|AD|}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$ cm ve $|LF| = \dfrac{|BC|}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$ cm olur.
$|EF| = |AB| = |DC| = 14$ cm olduğundan

$$\begin{aligned} |KL| &= |EF| - (|EK| + |LF|) \\ &= 14 - (4+4) \\ &= 14 - 8 \\ &= 6 \text{ cm bulunur.} \end{aligned}$$

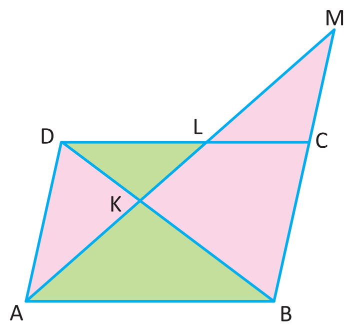
Özellik

4. Şekil 5.3.26'daki ABCD paralelkenarında $[DB]$ köşegen A, K, L, M ve B, C, M noktaları doğrusaldır.
Bu durumda $|AK|^2 = |KL| \cdot |KM|$ olur.



Şekil 5.3.26

İspat



Şekil 5.3.27

$\widehat{AKB} \sim \widehat{LKD}$ olduğundan $\dfrac{|AK|}{|LK|} = \dfrac{|AB|}{|LD|} = \dfrac{|KB|}{|KD|}$ ve

$\widehat{AKD} \sim \widehat{MKB}$ olduğundan $\dfrac{|AK|}{|MK|} = \dfrac{|AD|}{|MB|} = \dfrac{|KD|}{|KB|}$ veya

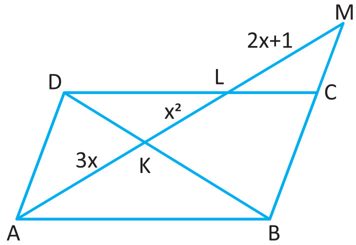
$\dfrac{|MK|}{|AK|} = \dfrac{|MB|}{|AD|} = \dfrac{|KB|}{|KD|}$ bulunur.

$\dfrac{|AK|}{|LK|} = \dfrac{|KB|}{|KD|}$ ve $\dfrac{|MK|}{|AK|} = \dfrac{|KB|}{|KD|}$ olduğundan

$\dfrac{|AK|}{|LK|} = \dfrac{|MK|}{|AK|}$ olur.

Buradan $|AK|^2 = |KL| \cdot |KM|$ elde edilir (Şekil 5.3.27).

6. ÖRNEK



Şekildeki ABCD paralelkenarında $[DB]$ köşegen olmak üzere A, K, L, M ve B, C, M noktaları doğrusaldır.

$|AK| = 3x$ cm

$|KL| = x^2$ cm

$|LM| = (2x+1)$ cm olduğuna göre x değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

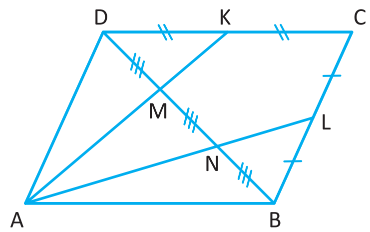
$|AK|^2 = |KL| \cdot |KM|$

$(3x)^2 = x^2 \cdot (x^2 + 2x + 1) \Rightarrow 9\cancel{x^2} = \cancel{x^2} \cdot (x+1)^2$

$\Rightarrow 3 = x + 1 \Rightarrow x = 2$ cm bulunur.

Özellik

5. ABCD paralelkenar, D, M, N, B doğrusal, K ve L bulundukları kenarların orta noktaları olmak üzere $|DM| = |MN| = |NB|$ olur (Şekil 5.3.28).



Şekil 5.3.28

İspat

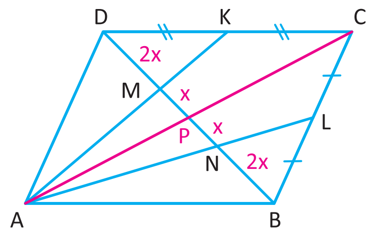
Şekilde $[AC]$ çizilirse $\widehat{ABC}$ nde $|BL| = |LC|$ ve $|AP| = |PC|$ olduğundan N noktası ağırlık merkezidir.

Benzer şekilde $\widehat{ADC}$ nde $|DK| = |KC|$ ve $|AP| = |PC|$ olduğundan M noktası ağırlık merkezidir.

$|NP| = x$ alınırsa $|BN| = 2x$ ve $|BP| = 3x$

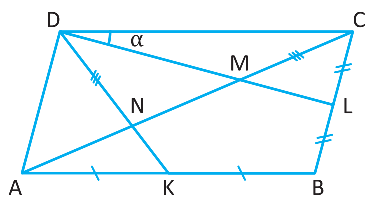
$|PM| = x, |MD| = 2x, |DP| = 3x$ olur. Bu durumda

$|DM| = |MN| = |NB| = 2x$ elde edilir (Şekil 5.3.29).



Şekil 5.3.29

7. ÖRNEK



Şekilde ABCD paralelkenar ve A, N, M, C doğrusaldır.

$|AK| = |KB|$

$|BL| = |LC|$

$|DN| = |MC|$

$m(\widehat{DAB}) = 75^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{MDC}) = \alpha$ nın kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$|AK| = |KB|$ ve $|BL| = |LC|$ olduğundan $|AN| = |NM| = |MC|$ dir.

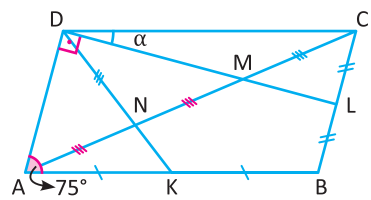
$|DN| = |MC|$ ve $\widehat{ADM}$ nde $|DN| = |AN| = |NM|$ olduğundan

$m(\widehat{ADM}) = 90^\circ$ bulunur.

$m(\widehat{A}) + m(\widehat{D}) = 180^\circ$

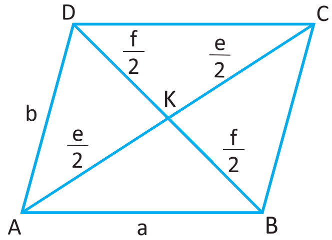
$75^\circ + 90^\circ + \alpha = 180^\circ$

$165^\circ + \alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 15^\circ$ olur.



Özellik

6. ABCD paralelkenarında
$|AB| = a, |AD| = b, |AC| = e$ ve $|BD| = f$ olmak üzere $e^2 + f^2 = 2 \cdot (a^2 + b^2)$ dir (Şekil 5.3.30).



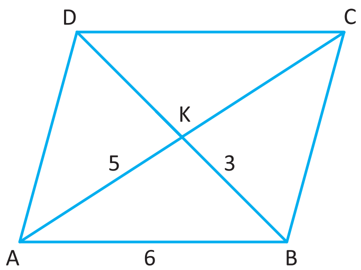
Şekil 5.3.30

İspat

Köşegenler birbirini ortaladığından $|AK| = |KC| = \frac{e}{2}$ ve $|BK| = |KD| = \frac{f}{2}$ olur.
$\overset{\frown}{ADC}$ ve $\overset{\frown}{BDC}$ nde kenarortay teoreminden

$$a^2 + b^2 = 2 \cdot \left[\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2\right]$$
$$a^2 + b^2 = 2 \cdot \left[\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2\right]$$
$$+ \overline{}$$
$$2 \cdot (a^2 + b^2) = \frac{e^2 + f^2}{2} + \frac{e^2 + f^2}{2}$$
$= e^2 + f^2$ olur. Bu durumda $e^2 + f^2 = 2 \cdot (a^2 + b^2)$ elde edilir.

8. ÖRNEK



Şekildeki ABCD paralelkenarında
$[AC] \cap [BD] = \{K\}$
$|AB| = 6$ cm
$|AK| = 5$ cm
$|BK| = 3$ cm olduğuna göre BC kenarının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

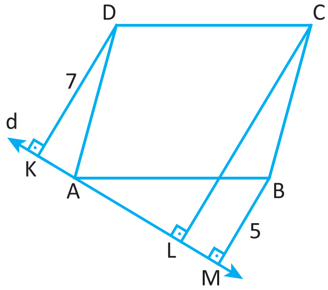
ÇÖZÜM

Paralelkenarda köşegenler birbirini ortaladığından
$|AK| = |KC| = 5$ cm ve
$|AC| = e = 10$ cm
$|BK| = |KD| = 3$ cm ve $|BD| = f = 6$ cm olur.

$2 \cdot (a^2 + b^2) = e^2 + f^2$ olduğundan
$2 \cdot (6^2 + b^2) = 10^2 + 6^2$
$2 \cdot (36 + b^2) = 100 + 36$
$72 + 2b^2 = 136$
$2b^2 = 64$
$b^2 = 32$
$b = 4\sqrt{2}$ cm

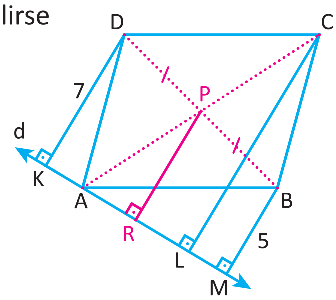
$|BC| = b = 4\sqrt{2}$ cm olur.

9. ÖRNEK



Şekildeki ABCD paralelkenarında
$A \in d$
$[DK] \perp d$
$[CL] \perp d$
$[MB] \perp d$ veriliyor.
$|DK| = 7$ cm, $|MB| = 5$ cm olduğuna göre $|CL|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Şekilde köşegenlerin kesişme noktası P den $[PR] \perp d$ olacak şekilde $[PR]$ çizilirse $[DK] \parallel [PR] \parallel [BM]$ olur.

$|DP| = |PB|$ olduğundan $[PR]$, KMBD yamuğunun orta tabanı olur.

$|PR| = \dfrac{|MB| + |KD|}{2} = \dfrac{5+7}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$ cm bulunur.

ALC dik üçgeninde $[PR] \parallel [CL]$ olduğundan

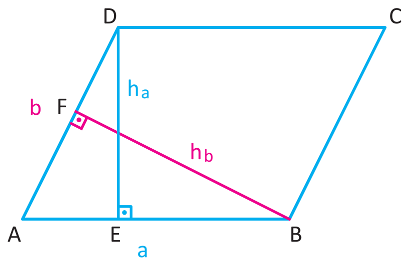
$\overset{\frown}{ARP} \sim \overset{\frown}{ALC}$ olur (A.A.). Buradan

$\dfrac{|PR|}{|CL|} = \dfrac{|AP|}{|AC|} \Rightarrow \dfrac{|PR|}{|CL|} = \dfrac{|AP|}{2|AP|} = \dfrac{1}{2}$ elde edilir. $|PR| = 6$ cm olduğundan

$\dfrac{6}{|CL|} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow |CL| = 12$ cm bulunur.

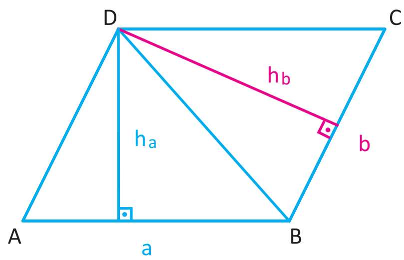
Paralelkenarın Alanı

1. Bir paralelkenarın alanı, bir kenar uzunluğu ile bu kenara ait yüksekliğin çarpımına eşittir (Şekil 5.3.31).
   $A(ABCD) = a \cdot h_a = b \cdot h_b \ \ (h_a = |DE|, h_b = |BF|)$



Şekil 5.3.31

İspat



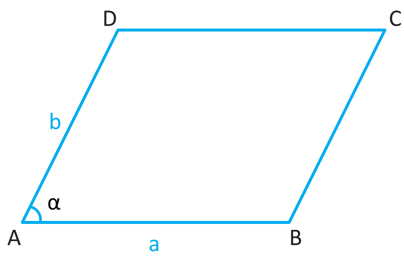
Şekil 5.3.32

BD köşegeni çizilirse $A(ABCD) = A(\overset{\frown}{ABD}) + A(\overset{\frown}{DBC})$ olur.

$\overset{\frown}{ABD} \cong \overset{\frown}{CDB}$ olduğundan $A(\overset{\frown}{ABD}) = A(\overset{\frown}{CDB})$ bulunur (Şekil 5.3.32).

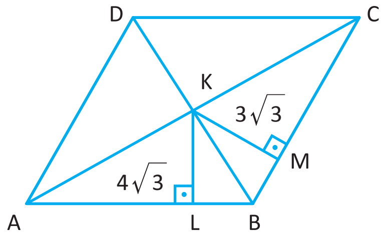
$$\begin{aligned} A(ABCD) &= A(\overset{\frown}{ABD}) + A(\overset{\frown}{DBC}) \\ &= 2 \cdot A(\overset{\frown}{ABD}) = 2 \cdot A(\overset{\frown}{DBC}) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{a \cdot h_a}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{b \cdot h_b}{2}\right) \\ &= a \cdot h_a = b \cdot h_b \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

2. ABCD paralelkenarında $|AB| = a, |AD| = b$ ve $m(\overset{\frown}{DAB}) = \alpha$ olmak üzere $A(ABCD) = a \cdot b \cdot \sin\alpha$ olur (Şekil 5.3.33).



Şekil 5.3.33

10. ÖRNEK



ABCD bir paralelkenar

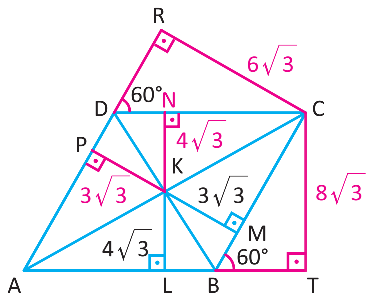
$[AC] \cap [BD] = \{K\}$

$[KL] \perp [AB], [KM] \perp [BC]$

$|KL| = 4\sqrt{3}$ cm, $|KM| = 3\sqrt{3}$ cm

$m(\widehat{ADC}) = 120^\circ$ olduğuna göre $A(ABCD)$ nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



L noktasından DC kenarına, M noktasından AD kenarına şekildeki gibi yükseklikler çizilir ve çizilen dikme ayakları N ve P olarak adlandırılırsa

$|KL| = |KN| = 4\sqrt{3}$ cm ve $|KM| = |KP| = 3\sqrt{3}$ cm olur.

$[BC] \parallel [AR]$ ve $[MP] \parallel [CR]$ olacak şekilde $[AR]$ ve $[CR]$ çizilirse

DRC dik üçgeninde $m(\widehat{CDR}) = 60^\circ$ olur.

$|CR| = |MP| = 6\sqrt{3}$ cm ve $|DC| = 12$ cm bulunur.

$(30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ dik üçgeni$)$

$[NL] \parallel [CT$ ve $[DC] \parallel [AT$ olacak şekilde $[CT]$ ve $[AT]$ çizilirse

BTC dik üçgeninde $m(\widehat{CBT}) = 60^\circ$ olur.

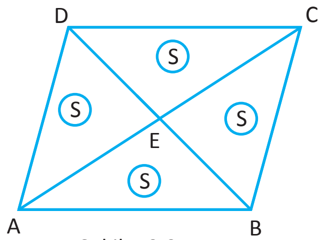
$|CT| = |NL| = 8\sqrt{3}$ cm ve $|BC| = 16$ cm bulunur $(30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ dik üçgeni$)$.

$$A(ABCD) = |AB| \cdot |NL| = 12 \cdot 8\sqrt{3}$$
$$= 96\sqrt{3}\ cm^2 \text{ veya}$$
$$A(ABCD) = |BC| \cdot |PM| = 16 \cdot 6\sqrt{3}$$
$$= 96\sqrt{3}\ cm^2 \text{ ya da}$$
$$A(ABCD) = a \cdot b \cdot \sin 60^\circ = 16 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 96\sqrt{3}\ cm^2 \text{ bulunur } (\sin 120^\circ = \sin 60^\circ).$$

Özellik

7. Bir paralelkenarda köşegenler paralelkenarı dört eşit alana böler (Şekil 5.3.34).

$S = \dfrac{A(ABCD)}{4}$ olur.



Şekil 5.3.34

İspat

ABCD paralelkenarında $[AC]$ ve $[BD]$ köşegenleri çizilirse tabanları ve yükseklikleri eşit olan ABC ve ACD üçgenleri için $A(\widehat{ABC}) = A(\widehat{ACD})$ olur. Benzer düşünceyle

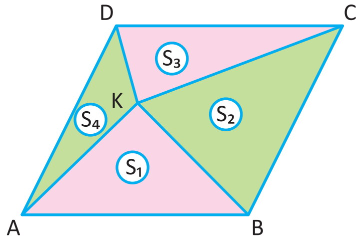
$|AE| = |EC|$ olduğundan $A(\widehat{ABE}) = A(\widehat{BCE})$ ve $A(\widehat{ADE}) = A(\widehat{DCE})$ bulunur.

$$A(ABCD) = A(\widehat{ABC}) + A(\widehat{ACD})$$
$$= (A(\widehat{ABE}) + A(\widehat{BCE})) + (A(\widehat{ADE}) + A(\widehat{DCE}))$$
$$= S + S + S + S$$
$$= 4S$$
$$S = \frac{A(ABCD)}{4} \text{ olur.}$$

Özellik

8. K noktası, ABCD paralelkenarının içinde herhangi bir nokta S_1, S_2, S_3, S_4 yazıldıkları üçgenlerin alanı olmak üzere

$$A(\widehat{ABK}) + A(\widehat{CKD}) = A(\widehat{BKC}) + A(\widehat{AKD})$$
$$= \frac{A(ABCD)}{2} \text{ veya}$$
$$S_1 + S_3 = S_2 + S_4 = \frac{A(ABCD)}{2}$$ dir (Şekil 5.3.35).



Şekil 5.3.35

İspat

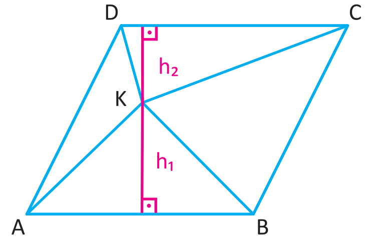
$\widehat{ABK}$ nde AB kenarına ait yükseklik h_1 ve $\widehat{CKD}$ nde DC kenarına ait yükseklik h_2 alınırsa

$$S_1 + S_3 = \frac{|AB| \cdot h_1}{2} + \frac{|DC| \cdot h_2}{2}$$
$$= \frac{|AB| \cdot (h_1 + h_2)}{2} = \frac{|AB| \cdot h}{2} \quad (h = h_1 + h_2)$$
$$= \frac{a \cdot h}{2} = \frac{A(ABCD)}{2}$$ elde edilir.

$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = A(ABCD)$ olduğundan

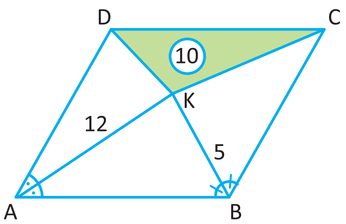
$S_2 + S_4 = \dfrac{A(ABCD)}{2}$ bulunur. Bu durumda

$S_1 + S_3 = S_2 + S_4 = \dfrac{A(ABCD)}{2}$ olur (Şekil 5.3.36).



Şekil 5.3.36

11. ÖRNEK



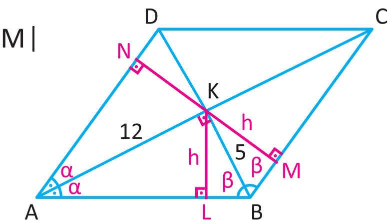
Şekildeki ABCD paralelkenarında $[AK]$ ve $[BK]$ açıortay olmak üzere

$|AK| = 12$ cm

$|BK| = 5$ cm veriliyor.

$A(\widehat{CDK}) = 10 \text{ cm}^2$ olduğuna göre Ç(ABCD) değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



$[AK]$ ve $[BK]$ açıortay olduğundan şekilde K noktasından $|KN| = |KL| = |KM|$ olacak şekilde doğru parçaları çizilirse ardışık iki açının açıortayları dik kesiştiğinden $A(\widehat{ABK}) = \dfrac{|AK| \cdot |KB|}{2} = \dfrac{12 \cdot 5}{2} = 30 \text{ cm}^2$ olur.

ABK dik üçgeninde Pisagor teoreminden $|AB| = 13$ cm olur.

$A(\widehat{ABK}) = \dfrac{|AB| \cdot |KL|}{2}$ olduğundan $30 = \dfrac{13 \cdot |KL|}{2} \Rightarrow |KL| = \dfrac{60}{13}$ cm $= |KM| = |KN|$ bulunur.

$A(\widehat{ABK}) + A(\widehat{CDK}) = \dfrac{A(ABCD)}{2}$ olduğundan

$A(ABCD) = 2 \cdot (30 + 10) = 2 \cdot 40 = 80 \text{ cm}^2$ bulunur.

$A(ABCD) = |BC| \cdot |NM| \Rightarrow 80 = |BC| \cdot \dfrac{120}{13}$ buradan $|BC| = \dfrac{26}{3}$ cm olur.

$Ç(ABCD) = 2 \cdot (|AB| + |BC|)$

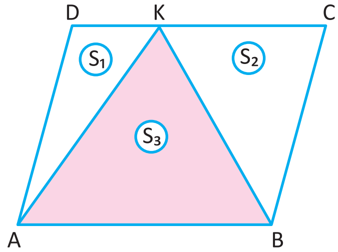
$= 2 \cdot \left(13 + \dfrac{26}{3}\right) = \dfrac{130}{3}$ cm bulunur.

Özellik

9. ABCD paralelkenarında $K \in [DC]$ ve S_1, S_2, S_3 yazıldıkları üçgenlerin alanı olmak üzere

$A(\widehat{ABK}) = A(\widehat{AKD}) + A(\widehat{BKC}) = \dfrac{A(ABCD)}{2}$ veya

$S_3 = S_1 + S_2 = \dfrac{A(ABCD)}{2}$ olur (Şekil 5.3.37).



Şekil 5.3.37

İspat

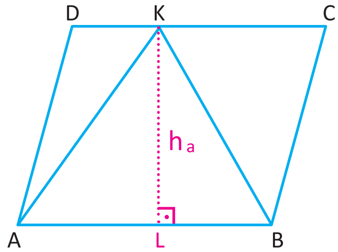
$[AB] \perp [KL]$ olacak şekilde $[KL]$ çizilirse $|KL| = h_a$ olsun. Bu durumda

$S_3 = A(\widehat{ABK}) = \dfrac{|AB| \cdot h_a}{2} = \dfrac{A(ABCD)}{2}$ elde edilir.

$S_1 + S_2 + S_3 = A(ABCD)$ olduğundan

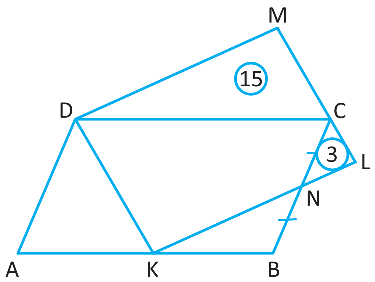
$S_1 + S_2 = \dfrac{A(ABCD)}{2}$ bulunur.

O hâlde $S_3 = S_1 + S_2 = \dfrac{A(ABCD)}{2}$ olur (Şekil 5.3.38).



Şekil 5.3.38

12. ÖRNEK



Şekilde ABCD ve DKLM paralelkenardır.

$|CN| = |NB|$

$\dfrac{|MC|}{|CL|} = \dfrac{3}{2}$

$A(\widehat{DMC}) = 15 \text{ cm}^2$

$A(\widehat{CLN}) = 3 \text{ cm}^2$ olduğuna göre $A(\widehat{ADK})$ nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

K ve C noktaları birleştirilirse

ABCD paralelkenarında $A(\widehat{DKC}) = A(\widehat{ADK}) + A(\widehat{KBC})$ ve

KLMD paralelkenarında $A(\widehat{DKC}) = A(\widehat{KLC}) + A(\widehat{CMD})$ olur.

$|CN| = |NB|$ olduğundan $A(\widehat{KBN}) = A(\widehat{KNC})$ olur.

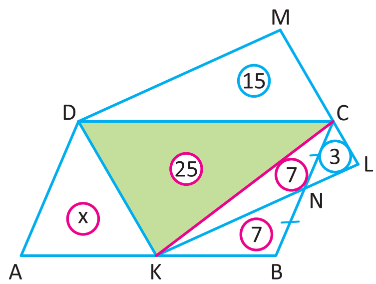
$A(\widehat{KBN}) = A(\widehat{KNC}) = S$ olsun.

$\dfrac{|MC|}{|CL|} = \dfrac{3}{2}$ olduğundan $\dfrac{A(\widehat{DCM})}{A(\widehat{KLC})} = \dfrac{3}{2}$ bulunur. Buradan

$\dfrac{15}{S+3} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \overset{1}{\cancel{3}} \cdot (S+3) = 2 \cdot \overset{5}{\cancel{15}}$

$S + 3 = 10$

$S = 7 \text{ cm}^2$ bulunur.



$A(\widehat{DKC}) = A(\widehat{KLC}) + A(\widehat{CMD})$

$= 10 + 15$

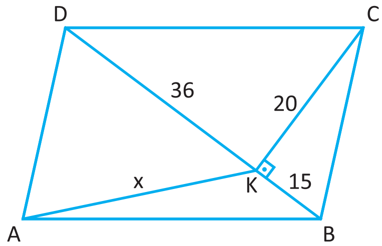
$= 25 \text{ cm}^2$

$A(\widehat{DKC}) = A(\widehat{ADK}) + A(\widehat{KBC})$

$25 = A(\widehat{ADK}) + 14$

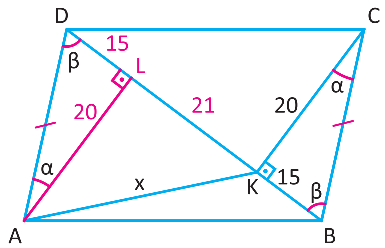
$A(\widehat{ADK}) = 11 \text{ cm}^2$ olur.

13. ÖRNEK



Şekildeki ABCD paralelkenarında
$[CK] \perp [BD]$
$|KC| = 20$ cm
$|KB| = 15$ cm ve
$|DK| = 36$ cm olduğuna göre $|AK| = x$ değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Şekildeki paralelkenarda 7. özellik gereği $A(\widehat{ABD}) = A(\widehat{CDB})$ olur.

Bu durumda

$\dfrac{|BD| \cdot |AL|}{2} = \dfrac{|BD| \cdot |CK|}{2} \Rightarrow |AL| = |CK| = 20$ cm olur.

ALD ve CKB üçgenleri eş olduğundan $A(\widehat{ALD}) = A(\widehat{CKB})$ bulunur.

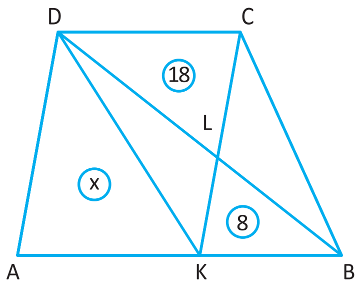
$\dfrac{|DL| \cdot |AL|}{2} = \dfrac{|BK| \cdot |CK|}{2} \Rightarrow |DL| = |KB| = 15$ cm olur.

$|KL| = |KD| - |DL|$
$= 36 - 15$
$= 21$ cm

Buradan ALK üçgeninde Pisagor teoreminden

$|AK|^2 = |AL|^2 + |LK|^2$
$x^2 = 20^2 + 21^2$
$= 400 + 441$
$= 841 \Rightarrow x = |AK| = 29$ cm bulunur.

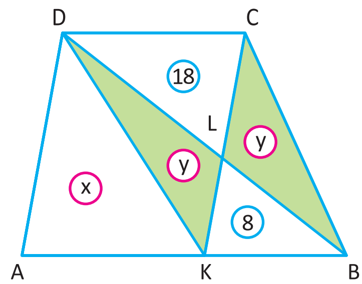
14. ÖRNEK



Şekilde ABCD yamuk D, L, B ve C, L, K doğrusal AKCD paralelkenardır.
$A(\widehat{DLC}) = 18$ cm^2,
$A(\widehat{KLB}) = 8$ cm^2 olduğuna göre
$A(\widehat{ADK}) = x$ değerinin kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

ABCD yamuk olduğundan KBCD de yamuktur. KBCD yamuğunda $[BD]$ ve $[KC]$ köşegen olduğundan
$A(\widehat{DKL}) = A(\widehat{CLB})$ bulunur.



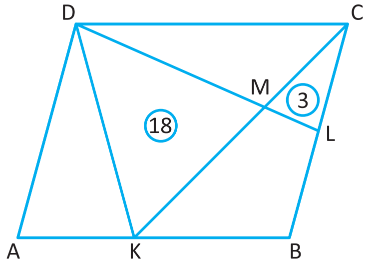
$A(\widehat{DKL}) = A(\widehat{CLB}) = y$ alınırsa

$A(\widehat{KBL}) \cdot A(\widehat{CLD}) = A(\widehat{BLC}) \cdot A(\widehat{DLK})$
$18 \cdot 8 = y \cdot y$
$144 = y^2$
$y = 12$ cm^2 olur.

AKCD paralelkenar olduğundan

$A(\widehat{ADK}) = A(\widehat{KCD})$
$A(\widehat{ADK}) = 12 + 18$
$= 30$ cm^2 bulunur.

15. ÖRNEK



Şekildeki ABCD paralelkenarında C, M, K doğrusal

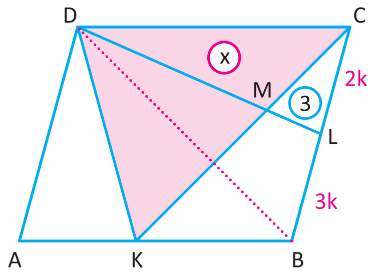
$3|CL| = 2|LB|$

$A(\widehat{KDM}) = 18 \text{ cm}^2$

$A(\widehat{CML}) = 3 \text{ cm}^2$ olduğuna göre

$A(ABCD)$ nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



$A(\widehat{DMC}) = x$ olarak alınırsa $A(\widehat{DKC}) = \dfrac{A(ABCD)}{2}$ olduğundan

$x + 18 = \dfrac{A(ABCD)}{2} \Rightarrow A(ABCD) = (2x + 36) \text{ cm}^2$ olur. **(1)**

BD köşegeni çizilirse $\dfrac{|CL|}{|LB|} = \dfrac{2}{3}$ olduğundan

$\dfrac{A(\widehat{DLC})}{A(\widehat{DBC})} = \dfrac{|LC|}{|BC|} = \dfrac{2}{5}$

$\dfrac{x+3}{A(\widehat{DBC})} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow A(\widehat{DBC}) = \dfrac{5x+15}{2} \text{ cm}^2$ olur.

$A(\widehat{DBC}) = \dfrac{A(ABCD)}{2}$ olduğundan $\dfrac{5x+15}{2} = \dfrac{A(ABCD)}{2} \Rightarrow A(ABCD) = 5x + 15$ olur. **(2)**

(1) ve **(2)** eşitliğinden

$5x + 15 = 2x + 36$

$3x = 21$

$x = 7 \text{ cm}^2$ bulunur.

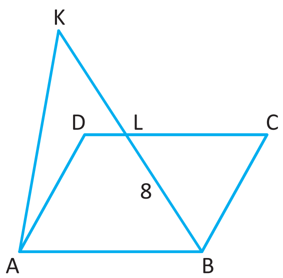
$A(ABCD) = 5x + 15$ olduğundan $A(ABCD) = 5 \cdot 7 + 15$

$= 35 + 15$

$= 50 \text{ cm}^2$ bulunur.

Sıra Sizde

SORU



Şekilde ABCD paralelkenar ve K, L, B doğrusal

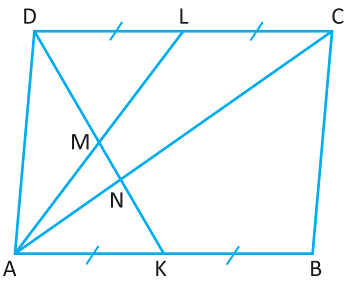
$A(\widehat{BCL}) = A(ADLK)$

$|BL| = 8 \text{ cm}$ olduğuna göre

BK kenarının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

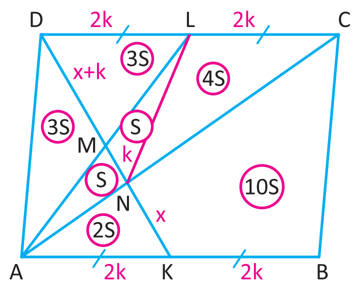
16. ÖRNEK



Şekilde ABCD paralelkenarında
$[AL] \cap [DK] = \{M\}$
$[AC] \cap [DK] = \{N\}$
$|AK| = |KB|$
$|DL| = |LC|$
$A(LMNC) = 20\ cm^2$ olduğuna göre
$A(ABCD)$ nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$\widehat{DML} \sim \widehat{KMA}$ (A.A.) benzerliğinde benzerlik oranı 1 olduğundan $\widehat{DML} \cong \widehat{KMA}$ olur. Buradan $|MA| = |ML|$ olur.



Şekildeki $[NL]$ çizilirse $A(\widehat{ANM}) = A(\widehat{LNM})$ olur.

$A(\widehat{ANM}) = A(\widehat{LNM}) = S$ olsun

$\widehat{ANK} \sim \widehat{CND}$ olduğundan

$$\frac{|AN|}{|CN|} = \frac{|AK|}{|CD|} \Rightarrow \frac{|AN|}{|CN|} = \frac{|AK|}{2|AK|}$$
$$= \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

$$\frac{A(\widehat{ANL})}{A(\widehat{CLN})} = \frac{|AN|}{|CN|} = \frac{1}{2} \text{ Bu durumda}$$

$A(\widehat{ANL}) = 2S$ olduğundan $A(\widehat{CLN}) = 4S$ ve $A(LMNC) = 5S$ bulunur.
$A(LMNC) = 5S \Rightarrow 20 = 5S$ ise $S = 4\ cm^2$ bulunur.

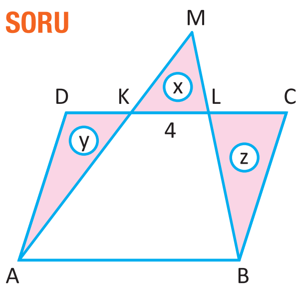
$A(\widehat{ALC}) = A(\widehat{ADL}) = 6S$ ve $A(\widehat{ACD}) = 12S$ olur.

$$A(ABCD) = 2 \cdot A(\widehat{ACD})$$
$$= 2 \cdot 12S$$
$$= 24S \text{ olur.}$$

$A(ABCD) = 24 \cdot 4 = 96\ cm^2$ elde edilir.

Sıra Sizde

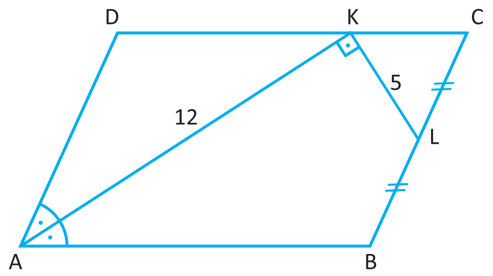
SORU



Şekildeki ABCD paralelkenar ve A, K, M ve M, L, B doğrusal x, y, z bulundukları bölgelerin alanlarını belirtmektedir.
$y + z = 9x$
$|KL| = 4$ cm veriliyor.
Buna göre AB kenarının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

17. ÖRNEK



Şekilde ABCD paralelkenarında

$[AK] \perp [KL]$

$|BL| = |LC|$

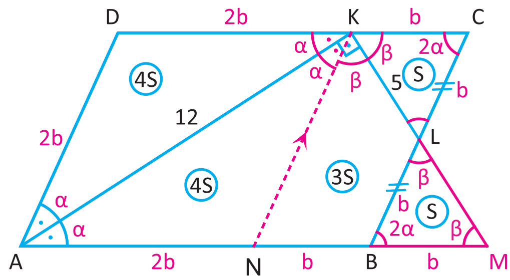
$|AK| = 12$ cm

$|KL| = 5$ cm

$m(\widehat{DAK}) = m(\widehat{KAB})$ olduğuna göre

$A(ABCD)$ nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



$m(\widehat{DAK}) = m(\widehat{KAB}) = \alpha$ olsun.

$[DA] \parallel [KN]$ olacak şekilde $[KN]$ çizilirse

$m(\widehat{DAK}) = m(\widehat{AKN}) = \alpha$ olur.

Şekildeki gibi $[AB]$ ve $[KL]$ nın uzantılarının kesişme noktası M olarak alınırsa

$\overset{\frown}{CLK} \cong \overset{\frown}{BLM}$ olur. $A(\overset{\frown}{BLM}) = A(\overset{\frown}{CLK}) = S$ olsun

$|CL| = |BL| = b$ alınırsa $|BC| = |AD| = 2b$ ve

ADK ikizkenar üçgen olduğundan $|AD| = |DK| = 2b$ olur.

CLK ikizkenar üçgeninde

$|CL| = |CK| = b$ olduğundan $|AB| = |DC| = 3b$ bulunur.

$\overset{\frown}{BLM} \sim \overset{\frown}{NKM}$, (A.A) olduğundan benzerlik oranı

$k = \dfrac{1}{2}$ bulunur. Bu durumda

$A(\overset{\frown}{MKN}) = 4S$ ve $A(BLKN) = 3S$ olur.

$[KN]$, AKM dik üçgeninde

hipotenüse ait kenarortay olduğundan

$A(\overset{\frown}{ANK}) = A(\overset{\frown}{KMN}) = A(\overset{\frown}{ADK}) = 4S$ olur.

Bu durumda

$A(\overset{\frown}{AKM}) = 8S$ ve

$A(ABCD) = 12S$ olur.

$$A(\overset{\frown}{AKM}) = \frac{|AK| \cdot |KM|}{2} \Rightarrow 8S = \frac{12 \cdot 10}{2}$$

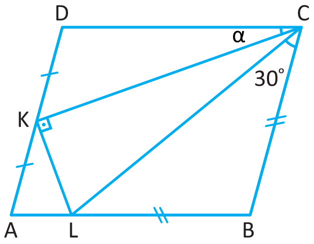
$$S = \frac{15}{2} \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$

Buna göre $A(ABCD) = 12 \cdot \dfrac{15}{2}$

$= 90 \text{ cm}^2$ elde edilir.

ALIŞTIRMALAR-3

1. Şekildeki ABCD paralelkenarında



$[CK] \perp [KL]$

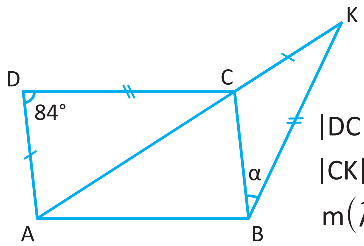
$|KD| = |AK|$

$|BL| = |BC|$

$m(\widehat{LCB}) = 30°$ dir.

Buna göre $m(\widehat{DCK}) = \alpha$ açısının kaç derece olduğunu bulunuz.

2. Şekildeki ABCD paralelkenar ve A, C, K doğrusal



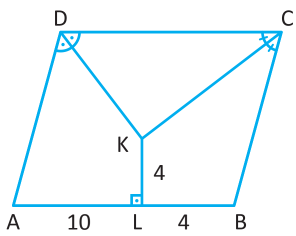
$|DC| = |BK|$

$|CK| = |AD|$

$m(\widehat{ADC}) = 84°$ dir.

Buna göre $m(\widehat{CBK}) = \alpha$ açısının kaç derece olduğunu bulunuz.

3. Şekildeki ABCD paralelkenarında



$[DK]$ ve $[CK]$ açıortaylar

$[KL] \perp [AB]$

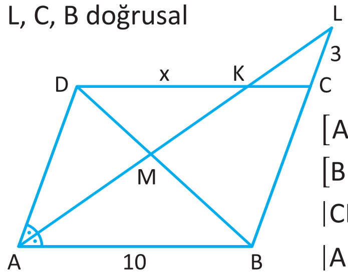
$|LB| = 4$ cm

$|AL| = 10$ cm

$|KL| = 4$ cm dir.

Buna göre AD kenarının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

4. Şekildeki ABCD paralelkenarında L, K, M, A ve L, C, B doğrusal



$[AL]$ açıortay

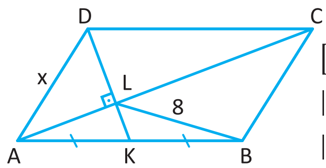
$[BD]$ köşegen

$|CL| = 3$ cm

$|AB| = 10$ cm dir.

Buna göre DK kenarının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

5. Şekildeki ABCD paralelkenarında D, L, K doğrusal



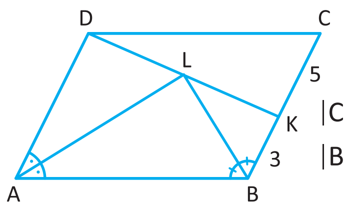
$[AC] \perp [DK]$

$|AK| = |KB|$

$|LB| = 8$ cm dir.

Buna göre AD kenarının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

6. Şekildeki ABCD paralelkenarında D, L, K doğrusal $[AL]$ ve $[BL]$ açıortaylar,

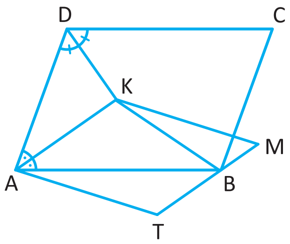


$|CK| = 5$ cm

$|BK| = 3$ cm dir.

Buna göre ABCD paralelkenarının çevresinin kaç cm olduğunu bulunuz.

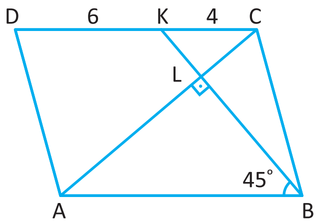
7. Şekildeki ABCD ve ATMK paralelkenar,



$[AK]$, BAD açısının,
$[DK]$, ADC açısının
açıortaylardır.

Buna göre $\dfrac{A(\widehat{AKB})}{A(ABCD)}$ oranını bulunuz.

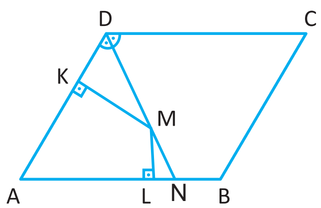
8. Şekildeki ABCD paralelkenarında



$[BK] \perp [AC]$
$m(\widehat{LBA}) = 45^\circ$
$|KC| = 4$ cm
$|DK| = 6$ cm dir.

Buna göre ABCD paralelkenarının alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

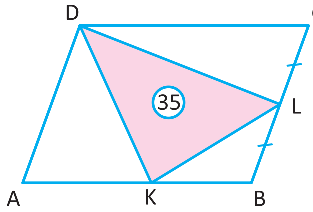
9. Şekildeki ABCD paralelkenarında D, M, N doğrusal



$[MK] \perp [AD]$
$[ML] \perp [AB]$
$|KM| = 5$ cm
$|LM| = 3$ cm
$|AB| = 9$ cm dir.

Buna göre ABCD paralelkenarının alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

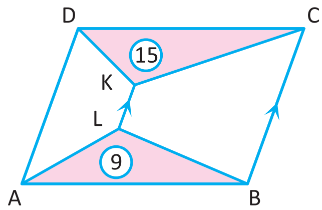
10. Şekildeki ABCD paralelkenarında



$3|KB| = 2|AK|$
$|CL| = |LB|$
$A(\widehat{KLD}) = 35\ cm^2$ dir.

Buna göre ABCD paralelkenarının alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

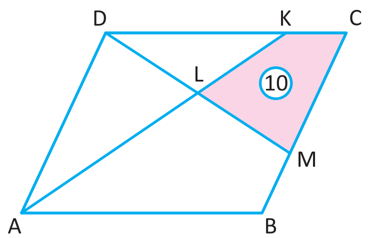
11. Şekildeki ABCD paralelkenarında



$[KL] \parallel [BC]$
$|BC| = 4 \cdot |KL|$
$A(\widehat{DKC}) = 15\ cm^2$
$A(\widehat{ABL}) = 9\ cm^2$ dir.

Buna göre ABCD paralelkenarının alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

12. Şekildeki ABCD paralelkenarında



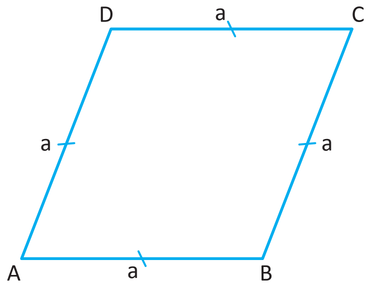
$[AK] \cap [DM] = \{L\}$
$3|KC| = |DK|$
$|CM| = 2|BM|$
$A(KLMC) = 10\ cm^2$ dir.

Buna göre ABCD paralelkenarının alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

3. Eşkenar Dörtgen

Tanım

Kenar uzunlukları eşit olan paralelkenara **eşkenar dörtgen** denir (Şekil 5.3.39).
Eşkenar dörtgen paralelkenarın tüm özelliklerini sağlar.



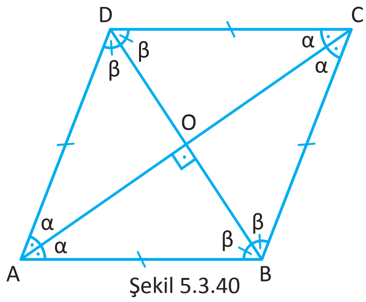
Şekil 5.3.39

Özellik

1. Eşkenar dörtgende köşegenler açıortay olup birbirini dik ortalar (Şekil 5.3.40).

$|AO| = |OC|$

$|BO| = |OD|$ olur.

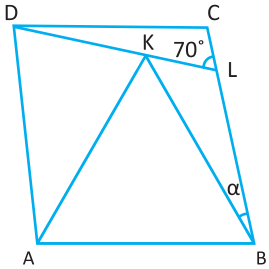


Şekil 5.3.40

İspat

$|AB| = |BC|$ olduğundan $\widehat{ABC}$ ikizkenar üçgendir.
Köşegenler birbirini ortaladığından
ABC ikizkenar üçgeninde $[OB]$, hem kenarortay hem yükseklik hem de açıortaydır.
Bu durumda $[OB] \perp [AC]$, $|AO| = |OC|$ ve $m(\widehat{ABO}) = m(\widehat{CBO})$ olur.
Benzer şekilde BCD ikizkenar üçgeninden $[OC]$, hem kenarortay hem yükseklik hem de açıortaydır.
Bu durumda $[OC] \perp [BD]$, $|BO| = |OD|$ ve $m(\widehat{BCO}) = m(\widehat{DCO})$ olur.

1. ÖRNEK



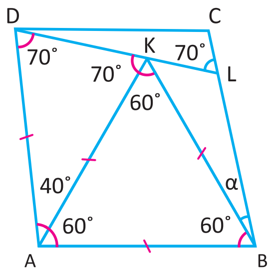
Şekilde ABCD eşkenar dörtgen, AKB eşkenar üçgendir.
$m(\widehat{DLC}) = 70^\circ$ olduğuna göre
$m(\widehat{KBL}) = \alpha$ açısının kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

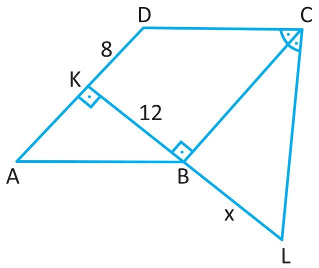
$[AD] /\!/ [BC]$ olduğundan $m(\widehat{ADK}) = m(\widehat{DLC}) = 70^\circ$ olur.
ABCD eşkenar dörtgen ve AKB eşkenar üçgen olduğundan $|AK| = |AD|$ olur.
Bu durumda $\widehat{AKD}$ ikizkenar üçgen olduğundan
$m(\widehat{ADK}) = m(\widehat{AKD}) = 70^\circ$ olur.
$m(\widehat{BKL}) = 180^\circ - (70^\circ + 60^\circ) = 50^\circ$ bulunur.
Şekilde $\widehat{BKL}$ nde $m(\widehat{BKL}) + m(\widehat{KBL}) = m(\widehat{DLC})$

$$50^\circ + \alpha = 70^\circ$$

$$\alpha = 20^\circ \text{ bulunur.}$$



2. ÖRNEK



Şekildeki ABCD eşkenar dörtgeninde $[BC]$ açıortay

$[BC] \perp [KL]$

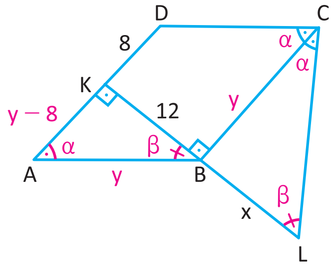
$[AD] \perp [KL]$

$m(\widehat{DCB}) = m(\widehat{BCL})$

$|KD| = 8$ cm

$|KB| = 12$ cm olduğuna göre $|BL| = x$ değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM:



Şekilde $m(\widehat{DCB}) = m(\widehat{BCL}) = \alpha$ alınırsa $m(\widehat{DAB}) = \alpha$ olur. Buradan $m(\widehat{BLC}) = m(\widehat{ABK})$ olduğu görülür. Bu açıların ölçüsü β olsun.

$|BC| = y$ alınırsa $|AK| = y - 8$ olur.

ABK dik üçgeninde Pisagor teoreminden

$|AB|^2 = |AK|^2 + |KB|^2$

$y^2 = (y-8)^2 + 12^2$

$\cancel{y^2} = \cancel{y^2} - 16y + 64 + 144 \Rightarrow 16y = 208 \Rightarrow y = 13$ cm bulunur.

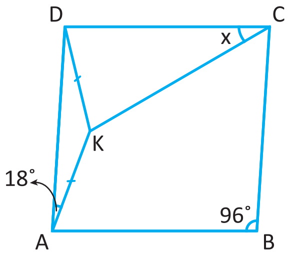
$\widehat{AKB} \sim \widehat{CBL}$ dir (A.A.).

Buradan $\dfrac{|KB|}{|BL|} = \dfrac{|AK|}{|CB|} \Rightarrow \dfrac{12}{x} = \dfrac{5}{13}$

$5x = 156 \Rightarrow x = \dfrac{156}{5}$ cm bulunur.

Sıra Sizde

SORU



Şekilde ABCD eşkenar dörtgeninde

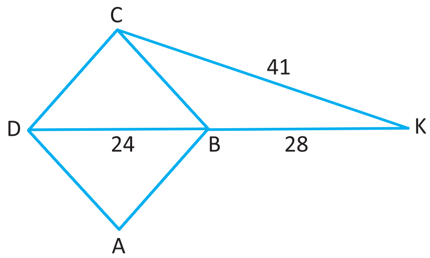
$|AK| = |DK|$

$m(\widehat{DAK}) = 18°$

$m(\widehat{ABC}) = 96°$ olduğuna göre $m(\widehat{DCK}) = x$ değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.

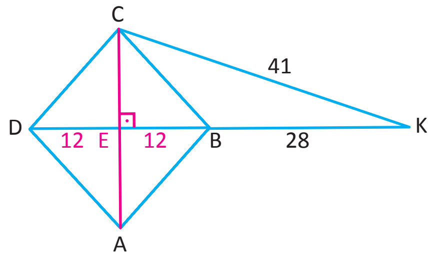
ÇÖZÜM

3. ÖRNEK



Şekilde ABCD eşkenar dörtgeninde D, B, K doğrusaldır.
$|BD| = 24$ cm
$|BK| = 28$ cm
$|CK| = 41$ cm olduğuna göre
AB kenarının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Şekildeki ABCD eşkenar dörtgeninde $[AC]$ çizilirse $[AC] \perp [BD]$ olur.
CEK dik üçgeninde Pisagor teoreminden

$|CK|^2 = |CE|^2 + |EK|^2$

$41^2 = |CE|^2 + 40^2$

$|CE|^2 = 1681 - 1600$

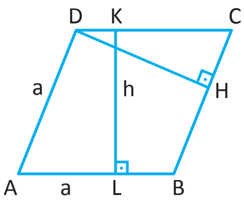
$|CE|^2 = 81 \Rightarrow |CE| = 9$ cm bulunur.

CEB dik üçgeninde Pisagor teoreminden

$$|BC|^2 = |EB|^2 + |EC|^2 \Rightarrow |BC|^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$$

$|BC| = 15$ cm bulunur. ABCD eşkenar dörtgen olduğundan
$|BC| = |AB| = 15$ cm elde edilir.

Eşkenar Dörtgenin Alanı



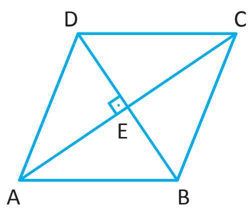
Bir eşkenar dörtgenin alanı, bir kenar uzunluğu ile yüksekliğin çarpımına eşittir. Eşkenar dörtgende tüm kenarlara ait yükseklik uzunlukları eşittir. $A(ABCD) = a \cdot h$ dir.

Görsel 5.3.5:
Eşkenar dörtgen baklava dilimi

Görsel 5.3.6:
Eşkenar dörtgen desenli kazak

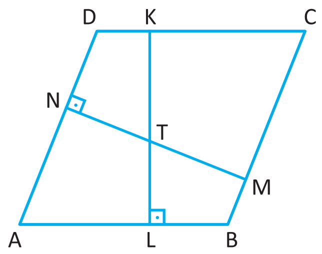
Not

ABCD eşkenar dörtgeninde $|AC| = e, |BD| = f$ olmak üzere
$A(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f \cdot \underbrace{\sin 90^\circ}_{1} = \frac{e \cdot f}{2}$ olur (Şekil 5.3.41).



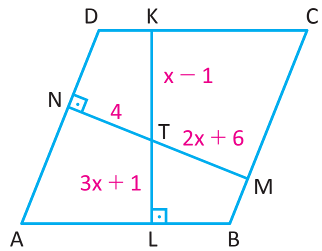
Şekil 5.3.41

4. ÖRNEK



Şekilde ABCD eşkenar dörtgen,
$[KL] \cap [NM] = \{T\}$
$[KL] \perp [AB]$
$[MN] \perp [AD]$
$|KT| = (x-1)$ cm
$|TL| = (3x+1)$ cm
$|TM| = (2x+6)$ cm
$|TN| = 4$ cm olduğuna göre eşkenar dörtgenin yüksekliğinin kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

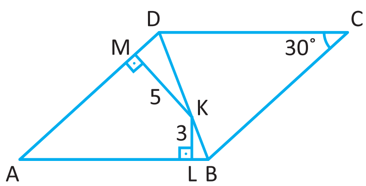


ABCD eşkenar dörtgeninde kenarlara ait yükseklikler eşit olduğundan $|KL| = |MN|$ olur. Bu durumda

$$|KT| + |TL| = |MT| + |TN|$$
$$x - \cancel{1} + 3x + \cancel{1} = 2x + 6 + 4$$
$$4x = 2x + 10$$
$$2x = 10$$
$$x = 5 \text{ cm olur.}$$

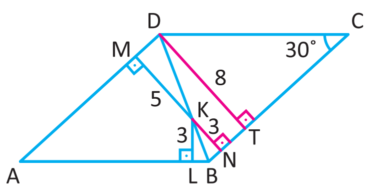
$|KL| = 4x$ olduğundan $h = 4 \cdot 5 = 20$ cm bulunur.

5. ÖRNEK



Şekildeki ABCD eşkenar dörtgeninde D, K, B doğrusal,
$[KM] \perp [AD]$
$[KL] \perp [AB]$
$|KL| = 3$ cm
$|KM| = 5$ cm
$m(\widehat{DCB}) = 30^\circ$ olduğuna göre
$A(ABCD)$ değerinin kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

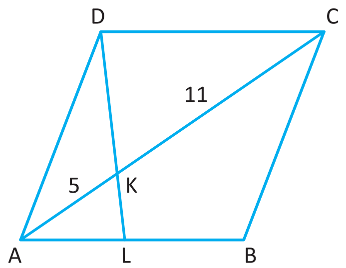


Şekilde ABD üçgeninde AB kenarına ait yükseklik $h = |KL| + |KM|$ olduğundan
$h = 3 + 5 = 8$ cm bulunur.
Bu yükseklik aynı zamanda eşkenar dörtgenin de yüksekliğidir.
$[BC] \perp [DT]$ çizilirse
$\widehat{DTC}$, $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ dik üçgeni olur.
$|DT| = 8$ cm ise $|DC| = 16$ cm olur.

Bu durumda

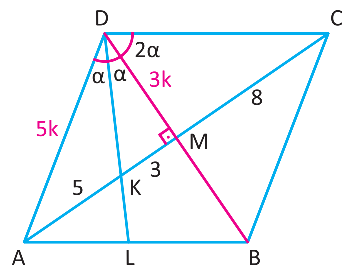
$$A(ABCD) = a \cdot h$$
$$= 16 \cdot 8$$
$$= 128 \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$

6. ÖRNEK



Şekildeki ABCD eşkenar dörtgeninde
D, K, L doğrusal,
$[AC]$ köşegen,
$m(\widehat{KDC}) = 3 \cdot m(\widehat{ADK})$
$|AK| = 5$ cm
$|KC| = 11$ cm olduğuna göre
$A(ABCD)$ değerinin kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

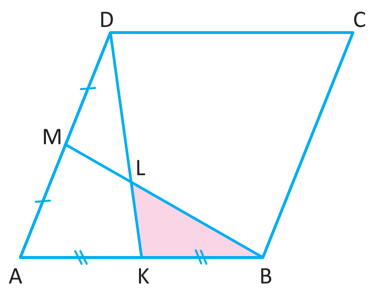


Şekilde $m(\widehat{ADK}) = \alpha$ alınırsa $m(\widehat{KDC}) = 3\alpha$ olur.
BD köşegeni çizilirse $m(\widehat{ADM}) = m(\widehat{MDC}) = 2\alpha$ olur. Bu durumda
$m(\widehat{ADK}) = \alpha$ olduğundan $m(\widehat{KDM}) = \alpha$ olur.
$|AC| = |AK| + |KC| = 5 + 11 = 16$ cm bulunur.
Eşkenar dörtgende köşegenler birbirini dik ortaladığından
$|MA| = |MC| = 8$ cm, $|KM| = 3$ cm ve $m(\widehat{DMA}) = 90^\circ$ olur.

AMD dik üçgeninde iç açıortay teoreminden
$\dfrac{|DA|}{|DM|} = \dfrac{|AK|}{|MK|}$ olduğundan $\dfrac{|DA|}{|DM|} = \dfrac{5}{3}$ olur.
$|DM| = 3k, |DA| = 5k$ alınırsa Pisagor teoreminden $|MA| = 4k$ olur.
$|MA| = 8$ cm olduğundan $k = 2$ cm bulunur.
Buradan $|DM| = |MB| = 3 \cdot 2 = 6$ cm, $|BD| = 12$ cm olur.
Bu durumda $e = |AC| = 16$ cm ve $f = |BD| = 12$ cm olduğundan

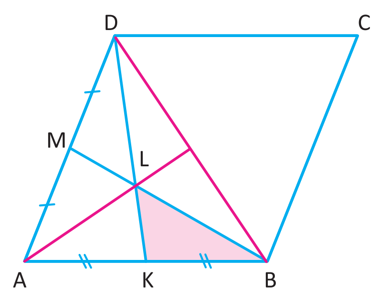
$$A(ABCD) = \frac{e \cdot f}{2} = \frac{\overset{8}{\cancel{16}} \cdot 12}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 96\ cm^2 \text{ bulunur.}$$

7. ÖRNEK



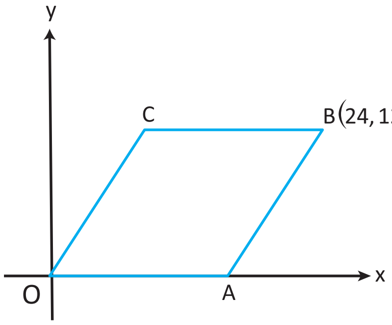
Şekildeki ABCD eşkenar dörtgeninde
D, L, K ve B, L, M doğrusal,
$|DM| = |MA| = |AK| = |KB|$ ve
$A(\widehat{LKB}) = 4\ cm^2$ olduğuna göre
$A(ABCD)$ değerinin kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



ABCD eşkenar dörtgeninde BD köşegeni çizilirse
$|DM| = |MA|$ ve $|BK| = |KA|$ olduğundan L noktası ABD üçgeninin ağırlık merkezi olur.
Ağırlık merkezi ABD üçgenini 6 eş alana ayırır. Buradan
$A(\widehat{ABD}) = 6 \cdot A(\widehat{LKB})$ ise $A(\widehat{ABD}) = 6 \cdot 4 = 24\ cm^2$ ve
$A(ABCD) = 2 \cdot A(\widehat{ABD})$ olduğundan
$A(ABCD) = 2 \cdot 24 = 48\ cm^2$ bulunur.

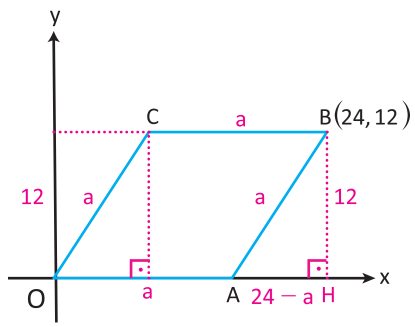
8. ÖRNEK



Analitik düzlemde bir köşesi orijin olan eşkenar dörtgen yandaki şekilde verilmiştir. $B(24, 12)$ olduğuna göre

$A(OABC)$ nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Eşkenar dörtgenin bir kenar uzunluğu a alınır ve $[AH] \perp [BH]$ olacak şekilde $[BH]$ çizilirse $|AH| = 24 - a$ olur.

$\widehat{AHB}$ dik üçgen olduğundan Pisagor teoremine göre

$|AB|^2 = |AH|^2 + |BH|^2$

$a^2 = (24 - a)^2 + 12^2$

$\cancel{a^2} = 576 - 48a + \cancel{a^2} + 144$

$48a = 720 \Rightarrow a = 15$ birim bulunur.

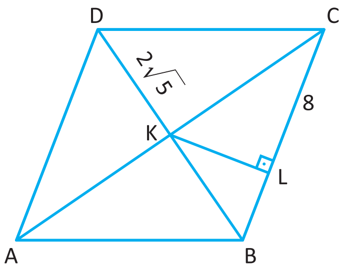
Buradan $A(OABC) = |OA| \cdot |BH|$

$= 15 \cdot 12$

$= 180$ birimkare bulunur.

Sıra Sizde

SORU



Şekildeki ABCD eşkenar dörtgeninde $[AC] \cap [BD] = \{K\}$

$[KL] \perp [BC]$

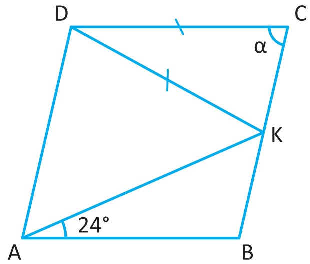
$|DK| = 2\sqrt{5}$ cm

$|CL| = 8$ cm olduğuna göre

$A(ABCD)$ nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

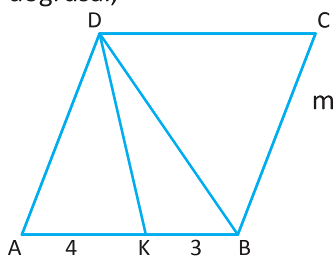
ALIŞTIRMALAR-4

1. 

Şekildeki ABCD eşkenar dörtgeninde B, K, C doğrusal, $|DC| = |DK|$ $m(\widehat{BAK}) = 24^\circ$

Buna göre DCK açısının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.

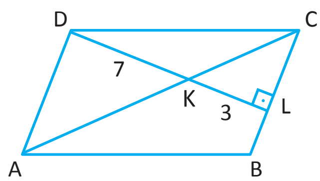
2. Şekildeki ABCD eşkenar dörtgeninde A, K, B doğrusal,



$m(\widehat{DBK}) = 2 \cdot m(\widehat{KDB})$
$|AK| = 4$ cm
$|KB| = 3$ cm

Buna göre BD kenarının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

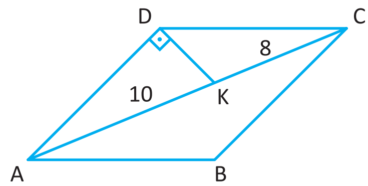
3. Şekildeki ABCD eşkenar dörtgeninde A, K, C doğrusal



$[DL] \perp [BC]$
$|DK| = 7$ cm
$|KL| = 3$ cm dir.

Buna göre ABCD eşkenar dörtgeninin çevresinin uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

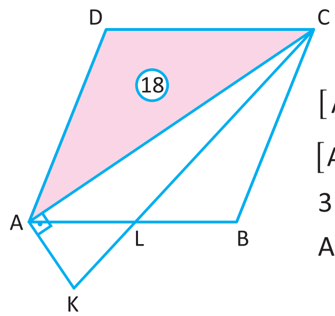
4. Şekildeki ABCD eşkenar dörtgeninde $[AC]$ köşegen, A, K, C doğrusal,



$[AD] \perp [DK]$
$|CK| = 8$ cm
$|AK| = 10$ cm

Buna göre ABCD eşkenar dörtgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

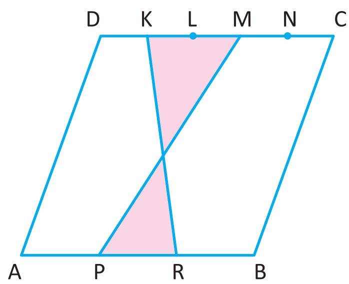
5. Şekildeki ABCD eşkenar dörtgeninde



$[AB] \cap [KC] = \{L\}$
$[AC] \perp [AK]$
$3 \cdot A(\widehat{AKL}) = A(\widehat{BLC})$
$A(\widehat{ADC}) = 18\ cm^2$

Buna göre ALC üçgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

6. Şekildeki ABCD eşkenar dörtgeninde



$|DK| = |KL| = |LM| = |MN| = |NC|$
$|AP| = |PR| = |RB|$
Boyalı alanlar toplamı $61\ cm^2$ dir.

Buna göre ABCD eşkenar dörtgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

4. Dikdörtgen

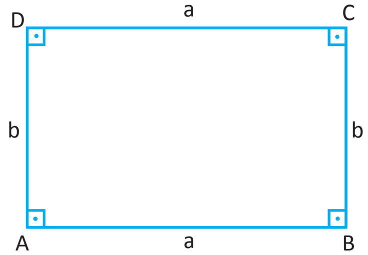
Tanım

Bütün açıları dik olan paralelkenara **dikdörtgen** denir. Dikdörtgen, açıları dik açı olan paralelkenar olduğundan paralelkenarın tüm özelliklerini sağlar (Şekil 5.3.42).

$[AB] \parallel [DC]$,

$[AD] \parallel [BC]$,

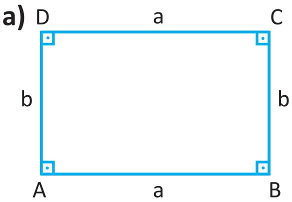
$m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = m(\widehat{D}) = 90^\circ$



Şekil 5.3.42

Özellik

1. **a)**



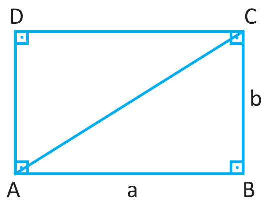
Şekil 5.3.43

Karşılıklı kenar uzunlukları eşittir (Şekil 5.3.43).

$|AB| = |DC| = a$

$|AD| = |BC| = b$ dir.

b)



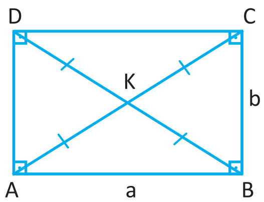
Şekil 5.3.44

Köşegen uzunlukları eşittir (Şekil 5.3.44).

$|AC| = |BD|$

$= \sqrt{a^2 + b^2}$ olur.

c)

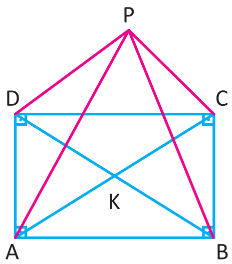


Şekil 5.3.45

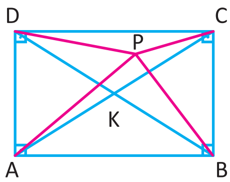
Köşegenler birbirini ortalar (Şekil 5.3.45).

$|AK| = |KC| = |BK| = |KD|$ olur.

2. P noktası, ABCD dikdörtgeninin iç veya dış bölgesinde herhangi bir nokta olmak üzere $|PA|^2 + |PC|^2 = |PB|^2 + |PD|^2$ dir (Şekil 5.3.46, Şekil 5.3.47).



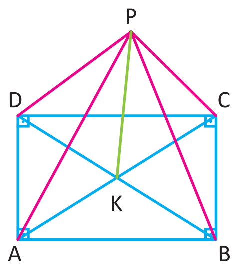
Şekil 5.3.46



Şekil 5.3.47

İspat

P noktası ABCD dikdörtgeninin dış bölgesinde bir nokta ve $[AC] \cap [BD] = \{K\}$ olsun. $[PK]$ çizildiğinde oluşan PAC üçgeninde $|AK| = |KC|$ ve PDB üçgeninde $|DK| = |KB|$ olduğundan $[PK]$ kenarortay olur.



Şekil 5.3.48

$\overset{\frown}{PAC}$ nde kenarortay teoreminden

$2 \cdot |PK|^2 = |PA|^2 + |PC|^2 - \dfrac{|AC|^2}{2}$ ve

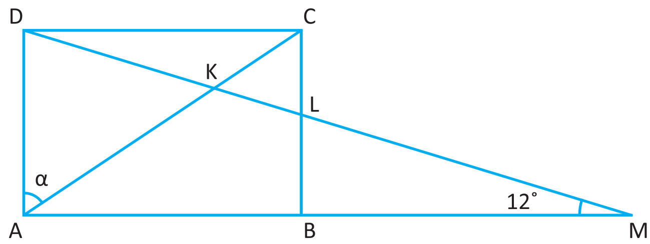
$\overset{\frown}{PDB}$ nde kenarortay teoreminden

$2 \cdot |PK|^2 = |PB|^2 + |PD|^2 - \dfrac{|BD|^2}{2}$ eşitlikleri yazılabilir. Buradan

$|PA|^2 + |PC|^2 - \dfrac{|AC|^2}{2} = |PB|^2 + |PD|^2 - \dfrac{|BD|^2}{2}$ yazılır.

$|AC| = |BD|$ olduğundan $|PA|^2 + |PC|^2 = |PB|^2 + |PD|^2$ elde edilir (Şekil 5.3.48).

1. ÖRNEK



Şekildeki ABCD dikdörtgeninde A, B, M doğrusal

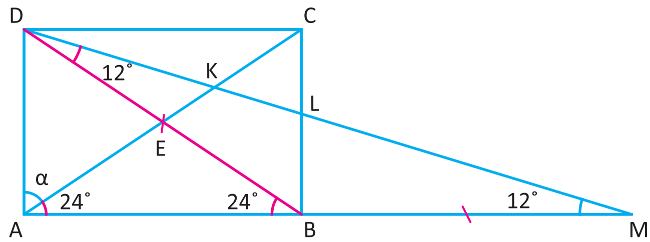
$[AC] \cap [DM] = \{K\}$

$|AC| = |BM|$

$m(\widehat{BMD}) = 12°$ olduğuna göre

$m(\widehat{DAK}) = \alpha$ değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



ABCD dikdörtgeninde BD köşegeni çizilir ve

$[AC] \cap [BD] = \{E\}$ denirse

$|AC| = |BD| = |BM|$ olduğundan

DBM ikizkenar üçgen olur. Bu durumda

$m(\widehat{BMD}) = m(\widehat{BDM}) = 12°$ olur. Buradan

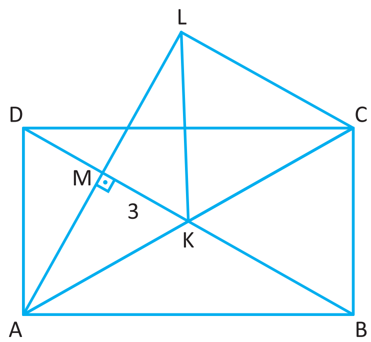
$m(\widehat{ABD}) = 12° + 12° = 24°$ bulunur.

Dikdörtgende köşegenler birbirini ortaladığından $\widehat{AEB}$ de ikizkenar üçgendir.

Bu durumda $m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{EAB}) = 24°$ olur. Buradan

$m(\widehat{DAK}) = 90° - 24° = 66°$ bulunur.

2. ÖRNEK



Şekildeki ABCD dikdörtgeninde A, K, C doğrusal

$[AL] \perp [BD]$

$|KL| = |DK|$

$|MK| = 3$ cm olduğuna göre

$|LC| = x$ değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Şekilde ABCD dikdörtgeninde $|KL| = |DK|$ olduğundan

$|KL| = |AK| = |KC|$ bulunur.

Buradan $m(\widehat{ALC}) = 90°$ ve $\widehat{ALC}$ dik üçgen olur.

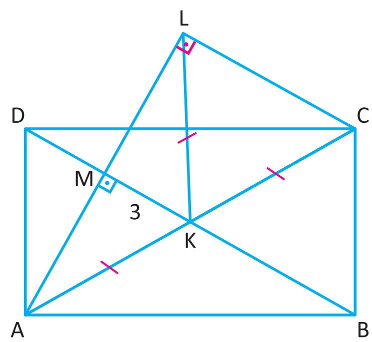
$[AL] \perp [BD]$ ve $[AL] \perp [CL]$ olduğundan

$[BD] \parallel [CL]$ olur.

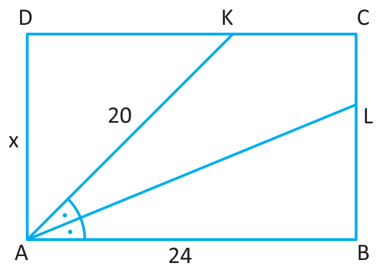
O hâlde $\widehat{AKM} \sim \widehat{ACL}$ olur (A.A.).

$$\frac{|KM|}{|CL|} = \frac{|AK|}{|AC|} \Rightarrow \frac{3}{|LC|} = \frac{1}{2}$$

$|LC| = 6$ cm bulunur.



3. ÖRNEK



Şekildeki ABCD dikdörtgeninde

$m(\widehat{KAL}) = m(\widehat{LAB})$

$2|CL| = |BL|$

$|AB| = 24$ cm

$|AK| = 20$ cm olduğuna göre

$|AD| = x$ değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

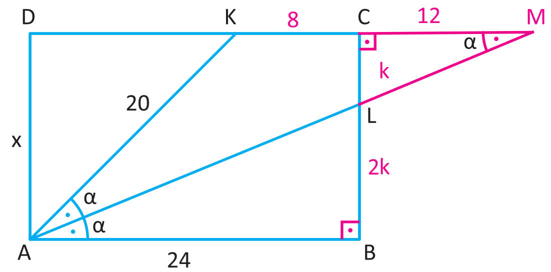
ÇÖZÜM

Şekilde ABCD dikdörtgeninde AL ve DC kenarları uzatılır ve kesiştikleri noktaya M denilirse MDA dik üçgen olur.

$\widehat{ABL} \sim \widehat{MCL}$ olur (A.A.).

Buna göre $\dfrac{|AB|}{|MC|} = \dfrac{|AL|}{|ML|} = \dfrac{|BL|}{|CL|}$

$\dfrac{24}{|MC|} = \dfrac{|AL|}{|ML|} = \dfrac{2k}{k} \Rightarrow |MC| = 12$ cm bulunur.



İç ters açıdan $m(\widehat{BAL}) = m(\widehat{KMA})$ olduğundan $|AK| = |KM| = 20$ cm olur.

Buradan $|KC| = 8$ cm ve $|DK| = 16$ cm olur.

ADK dik üçgeninde Pisagor teoreminden

$|AK|^2 = |AD|^2 + |DK|^2$

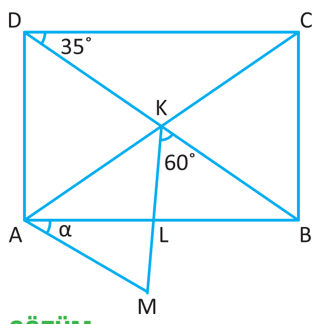
$20^2 = |AD|^2 + 16^2$

$|AD|^2 = 400 - 256 = 144$

$|AD| = x = 12$ cm bulunur.

Sıra Sizde

SORU



Şekildeki ABCD dikdörtgeninde [AC] ve [BD] köşegen, K, L, M doğrusal

$|CK| = |KM|$

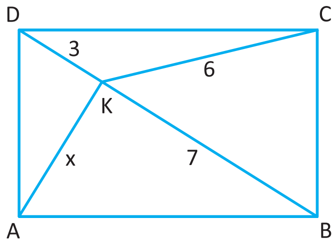
$m(\widehat{KDC}) = 35^\circ$

$m(\widehat{MKB}) = 60^\circ$ olduğuna göre

$m(\widehat{LAM}) = \alpha$ değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

4. ÖRNEK



Şekildeki ABCD dikdörtgeninde
$|DK| = 3$ cm
$|CK| = 6$ cm
$|KB| = 7$ cm olduğuna göre
$|AK| = x$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

K noktası dikdörtgen içinde bir nokta olduğundan
$|AK|^2 + |KC|^2 = |DK|^2 + |KB|^2$ bulunur.

$x^2 + 6^2 = 3^2 + 7^2$

$x^2 + 36 = 9 + 49$

$x^2 = 58 - 36$

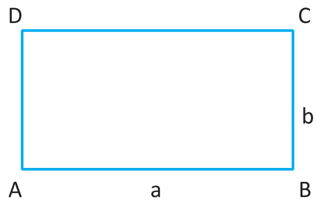
$x^2 = 22$

$x = \sqrt{22}$ cm bulunur.

Dikdörtgenin Alanı

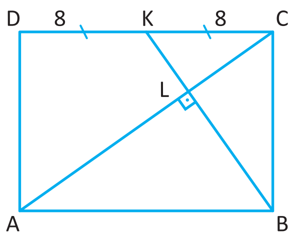
Bir dikdörtgenin alanı, dik kesişen iki kenar uzunluğunun çarpımına eşittir (Şekil 5.3.49).

$A(ABCD) = |AB| \cdot |BC| = a \cdot b$



Şekil 5.3.49: Dikdörtgen

5. ÖRNEK



Şekildeki ABCD dikdörtgeninde
$[AC] \perp [BK]$
$|DK| = |KC| = 8$ cm olduğuna göre
ABCD dikdörtgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

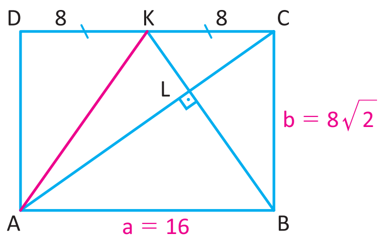
Şekilde ABCD dikdörtgeninde $[AK]$ çizilirse ABCK dik yamuk olur.
Dik yamukta yükseklik, alt ve üst tabanlar çarpımının kareköküdür.

$h = \sqrt{a \cdot c}$

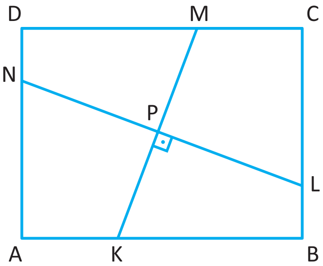
$= \sqrt{16 \cdot 8}$

$= 8\sqrt{2}$ cm dir. $h = b$ olduğundan

$A(ABCD) = a \cdot b = 16 \cdot 8\sqrt{2} = 128\sqrt{2}$ cm^2 bulunur.



6. ÖRNEK



Şekildeki ABCD dikdörtgeninde

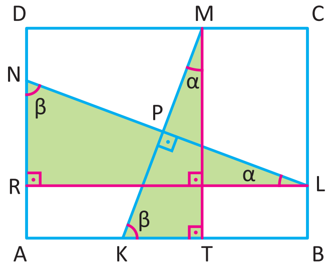
$[MK] \perp [NL]$ ve $[MK] \cap [NL] = \{P\}$

$3|NL| = 4|MK|$

$Ç(ABCD) = 42$ cm olduğuna göre

$A(ABCD)$ nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



M noktasından AB kenarına $[MT] \perp [AB]$ olacak şekilde,
$[MT]$ ve L noktasından AD kenarına $[LR] \perp [AD]$ olacak şekilde
$[LR]$ çizilirse $m(\widehat{NLR}) = m(\widehat{KMT})$ olduğundan
$\widehat{NLR} \sim \widehat{KMT}$ bulunur (A.A.).

$\widehat{NLR} \sim \widehat{KMT} \Rightarrow \dfrac{|NL|}{|KM|} = \dfrac{|LR|}{|MT|}, \ \dfrac{4k}{3k} = \dfrac{|LR|}{|MT|}$ olur. Bu durumda

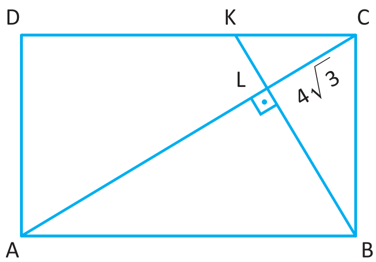
$Ç(ABCD) = 2 \cdot (|LR| + |MT|)$

$= 2 \cdot (4k + 3k)$

$42 = 14k \Rightarrow k = 3$ olur.

Buradan $|LR| = 12$ cm ve $|MT| = 9$ cm bulunur.
Bu durumda $A(ABCD) = |LR| \cdot |MT| = 12 \cdot 9 = 108 \ cm^2$ bulunur.

7. ÖRNEK



Şekilde ABCD bir dikdörtgendir.

$[AC] \cap [BK] = \{L\}$

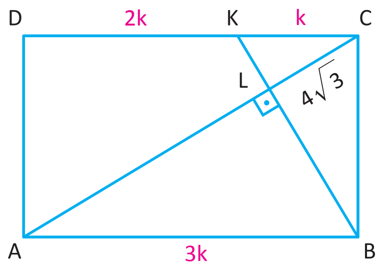
$[AC] \perp [BK]$

$2 \cdot |KC| = |DK|$

$|LC| = 4\sqrt{3}$ cm olduğuna göre

A(ABCD) nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



$|KC| = k$ alınırsa $|DK| = 2k$ ve $|DC| = |AB| = 3k$ olur.

$\widehat{KLC} \sim \widehat{BLA}$, (A.A.) olduğundan

$\dfrac{|KC|}{|BA|} = \dfrac{|LC|}{|LA|} \Rightarrow \dfrac{k}{3k} = \dfrac{4\sqrt{3}}{|LA|}$

$|LA| = 12\sqrt{3}$ cm olur.

$\widehat{ABC}$ dik üçgen olduğundan Öklid teoremine göre

$|BL|^2 = |CL| \cdot |LA|$

$= 4\sqrt{3} \cdot 12\sqrt{3} \Rightarrow |BL| = 12$ cm olur.

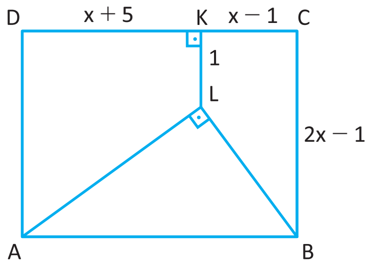
$A(ABCD) = 2 \cdot A(\widehat{ABC})$ olduğundan

$A(ABCD) = \cancel{2} \cdot \dfrac{|AC| \cdot |BL|}{\cancel{2}}$

$= 16\sqrt{3} \cdot 12$

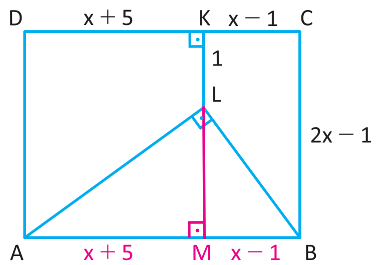
$= 192\sqrt{3} \ cm^2$ elde edilir.

8. ÖRNEK



Şekildeki ABCD dikdörtgeninde
$[KL] \perp [DC]$
$[AL] \perp [BL]$
$|DK| = (x+5)$ cm
$|KC| = (x-1)$ cm
$|BC| = (2x-1)$ cm
$|KL| = 1$ cm olduğuna göre
$A(ABCD)$ nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



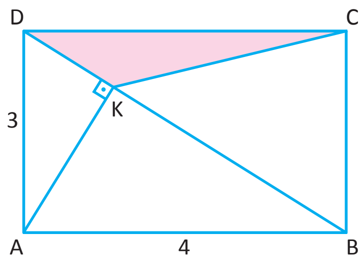
$[LM] \perp [AB]$ olacak şekilde $[LM]$ çizilirse
$|LM| = |BC| - |KL| = 2x - 1 - 1 = 2x - 2$ bulunur.
ALB dik üçgeninde Öklid teoreminden

$$|LM|^2 = |BM| \cdot |MA|$$
$$(2x-2)^2 = (x-1) \cdot (x+5)$$

$4x^2 - 8x + 4 = x^2 + 4x - 5 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$
ikinci derece denklemi elde edilir.
Denklem çözülürse $x_1 = 1$ veya $x_2 = 3$ bulunur.
$x - 1 > 0$ olduğundan $x_2 = 3$ için
$|AB| = 2x + 4 \Rightarrow |AB| = 10$ cm ve
$|BC| = 2x - 1 \Rightarrow |BC| = 5$ cm bulunur. Bu durumda
$A(ABCD) = |AB| \cdot |BC| = 10 \cdot 5 = 50 \text{ cm}^2$ elde edilir.

Sıra Sizde

SORU

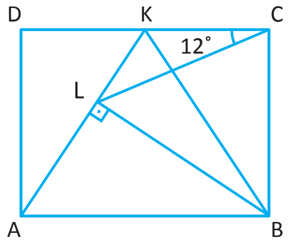


Şekildeki ABCD dikdörtgeninde
$[AK] \perp [BD]$
$|AD| = 3$ cm
$|AB| = 4$ cm olduğuna göre
DKC üçgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

ALIŞTIRMALAR-5

1. Şekildeki ABCD dikdörtgeninde

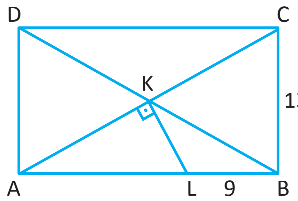


$[AK] \perp [BL]$

$m(\widehat{KCL}) = 12°$ dir.

Buna göre $\widehat{KBL}$ nın ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.

2. Şekildeki ABCD dikdörtgeninde



$[AC] \cap [BD] = \{K\}$

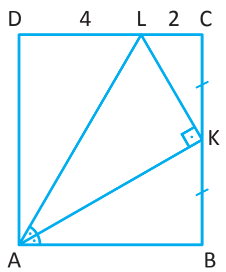
$[AC] \perp [KL]$

$|BL| = 9$ cm

$|BC| = 12$ cm dir.

Buna göre DC kenar uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

3. Şekildeki ABCD dikdörtgeninde



$[AK]$, $\widehat{BAL}$ nın açıortayı

$[AK] \perp [KL]$

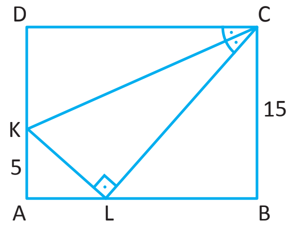
$|CK| = |KB|$

$|LC| = 2$ cm

$|DL| = 4$ cm dir.

Buna göre AL kenar uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

4. Şekildeki ABCD dikdörtgeninde



$[CL] \perp [KL]$

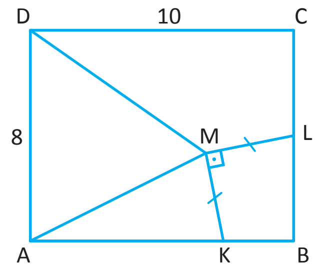
$m(\widehat{DCK}) = m(\widehat{KCL})$

$|BC| = 15$ cm

$|AK| = 5$ cm dir.

Buna göre KLC üçgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

5. Şekildeki ABCD dikdörtgeninde



$[ML] \perp [MK]$

$|ML| = |MK|$

$|DC| = 10$ cm

$|AD| = 8$ cm

$A(ABCD) = 5 \cdot A(MKBL)$ dir.

Buna göre ADM üçgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

6. Çevresi 20 cm ve köşegenlerinden birisinin uzunluğu $6\sqrt{2}$ cm olan dikdörtgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

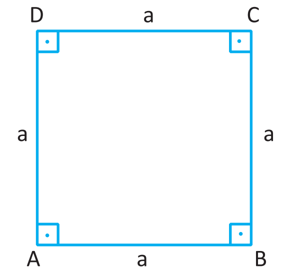
5. Kare

Tanım

Kenar uzunlukları eşit olan dikdörtgene **kare** denir (Şekil 5.3.50).

$|AB| = |BC| = |DC| = |AD| = a$ olmak üzere

$Ç(ABCD) = 4a$ olur.



Şekil 5.3.50

Özellik

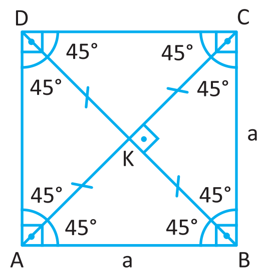
1. Köşegenler birbirini dik ortalar ve uzunlukları eşittir.

$|AK| = |KC| = |BK| = |KD| = a$

$[AC] \perp [BD]$

$|AC| = |BD| = a\sqrt{2}$

(Şekil 5.3.51).

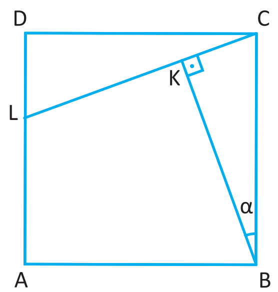


Şekil 5.3.51

Not

Kare; paralelkenar, eşkenar dörtgen ve dikdörtgenin bütün özelliklerini taşır.

1. ÖRNEK



Şekildeki ABCD karesinde

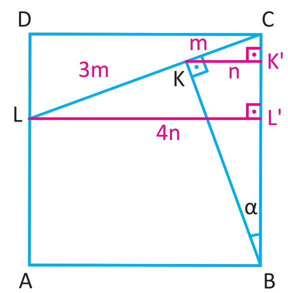
L,K,C doğrusal,

$[BK] \perp [CL]$

$|CL| = 4|CK|$ olduğuna göre

$m(\widehat{KBC}) = \alpha$ değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Şekilde $|CL| = 4|CK|$ olduğundan $|CK| = m$ alınırsa $|CL| = 4m$ olur.

$[KK'] \perp [BC]$ ve $[LL'] \perp [BC]$ olacak şekilde $[KK']$ ve $[LL']$ çizilirse

$\widehat{CKK'} \sim \widehat{CLL'}$ dir (A.A.).

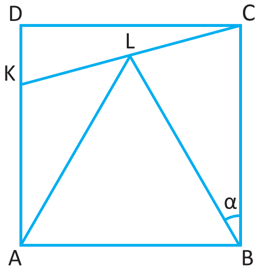
$$\frac{|CK|}{|CL|} = \frac{|CK'|}{|CL'|} = \frac{|KK'|}{|LL'|}$$

$\dfrac{m}{4m} = \dfrac{|KK'|}{|LL'|}$ olur. $|KK'| = n$ alınırsa $|LL'| = 4n$ olur. Bu durumda karenin bir kenar uzunluğu 4n olur.

BKC dik üçgeninde $|KK'| = n$ ve $|BC| = 4n$ olduğundan BKC üçgeni $15^\circ - 75^\circ - 90^\circ$ dik üçgenidir.

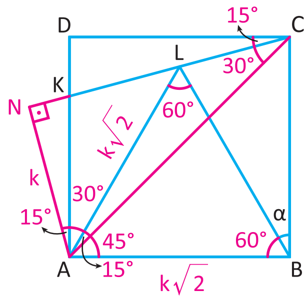
Buna göre $m(\widehat{KBC}) = 15^\circ$ olur.

2. ÖRNEK



Şekildeki ABCD karesinde
K, L, C doğrusal,
$4 \cdot m(\widehat{DCK}) = 2 \cdot m(\widehat{KAL}) = m(\widehat{BAL})$ olduğuna göre
$m(\widehat{CBL}) = \alpha$ değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.

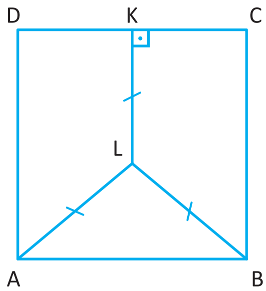
ÇÖZÜM



$m(\widehat{KAL}) + m(\widehat{BAL}) = 90°, (m(\widehat{BAL}) = 2 \cdot m(\widehat{KAL}))$
$m(\widehat{KAL}) + 2 \cdot m(\widehat{KAL}) = 90°$
$3 \cdot m(\widehat{KAL}) = 90° \Rightarrow m(\widehat{KAL}) = 30°$ ve
$m(\widehat{BAL}) = 60°$ ve $m(\widehat{DCK}) = 15°$ dir.
Şekildeki ABCD karesinde $[AC]$ köşegeni çizilir ve $[AN] \cap [CN] = \{N\}$ olacak şekilde oluşan CNA üçgeni $30° - 60° - 90°$ dik üçgeni olur.
$|NA| = k$ denilirse $|AC| = 2k$ olur.

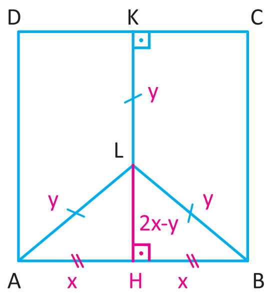
LNA üçgeni ikizkenar dik üçgen olduğundan
$|NA| = |NL| = k \Rightarrow |AL| = k\sqrt{2}$ olur.
$|AC| = 2k \Rightarrow |AB| = \dfrac{2k}{\sqrt{2}} = k\sqrt{2}$ olur.
Bu durumda ALB eşkenar üçgendir. Buradan
$m(\widehat{LBC}) = a = 90° - 60° = 30°$ bulunur.

3. ÖRNEK



Şekilde ABCD kare
$[KL] \perp [DC]$ ve
$|KL| = |AL| = |BL|$ olduğuna göre
$\dfrac{|KL|}{|AB|}$ oranını bulunuz.

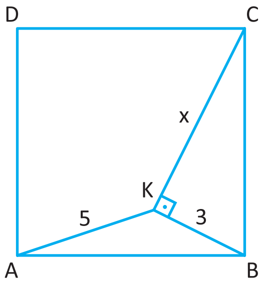
ÇÖZÜM



Şekilde ALB ikizkenar üçgen olduğundan $[LH]$ hem kenarortay hem açıortay hem de yüksekliktir.
$|AH| = |HB| = x$ ve $|KL| = |AL| = |LB| = y$ alınırsa
$|LH| = 2x - y$ olur.
LHB dik üçgeninde Pisagor teoreminden

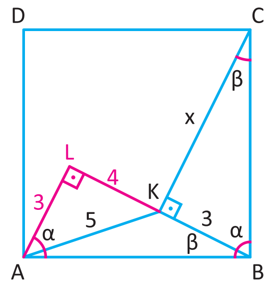
$$(2x - y)^2 + x^2 = y^2$$
$$4x^2 - 4xy + \cancel{y^2} + x^2 = \cancel{y^2}$$
$$5x^2 = 4xy$$
$$5x = 4y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{4}{5}$$ bulunur. Bu durumda $\dfrac{|KL|}{|AB|} = \dfrac{y}{2x} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{5}{4} = \dfrac{5}{8}$ olur.

4. ÖRNEK



Şekildeki ABCD karesinde
$[CK] \perp [BK]$
$|KB| = 3$ cm
$|AK| = 5$ cm olduğuna göre
$|CK| = x$ değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Şekilde $[AL] \cap [BL] = \{L\}$ ve $[AL] \perp [BL]$ olacak şekilde $[AL]$ ve $[KL]$ çizilirse BLA dik üçgeni elde edilir.

$m(\widehat{KBC}) = m(\widehat{LAB})$ ve $m(\widehat{KCB}) = m(\widehat{LBA})$ olduğundan

$\widehat{CKB} \cong \widehat{BLA}$ olur.

Bu durumda $|BK| = |AL| = 3$ cm ve $|CK| = |BL|$ olduğundan

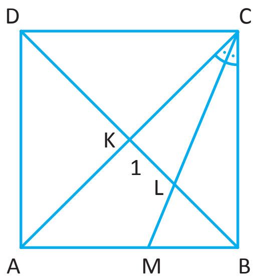
$|KL| = x - 3$ olur.

ALK dik üçgeni $3 - 4 - 5$ dik üçgeni olduğundan

$|LK| = x - 3 = 4 \Rightarrow x = 7$ cm bulunur.

Sıra Sizde

SORU



Şekildeki ABCD karesinde
$[AC] \cap [BD] = \{K\}$
$[CM] \cap [BD] = \{L\}$
$m(\widehat{ACM}) = m(\widehat{BCM})$
$|KL| = 1$ cm olduğuna göre
ABCD karesinin çevre uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

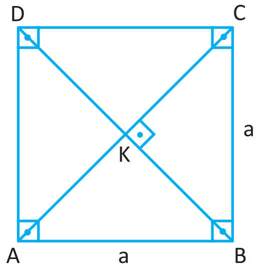
Karenin Alanı

Karenin alanı, bir kenar uzunluğunun karesine veya köşegen uzunluğunun karesinin yarısına eşittir.

Kare, özel bir dikdörtgen olduğundan $A(ABCD) = a \cdot a = a^2$ olur.

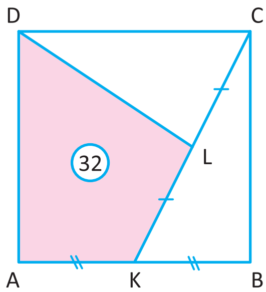
Karede köşegen uzunlukları eşit $|AC| = |BD| = e$ ve $[AC] \perp [BD]$ olduğundan

$A(ABCD) = \frac{e \cdot e}{2} = \frac{e^2}{2}$ olur (Şekil 5.3.52).



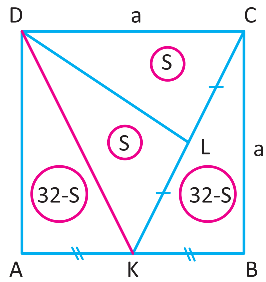
Şekil 5.3.52

5. ÖRNEK



Şekildeki ABCD karesinde C, L, K doğrusal
$|CL| = |KL|$
$|AK| = |KB|$
$A(DAKL) = 32\ cm^2$ olduğuna göre
Ç(ABCD) nin kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Şekilde ABCD karesinde $[DK]$ çizilirse $|KL| = |LC|$ olduğundan

$A(\widehat{DKL}) = A(\widehat{DLC})$ ve $A(\widehat{DAK}) = A(\widehat{CKB})$ olur.

$A(\widehat{DKL}) = A(\widehat{DLC}) = S$ alınırsa

$A(\widehat{DAK}) = A(\widehat{CKB}) = 32 - S$ olur. Bu durumda

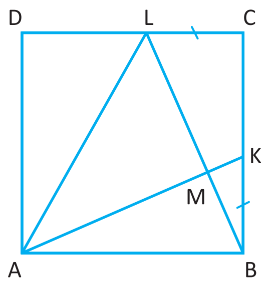
$A(ABCD) = A(\widehat{DAK}) + A(\widehat{CKB}) + A(\widehat{DKL}) + A(\widehat{DLC})$

$= 32 \cancel{- S} + 32 \cancel{- S} + \cancel{S} + \cancel{S}$

$= 64\ cm^2$ bulunur.

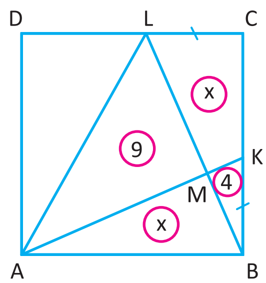
$A(ABCD) = a^2 = 64\ cm^2 \Rightarrow a = 8\ cm$ olur. Buradan
$Ç(ABCD) = 4a = 4 \cdot 8 = 32\ cm$ elde edilir.

6. ÖRNEK



Şekilde ABCD bir karedir.
$[AK] \cap [BL] = \{M\}$
$|CL| = |BK|$
$A(\widehat{BMK}) = 4\ cm^2$
$A(\widehat{ALM}) = 9\ cm^2$ olduğuna göre
$A(\widehat{ADL})$ nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Şekilde $\widehat{ABK} \cong \widehat{BCL}$ dir (K.A.K).

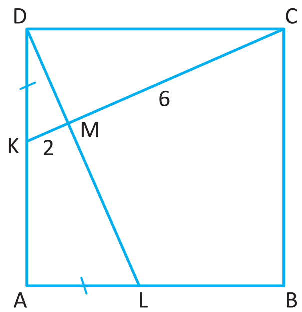
$A(MKCL) = x$ alınırsa $A(\widehat{ABK}) = A(\widehat{BCL}) = x + 4$ olur.

$A(\widehat{ABL}) = A(\widehat{BCL}) + A(\widehat{ADL})$

$x + 9 = x + 4 + A(\widehat{ADL})$

$A(\widehat{ADL}) = 5\ cm^2$ bulunur.

7. ÖRNEK



Şekilde ABCD bir kare

$[DL] \cap [CK] = \{M\}$

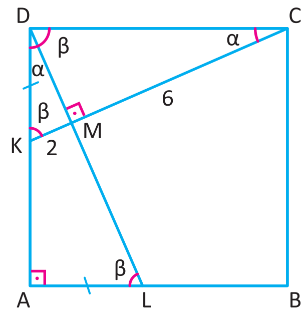
$|DK| = |AL|$

$|KM| = 2$ cm

$|MC| = 6$ cm olduğuna göre

$A(ABCD)$ nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Şekilde ABCD karesinde $|DK| = |AL|$ olduğundan $|AK| = |LB|$ olur.

Bu durumda $\widehat{DAL} \cong \widehat{CDK}$ (K.A.K) bulunur.

Buna göre $[DL] \perp [KC]$ olur.

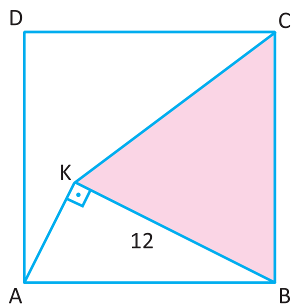
DKC dik üçgeninde Öklid teoremi uygulanırsa

$$\begin{aligned} |DC|^2 &= |CM| \cdot |CK| \\ &= 6 \cdot (6+2) \\ &= 6 \cdot 8 \\ &= 48 \text{ cm}^2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

$A(ABCD) = |DC|^2 = 48$ cm^2 olur.

Sıra Sizde

SORU



Şekilde ABCD bir karedir.

$[AK] \perp [KB]$

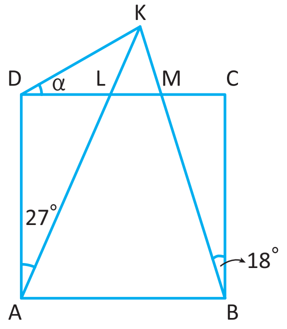
$|BK| = 12$ cm olduğuna göre

BCK üçgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

ALIŞTIRMALAR-6

1. Şekildeki ABCD karesinde K, L, A ve K, M, B doğrusal

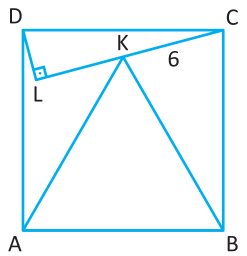


$m(\widehat{KBC}) = 18^\circ$

$m(\widehat{DAL}) = 27^\circ$ dir.

Buna göre $m(\widehat{KDC}) = \alpha$ açısının kaç derece olduğunu bulunuz.

2. Şekilde ABCD kare, ABK eşkenar üçgen

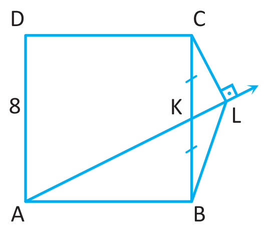


$[CL] \perp [DL]$

$|KC| = 6$ cm dir.

Buna göre DL kenarının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

3. Şekildeki ABCD karesinde



$[AL \cap [BC] = \{K\}$

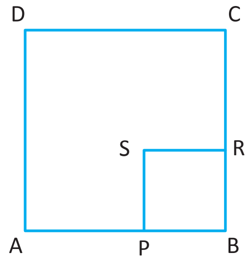
$[CL] \perp [AL$

$|CK| = |BK|$

$|AD| = 8$ cm dir.

Buna göre BL kenarının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

4. Şekildeki ABCD ve PBRS karedir.



$a, b \in \mathbb{Z}$

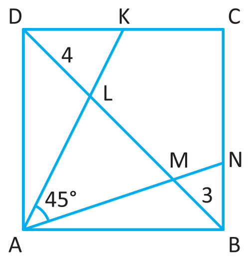
$|DC| = a$

$|BR| = b$

$A(APSRCD) = 191\ cm^2$ dir.

Buna göre APSRCD altıgeninin çevresinin kaç cm olduğunu bulunuz.

5. Şekildeki ABCD karesinde



$[BD] \cap [AK] = \{L\}$

$[AN] \cap [BD] = \{M\}$

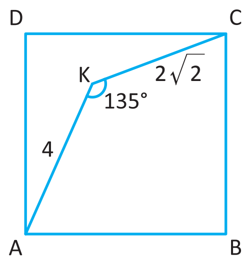
$m(\widehat{KAN}) = 45^\circ$

$|DL| = 4$ cm

$|MB| = 3$ cm dir.

Buna göre ABCD karesinin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

6. Şekildeki ABCD karesinde



$m(\widehat{AKC}) = 135^\circ$

$|KC| = 2\sqrt{2}$ cm

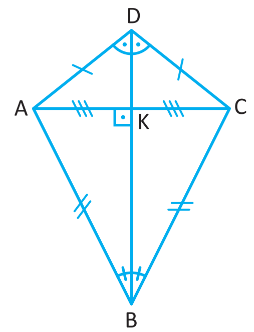
$|AK| = 4$ cm dir.

Buna göre ABCD karesinin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

6. Deltoid

Tanım

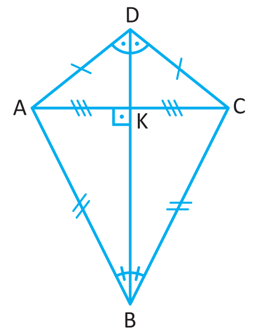
Yandaki şekilde verilen ABCD dörtgeninde
$|AB| = |BC|$
$|CD| = |DA|$ ve
$[BD] \perp [AC]$ koşulları sağlanıyorsa bu dörtgene **deltoid** denir (Şekil 5.3.53).
$Ç(ABCD) = 2(|AB| + |CD|)$



Şekil 5.3.53

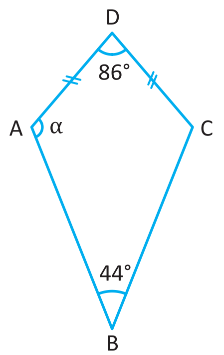
Özellik

1. ABCD deltoidinde $|AB| = |CB|$, $|AD| = |DC|$
2. ABC ve ADC üçgenleri ikizkenar üçgendir.
3. Köşegenler dik kesişir. $[AC] \perp [BD]$ olur.
4. $[BD]$ köşegeni $[AC]$ köşegenini dik ortalar. $|AK| = |KC|$ olur.
5. $[BD]$ köşegeni, simetri doğrusu ve açıortaydır (Şekil 5.3.54).



Şekil 5.3.54

1. ÖRNEK

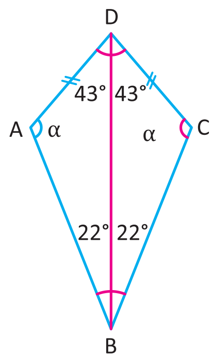


Şekilde ABCD bir deltoiddir.
$|AD| = |DC|$
$m(\widehat{ADC}) = 86^\circ$
$m(\widehat{ABC}) = 44^\circ$ olduğuna göre
$m(\widehat{BAD}) = \alpha$ açısının değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.

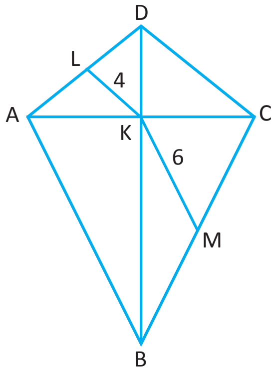
ÇÖZÜM

ABCD deltoidinde $[BD]$ köşegeni simetri doğrusu ve açıortay olduğundan
$\widehat{DAB} \cong \widehat{DCB}$ (A.K.A.) ve $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{BCD})$ olur.
$m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{BCD}) = \alpha$ alınırsa

$$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 360^\circ$$
$$\alpha + 44^\circ + \alpha + 86^\circ = 360^\circ$$
$$2\alpha + 130^\circ = 360^\circ$$
$$2\alpha = 360^\circ - 130^\circ$$
$$2\alpha = 230^\circ$$
$\alpha = 115^\circ$ bulunur.

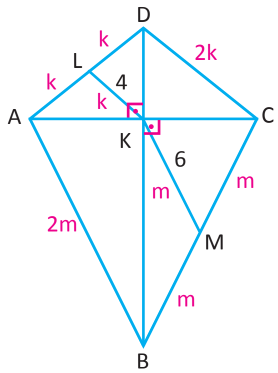


2. ÖRNEK



Şekilde ABCD bir dörtgendir.
$[AC] \cap [BD] = \{K\}$
$|AL| = |LD| = \dfrac{|DC|}{2}$
$|BM| = |MC| = \dfrac{|AB|}{2}$
$|KL| = 4$ cm
$|KM| = 6$ cm olduğuna göre
Ç(ABCD) değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

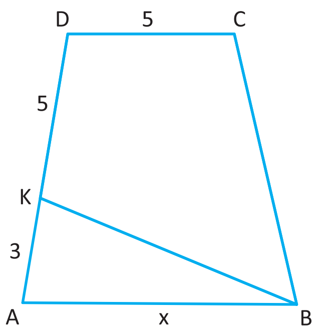
ÇÖZÜM



Şekilde $|AL| = |LD| = k$ alınırsa $|DC| = |AD| = 2k$ ve
$|BM| = |MC| = m$ alınırsa $|AB| = |CB| = 2m$ olur.
Bu durumda ABCD dörtgeni bir deltoiddir ve $[AC] \perp [BD]$ olur.
AKD dik üçgeninde $[KL]$, hipotenüse ait kenarortay olduğundan
$|AL| = |LD| = |KL| = 4$ cm olur.

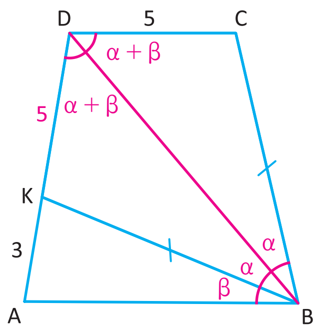
Benzer düşünceyle BKC dik üçgeninde $[KM]$, hipotenüse ait kenarortay olduğundan
$|BM| = |MC| = |KM| = 6$ cm bulunur.
Bu durumda $|AD| = |DC| = 8$ cm ve $|AB| = |BC| = 12$ cm olur.
$Ç(ABCD) = 2 \cdot (|AB| + |AD|)$
$= 2 \cdot (12 + 8) = 40$ cm bulunur.

3. ÖRNEK



Şekilde ABCD yamuk, KBCD deltoiddir.
$[AB] \mathbin{/\!/} [DC]$
$|DC| = |DK| = 5$ cm
$|AK| = 3$ cm olduğuna göre
AB kenarının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Şekilde KBCD deltoidinde BD köşegeni çizilirse $\overset{\frown}{DKB} \cong \overset{\frown}{DCB}$ olur.
BD köşegeni KBCD deltoidinde açıortay olduğundan
$m(\widehat{KBD}) = m(\widehat{CBD})$ ve $m(\widehat{KDB}) = m(\widehat{CDB})$ olur.
$m(\widehat{KBD}) = m(\widehat{CBD}) = \alpha$ ve $m(\widehat{ABK}) = \beta$ alınırsa ABCD yamuk
ve $[AB] \mathbin{/\!/} [DC]$ olduğundan
$m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{ADB}) = \alpha + \beta$ olur.

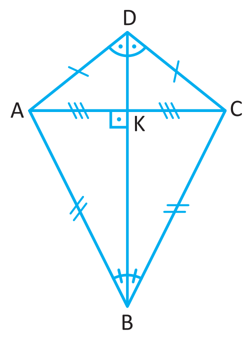
Bu durumda DAB ikizkenar üçgen olur. Buradan $|AD| = |AB|$ olduğundan $|AB| = 5 + 3 = 8$ cm bulunur.

Deltoidin Alanı

Bir deltoidin alanı, köşegen uzunlukları çarpımının yarısıdır (Şekil 5.3.55).

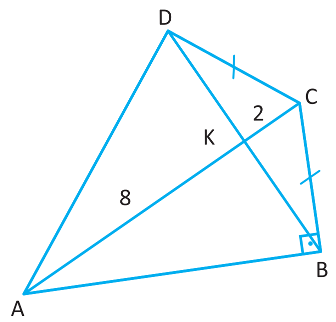
$|AC| = e$ ve $|BD| = f$ olmak üzere

$$A(ABCD) = \frac{|AC| \cdot |BD|}{2} = \frac{e \cdot f}{2} \text{ olur.}$$



Şekil 5.3.55

4. ÖRNEK



Şekilde ABCD bir deltoiddir.

$[AC] \cap [BD] = \{K\}$

$m(\widehat{ABC}) = 90^\circ$

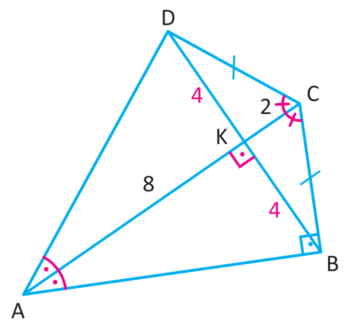
$|BC| = |DC|$

$|CK| = 2$ cm

$|AK| = 8$ cm olduğuna göre

A(ABCD) nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Şekilde ABCD deltoidinde $[AC] \perp [BD]$ olur.

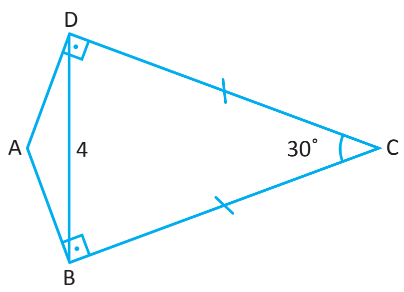
ABC dik üçgeninde Öklit teoreminden

$$|BK|^2 = |CK| \cdot |KA|$$
$$= 2 \cdot 8$$
$$= 16 \Rightarrow |BK| = 4 \text{ cm olur.}$$

$|BD| = 2 \cdot |BK|$ olduğundan $|BD| = 2 \cdot 4 = 8$ cm olur.

$$A(ABCD) = \frac{|AC| \cdot |BD|}{2} = \frac{10 \cdot 8}{2} = 40 \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$

5. ÖRNEK



Şekilde ABCD bir deltoiddir.

$[AD] \perp [DC]$

$[AB] \perp [BC]$

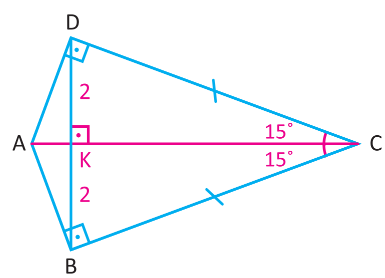
$|BC| = |DC|$

$m(\widehat{BCD}) = 30^\circ$

$|BD| = 4$ cm olduğuna göre

A(ABCD) nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



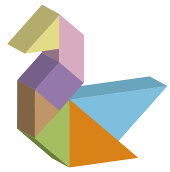
Şekilde $[AC]$ köşegeni açıortay ve $[BD]$ köşegenini dik ortaladığından ADC üçgeni $15^\circ - 75^\circ - 90^\circ$ dik üçgeni olur. Bu durumda

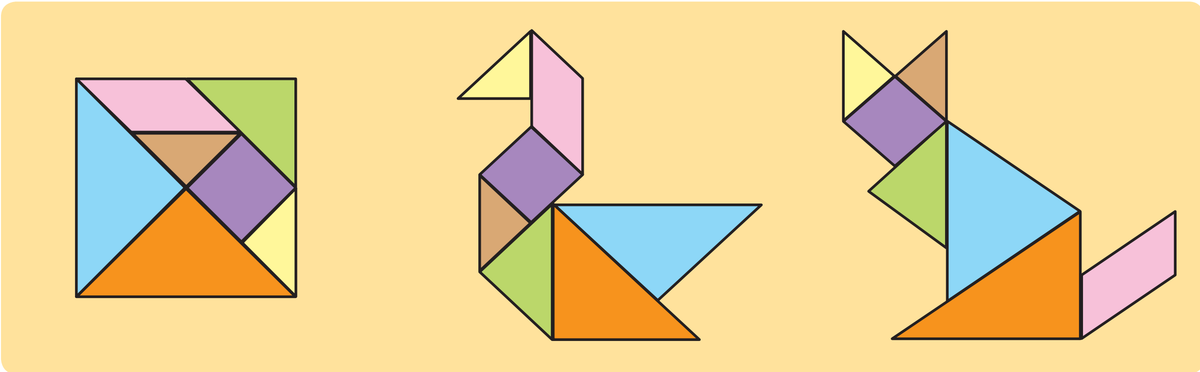
$|BK| = |KD| = 2$ cm ve $|AC| = 4|DK| = 4 \cdot 2 = 8$ cm olur.

$$A(ABCD) = \frac{|AC| \cdot |BD|}{2}$$
$$= \frac{8 \cdot 4}{2} = 16 \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$

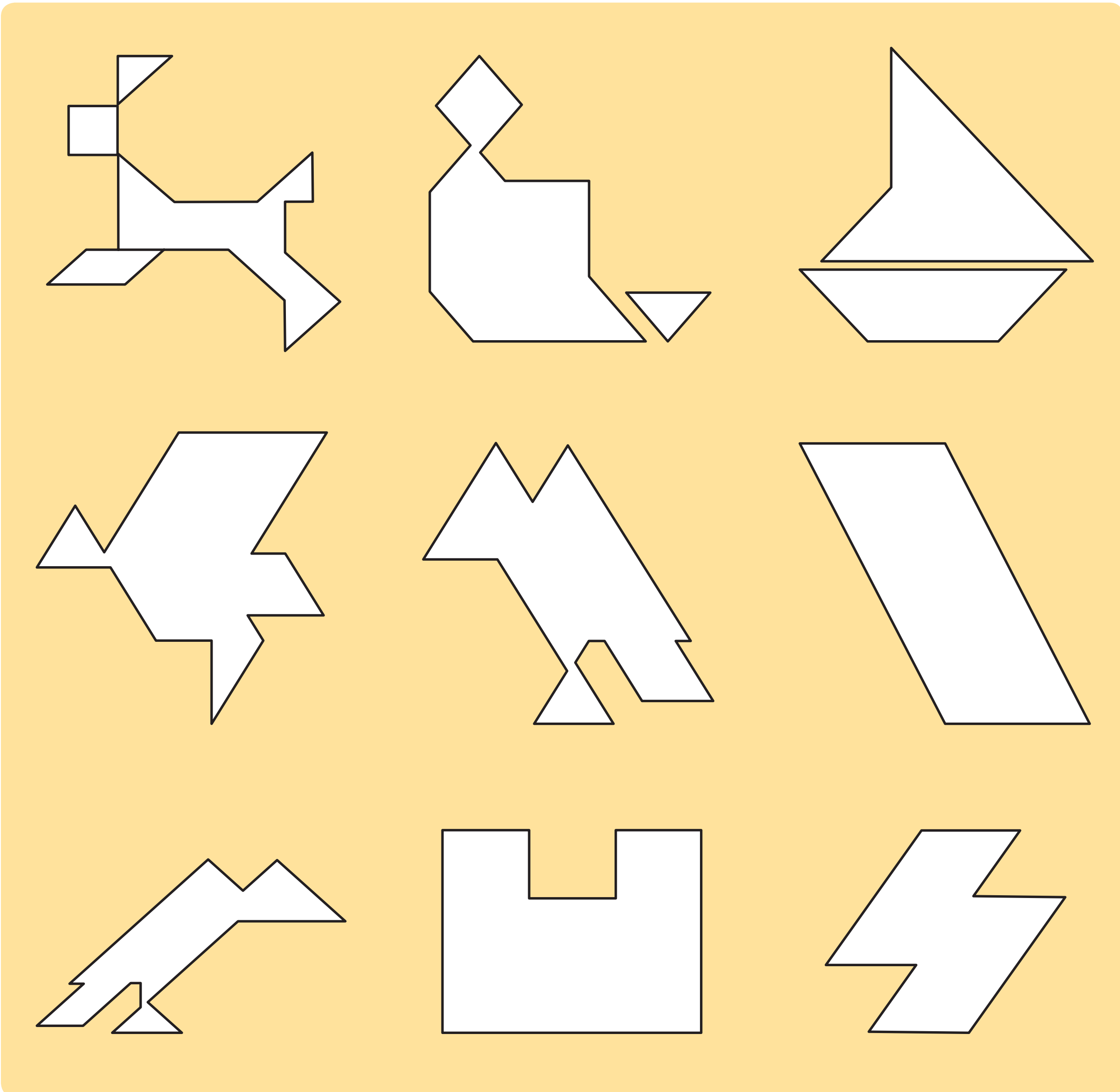
Tangram Uygulaması

Aşağıda tangram örnekleri verilmiştir (Şekil 5.3.56). Siz de verilen geometrik şekilleri bir kez kullanarak boş görselleri tamamlayınız (Şekil 5.3.57).





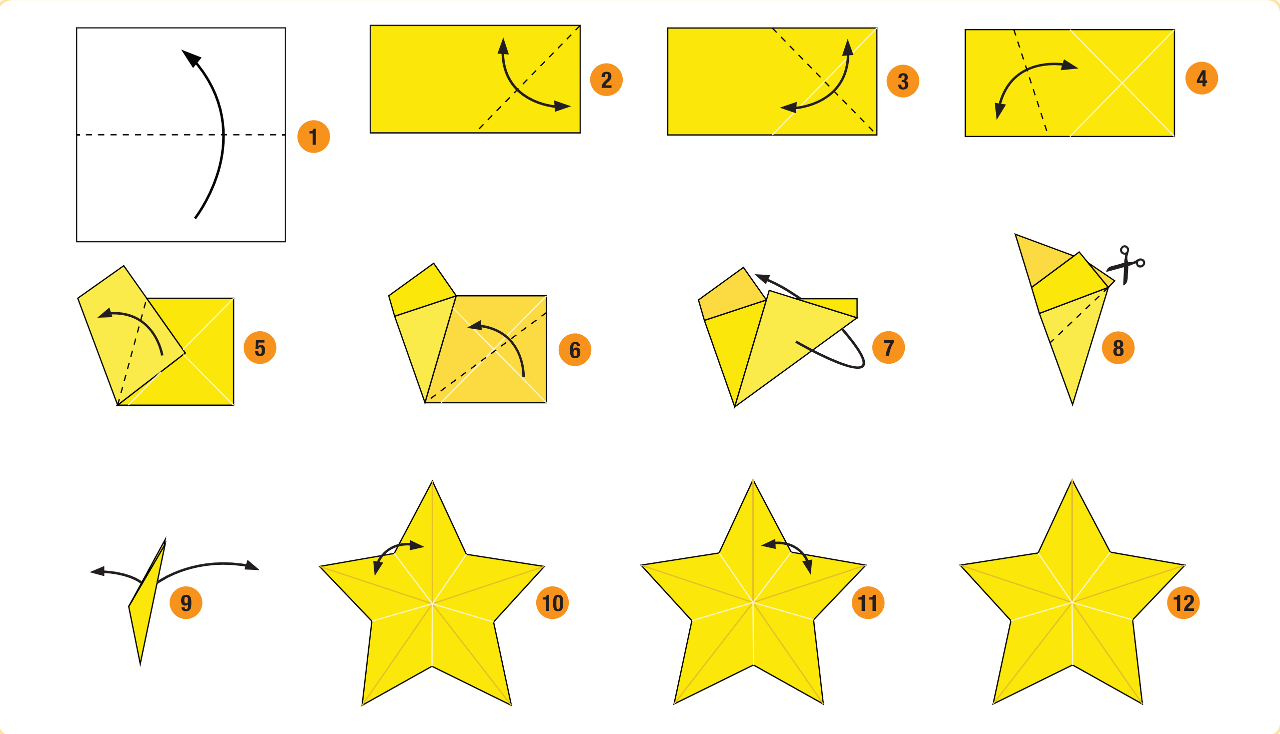
Şekil 5.3.56



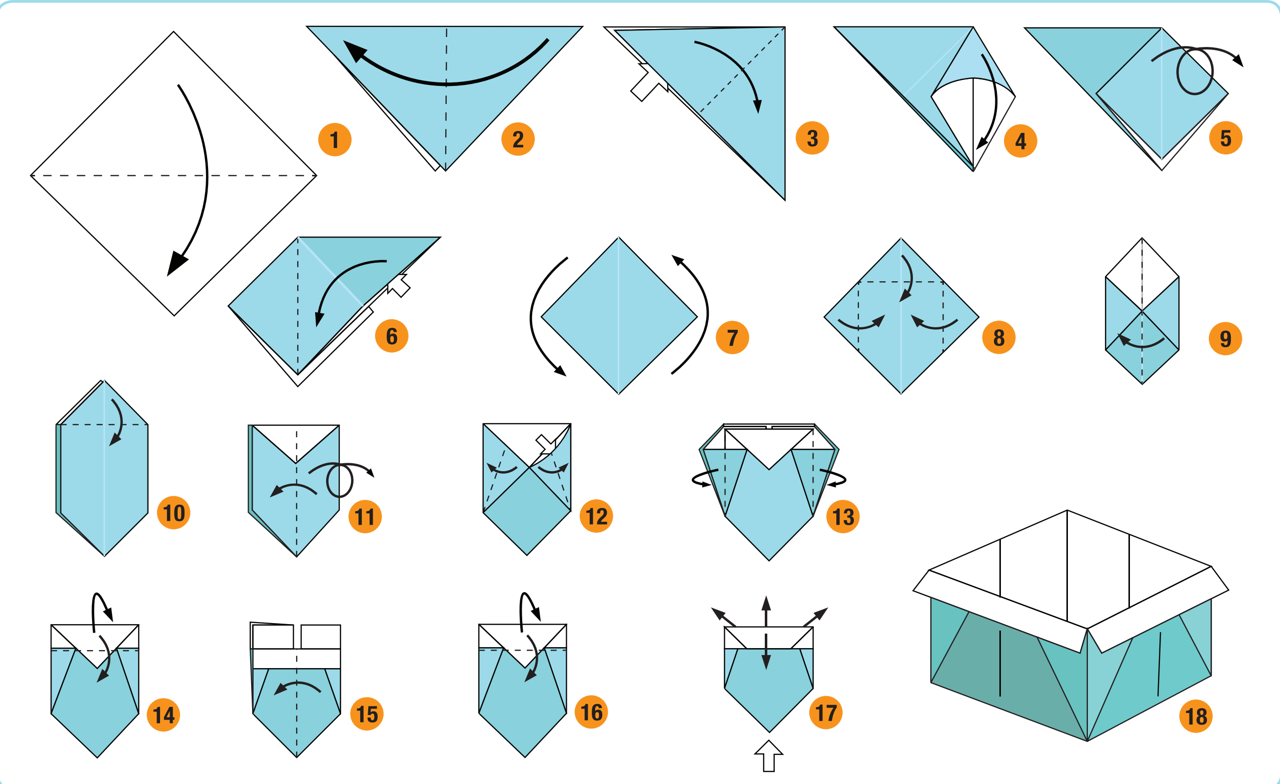
Şekil 5.3.57

Origami Uygulaması

Aşağıda Şekil 5.3.58 ve Şekil 5.3.59'da origami örnekleri verilmiştir. Siz de kare şeklinde kâğıtlar kullanarak aşağıda yapım aşamaları numara ile verilen adımları takip ediniz. Yıldız ve kutu şekillerini oluşturmaya çalışınız.



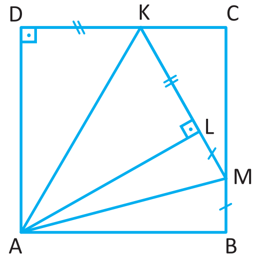
Şekil 5.3.58



Şekil 5.3.59

ALIŞTIRMALAR-7

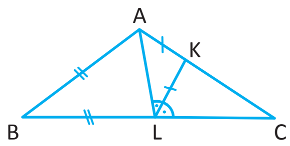
1. Şekildeki ABCD kare



$[AL] \perp [KM]$
$m(\widehat{KAL}) = 2m(\widehat{LAM})$
$|LM| = |MB|$
$|KL| = |DK|$ tir.

Buna göre $\widehat{AKD}$ nın ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.

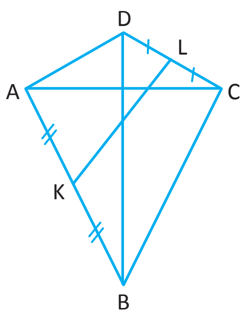
2. Şekilde ABC üçgeninde



$m(\widehat{ALK}) = m(\widehat{KLC})$
$|AB| = |BL|$
$|AK| = |KL|$
$|AL| = 4$ cm
$|LC| = 6$ cm dir.

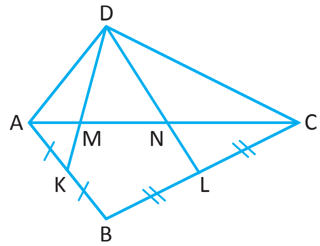
Buna göre ABL üçgeninin çevresinin kaç cm olduğunu bulunuz.

3. Şekildeki ABCD deltoidinde K ve L bulundukları kenarların orta noktalarıdır.



$|AB| = |BC|$
$|AC| = 16$ cm
$|BD| = 30$ cm dir.
Buna göre KL kenarının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

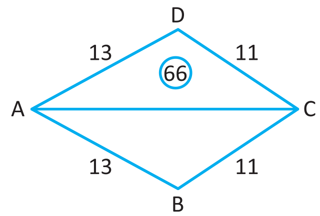
4. Şekildeki ABCD deltoidinde K, M, D ve D, N, L doğrusal K ve L bulundukları kenarların orta noktaları



$|AK| = |KB|$
$|DC| = |BC|$
$|BL| = |LC|$
veriliyor.

Buna göre $\dfrac{|MN|}{|AC|}$ oranını bulunuz.

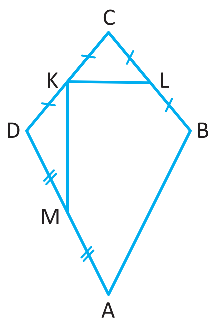
5. Şekildeki ABCD deltoidinde



$m(\widehat{ABC}) > 90^\circ$
$|AD| = |AB| = 13$ cm
$|DC| = |BC| = 11$ cm
$A(\widehat{ADC}) = 66 \text{ cm}^2$ dir.

Buna göre AC kenarının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

6. Şekildeki ABCD deltoidinde K, L, M bulundukları kenarların orta noktaları



$|AD| = |AB|$
$|DC| = |BC|$
$|KL| = 4$ cm
$|KM| = 5$ cm dir.
Buna göre ABCD deltoidinin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A) 1-3. sorulardaki boş bırakılan yerleri uygun olacak şekilde doldurunuz.

1. Bir iç açısının ölçüsü, bir dış açısının ölçüsünün 6 katı olan düzgün çokgenin köşegen sayısı .... olur.

2. Bir dış açısının ölçüsü 12° olan düzgün çokgenin köşegen sayısının kenar sayısına oranı .... olur.

3. Dörtgenlerde kenarların orta noktalarının birleştirilmesiyle oluşan şekil .... olur.
Bu şeklin alanı dörtgenin alanının .... olur.

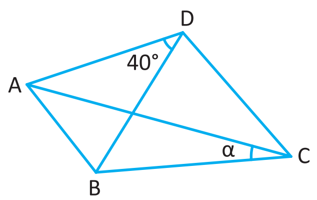
B) 4. soruda numaralarla verilen ifadeleri harf ile verilen ifadelerle doğru şekilde eşleştiriniz.

4.

n kenarlı düzgün çokgenin bir dış açısının ölçüsü	1	a	$\frac{n \cdot (n-3)}{2}$
Kenar uzunlukları ve bir iç açısının ölçüsü verilen paralelkenarın alanı	2	b	$\frac{e \cdot f}{2}$
Köşegen uzunlukları bilinen deltoidin alanı	3	c	$\frac{a+c}{2}$
n kenarlı bir çokgenin köşegen sayısı	4	ç	$a \cdot b \cdot \sin\alpha$
Köşegenleri dik kesişen ikizkenar yamuğun yüksekliği	5	d	$\frac{360^\circ}{n}$
		e	$n-2$

C) 5-11. açık uçlu soruların cevaplarını boş bırakılan alanlara yazınız.

5. Şekildeki ABCD dörtgeninde



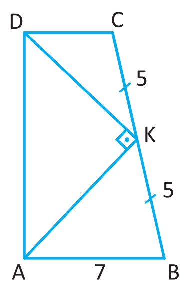
$|AD| = |DB| = |DC|$
$m(\widehat{ADB}) = 40^\circ$
veriliyor.

Buna göre $m(\widehat{ACB}) = \alpha$ nın kaç derece olduğunu bulunuz.

6. En kısa köşegen uzunluğu $6\sqrt{2}$ cm olan düzgün sekizgenin alanı kaç cm^2 dir?

7. Düzgün altıgenin iç bölgesinde alınan bir noktanın tüm kenarlara uzaklıkları toplamı 12 cm dir. Buna göre düzgün altıgenin alanı kaç cm^2 dir?

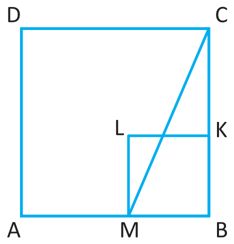
8. Şekildeki ABCD dik yamuğunda



$[AB] \parallel [DC]$
$[DA] \perp [AB]$
$[DK] \perp [AK]$
$|CK| = |KB| = 5$ cm
$|AB| = 7$ cm

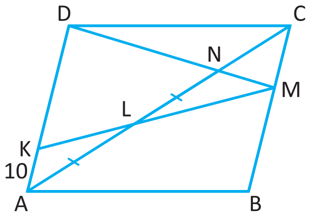
Buna göre $|AD|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

9. Şekildeki ABCD ve MBKL karesinde



$|MC| = 10$ cm dir.
Buna göre
$A(ABCD) + A(MBKL)$
toplamının kaç cm^2
olduğunu bulunuz.

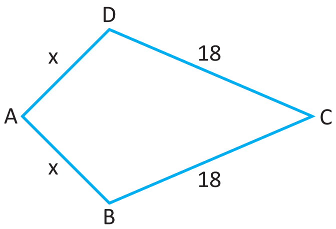
10. Şekildeki ABCD paralelkenarında
K, L, M ve A, L, N, C doğrusal,



$|AL| = |NL|$
$3|CM| = 2|MB|$
$|AK| = 10$ cm
veriliyor.

Buna göre $|KD|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

11. Şekildeki ABCD deltoidinde



$m(\widehat{DAB}) + m(\widehat{DCB}) = 90^\circ$
$|DC| = |BC| = 18$ cm
$A(ABCD) = 72\ cm^2$ dir.
Buna göre $|AB| = |AD| = x$ in kaç cm olduğunu bulunuz.

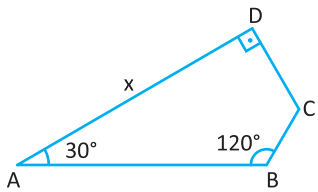
Ç) 12-27. çoktan seçmeli soruları okuyunuz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

12. Aşağıdaki ifadelerden hangisi ya da hangileri doğrudur?

I. Bütün köşegen uzunlukları eşit olan üç tane düzgün çokgen vardır.
II. Düzgün çokgende simetri doğrularının sayısı kenar sayısına eşittir.
III. Bir çokgenin kenar sayısı çift sayı ise köşegen sayısı, kenar sayısının tam katıdır.

A) Yalnız I
B) Yalnız II
C) I ve II
D) II ve III
E) I, II ve III

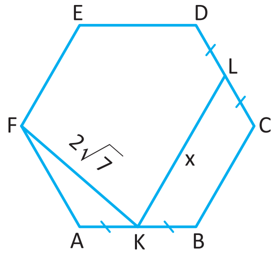
13 Şekildeki ABCD dörtgeninde



$[AD] \perp [DC]$
$m(\widehat{DAB}) = 30^\circ$
$m(\widehat{ABC}) = 120^\circ$
$|BC| + |CD| = 12$ cm
Buna göre $|AD| = x$ değeri kaç cm dir?

A) 8
B) $6\sqrt{2}$
C) $6\sqrt{3}$
D) 12
E) $12\sqrt{3}$

14. Şekildeki düzgün altıgende



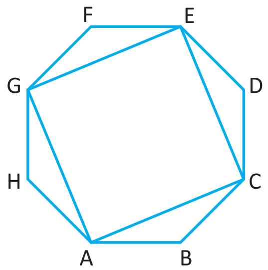
$|AK| = |KB| = |DL| = |LC|$

$|FK| = 2\sqrt{7}$ cm dir.

Buna göre $|KL| = x$ değeri kaç cm dir?

A) 4
B) 6
C) 8
D) $4\sqrt{7}$
E) $6\sqrt{7}$

15. Şekildeki düzgün sekizgende



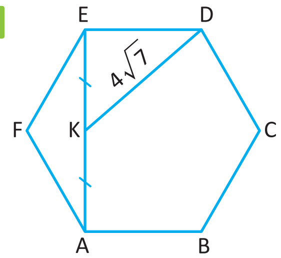
$[AC]$, $[CE]$, $[EG]$ ve $[GA]$ köşegendir.

Buna göre $\dfrac{A(\widehat{GFE})}{A(ACEG)}$ oranı kaçtır?

A) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{4}$ B) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{4}$ C) $\dfrac{\sqrt{2}+2}{4}$

D) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ E) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

16.



Şekildeki düzgün altıgende A, K, E doğrusal,

$|AK| = |KE|$

$|DK| = 4\sqrt{7}$ cm

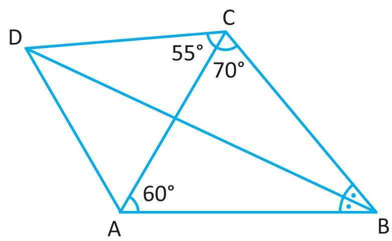
veriliyor.

Buna göre altıgenin alanı kaç cm^2 dir?

A) 48 B) $48\sqrt{3}$ C) 96

D) $96\sqrt{3}$ E) 108

17. Şekildeki ABCD dörtgeninde



$m(\widehat{CAB}) = 60^\circ$

$m(\widehat{ACB}) = 70^\circ$

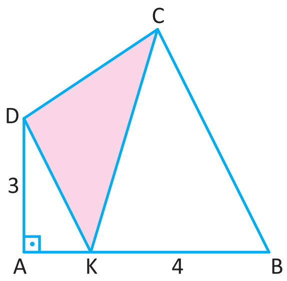
$m(\widehat{ACD}) = 55^\circ$

$m(\widehat{CBD}) = m(\widehat{ABD})$ veriliyor.

Buna göre $m(\widehat{DAC}) = \alpha$ kaç derecedir?

A) 30
B) 40
C) 50
D) 60
E) 65

18.



Şekildeki ABCD dörtgeninde

$[AD] \perp [AB]$

$[DK] \parallel [BC]$

$|DA| = 3$ cm

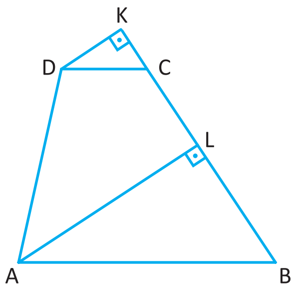
$|KB| = 4$ cm

veriliyor.

Buna göre $A(\widehat{KDC})$ kaç cm^2 dir?

A) 3 B) 4 C) 6 D) 8 E) 12

19. Şekildeki ABCD yamuğunda B, L, C, K doğrusal



$[AB] \parallel [DC]$

$[AL] \perp [KB]$

$[DK] \perp [KB]$

$|BC| = 3|DK| = 12$ cm

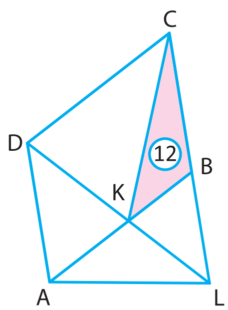
$|AL| = 7$ cm

veriliyor.

Buna göre yamuğun alanı kaç cm^2 dir?

A) 60 B) 66 C) 70 D) 72 E) 78

20.



Şekildeki ABCD paralelkenarında L, B, C doğrusal

$[DL] \cap [AB] = \{K\}$

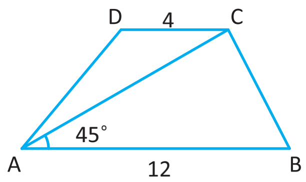
$A(\widehat{KBC}) = 12\ cm^2$

veriliyor.

Buna göre $A(\widehat{AKL})$ kaç cm^2 dir?

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 16

21. Şekildeki ABCD yamuğunda



$[AB] \parallel [DC]$

$m(\widehat{CAB}) = 45°$

$|DC| = 4$ cm

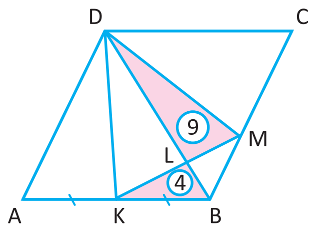
$|AB| = 12$ cm

$m(\widehat{DAC}) + m(\widehat{ACB}) = 180°$ veriliyor.

Buna göre yamuğun alanı kaç cm^2 dir?

A) 16 B) 18 C) 20 D) 22 E) 24

22. Şekildeki ABCD eşkenar dörtgeninde A, K, B ve B, M, C doğrusal



$|AK| = |KB|$

$A(\widehat{KBL}) = 4\ cm^2$

$A(\widehat{DLM}) = 9\ cm^2$

veriliyor.

Buna göre eşkenar dörtgenin alanı kaç cm^2 dir?

A) 120

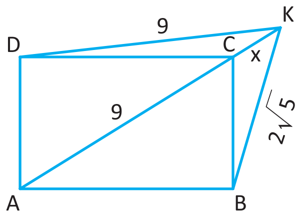
B) 130

C) 140

D) 150

E) 160

23. Şekildeki ABCD dikdörtgeninde A, C, K doğrusal

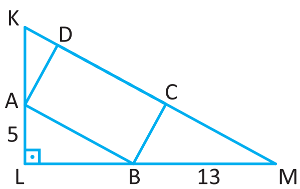


$|AC| = |DK| = 9$ cm
$|BK| = 2\sqrt{5}$ cm
veriliyor.

Buna göre $|CK| = x$ kaç cm dir?

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

24. Şekildeki KLM dik üçgeninde ABCD dikdörtgen

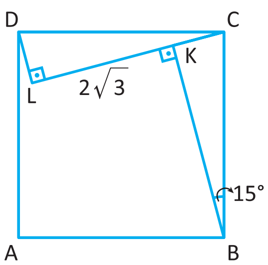


$[KL] \perp [ML]$
$|BM| = 13$ cm
$|AL| = 5$ cm
veriliyor.

Buna göre $A(ABCD)$ kaç cm^2 dir?

A) 48 B) 50 C) 60 D) 65 E) 78

25. Şekildeki ABCD karesinde

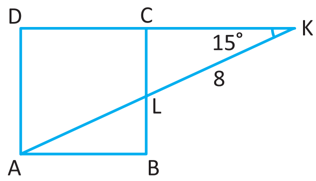


$[CL] \perp [DL]$
$[CL] \perp [BK]$
$m(\widehat{KBC}) = 15^\circ$
$|KL| = 2\sqrt{3}$ cm
veriliyor.

Buna göre $A(ABCD)$ değeri kaç cm^2 dir?

A) 16
B) 24
C) 32
D) 36
E) 48

26 Şekildeki ABCD karesinde A, L, K doğrusal

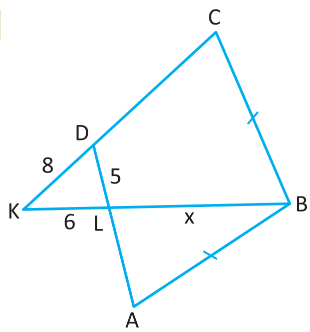


$m(\widehat{CKL}) = 15^\circ$
$|KL| = 8$ cm
veriliyor.

Buna göre $A(ABCD)$ kaç cm^2 dir?

A) 6 B) 8 C) 12 D) 16 E) 24

27.



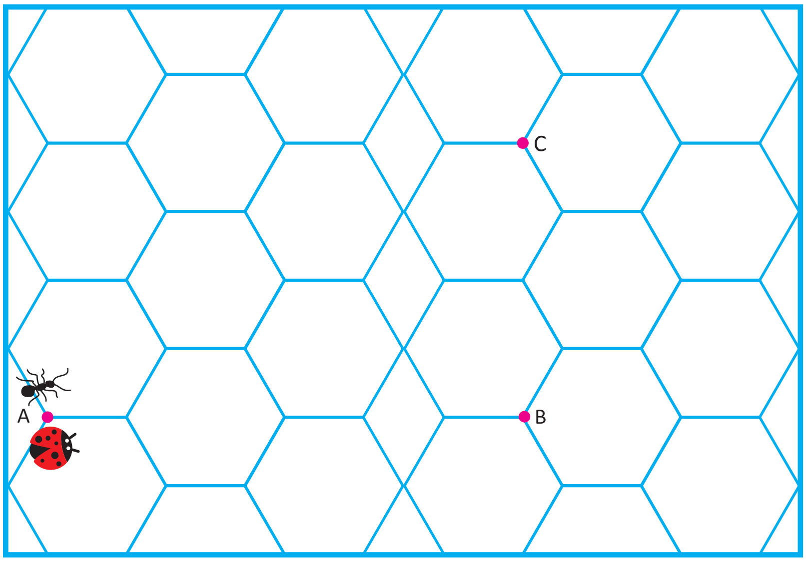
Şekildeki ABCD deltoidinde
$[KB] \cap [AD] = \{L\}$
$|AB| = |BC|$
$|KL| = 6$ cm
$|DL| = 5$ cm
$|KD| = 8$ cm
veriliyor.

Buna göre $|BL| = x$ kaç cm dir?

A) 6
B) 7
C) 8
D) 9
E) 10

D) 28-30. soruları aşağıda verilen ortak metne göre cevaplandırınız.

Aşağıda uzun kenarı 400 cm olan dikdörtgen içerisine düzgün çokgenler yerleştirilerek tel örgü oluşturulmuştur.



Buna göre

28. A noktasından C noktasına gitmek isteyen bir karıncanın yürüyeceği en kısa mesafenin kaç cm olduğunu bulunuz.

29. A noktasında bulunan karınca tel örgü üzerinde yürüyerek ve uğur böceği uçarak en kısa yoldan c noktasına ulaşıyor. Aldıkları yolların oranını bulunuz.

30. Tel örgüde kullanılan telin uzunluğu en az kaç metredir?
(Tel örgü profil demirden imal edilmiştir. Dış çerçevesinde tel kullanılmamıştır.)

ÇÖZÜM

GEOMETRİ
10.6. UZAY GEOMETRİ

Neler Öğreneceksiniz?

10.6.1. KATI CİSİMLER
1. Dik Prizmalar
2. Dik Piramitler

Neden "Uzay Geometriyi" Öğrenmelisiniz?

- İçinde yaşadığımız uzay; genişlik, yükseklik ve derinlikten oluşur. Bu boyutlar arasındaki ilişki uzay geometrisinin konusudur.
- Geleneksel mimaride ve sanat eserlerinde prizma ve piramitler sıklıkla kullanılır.
- Endüstride kullanılan koli, paket ve elektronik eşyalar genellikle prizma biçimindedir.
- Kâğıt üzerine çizilen uzay geometri şekilleri tam olarak gerçek çizim olmadığından soyut düşünmeyi geliştirir.

Hazırlık Çalışması

1. Bir kutuyu hediye paketi yapmak için gereken kâğıt miktarını nasıl belirleyeceğinizi düşününüz. Değerlendirmelerinizi arkadaşlarınızla tartışınız.
2. Bursa'da Mısır'daki tarihî piramitlerden esinlenerek yapılan piramit şeklindeki çarşının, Antalya'da bulunan piramit şeklindeki fuar ve kongre merkezi gibi yapıların inşasını ve inşasında kullanılan malzemelerin miktarının nasıl hesaplanabileceğini arkadaşlarınızla tartışınız.
3. Sınıfınızda ve evinizde bulunan 3 boyutlu cisimleri biçimlerine göre sınıflandırınız. Yaptığınız sınıflandırmayı arkadaşlarınızla paylaşınız.

10.6.1. KATI CİSİMLER

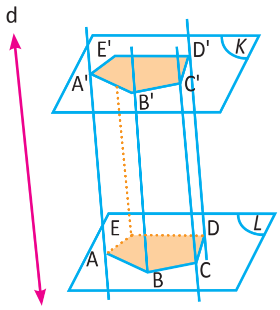
1. Dik Prizmalar

Tanım

Canlı ve cansız var olan her şeyi içine alan sonsuz boşluk **uzay** olarak adlandırılır.

Uzayda düzlemsel bir çokgen, çokgenin düzleminde bulunmayan ve **çokgene paralel olmayan** bir d doğrusu verilsin. Çokgenin kenarları üzerindeki noktalardan geçen ve d doğrusuna paralel doğruların oluşturduğu yüzeye **prizmatik yüzey**, d doğrusuna ise prizmatik yüzeyin **ana doğrusu** denir.

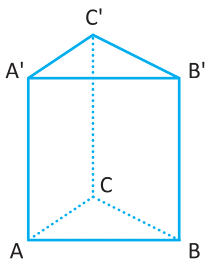
Paralel iki düzlem arasında kalan kapalı prizmatik yüzey parçasına **prizma yüzeyi**, prizma yüzeyinin sınırladığı uzay parçasına ise **prizma** denir (Şekil 6.1.1).



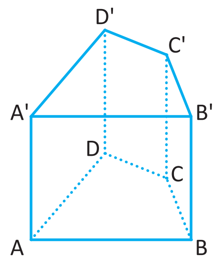
Şekil 6.1.1

Prizmalar taban çokgenlerine göre isimlendirilir. Taban çokgeni üçgen olan prizmaya **üçgen prizma** (Şekil 6.1.2), dörtgen olan prizmaya **dörtgen prizma** (Şekil 6.1.3), düzgün beşgen olan prizmaya **düzgün beşgen prizma** (Şekil 6.1.4), ..., n gen olan prizmaya **n gen prizma** denir.

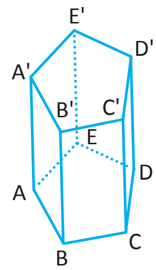
Ana doğrusu taban düzlemine dik olan prizmalara **dik prizma**, yanal ayrıtları tabanlara dik olmayan prizmalara ise **eğik prizma** adı verilir. Tabanları düzgün çokgen olan prizmalara **düzgün prizma** denir.



Şekil 6.1.2: Üçgen prizma



Şekil 6.1.3: Dörtgen prizma

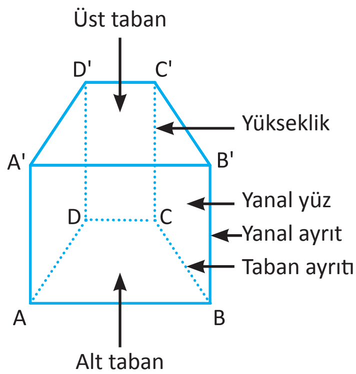


Şekil 6.1.4: Düzgün beşgen prizma

Şekilde ABCD ve A'B'C'D' dörtgenleri **prizmanın tabanları**, $[AB], [BC], [CD], [AD]$ ve $[A'B'], [B'C'], [C'D'], [A'D']$ prizmanın **taban ayrıtları**dır.

Prizmada tabanların karşılıklı köşe noktalarını birleştiren doğru parçalarına **yanal ayrıtlar**, iki yanal ayrıt arasında kalan düzlemsel bölgelere de **yanal yüzler** denir.

Şekilde $[AA'], [BB'], [CC'], [DD']$ prizmanın yanal ayrıtları, ADD'A', ABB'A', BCC'B', CDD'C' dörtgenleri prizmanın yanal yüzleridir. Bir prizmada iki taban arasındaki uzaklığa **prizmanın yüksekliği** denir.



Şekil 6.1.5: Dörtgen dik prizma

Şekil 6.1.5'te AA', BB', CC' ve DD' prizmanın yüksekliğidir.
Prizmaların yanal yüz sayısı, çokgenin kenar sayısına eşittir.
Şekildeki dörtgen dik prizma ABCDA'B'C'D' şeklinde gösterilir.

Tanım

Bir prizmada aynı yüze ait olmayan, iki köşeyi birleştiren doğru parçasına **cisim köşegeni** denir (Şekil 6.1.6).

Şekilde $[A'C]$ dik prizmanın cisim köşegenidir.

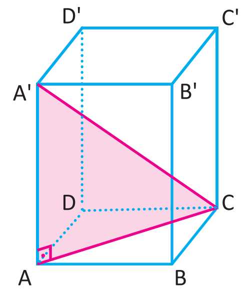
$[AA'] \perp [AC]$ olduğundan $\overset{\frown}{ACA'}$ dik üçgendir.

Bu durumda

$[A'C]$ cisim köşegeninin uzunluğu Pisagor teoreminden

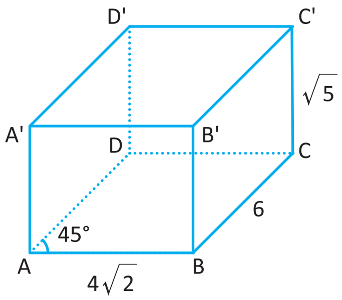
$|A'C|^2 = |AA'|^2 + |AC|^2$

$|A'C| = \sqrt{|AA'|^2 + |AC|^2}$ elde edilir.



Şekil 6.1.6: Cisim köşegeni

1. ÖRNEK



Yandaki şekil, tabanı paralelkenar olan bir dik prizmadır.

$m(\overset{\frown}{DAB}) = 45°$

$|AB| = 4\sqrt{2}$ cm

$|BC| = 6$ cm

$|CC'| = \sqrt{5}$ cm olduğuna göre prizmanın cisim köşegeni uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Şekildeki ABCD paralelkenarında $[CK] \cap [BK] = \{K\}$ ve $[CK] \perp [AB]$ olacak şekilde $[BK]$ ve $[CK]$ çizilirse $\overset{\frown}{BKC}$ ikizkenar dik üçgen ve $|BK| = |CK|$ olur.

$|CB|^2 = |CK|^2 + |BK|^2$ (Pisagor teoremi)

$6^2 = 2|CK|^2$ $\quad (|CK| = |BK|)$

$36 = 2|CK|^2 \Rightarrow |CK| = 3\sqrt{2}$ cm bulunur.

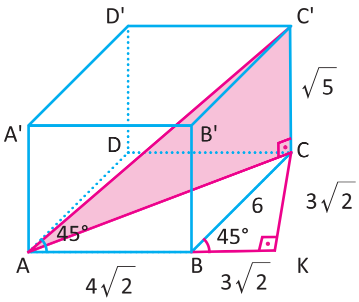
$[AC]$ köşegeni çizilirse AKC dik üçgeninde Pisagor teoreminden

$|AC|^2 = |AK|^2 + |CK|^2$ olduğundan

$= (7\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2$

$= 98 + 18$

$= 116 \Rightarrow |AC| = 2\sqrt{29}$ cm olur.



AC' cisim köşegeni çizilirse $[AC] \perp [CC']$ olduğundan ACC' dik üçgeninde Pisagor teoreminden

$|AC'|^2 = |AC|^2 + |CC'|^2$

$= (2\sqrt{29})^2 + (\sqrt{5})^2$

$= 116 + 5$

$= 121 \Rightarrow |AC'| = 11$ cm elde edilir.

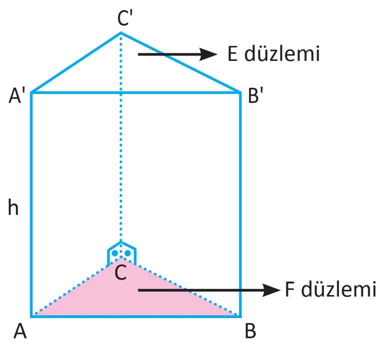
Özellikler

1. Prizmada alt ve üst tabanlar eş ve paraleldir.
$\widehat{ABC} \cong \widehat{A'B'C'}$ ve $E \parallel F$ dir (Şekil 6.1.7).

2. Bir dik prizmada yan yüzeyler dikdörtgendir.
ABB'A', ACC'A' ve BCC'B' yan yüzleri dikdörtgendir.

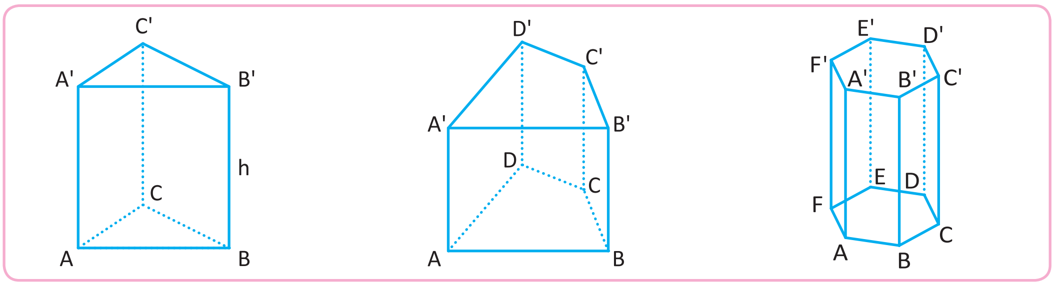
3. Bir dik prizmada yan ayrıtlar, prizmanın yüksekliği olarak alınabilir. Bu durumda
$h = |AA'| = |BB'| = |CC'|$ olur.

4. Bir prizmada köşe sayısı **K**, yüz sayısı **Y**, ayrıt sayısı **A** ile gösterilirse bu elemanlar arasında
$K + Y - A = 2$ bağıntısı vardır.



Şekil 6.1.7

Şekil 6.1.8'deki prizmaları Tablo 6.1.1'e göre inceleyiniz.



Şekil 6.1.8

Tablo 6.1.1

Prizma	Köşe sayısı (K)	Yüz sayısı (Y)	Ayrıt sayısı (A)	$K + Y - A$
Üçgen prizma	6	5	9	$6 + 5 - 9 = 2$
Dörtgen prizma	8	6	12	$8 + 6 - 12 = 2$
Altıgen prizma	12	8	18	$12 + 8 - 18 = 2$
...	...	...	...	...
n gen prizma	2n	n+2	3n	$2n + (n + 2) - 3n = 2$

2. ÖRNEK

Bir prizmada köşe sayısı $K = 2x + 2$, yüz sayısı $Y = x + 3$ ve ayrıt sayısı $A = x^2 - 1$ olduğuna göre x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Bir prizmanın köşe sayısı (K), yüz sayısı (Y) ve ayrıt sayısı (A) arasında $K + Y - A = 2$ bağıntısı vardır. Verilen değerler yerine yazılırsa

$$K + Y - A = 2$$
$$(2x + 2) + (x + 3) - (x^2 - 1) = 2$$
$$-x^2 + 3x + 6 = 2$$
$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$x^2 - 3x - 4 = 0$ ikinci derece denklemi elde edilir. Denklem çözülürse

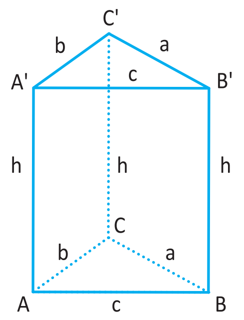
$x_1 = 4$ veya $x_2 = -1$ bulunur. Uzunluk negatif olamayacağından istenen x değeri 4 olur.

Dik Prizmaların Alan ve Hacim Bağıntıları

Herhangi bir dik prizmanın yüzey alanı, dikdörtgensel bölgeden oluşan yanal yüzlerin alanı ile çokgensel bölge olan taban alanının 2 katının toplamına eşittir (Şekil 6.1.9).

Yanal yüzey alanı, prizma taban çevresi ile prizma yüksekliğinin çarpımına eşittir. Buna göre prizmanın yüzey alanı

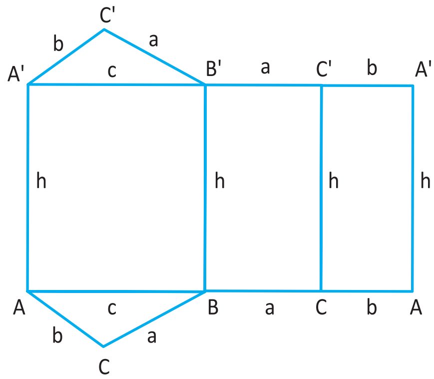
Yüzey alanı : A
Yanal yüz alanları : A_Y
Taban alanı : A_T
Taban çevresinin uzunluğu : $Ç_T$
Yükseklik : h olmak üzere
$A = 2A_T + A_Y = 2A_T + Ç_T \cdot h$ olur.



Şekil 6.1.9

Çeşitkenar üçgen dik prizmanın açınımı Şekil 6.1.10'da açık olarak verilmiştir.

Şeklin yanal yüzeyi bir dikdörtgen olduğundan alanı, uzun ve kısa kenar uzunlukları çarpımına eşittir.



Şekil 6.1.10

Bu durumda

$A_Y = Ç(\widehat{ABC}) \cdot |AA'|$

$= (|BC| + |AC| + |AB|) \cdot |AA'|$

$= (a + b + c) \cdot h$

$= Ç_T \cdot h$ olur.

Şeklin tabanları çeşitkenar eş iki üçgen olduğundan alanı

$2A_T = 2 \cdot A(\widehat{ABC})$ olur.

Sonuç olarak çeşitkenar üçgen dik prizmanın yüzey alanı

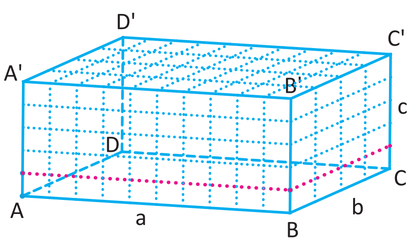
$A = 2A_T + A_Y = 2A_T + Ç_T \cdot |AA'|$

$= 2 \cdot A(\widehat{ABC}) + Ç(\widehat{ABC}) \cdot h$

$= 2 \cdot A(\widehat{ABC}) + (a + b + c) \cdot h$ olur.

Bir dik prizmanın hacmi, taban alanı ile yükseklik uzunluğu çarpımına eşittir.

A_T : Taban alanı
h : Yükseklik olmak üzere
$V = A_T \cdot h$ olur.



Şekil 6.1.11

Şekil 6.1.11'deki dikdörtgenler prizmasının taban ayrıt uzunlukları $|AB| = a$ birim, $|BC| = b$ birim ve yüksekliği c birim verilsin.

Prizmanın tabanı, ayrıt uzunlukları 1 birim olan küplerle döşenirse 1. döşemedeki birim küplerin sayısı $a \cdot b$ tane olur. Bu prizmanın taban alanı $A(ABCD) = a \cdot b$ olur. Bu durumda 1. döşemede prizmanın tabanına döşenen birim küplerin sayısı, prizmanın taban alan değerine eşittir. Bu işlemin benzer şekilde tekrarlanması durumunda

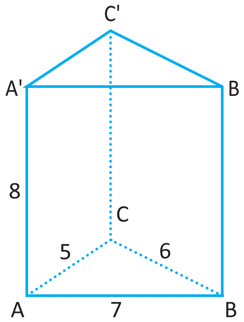
1. döşemedeki birim küplerin sayısı $a \cdot b$ tane
2. döşemedeki birim küplerin sayısı $a \cdot b$ tane
3. döşemedeki birim küplerin sayısı $a \cdot b$ tane

....

c. döşemedeki birim küplerin sayısı $a \cdot b$ tane olduğundan prizmanın içine döşenen birim küplerin sayısı $a \cdot b \cdot c$ tane olur.

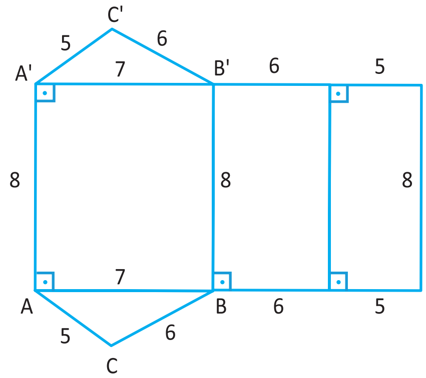
Sonuç olarak dikdörtgenler prizmasının hacmi
$V = A(ABCD) \cdot h = A_T \cdot h = a \cdot b \cdot c$ birimküp olur.

3. ÖRNEK



Şekildeki üçgen dik prizmada
$|AC| = 5\,cm$
$|BC| = 6\,cm$
$|AB| = 7\,cm$
$|AA'| = 8\,cm$ olduğuna göre dik prizmanın yüzey alanı (cm^2) ve hacmini (cm^3) cinsinden bulunuz.

ÇÖZÜM



Üçgen dik prizmanın yüzey alanı $A = 2A_T + A_Y = 2A_T + Ç_T \cdot h$ dir.
Üçgen dik prizmanın tabanı çeşitkenar üçgendir.
Üçgenin alanı, kenar uzunlukları bilinen üçgenin alanı eşitliği ile hesaplanırsa

$Ç(\widehat{ABC}) = 7 + 6 + 5 = 18 = 2u \Rightarrow u = 9\,cm$ olur.

$$A_T = A(\widehat{ABC}) = \sqrt{u \cdot (u-a) \cdot (u-b) \cdot (u-c)}$$
$$= \sqrt{9 \cdot (9-6) \cdot (9-5) \cdot (9-7)}$$
$$= \sqrt{9 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2}$$
$$= 6\sqrt{6}\,cm^2$$

$2 \cdot A_T = 2 \cdot 6\sqrt{6} = 12\sqrt{6}\,cm^2$ bulunur.

$$A_Y = Ç_T \cdot h$$
$$= 18 \cdot 8$$
$$= 144\,cm^2 \text{ bulunur.}$$

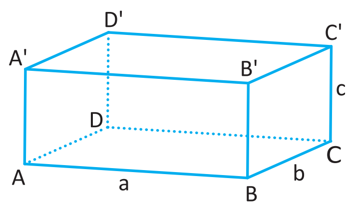
Buna göre üçgen dik prizmanın yüzey alanı ve hacmi

$$A = 2A_T + A_Y$$
$$= (12\sqrt{6} + 144)\,cm^2$$
$$V = A_T \cdot h$$
$$= 6\sqrt{6} \cdot 8$$
$$= 48\sqrt{6}\,cm^3 \text{ olarak bulunur.}$$

Dikdörtgenler Prizması

Tanım

Bütün yüzeyleri dikdörtgen olan prizmalara **dikdörtgenler prizması** denir (Şekil 6.1.12).



Şekil 6.1.12
Dikdörtgenler prizması

Dikdörtgenler prizmasında üç farklı yüzey vardır. Bu yüzeyler karşılıklı yüzeyler olup birbirine eş ve paraleldir. Bu durumda dikdörtgenler prizmasının yüzey alanı, farklı yüzey alanları toplamının iki katı olur.

Taban ayrıt uzunlukları a birim, b birim ve yüksekliği c birim olan bir dikdörtgenler prizmasında

Taban alanları toplamı
$A_T = a \cdot b\ br^2 \Rightarrow 2A_T = 2 \cdot a \cdot b$ birimkare

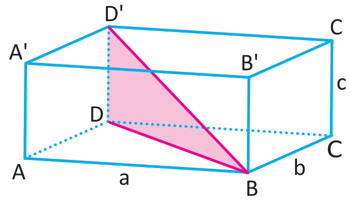
Yanal alanları toplamı $A_Y = Ç_T \cdot h = (2a + 2b) \cdot c$ olmak üzere

Yüzey alanı $A = 2A_T + A_Y = 2ab + (2a + 2b) \cdot c$
$= 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$ birimkare olur.

Dikdörtgenler prizmasının hacmi, bir köşesinde kesişen ayrıt uzunluklarının çarpımına eşittir. Hacim $V = a \cdot b \cdot c$ birimküp olur.

Özellik

5. Dikdörtgenler prizmasında cisim köşegeninin uzunluğu, üç farklı ayrıt uzunluğunun kareleri toplamının kareköküdür (Şekil 6.1.13).



Şekil 6.1.13

İspat

$\overset{\frown}{ABD}$ dik üçgen olduğundan Pisagor teoreminden

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2$$
$$= a^2 + b^2 \Rightarrow |BD| = \sqrt{a^2+b^2} \text{ olur.}$$

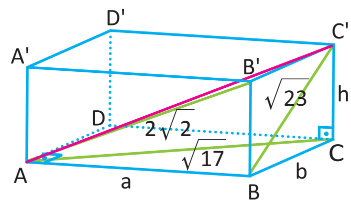
Benzer şekilde BDD' dik üçgeninde Pisagor teoreminden

$$|BD'|^2 = |BD|^2 + |DD'|^2$$
$$= \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 + c^2$$
$$= a^2 + b^2 + c^2$$
$$|BD'| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \text{ elde edilir.}$$

4. ÖRNEK

Bir dikdörtgenler prizmasının farklı üç yüzünün köşegen uzunlukları $2\sqrt{2}$ cm, $\sqrt{23}$ cm ve $\sqrt{17}$ cm olduğuna göre prizmanın cisim köşegeninin uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Dikdörtgenler prizmasının taban ayrıt uzunlukları

$|AB| = a$ cm, $|BC| = b$ cm, $|CC'| = h$ cm ve

$|AC| = \sqrt{17}$ cm, $|BC'| = \sqrt{23}$ cm ve $|AB'| = 2\sqrt{2}$ cm olarak seçilirse

ABC dik üçgeninde Pisagor teoreminden

$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$ olduğundan $\left(\sqrt{17}\right)^2 = a^2 + b^2 \quad (1)$

ABB' dik üçgeninde Pisagor teoreminden

$|AB'|^2 = |AB|^2 + |BB'|^2$ olduğundan $\left(2\sqrt{2}\right)^2 = a^2 + h^2 \quad (2)$

BCC' dik üçgeninde Pisagor teoreminden

$|BC'|^2 = |BC|^2 + |CC'|^2$ olduğundan

$\left(\sqrt{23}\right)^2 = b^2 + h^2 \quad (3)$ eşitlikleri bulunur.

(2) ve (3) toplamından $a^2 + h^2 + b^2 + h^2 = 8 + 23 \Rightarrow \underbrace{a^2 + b^2}_{17} + 2h^2 = 31 \Rightarrow 2h^2 = 31 - 17 = 14$

$$h^2 = 7 \Rightarrow h = \sqrt{7} \text{ cm}$$

ACC' dik üçgeninde $[AC']$, dikdörtgenler prizmasının cisim köşegeni olduğundan Pisagor teoreminden

$$|AC'|^2 = |AC|^2 + |CC'|^2$$
$$= \left(\sqrt{17}\right)^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2$$
$$= 2\sqrt{6} \text{ cm elde edilir.}$$

5. ÖRNEK

Ayrıt uzunlukları 3 cm, 4 cm ve 12 cm olan bir dikdörtgenler prizmasının

a) Cisim köşegeninin kaç cm olduğunu
b) Yüzey alanının kaç cm^2 olduğunu
c) Hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Prizmanın ayrıt uzunlukları $a = 3\,cm$, $b = 4\,cm$ ve $c = 12\,cm$ olarak alınırsa

a) Cisim köşegeninin uzunluğu

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{3^2+4^2+12^2} = \sqrt{9+16+144} = \sqrt{169} = 13\,cm \text{ olur.}$$

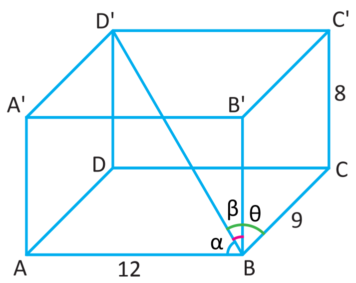
b) Yüzey alanı

$$A = 2(ab+ac+bc) = 2\cdot(3\cdot4+3\cdot12+4\cdot12) = 192\,cm^2 \text{ olur.}$$

c) Hacmi

$$V = a\cdot b\cdot c = 3\cdot4\cdot12 = 144\,cm^3 \text{ olur.}$$

6. ÖRNEK



Şekildeki dikdörtgenler prizmasında
$|AB| = 12\,cm$
$|BC| = 9\,cm$
$|CC'| = 8\,cm$
$m(\widehat{ABD'}) = \alpha$
$m(\widehat{B'BD'}) = \beta$
$m(\widehat{CBD'}) = \theta$ olduğuna göre
$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\theta$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$[AD']$, $[CD']$ ve $[B'D']$ çizilirse D'AB, BB'D' ve BCD' üçgenleri dik üçgen olur.
$[BD']$, dikdörtgenler prizmasının cisim köşegeni olduğundan

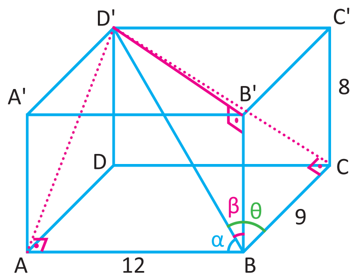
$|BD'| = \sqrt{12^2+9^2+8^2} = \sqrt{289} = 17\,cm$ olur.

$[AB] \perp [AD']$ olduğundan D'AB dik üçgeninde $\cos\alpha = \dfrac{|AB|}{|BD'|} = \dfrac{12}{17}$

$[BB'] \perp [B'D']$ olduğundan BB'D' dik üçgeninde $\cos\beta = \dfrac{|BB'|}{|BD'|} = \dfrac{8}{17}$

$[BC] \perp [D'C]$ olduğundan BCD' dik üçgeninde $\cos\theta = \dfrac{|BC|}{|BD'|} = \dfrac{9}{17}$

olarak bulunur.

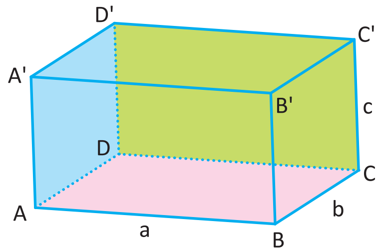


$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\theta = \left(\frac{12}{17}\right)^2+\left(\frac{8}{17}\right)^2+\left(\frac{9}{17}\right)^2 = \frac{12^2+8^2+9^2}{17^2} = \frac{289}{17^2} = \frac{17^2}{17^2} = 1 \text{ bulunur.}$$

7. ÖRNEK

Bir dikdörtgenler prizmasının farklı üç yüzünün alanları $18\ cm^2$, $21\ cm^2$, $42\ cm^2$ olduğuna göre prizmanın hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Yandaki dikdörtgenler prizmasında ayrıt uzunlukları a, b ve c olmak üzere farklı yüzlerin alanları

$A(ABCD) = a \cdot b = 18\ cm^2$

$A(ADD'A') = b \cdot c = 21\ cm^2$

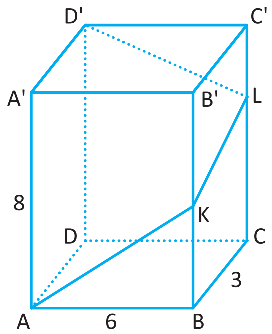
$A(DCC'D') = a \cdot c = 42\ cm^2$ olsun.

$V = a \cdot b \cdot c$ değerinin bulunabilmesi için eşitlikler taraf tarafa çarpılırsa

$$(a \cdot b) \cdot (b \cdot c) \cdot (a \cdot c) = a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 18 \cdot 21 \cdot 42$$
$$= 3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 7$$
$$= 3^2 \cdot 6^2 \cdot 7^2 \text{ olur.}$$

Buradan $V = a \cdot b \cdot c = 3 \cdot 6 \cdot 7 = 126\ cm^3$ elde edilir.

8. ÖRNEK



Şekildeki dikdörtgenler prizmasında

$K \in [BB']$

$L \in [CC']$

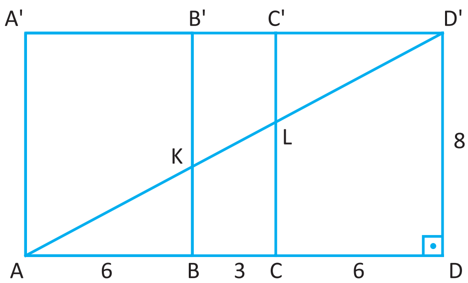
$|AB| = 6\ cm$

$|BC| = 3\ cm$

$|AA'| = 8\ cm$ olduğuna göre

$|AK| + |KL| + |LD'|$ toplamının en küçük değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Yanda verilen şekle göre $|AK| + |KL| + |LD'|$ toplamının en küçük değeri alabilmesi için

K ve L noktalarından geçen $[AD']$ üzerinde bulunan A, K, L ve D' noktaları doğrusal olmalıdır.

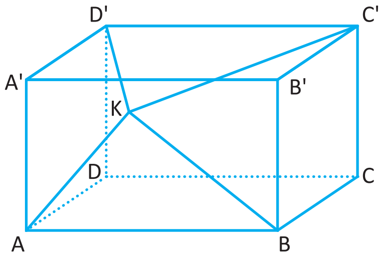
Dikdörtgenler prizmasının AK, KL ve LD' doğru parçalarını üzerinde bulunduran yüzleri açık olarak çizilirse $\widehat{ADD'}$ nin dik üçgen olduğu görülür.

ADD' dik üçgeninde Pisagor teoreminden

$$|AD'|^2 = |AD|^2 + |DD'|^2$$
$$= 15^2 + 8^2 = 225 + 64$$
$$= 289 \text{ olur.}$$

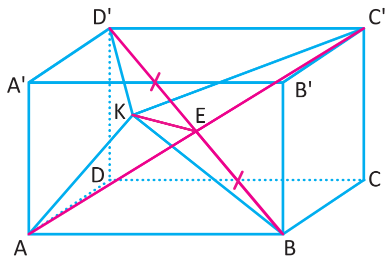
Buradan $|AD'| = 17$ cm bulunur.

9. ÖRNEK



Şekildeki dikdörtgenler prizmasında K, prizmanın iç bölgesinde bir noktadır.
$|D'K| = 2$ cm
$|BK| = 9$ cm
$|AK| = \sqrt{21}$ cm olduğuna göre
$|KC'| = x$ değerininin kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Yandaki şekilde $[AC']$ ve $[BD']$ cisim köşegenleri çizilsin ve $[AC'] \cap [BD'] = \{E\}$ olsun. $[EK]$ çizilirse $\widehat{AKC'}$ nde $[EK]$ AC' kenarına ait ve $\widehat{BKD'}$ nde BD' kenarına ait kenarortaydır. AKC' ve BKD' üçgenlerinde $[KE]$ kenarortay olduğundan

$$|EK|^2 = \frac{1}{2}\left[|AK|^2 + |KC'|^2 - \frac{|AC'|^2}{2}\right] \qquad (1)$$

$$|EK|^2 = \frac{1}{2}\left[|BK|^2 + |KD'|^2 - \frac{|BD'|^2}{2}\right] \qquad (2) \text{ olur.}$$

$|AC'| = |BD'|$ olduğundan (1) ve (2) ifadeleri eşit olur. Buradan

$$|AK|^2 + |KC'|^2 = |BK|^2 + |KD'|^2$$

$$(\sqrt{21})^2 + x^2 = 9^2 + 2^2$$

$$x^2 = 81 + 4 - 21 = 64 \Rightarrow |KC'| = x = 8 \text{ cm}$$ bulunur.

Sıra Sizde

SORU

Bir dikdörtgenler prizmasında farklı üç yan yüzün köşegen uzunluklarının kareleri toplamı 98 cm ise dikdörtgenin cisim köşegen uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

10. ÖRNEK

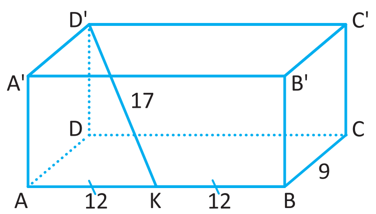
Bir dikdörtgenler prizmasının bir köşesinde kesişen üç ayrıtının uzunlukları, birbirinden farklı iki basamaklı asal sayılardır.
Bu durumda prizmanın alanının en az kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

İki basamaklı en küçük asal sayılar 11, 13 ve 17 olduğundan $a = 11$ cm, $b = 13$ cm ve $c = 17$ cm olur.
Dikdörtgenler prizmasının alanı $A = 2\cdot(a\cdot b + a\cdot c + b\cdot c)$ olduğundan

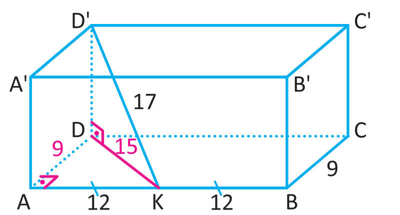
$$\begin{aligned} A &= 2\cdot(a\cdot b + a\cdot c + b\cdot c) \\ &= 2\cdot(11\cdot 13 + 11\cdot 17 + 13\cdot 17) \\ &= 2\cdot(143 + 187 + 221) \\ &= 2\cdot 551 \\ &= 1102\ cm^2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

11. ÖRNEK



Şekildeki dikdörtgenler prizmasında
$|AK| = |KB| = 12$ cm
$|BC| = 9$ cm
$|D'K| = 17$ cm olduğuna göre
dikdörtgenler prizmasının hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Verilen şekilde DK çizilirse $m(\widehat{DAK}) = 90^\circ$ olduğundan $\widehat{ADK}$ dik üçgen olur.
Pisagor teoreminden

$$\begin{aligned} |DK|^2 &= |AK|^2 + |AD|^2 \\ &= 12^2 + 9^2 \\ &= 144 + 81 \\ &= 225 \Rightarrow |DK| = 15 \text{ cm olur.} \end{aligned}$$

Benzer şekilde $m(\widehat{KDD'}) = 90^\circ$ olduğundan $\widehat{KDD'}$ dik üçgendir.
Pisagor teoreminden

$$|D'K|^2 = |DD'|^2 + |DK|^2$$
$$17^2 = |DD'|^2 + 15^2 \Rightarrow |DD'|^2 = 289 - 225$$
$$|DD'|^2 = 64$$
$$|DD'| = 8 \text{ cm olur.}$$

$|AB| = a = 2|AK| = 2\cdot 12 = 24$ cm
$|BC| = b = 9$ cm
$|DD'| = c = 8$ cm olduğundan dikdörtgenler prizmasının hacmi

$$\begin{aligned} V &= a\cdot b\cdot c \\ &= 24\cdot 9\cdot 8 \\ &= 1728\ cm^3 \text{ olarak bulunur.} \end{aligned}$$

12. ÖRNEK

Bir dikdörtgenler prizmasının bir köşesinde kesişen ayrıt uzunlukları 1, 2, 3 sayıları ile orantılıdır. Dikdörtgenler prizmasının hacmi $750\ cm^3$ olduğuna göre prizmanın alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Dikdörtgenler prizmasının bir köşesinde kesişen ayrıt uzunlukları a, b ve c olarak alınırsa

$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = k$ olduğundan $a = k,\ b = 2k$ ve $c = 3k$ olur.

$V = a \cdot b \cdot c$ olduğundan

$750 = k \cdot 2k \cdot 3k$

$750 = 6k^3 \Rightarrow k^3 = 125\ cm^3$

$k = 5$ cm bulunur.

Buradan $a = 5\ cm,\ b = 10\ cm$ ve $c = 15\ cm$ olur.

Buna göre dikdörtgenler prizmasının alanı

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) \\ &= 2 \cdot (5 \cdot 10 + 5 \cdot 15 + 10 \cdot 15) \\ &= 2 \cdot (50 + 75 + 150) \\ &= 2 \cdot 275 \\ &= 550\ cm^2 \text{ olarak bulunur.} \end{aligned}$$

13. ÖRNEK

Bir düzgün altıgen dik prizmanın taban ayrıtının uzunluğu $a = 2\ cm$ ve yüksekliği $h = 4\sqrt{3}\ cm$ olduğuna göre prizmanın hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Düzgün altıgen prizmanın köşegenleri çizildiğinde 6 eşkenar üçgen oluştuğundan düzgün altıgen dik prizmanın taban alanı

$A_T = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ olur. $a = 2\ cm$ olduğundan $A_T = 6 \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{\cancel{4}\sqrt{3}}{\cancel{4}} = 6\sqrt{3}\ cm^2$ olur.

$$\begin{aligned} V &= A_T \cdot h \\ &= 6\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} \\ &= 6 \cdot 3 \cdot 4 \\ &= 72\ cm^3 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Sıra Sizde

SORU

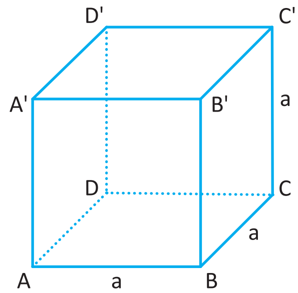
Ayrıt uzunlukları a, b ve c birim olan bir dikdörtgenler prizmasının ayrıtları arasında $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{5}$ bağıntısı olduğuna göre prizmanın alanının prizmanın hacmine bölümünü bulunuz.

ÇÖZÜM

Küp

Tanım

Bütün ayrıtlarının uzunluğu eşit olan dikdörtgenler prizmasına **küp** denir (Şekil 6.1.14).

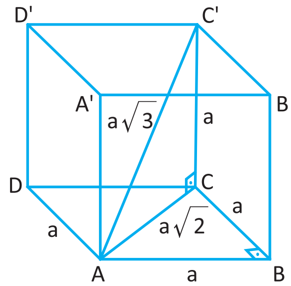


Şekil 6.1.14: Küp

Özellikler

Ayrıt uzunluğu a birim olan bir küpün

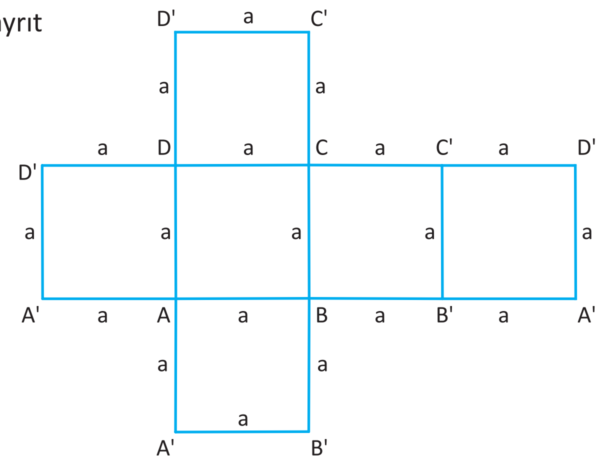
1. Tüm yüzey köşegen uzunlukları eşit ve $a\sqrt{2}$ birimdir.
2. Cisim köşegen uzunluğu $a\sqrt{3}$ birimdir (Şekil 6.1.15).



Şekil 6.1.15

Küpün Alan ve Hacim Bağıntıları

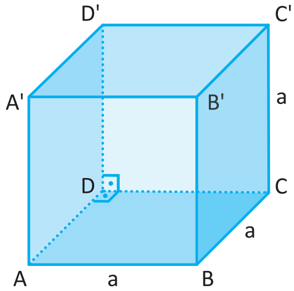
Küpün tüm yüzleri karedir. Altı eş yüz bulunduğundan bir ayrıt uzunluğu a birim olan küpün yüzey alanı $A = 6a^2$ olur (Şekil 6.1.16).



Şekil 6.1.16

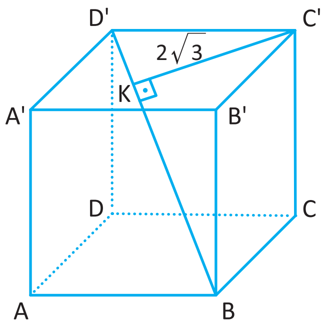
Küpün hacmi, bir ayrıt uzunluğunun küpüne eşittir.

Bir ayrıt uzunluğu a birim olan küpün hacmi $V = a^3$ olur (Şekil 6.1.17).



Şekil 6.1.17

14. ÖRNEK



Şekildeki küpte

$[C'K] \perp [BD']$

$|C'K| = 2\sqrt{3}$ cm olduğuna göre

küpün cisim köşegeninin kaç cm olduğunu bulunuz.

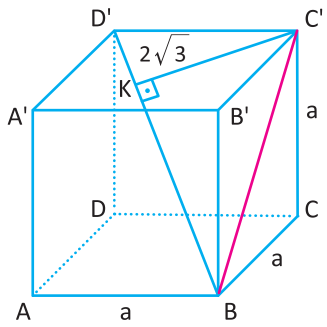
ÇÖZÜM

Şekilde $[BC']$ çizilirse $[D'C'] \perp [BC']$ olduğundan

$\widehat{BC'D'}$ dik üçgen olur.

$\widehat{BC'D'}$ nde $A(\widehat{BC'D'}) = \dfrac{|BC'| \cdot |D'C'|}{2} = \dfrac{|BD'| \cdot |KC'|}{2}$ olduğundan

$|BC'| \cdot |D'C'| = |BD'| \cdot |KC'|$ olur.



Küpün ayrıt uzunluğu a alınırsa yüzey köşegeni uzunluğu

$|BC'| = a\sqrt{2}$ cm ve cisim köşegeni uzunluğu $|D'B| = a\sqrt{3}$ cm olur.

Buradan

$a\sqrt{2} \cdot \cancel{a} = \cancel{a}\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}$

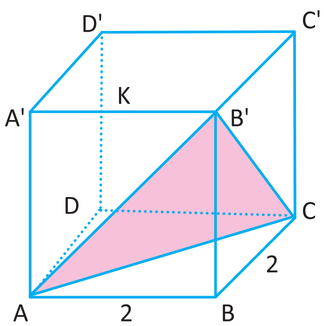
$a\sqrt{2} = 6 \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$ cm bulunur.

Bu durumda cisim köşegeni uzunluğu $|D'B| = a\sqrt{3}$ olduğundan

$|D'B| = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$

$= 3\sqrt{6}$ cm olur.

15. ÖRNEK



Şekildeki küpte

$|AB| = 2$ cm olduğuna göre

$A(\widehat{B'AC})$ nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

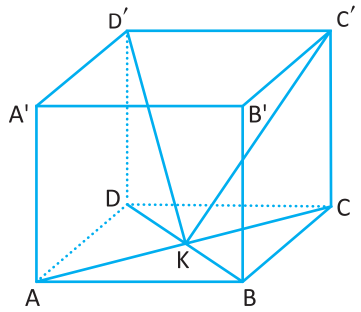
$[B'A]$, $[AC]$ ve $[B'C]$ yüzey köşegeni ve $|B'A| = |AC| = |B'C|$ olduğundan $\widehat{B'AC}$ eşkenar üçgendir.

Bu durumda $|B'A| = |AC| = |B'C| = 2\sqrt{2}$ cm olur.

$A(\widehat{B'AC}) = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ olduğundan

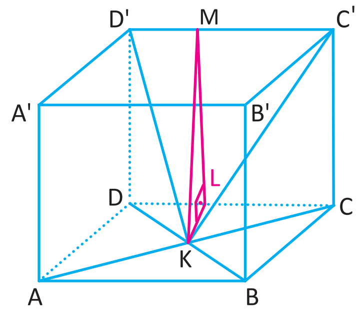
$A(\widehat{B'AC}) = \dfrac{(2\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \dfrac{\cancel{8}\sqrt{3}}{\cancel{4}} = 2\sqrt{3}$ cm^2 bulunur.

16. ÖRNEK



Şekildeki küpün ayrıt uzunluğu 1 cm ve K noktası ABCD karesinde köşegenlerin kesim noktası olduğuna göre $A(\widehat{D'KC'})$ nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Şekilde M noktası $D'C'$ kenarının ve L noktası DC kenarının orta noktası olarak alınırsa $\widehat{MLK}$ dik üçgen olur ($[KL] \perp [ML]$).

MLK dik üçgeninde Pisagor teoreminden

$$|MK|^2 = |ML|^2 + |KL|^2 \quad \left(|KL| = \frac{|AB|}{2} = \frac{1}{2}\right)$$

$$= 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 1 + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{5}{4} \Rightarrow |MK| = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ cm olur.}$$

C'KD' üçgeninde $|C'D'| = a = 1$ cm ve bu kenara ait yükseklik

$|MK| = h = \frac{\sqrt{5}}{2}$ cm olur.

$$A(\widehat{C'KD'}) = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{4} \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

SORU

Cisim köşegeni uzunluğu $4\sqrt{3}$ cm olan küpün

a) Yüzey alanının kaç cm^2 olduğunu

b) Hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

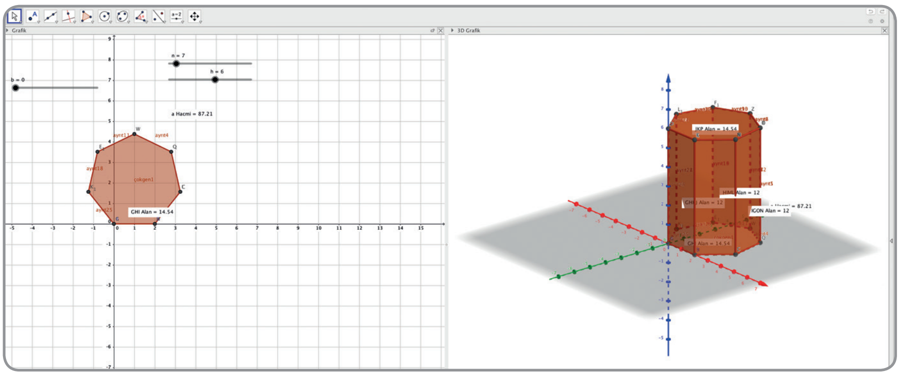
Teknoloji Uygulaması

Aşağıda GeoGebra programı kullanılarak bir prizmanın yüksekliği, açınımı, alanı ve hacmi incelenmiştir. Tablo 6.1.2'de verilen yönergelere göre Görsel 6.1.1 ve Görsel 6.1.2'deki şekilleri oluşturmaya çalışınız.

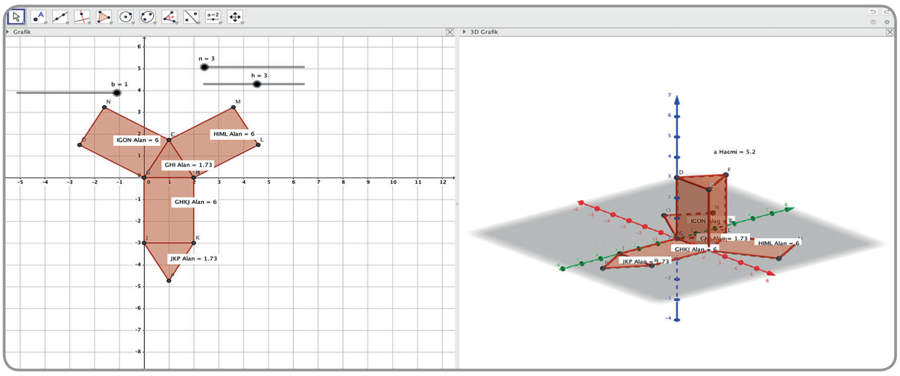
Tablo 6.1.2

Grafik Çizme	Programı çalıştırdığınızda **Grafik Çizme** kutucuğunu seçiniz.
a = 2	**Sürgü** aracını seçiniz. n isimli bir sürgünün minimum değerini 3, maksimum değerini 50 olarak tanımlayınız. Benzer şekilde h isimli bir sürgünün minimum değerini -50, maksimum değerini 50 olarak tanımlayınız. Her iki sürgünün de artış miktarını 1 yapınız.
	Düzgün Çokgen aracını seçiniz. Düzlemde iki nokta seçiniz. Karşınıza çıkan **Düzgün Çokgenin Noktaları** kutucuğuna n yazınız.
3D-Grafik	Görünüm sekmesi de bulunan **3D Grafik** menüsünü seçiniz. 3 boyutlu işlemler için açılan bu pencereyi kullanınız.
	Ekranın **3D Grafik** bölümünü daha sonra **Prizma veya Silindire Dönüştür** aracını seçiniz. Çokgenin üstüne tıkladığınızda karşınıza çıkan prizma yükseklik kutucuğuna h yazınız. h ve n sürgüsünün değerleri için oluşan prizmaları inceleyiniz.
cm^3	**Hacim** aracını seçiniz. Oluşturduğunuz prizmanın hacmini belirleyiniz.
	Düzleme Aç aracını seçiniz. Oluşturduğunuz prizmanın açınımını yapınız. Grafik alanında oluşan yeni sürgünün 0 ve 1 değerleri için prizmanın açınımını inceleyiniz.
cm^2	Alan aracını seçiniz. Prizmanın açınımını sürgü yardımıyla yapınız ve oluşan bölgelerde yanal ve taban alanları belirleyiniz.

Oluşturduğunuz çokgenin köşelerini, n ve h sürgülerinin değerleri için alan ve hacimdeki değişimleri inceleyiniz (Görsel 6.1.1, Görsel 6.1.2).



Görsel 6.1.1

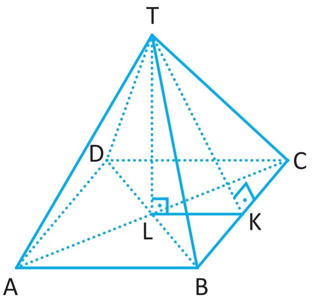


Görsel 6.1.2

2. Dik Piramitler

Tanım

Uzayda düzlemsel bir çokgen ile bunun düzlemi dışında sabit bir T noktası verilsin. T noktası ve çokgenin tüm noktalarından geçen doğruların oluşturduğu yüzeye **piramidal yüzey**, bu yüzeyin uzayda sınırladığı bölgeye **piramidal bölge**, piramidal bölgenin çokgenin düzlemine paralel bir düzlem ile T noktası arasındaki kısmına **piramit** denir (Şekil 6.1.18).

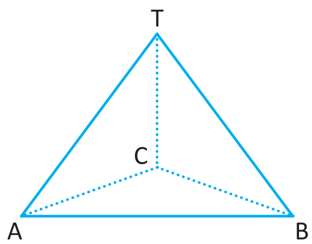


Şekil 6.1.18

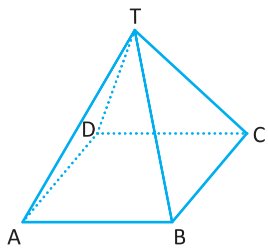
T noktası piramidin **tepe noktası**dır.
ABCD çokgensel bölgesine **piramidin tabanı** denir. TAD, TBA, TCB ve TDC üçgensel bölgeleri piramidin **yan yüzleri**dir.

Tepe noktasının taban düzlemine olan uzaklığına **piramidin yüksekliği** denir.
Taban çokgeninin kenarları olan $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ ve $[DA]$ **piramidin taban ayrıtlarıdır.**
Tepe noktasını taban çokgeninin köşelerine birleştiren $[TA]$, $[TB]$, $[TC]$ ve $[TD]$ **piramidin yanal ayrıtlarıdır.**

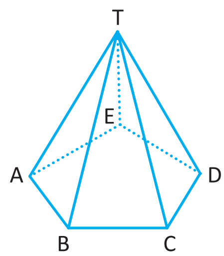
Tepe noktası T, tabanı ABCD olan piramit $(T, ABCD)$ şeklinde gösterilir.
Piramitler, prizmalarda olduğu gibi taban çokgeninin ismiyle adlandırılır. Tabanı üçgen olan piramide **üçgen piramit** (Şekil 6.1.19), dörtgen olan piramide **dörtgen piramit** (Şekil 6.1.20), beşgen olan piramide **beşgen piramit** denir (Şekil 6.1.21).



Şekil 6.1.19: Üçgen piramit



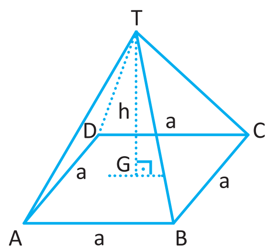
Şekil 6.1.20: Dörtgen piramit



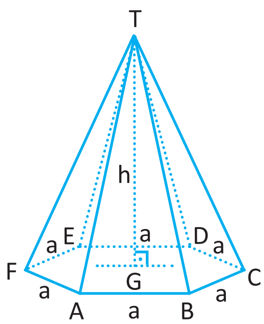
Şekil 6.1.21: Beşgen piramit

Bir piramidin yüksekliği, tabanın ağırlık merkezinden geçiyorsa bu piramide **dik piramit** (Şekil 6.1.22), geçmiyorsa **eğik piramit** denir.

G noktası, ABCD dörtgeninin ağırlık merkezi ve $[TG]$ piramidin yüksekliğidir.



Şekil 6.1.22: Kare dik piramit



Şekil 6.1.23: Düzgün altıgen piramit

Tabanı düzgün çokgen olan dik piramide **düzgün piramit** denir (Şekil 6.1.23).

Not

Her düzgün piramit dik piramittir fakat her dik piramit düzgün piramit değildir.

Özellikler

Bir düzgün piramitte

1. Taban düzgün çokgendir.
2. Yanal yüzler birbirine eş ikizkenar üçgenlerdir.
3. Yükseklik taban çokgeninin merkezinden geçer.
4. Yanal yüz yükseklikleri eşittir.
5. Yanal ayrıt uzunlukları eşittir.

Not

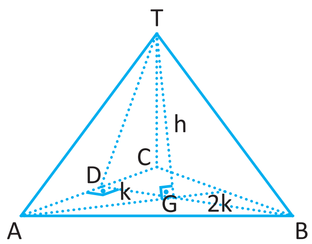
Tüm prizmalarda olduğu gibi piramitlerde de köşe sayısı (K), yüz sayısı (Y) ve ayrıt sayısı (A) olmak üzere bunlar arasında $K+Y-A=2$ bağıntısı geçerlidir.

Siz de üçgen piramit, dörtgen piramit ve altıgen piramit için bağıntının doğruluğunu gösteriniz.

1. ÖRNEK

Bir düzgün üçgen piramidin taban ayrıt uzunluğu 6 cm, yan yüz yüksekliği $\sqrt{19}$ cm olduğuna göre düzgün piramidin yüksekliğinin kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Şekilde düzgün üçgen piramidin tabanı eşkenar üçgen olduğundan piramidin yüksekliği eşkenar üçgenin G ağırlık merkezinden geçer.

$\overset{\frown}{ABC}$ nde D noktası AC kenarının orta noktası olarak seçilirse $[BD]$ kenarortay olduğundan

$|AD|=|DC|=3\,\text{cm}$ olur.

$[BD]\perp[AC]$ olduğundan

$\overset{\frown}{BDC}$ 30° - 60° - 90° dik üçgenidir.

$|DC|=3\,\text{cm}$ ise $|BD|=3\sqrt{3}\,\text{cm}$ olur.

G, ABC üçgeninin ağırlık merkezi olduğundan

$|BG|=2|GD|$ dir.

$|GD|=k$ ise $|BG|=2k$ olur.

$|BD|=|BG|+|GD|$ olduğundan

$2k+k=3\sqrt{3} \Rightarrow 3k=3\sqrt{3}$

$k=\sqrt{3}$ bulunur. Bu durumda $|GD|=\sqrt{3}$ cm olur.

$\overset{\frown}{TGD}$ dik üçgen olduğundan Pisagor teoreminden

$|TD|^2=|TG|^2+|GD|^2 \Rightarrow (\sqrt{19})^2=|TG|^2+(\sqrt{3})^2$

$19=|TG|^2+3$

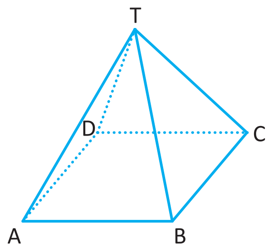
$16=|TG|^2$

$|TG|=4\,\text{cm}$ bulunur.

Düzgün Piramitte Alan ve Hacim Bağıntıları

Bir düzgün piramidin yüzey alanı, ikizkenar üçgensel bölgeden oluşan yanal yüzlerin alanı ile düzgün çokgensel bölge olan taban alanı toplamına eşittir.

Yüzey alanı : A
Taban alanı : A_T
Yanal alanı : A_Y
Yanal yüz yüksekliği : h_Y
Cisim yüksekliği : h
olmak üzere $A = A_T + A_Y$ olur.



Şekil 6.1.24: Kare dik piramit

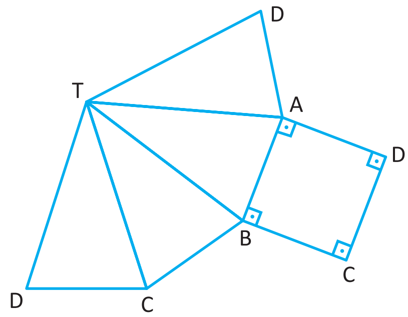
Şekil 6.1.24 ve 6.1.25 ile verilen kare dik piramidin yüzey alanı

$$A_Y = A(\widehat{TDC}) + A(\widehat{TCB}) + A(\widehat{TBA}) + A(\widehat{TAD})$$
$$= \frac{a \cdot h_Y}{2} + \frac{a \cdot h_Y}{2} + \frac{a \cdot h_Y}{2} + \frac{a \cdot h_Y}{2} = \frac{(a+a+a+a) \cdot h_Y}{2}$$
$$= \frac{Ç(ABCD) \cdot \text{Yanal Yüz Yükseklik}}{2}$$

$A_T = A(ABCD)$ olduğundan

$A = A_Y + A_T$

$= \dfrac{Ç(ABCD) \cdot \text{Yanal Yüz Yükseklik}}{2} + A(ABCD)$ olarak bulunur.



Şekil 6.1.25: Kare dik piramidin açınımı

Genelleme yapılırsa bir ABCD... düzgün dik piramidin alanı

$A = A_Y + A_T$

$= \dfrac{Ç(ABCD...) \cdot \text{Yanal Yüz Yükseklik}}{2} + A(ABCD...)$ olur.

Düzgün piramidin hacmi, taban alanı ile cisim yüksekliği çarpımının üçte biridir.

$V = \dfrac{A_T \cdot h}{3}$ olur.

2. ÖRNEK

Bir düzgün altıgen piramidin taban ayrıt uzunluğu $a = 4$ cm ve yüksekliği $h = \sqrt{13}$ cm olduğuna göre düzgün piramidin yüzey alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Düzgün altıgen piramidin taban çokgeni, düzgün altıgen olduğundan

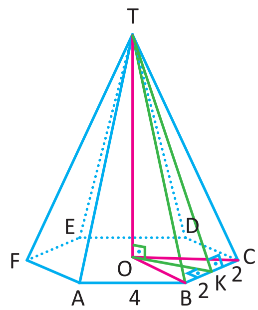
$A_T = A(ABCDEF) = 6 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ eşitliğinden

$A_T = 6 \cdot \dfrac{4^2\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}\ cm^2$ olur.

Düzgün altıgen piramidin yan yüz yüksekliği $[TK]$ çizilirse

TOK dik üçgen olur.

$|OK| = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ eşitliğinden $|OK| = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ cm olur.



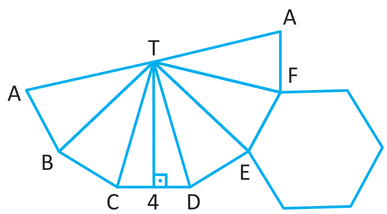
TOK dik üçgeninde Pisagor teoreminden

$|TK|^2 = |TO|^2 + |OK|^2 = (\sqrt{13})^2 + (2\sqrt{3})^2 = 13 + 12 = 25$

Buradan $|TK| = h_Y = 5$ cm bulunur.

$A_Y = \dfrac{1}{2} \cdot Ç(ABCDEF) \cdot h_Y = \dfrac{1}{2} \cdot (6 \cdot 4) \cdot 5 = 60\ cm^2$

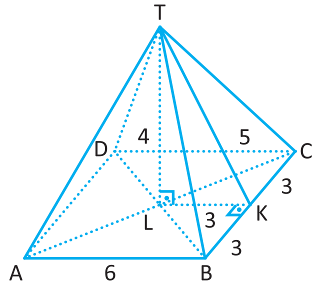
olduğundan $A = A_T + A_Y = (24\sqrt{3} + 60)\ cm^2$ bulunur.



3. ÖRNEK

Taban ayrıtının uzunluğu $a = 6$ cm ve yüksekliği $h = 4$ cm olan düzgün kare piramidin yüzey alanını (cm^2), hacmini (cm^3) cinsinden bulunuz.

ÇÖZÜM



Şekildeki düzgün kare piramidin yüksekliği $h = |TL| = 4$ cm ve

$[LK] \parallel [AB] \parallel [DC]$ çizilirse

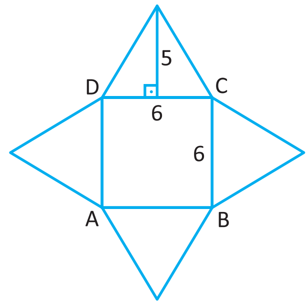
TLK dik üçgeni oluşur. Pisagor teoreminden

$|TK|^2 = |TL|^2 + |LK|^2$

$= 4^2 + 3^2$

$= 16 + 9$

$= 25 \Rightarrow |TK| = 5$ cm bulunur.



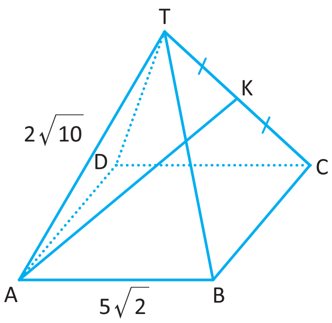
$A = A_T + A_Y = 6^2 + 4 \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{6}} \cdot 5}{\cancel{2}}$

$= 36 + 60$

$= 96\ cm^2$ bulunur.

$V = \frac{A_T \cdot h}{3} = \frac{\overset{12}{\cancel{36}} \cdot 4}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 48\ cm^3$ bulunur.

4. ÖRNEK



Şekildeki düzgün kare piramitte

$|TK| = |KC|$

$|AB| = 5\sqrt{2}$ cm

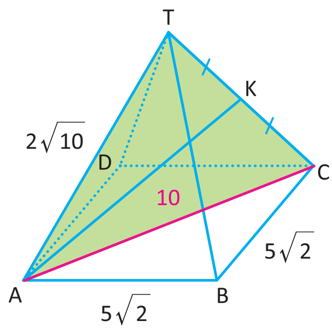
$|AT| = 2\sqrt{10}$ cm olduğuna göre

$|AK| = x$ değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Şekilde $[AC]$ köşegeni çizildiğinde ABC dik üçgeninde Pisagor teoreminden $|AC| = 10$ cm bulunur.

TAC üçgeninde kenarortay teoreminden



$|AK|^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(|AC|^2 + |AT|^2 - \frac{|TC|^2}{2}\right)$

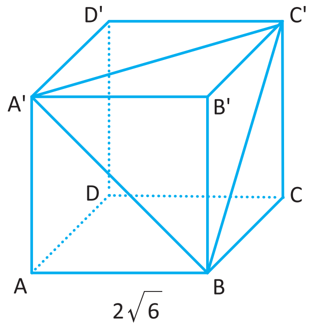
$|AK|^2 = \frac{1}{2} \cdot \left[10^2 + (2\sqrt{10})^2 - \frac{(2\sqrt{10})^2}{2}\right]$ $(|TC| = |AT| = 2\sqrt{10})$

$= \frac{1}{2} \cdot \left[100 + 40 - \frac{40}{2}\right]$

$= \frac{1}{2} \cdot 120$

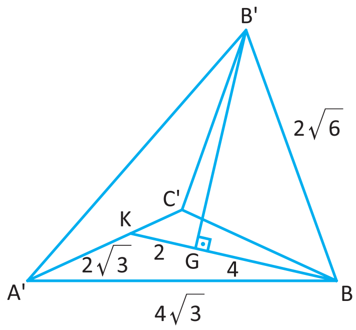
$= 60 \Rightarrow |AK| = 2\sqrt{15}$ cm bulunur.

5. ÖRNEK



Şekildeki küpün bir ayrıtının uzunluğu $2\sqrt{6}$ cm olduğuna göre $(B', A'BC')$ piramidinin hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Şekilde ayrıt uzunluğu a birim olan küpün yüzey köşegen uzunlukları eşit ve $a\sqrt{2}$ birim olduğundan
$|A'B| = |BC'| = |C'A'| = 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{3}$ cm olur.

G, A'BC' eşkenar üçgeninin ağırlık merkezi olmak üzere $[BK]$ kenarortayı çizilirse $\widehat{BKA'}$ dik üçgen olur.

Pisagor teoreminden

$$|A'B|^2 = |BK|^2 + |KA'|$$

$$(4\sqrt{3})^2 = |BK|^2 + (2\sqrt{3})^2 \quad \left(|KA'| = \frac{|AC'|}{2} = 2\sqrt{3}\right)$$

$$|BK|^2 = 48 - 12$$

$$= 36 \Rightarrow |BK| = 6 \text{ cm olur.}$$

$|BG| = 2|GK|$ olduğundan $|GK| = k$ alınırsa $|BG| = 2k$ olur.

$|BK| = |BG| + |GK|$ olduğundan
$6 = 2k + k \Rightarrow 3k = 6 \Rightarrow k = 2$ olur.
Buradan $|GK| = 2$ cm ve $|BG| = 4$ cm bulunur.

$[B'G] \perp [GB]$ olacak şekilde $[B'G]$ çizilirse $\widehat{B'GB}$ dik üçgen olur.

Pisagor teoreminden

$$|B'B|^2 = |B'G|^2 + |GB|^2$$

$$(2\sqrt{6})^2 = |B'G|^2 + 4^2$$

$$|B'G|^2 = 24 - 16 = 8 \Rightarrow |B'G| = 2\sqrt{2} \text{ cm olur.}$$

$A_T = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ ve $a = 4\sqrt{3}$ olduğundan

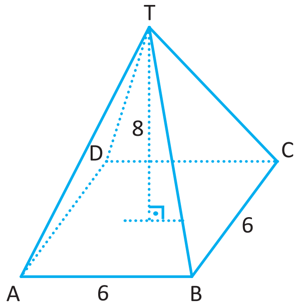
$A_T = \dfrac{(4\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}\ cm^2$ olur. Buradan

$$V = \frac{A_T \cdot h}{3}$$

$$= \frac{12\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2}}{3}$$

$$= 8\sqrt{6}\ cm^3 \text{ elde edilir.}$$

6. ÖRNEK



Şekilde yüksekliği 8 cm, tabanının bir ayrıtının uzunluğu 6 cm olan bir düzgün kare piramit verilmiştir.

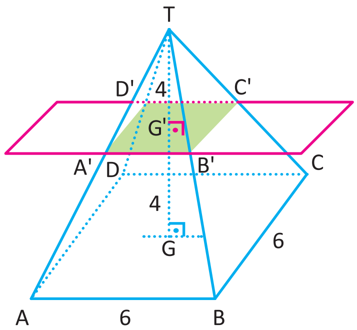
Düzgün kare piramit tabana paralel bir düzlemle ortadan kesiliyor.

Buna göre elde edilen kesik piramidin hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Piramitlerin benzerliği üçgenlerin benzerliği ile aynıdır.

Piramitlerin hacimleri arasındaki benzerlik oranı, uzunlukları arasındaki benzerlik oranının küpüne eşittir. Tepe noktası T, taban çokgeni ABCD ve A'B'C'D' olan piramitler $(T, ABCD)$ ve $(T, A'B'C'D')$ ile gösterilirse



$(T, A'B'C'D') \sim (T, ABCD)$ olur.

$$\frac{(T, A'B'C'D')}{(T, ABCD)} = \frac{|TG'|}{|TG|}$$

$$\frac{(T, A'B'C'D')}{(T, ABCD)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{V(T, A'B'C'D')}{V(T, ABCD)} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \text{ olur.}$$

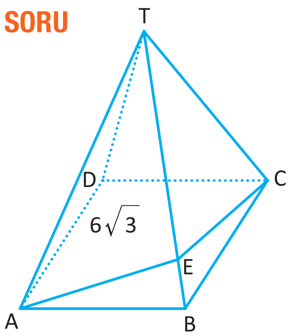
Buna göre $V(T, A'B'C'D') = X$ alınırsa $V(T, ABCD) = 8X$ olur.

$V(T, ABCD) = 8X = \frac{1}{3} \cdot A(ABCD) \cdot h = \frac{6^2 \cdot 8}{3} = 96 \Rightarrow X = 12\,cm^3$ bulunur.

Buna göre kesik piramidin hacmi $V = 7X \Rightarrow V = 7 \cdot 12 = 84\,cm^3$ olur.

Sıra Sizde

SORU

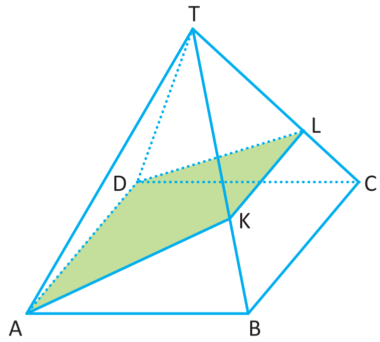


Bir kenar uzunluğu $a = 6\sqrt{3}$ cm ve yan yüzleri eşkenar üçgen olan şekildeki düzgün kare piramitte $E \in [TB]$ dir.

Buna göre $|AE| + |EC|$ toplamının alabileceği en küçük değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

7. ÖRNEK



Şekilde yanal yüzeyleri eşkenar üçgen olan düzgün kare piramit verilmiştir.

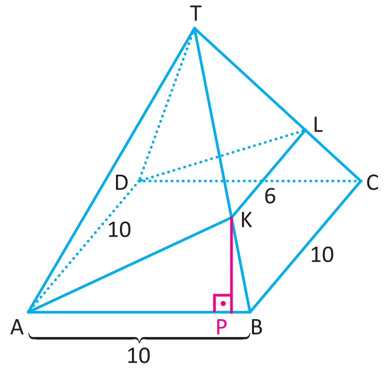
$|AB| = 10$ cm

$3|KB| = 2|TK|$

$3|LC| = 2|TL|$ olduğuna göre

AKLD dörtgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Yandaki şekilde $\widehat{TKL} \sim \widehat{TBC}$, (A.A.) dir.

$3|KB| = 2|TK|$ olduğundan $|TK| = 3k$ alınırsa $|KB| = 2k$ olur.

Buradan $\dfrac{|TK|}{|TB|} = \dfrac{|TL|}{|TC|} = \dfrac{|KL|}{|BC|} = \dfrac{3}{5}$ olur.

$|TB| = |TC| = |BC| = 10$ cm olduğundan

$\dfrac{|TK|}{10} = \dfrac{|TL|}{10} = \dfrac{|KL|}{10} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow |TK| = |TL| = |KL| = 6$ cm bulunur.

Bu durumda $|KB| = |LC| = 4$ cm olur.

$\widehat{KAB} \cong \widehat{LDC}$, (K.A.K) olduğundan $|AK| = |DL|$ olur.

$\widehat{KAB}$ nde $[KP]$ yüksekliği çizilirse $\widehat{KPB}$ $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ üçgeni olur.

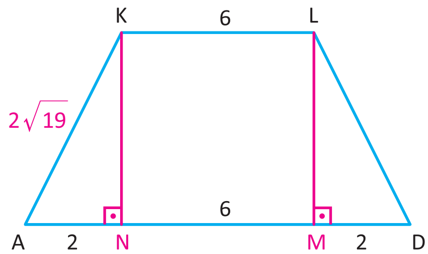
$|KB| = 4$ cm olduğundan

$|PB| = 2$ cm, $|KP| = 2\sqrt{3}$ cm ve $|AP| = 8$ cm olur.

KAP dik üçgeninde Pisagor teoreminden

$$|KA|^2 = |KP|^2 + |AP|^2$$
$$= (2\sqrt{3})^2 + 8^2$$
$$= 12 + 64 = 76 \Rightarrow |KA| = 2\sqrt{19} \text{ cm olur.}$$

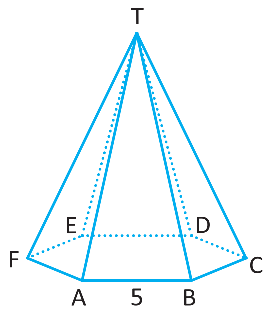
$[KL] \,/\!/\, [AD]$ olduğundan ADLK ikizkenar yamuktur. Buna göre ADLK ikizkenar yamuğunda K ve L köşelerinden yükseklik çizilir ve bu noktalar sırasıyla N ve M olarak alınırsa oluşan dik üçgenler eş olur. Pisagor teoreminden



$$|LD|^2 = |LM|^2 + |MD|^2$$
$$(2\sqrt{19})^2 = |LM|^2 + 2^2$$
$$|LM|^2 = 76 - 4$$
$$|LM|^2 = 72 \Rightarrow |LM| = \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \text{ cm olur.}$$

$$A(ADLK) = \frac{(|AD| + |KL|) \cdot |LM|}{2}$$
$$= \frac{(10+6) \cdot \overset{3}{\cancel{6}}\sqrt{2}}{\underset{1}{\cancel{2}}}$$
$$= 16 \cdot 3\sqrt{2}$$
$$= 48\sqrt{2} \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$

8. ÖRNEK

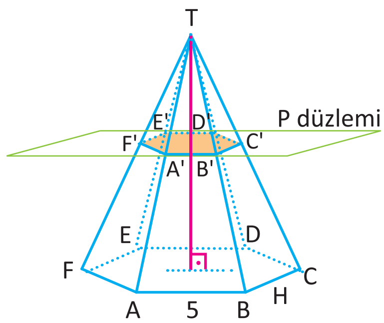


Şekilde verilen düzgün altıgen piramidin taban ayrıt uzunluğu 5 cm dir.

Piramit, tabanına paralel bir P düzlemi ile kesildiğinde oluşan piramidin yanal alanı ile kesik piramidin yanal alanları eşit olmaktadır.

Buna göre oluşan piramidin taban ayrıt uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Piramitlerin benzerliği, üçgenlerin benzerliği ile aynı olduğundan piramitlerin alanları arasındaki benzerlik oranı, uzunlukları arasındaki benzerlik oranının karesine eşittir.
Şekildeki piramit, tabanına paralel bir düzlemle ile kesildiğinde oluşan piramidin yanal alanı $A(T, A'B'C'D'E'F') = S$ alınırsa piramidin yanal alanı $A(T, ABCDEF) = 2S$ olur.
Bu durumda

$$(T, A'B'C'D'E'F') \sim (T, ABCDEF) \Rightarrow \frac{A(T, A'B'C'D'E'F')}{A(T, ABCDEF)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ olur.}$$

$|AB| = 5\,\text{cm}$ olduğundan

$$\frac{|A'B'|}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2|A'B'| = 5\sqrt{2} \Rightarrow |A'B'| = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ cm bulunur.}$$

9. ÖRNEK

Bir üniversitenin inşaat mühendisliği bölümü öğrencileri 15 Temmuz Demokrasi Zaferi ve Şehitleri Anma Günü'nde Çanakkale gezisi düzenlemişlerdir.
Gezi rehberi, öğrencilere Çanakkale Şehitleri Abidesi ile ilgili olarak aşağıdaki bilgileri vermiştir:

- Kaidenin kare şeklindeki tabanının bir ayrıtı 30 metredir.
- Kaidenin yerden yüksekliği 41,7 metredir.
- Kaidenin kalınlığı yaklaşık 5 metredir.
- Kaideyi taşıyan ayakların taban çokgeninin boyutu 7,5 metredir.
- Kaideyi taşıyan ayaklar arasındaki mesafe 10 metredir.

Verilen bilgileri kullanarak abidenin yapımında kaç metreküp beton kullanıldığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Çanakkale Şehitleri Abidesi'nin ayakları 4 adet kare dik prizma olduğundan taban çokgeninin boyutu 7,5 metre, yüksekliği 31,7 m dir.
Abide'nin kaidesi kare dik prizmadır. Bu prizmanın taban çokgeninin bir ayrıtı 25 metre, yüksekliği 5 metredir.
Buna göre bu kare dik prizmaların hacimleri toplamı Çanakkale Şehitleri Abidesi'nin hacmini verir.
O hâlde

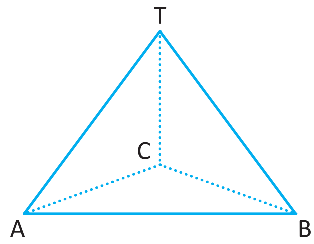
$$4 \cdot (7{,}5 \cdot 7{,}5 \cdot 31{,}7) + 30 \cdot 30 \cdot 5 + 25 \cdot 25 \cdot 5 = 7132{,}5 + 4500 + 3125 = 14\,757{,}5\,\text{m}^3 \text{ bulunur.}$$

Bu durumda Abide'nin yapımında $14\,757{,}5\,\text{m}^3$ beton kullanılmıştır.

Düzgün Dörtyüzlü

Tanım

Dört yüzü eşkenar üçgen olan piramide **düzgün dörtyüzlü** denir (Şekil 6.1.26).



Şekil 6.1.26

Düzgün dörtyüzlünün bütün yüzleri eşkenar üçgendir. Düzgün dörtyüzlü, düzgün piramit olduğundan düzgün piramit özelliklerini sağlar.

Ayrıt uzunluğu a birim olan düzgün dörtyüzlünün yan yüz yüksekliği $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ olur.

Düzgün dörtyüzlüde ayrıt uzunluğu a birim olarak alınırsa yüzey alanı

$$A=4\cdot A(\widehat{ABC})=\cancel{4}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{\cancel{4}}=a^2\sqrt{3}\text{ birimkare olur.}$$

Düzgün dörtyüzlünün hacmi, taban alanı ile yükseklik çarpımının üçte biridir. Bu durumda

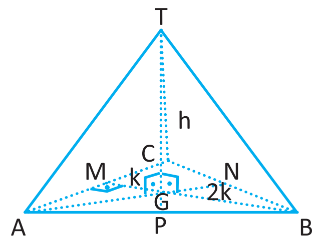
$V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$ birimküp olur.

İspat

Şekildeki düzgün dörtyüzlüde tabandaki eşkenar üçgenin ağırlık merkezi G olmak üzere

$[BM]$ kenarortayı ve $[TG]$ yüksekliği çizilirse

$\widehat{BMA}$ 30° - 60° - 90° dik üçgeni olur. Pisagor teoreminden



$$|BA|^2=|BM|^2+|MA|^2$$

$$a^2=|BM|^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$|BM|^2=a^2-\frac{a^2}{4}$$

$$=\frac{3a^2}{4}\Rightarrow |BM|=\frac{a\sqrt{3}}{2}\text{ birim}$$

$$|BM|=|BG|+|GM|$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{2}=2k+k=3k\Rightarrow k=|GM|=\frac{a\sqrt{3}}{6}\text{ ve }|BG|=\frac{a\sqrt{3}}{3}\text{ birim olur.}$$

TGB dik üçgeninde Pisagor teoreminden

$$|TB|^2=|TG|^2+|GB|^2\Rightarrow a^2=h^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$h^2=a^2-\frac{a^2}{3}$$

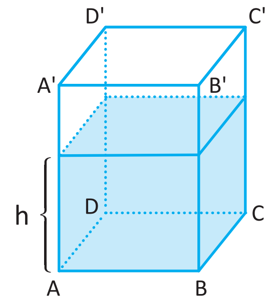
$$=\frac{2a^2}{3}\Rightarrow h=\frac{a\sqrt{6}}{3}\text{ birim olur.}$$

$$V=\frac{A(\widehat{ABC})\cdot h}{3}=\frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{3}}{3}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}\text{ birimküp olur.}$$

10. ÖRNEK

Taban ayrıt uzunluğu $a = 25$ cm ve yüksekliği 40 cm olan kare dik prizma şeklindeki tenekenin içinde bir miktar su bulunmaktadır. Tenekenin içine ayrıt uzunluğu $15\sqrt{2}$ cm olan bir düzgün dörtyüzlü atılıyor.
Buna göre düzgün dörtyüzlünün, teneke içindeki suya atıldığında su seviyesinin kaç cm yükseleceğini bulunuz.

ÇÖZÜM



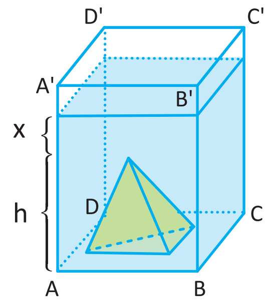
Ayrıt uzunluğu $15\sqrt{2}$ cm olan düzgün dörtyüzlünün hacmi

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{(15\sqrt{2})^3\sqrt{2}}{12} = \frac{225 \cdot 2 \cdot 15\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{12} = 1125\ \text{cm}^3 \text{ bulunur.}$$

Şekildeki gibi düzgün dörtyüzlü, teneke içine atıldığında su seviyesi x cm yükselsin. Bu durumda teneke içindeki yükselen suyun hacmi, düzgün dörtyüzlünün hacmine eşit olur.
Bu durumda yükselen suyun hacmi

$$V = 25 \cdot 25 \cdot x$$
$$= 625 \cdot x\ \text{cm}^3 \text{ olduğundan}$$

$$625 \cdot x = 1125 \Rightarrow x = \frac{1125}{625} = 1{,}8\ \text{cm} \text{ su seviyesi yükselir.}$$

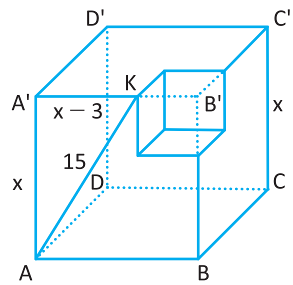


11. ÖRNEK

Küp şeklindeki bir koli, ayrıt uzunluğu 3 cm olan küçük küp şeklindeki paketlerle boşluk kalmayacak şekilde doldurulmuştur. $|AK| = 15$ cm olduğuna göre koli içindeki küçük paketlerin sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

Şekle göre küp kolinin ayrıt uzunluğu x cm olsun.
Koli içinden alınan küp şeklindeki paketin ayrıt uzunluğu 3 cm ise
$|A'K| = (x-3)$ cm olur.



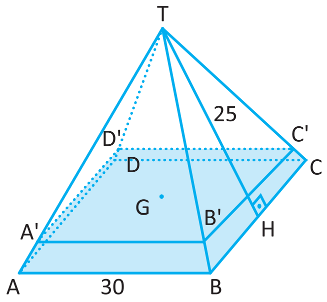
$\widehat{AA'K}$ dik üçgen olduğundan Pisagor teoreminden

$$|AA'|^2 + |A'K|^2 = |AK|^2$$
$$x^2 + (x-3)^2 = 15^2$$
$$x^2 + x^2 - 6x + 9 = 225$$
$$2x^2 - 6x + 9 - 225 = 0$$
$$2x^2 - 6x - 216 = 0$$

$x^2 - 3x - 108 = 0$ ikinci derece denklemi elde edilir. Denklem çözülürse
$(x-12) \cdot (x+9) = 0 \Rightarrow x_1 = 12$ veya $x_2 = -9$ bulunur.
Buna göre küp şeklindeki kolinin bir ayrıt uzunluğu $|AB| = 12$ cm olur.

Bu durumda
$V_{koli} = |AB|^3 = 12^3 = 1728\ \text{cm}^3$ olur.
Küçük küp paketlerin hacmi $V_{paket} = |KB'|^3 = 3^3 = 27\ \text{cm}^3$ olduğundan
koli içindeki küçük paketlerin sayısını bulmak için kolinin hacmi, bir paket kolinin hacmine bölünürse küçük paketlerin sayısı
$\frac{V_{koli}}{V_{paket}} = \frac{1728}{27} = 64$ olarak bulunur.

12. ÖRNEK



Şekildeki düzgün kare piramitte suyun yüksekliği 5 cm dir. Taban ayrıtının uzunluğu 30 cm ve yan yüz yüksekliği 25 cm olan piramit ters çevrildiğinde içindeki suyun yüksekliği kaç cm olur?

ÇÖZÜM

Verilen şekilde piramit yüksekliği $[TG]$ ve yan yüz yüksekliği $[TH]$ olmak üzere $[GH]$ çizilirse $\widehat{TGH}$ dik üçgen olur. Pisagor teoreminden

$$|TH|^2 = |TG|^2 + |GH|^2$$
$$25^2 = |TG|^2 + 15^2$$
$$|TG| = 20 \text{ cm olur.}$$

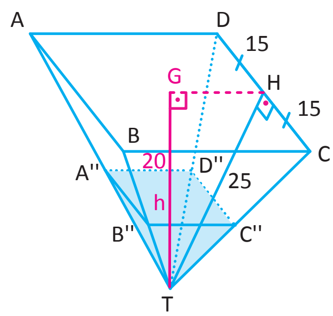
Bu durumda $|TG'| = 20 - 5 = 15 \text{ cm}$ olur.

Piramitlerin hacimleri arasındaki benzerlik oranı, uzunlukları arasındaki benzerlik oranının küpüne eşittir. G' noktası, A'B'C'D' karesinin ağırlık merkezi olarak alınırsa

$(T, A'B'C'D') \sim (T, ABCD)$ yazılır. Buradan benzerlik oranı

$$\frac{(T, A'B'C'D')}{(T, ABCD)} = \frac{|TG'|}{|TG|}$$
$$\frac{(T, A'B'C'D')}{(T, ABCD)} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$
$$\frac{V(T, A'B'C'D')}{V(T, ABCD)} = \left(\frac{3}{4}\right)^3$$
$$= \frac{27}{64} \text{ olur.}$$

$(T, ABCD)$ piramidinin hacmi 64X, $(T, A'B'C'D')$ piramidinin hacmi 27X alınırsa su dolu kısmın hacmi 37X olur.
Piramit ters çevrilirse yandaki şekil elde edilir.
Piramit ters çevrildiğinde suyun yüksekliği h'' alınırsa



$(T, A''B''C''D'') \sim (T, ABCD)$ yazılır. Buradan

$$\frac{V(T, A''B''C''D'')}{V(T, ABCD)} = \frac{37}{64} \text{ olur.}$$

Bu durumda $\frac{h''}{h} = \sqrt[3]{\frac{37}{64}}$ bulunur.

Prizma ters çevrildiğinde suyun yüksekliği

$$\frac{h''}{20} = \frac{\sqrt[3]{37}}{4}$$
$$h'' = 5\sqrt[3]{37} \text{ cm olarak bulunur.}$$

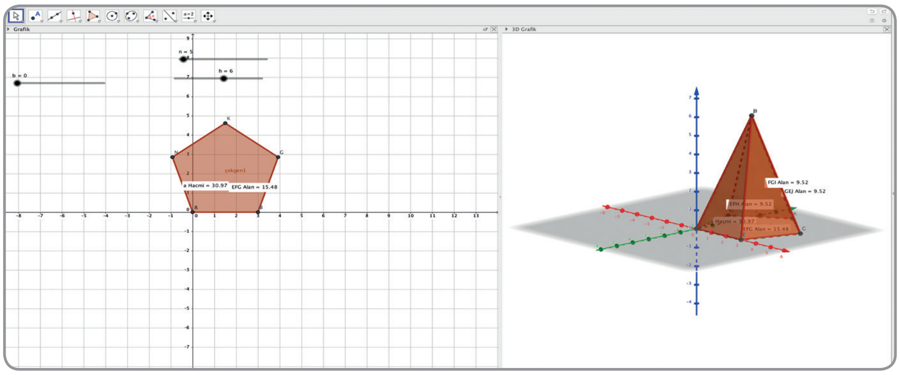
Teknoloji Uygulaması

Aşağıda GeoGebra programı kullanılarak bir piramidin yüksekliği, açınımı, alanı ve hacmi incelenmiştir. Tablo 6.1.3'te verilen yönergelere göre Görsel 6.1.3 ve Görsel 6.1.4'teki şekilleri oluşturmaya çalışınız.

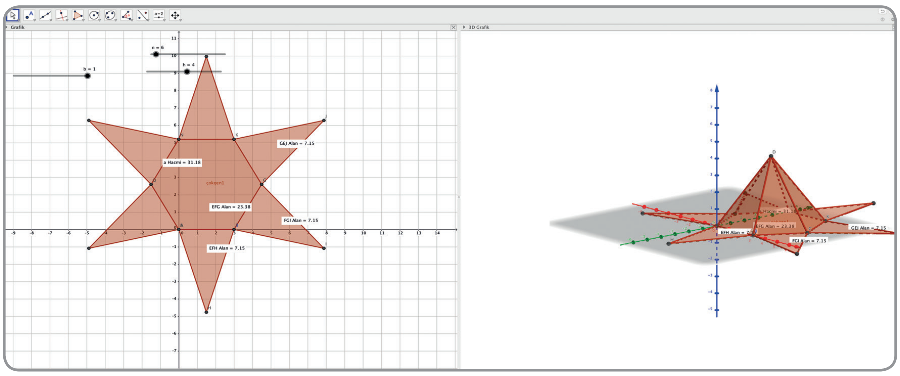
Tablo 6.1.3

Grafik Çizen	Programı çalıştırdığınızda **Grafik Çizme** kutucuğunu seçiniz.
a=2	**Sürgü** aracını seçiniz. n isimli bir sürgünün minimum değerini 3, maksimum değerini 50 olarak tanımlayınız. Benzer şekilde h isimli bir sürgünün minimum değerini -50, maksimum değerini 50 olarak tanımlayınız. Her iki sürgünün de artış miktarını 1 yapınız.
	Düzgün Çokgen aracını seçiniz. Düzlemde iki nokta seçiniz. Karşınıza çıkan **Düzgün Çokgenin Noktaları** kutucuğuna n yazınız.
3D-Grafik	Görünüm sekmesinde bulunan **3D Grafik** menüsünü seçiniz. 3 boyutlu işlemler için açılan bu pencereyi kullanınız.
	Ekranın önce **3D Grafik** bölümünü daha sonra **Pramit veya Koniye Dönüştür** aracını seçiniz. Çokgenin üstüne tıkladığınızda karşınıza çıkan **Prizma Yükseklik** kutucuğuna h yazınız. h ve n sürgüsünün değerleri için oluşan prizmaları inceleyiniz.
cm^3	**Hacim** aracını seçiniz. Oluşturduğunuz piramidin hacmini belirleyiniz.
	Düzleme Aç aracını seçiniz. Oluşturduğunuz prizmanın açınımını yapınız. Grafik alanında oluşan yeni sürgünün 0 ve 1 değerleri için piramidin açınımını inceleyiniz.
cm^2	**Alan** aracını seçiniz. Piramidin açınımını sürgü yardımıyla yapınız ve oluşan bölgelerde yanal alanları ve taban alanını belirleyiniz.

Oluşturduğunuz çokgenin köşelerini, n ve h sürgülerinin değerleri için alan ve hacimdeki değişimleri inceleyiniz (Görsel 6.1.3, Görsel 6.1.4).

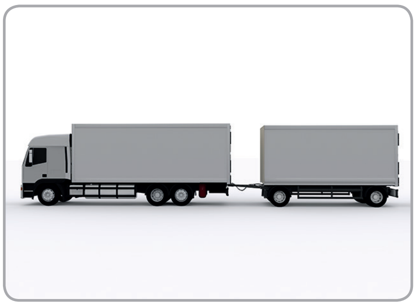


Görsel 6.1.3



Görsel 6.1.4

13. ÖRNEK



Toptancı bir firma, aldığı siparişleri eşit ebattaki küp şeklinde kolilere yerleştirerek tenteli kamyon römork ile alıcıya gönderecektir.

Tenteli kamyon römorkun ebatları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

	Uzunluk	Genişlik	Yükseklik
Kamyon	7,8 m	2,4 m	3 m
Römork	7,2 m	2,4 m	3 m

Tenteli kamyon römork tamamen dolacağına göre toptancı firmanın sipariş aldığı 2400 koliyi tenteli kamyon römork ile kaç seferde alıcıya teslim edebileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Tenteli kamyon römork tamamen dolduğundan ve küp koliler eş olduğundan tenteli kamyon römorkun ebatları cm cinsinden yazılıp en büyük ortak böleni bulunursa

$7{,}8 \text{ m} = 780 \text{ cm}$

$7{,}2 \text{ m} = 720 \text{ cm}$

$2{,}4 \text{ m} = 240 \text{ cm}$ ve

$3 \text{ m} = 300 \text{ cm}$ olur. Buradan

$$\begin{array}{llll|l} 780 & 720 & 240 & 300 & 2 \\ 390 & 360 & 120 & 150 & 2 \\ 195 & 180 & 60 & 75 & 3 \\ 65 & 60 & 20 & 25 & 5 \\ 13 & 12 & 4 & 5 & \end{array}$$

$\text{EBOB}(780, 720, 240, 300) = 60$ olur.

Buna göre küpün bir ayrıtı 60 cm bulunur.

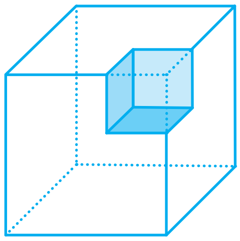
Tenteli kamyon römork ile bir seferde kaç kolinin götürülebileceğini bulmak için tenteli kamyon römork hacmi bir küp hacmine bölünür.

$$\begin{aligned} \text{Buradan bir seferde taşınan koli sayısı} &= \frac{780 \cdot 240 \cdot 300}{60 \cdot 60 \cdot 60} + \frac{720 \cdot 240 \cdot 300}{60 \cdot 60 \cdot 60} \\ &= 13 \cdot 4 \cdot 5 + 12 \cdot 4 \cdot 5 \\ &= 260 + 240 \\ &= 500 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Toptancı firma 2400 koli siparişi tenteli kamyon römork ile $2400 \div 500 = 4{,}8$ olduğundan 5 seferde teslim edebilir.

ALIŞTIRMALAR

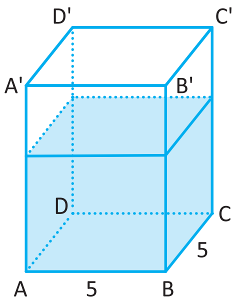
1.



Şekilde alanı sayıca hacmine eşit olan bir küpün bir köşesinden boyalı küp kesilerek alınıyor.

Oluşan cismin hacmi $189\,cm^3$ olduğuna göre kesilerek alınan küpün bir ayrıtının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

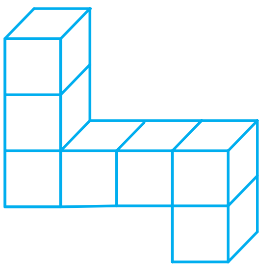
2.



Şekildeki kare dik prizmada karenin bir kenar uzunluğu 5 cm ve yüksekliği 8 cm dir. Bu prizmanın içinde bulunan suyun hacmi $180\,cm^3$ tür.

Prizmanın içine bir kenarı 4 cm olan bir demir küp atılırsa prizmadan kaç cm^3 su taşacağını bulunuz.

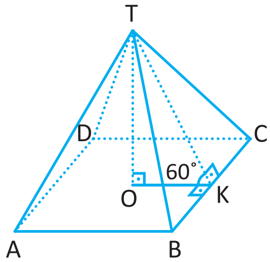
3.



Şekildeki eş 7 küpten oluşan cismin hacmi $21\sqrt{3}\ cm^3$ tür.

Buna göre prizmanın yüzey alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

4.



Şekildeki düzgün kare piramitte karenin bir kenar uzunluğu 8 cm

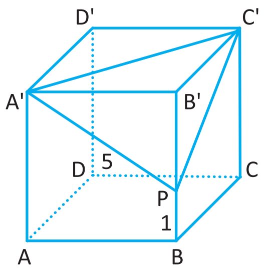
$[TO] \perp [OK]$

$[TK] \perp [BC]$

$[OK] \perp [BC]$ dir.

Yan yüzler taban düzlemi ile 60° lik açı yaptığına göre piramidin yanal alanını (cm^2) ve hacmini (cm^3) cinsinden bulunuz.

5.



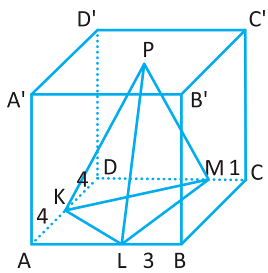
Şekildeki küpte

$|BP| = 1\,cm$

$|A'P| = 5\,cm$ dir.

Buna göre (B', A'PC') piramidinin hacmini cm^3 cinsinden bulunuz.

6.



Şekildeki küpte

P ∈ A'B'C'D' olmak üzere

(P, KLM) üçgen dik piramittir.

$|DK| = |AK| = 4\,cm$

$|MC| = 1\,cm$

$|LB| = 3\,cm$ dir.

$K \in [AD], L \in [AB]$

$M \in [DC]$ dir.

Buna göre (P, KLM) üçgen dik piramidinin hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A) Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerleri doğru şekilde doldurunuz.

1. Taban ayrıtının uzunluğu 8 cm ve yüksekliği $5\sqrt{3}$ cm olan eşkenar üçgen dik prizmanın yüzey alanı .... olur.

2. Yüksekliği $4\sqrt{3}$ cm olan düzgün dörtyüzlünün yüzey alanı .... olur.

3. Bir dikdörtgenler prizmasının ayrıtlarının uzunlukları sırasıyla a, b ve c dir. a %40 artırılıp b %25 azaltılıyor. Oluşan yeni cismin hacmindeki değişim oranı .... olur.

B) Aşağıda numaralarla verilen ifadeleri, harf ile verilen ifadelerle doğru şekilde eşleştiriniz.

4.

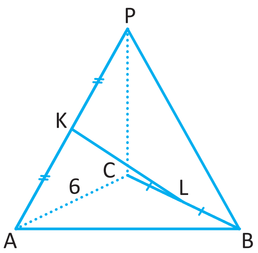
Dörtgen prizmanın köşegen sayısı	1
Altıgen prizmanın ayrıt sayısı	2
Kare piramitin yüz sayısı	3
Düzgün dörtyüzlünün yüz sayısı	4

a	5
b	4
c	9
ç	18
d	16

C) Aşağıdaki soruların cevaplarını boş bırakılan yerlere yazınız.

5. Kenar uzunlukları 12 cm, 14 cm, 18 cm olan dikdörtgenler prizmasının cisim köşegenlerinin kesim noktasının yüzeylere olan uzaklıkları toplamı kaç cm dir?

6.



Şekildeki düzgün dörtyüzlüde

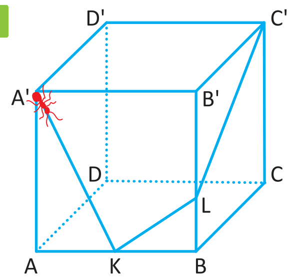
$|PK| = |AK|$

$|CL| = |BL|$

$|AC| = 6$ cm dir.

Buna göre $|KL| = x$ in kaç cm olduğunu bulunuz.

7.



Şekildeki küpte

$K \in [AB]$

$L \in [BB']$

$|BC| = 3\sqrt{2}$ cm dir.

A' noktasında bulunan bir karınca, K ve L noktalarına uğramak koşuluyla C' noktasına varmak istediğinde katedeceği en kısa yolun kaç cm olduğunu bulunuz.

8. Bir ayrıtının uzunluğu 12 cm olan düzgün dörtyüzlünün hacmi kaç cm^3 tür?

Ç) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruları okuyunuz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

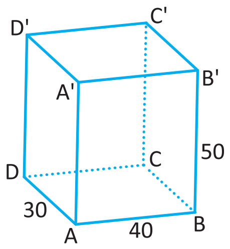
9. Dikdörtgenler prizmasında

$|AB| = 40$ cm

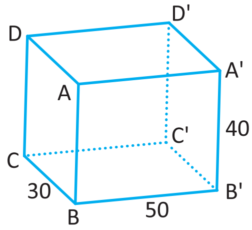
$|BC| = 30$ cm

$|B'B| = 50$ cm dir.

Şekil 1'deki prizma yan yatırıldığında Şekil 2 gibi oluyor.



Şekil 1



Şekil 2

Buna göre ilk durumdaki yanal alanın ikinci durumdaki yanal alana oranı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{35}{32}$

D) $\frac{10}{7}$ E) $\frac{14}{5}$

10. Kare şeklindeki karton kullanılarak üstü açık kare dik prizma yapılıyor.

Kare dik prizmanın taban alanı 25 cm^2, yüksekliği 3 cm olduğuna göre kullanılan kare kartonun alanı en az kaç cm^2 dir?

A) 64 B) 81 C) 100

D) 121 E) 144

11. Yüzey alanı 768 cm^2 olan dikdörtgenler prizmasının ayrıtlarının uzunlukları toplamı 152 cm olduğuna göre cisim köşegeni kaç cm dir?

A) 22 B) 22 C) 24

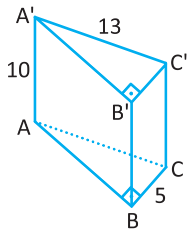
D) 25 E) 26

12. Taban ayrıtının uzunluğu 24 cm ve bir yan yüz yüksekliği 13 cm olan düzgün kare piramidin hacmi kaç cm^3 tür?

A) 720 B) 900 C) 960

D) 1040 E) 1200

13. Şekilde tabanı dik üçgen olan dik prizmada



$[AB] \perp [BC]$

$|BC| = 5$ cm

$|AA'| = 10$ cm

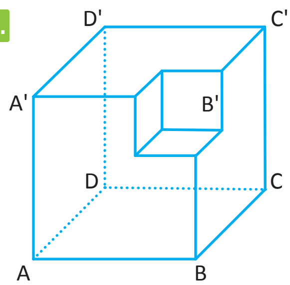
$|A'C'| = 13$ cm dir.

Buna göre cismin hacminin yanal alanına sayıca oranı kaçtır?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$

D) 1 E) $\frac{3}{2}$

14.



Bir kenar uzunluğu 6 cm olan küpten bir kenar uzunluğu 2 cm olan küp şekildeki gibi kesilip çıkarıldığında oluşan şeklin alanındaki değişim nasıl olur?

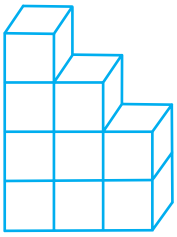
A) 12 cm^2 azalır.

B) 16 cm^2 azalır.

C) 12 cm^2 artar.

D) 16 cm^2 artar.

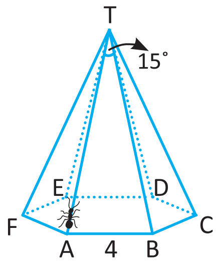
E) Değişmez.

15. 

Kenar uzunlukları 1 birim olan ve 9 küple oluşturulan kürsünün tabanı hariç tüm yüzeyi duvar kâğıdı ile kaplanacaktır.

Bu kaplama için kaç birimkare duvar kâğıdı gereklidir?

A) 25 B) 26 C) 27 D) 28 E) 29

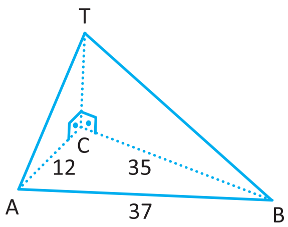
16. 

Şekildeki düzgün altıgen piramitte $m(\widehat{ATB}) = 15^\circ$ $|TA| = 6\sqrt{2}$ cm dir.

A dan yola çıkan karınca, piramidin yan yüzeyini kullanarak tekrar A noktasına geliyor. Karıncanın alacağı yol en kısa kaç cm dir?

A) $4\sqrt{2}$ B) $5\sqrt{2}$ C) $6\sqrt{3}$ D) $12\sqrt{3}$ E) 12

17. Şekilde tabanı ABC üçgeni olan piramitte



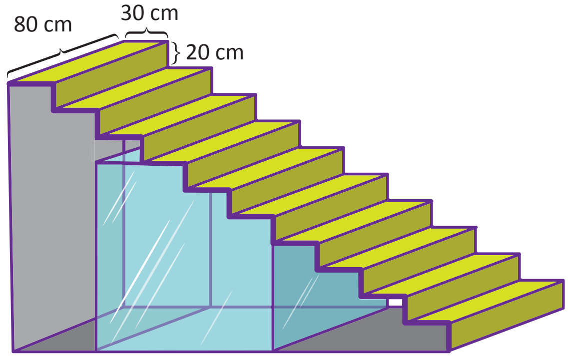
$[TC] \perp [AC]$
$[TC] \perp [BC]$
$|AC| = 12$ cm
$|BC| = 35$ cm
$|AB| = 37$ cm
$|TC| = 6$ cm dir.

Buna göre piramidin hacmi kaç cm^3 tür?

A) 410 B) 420 C) 430 D) 440 E) 450

D) 18-20. soruları aşağıda verilen ortak şekle ve metne göre cevaplandırınız.

Mustafa Bey, evinin merdiven boşluğuna şekildeki gibi akvaryum yerleştirmeyi düşünmektedir. 10 basamaklı merdivenin basamaklarının eni 30 cm, boyu 80 cm ve yüksekliği 20 cm dir.



1 kw elektriğin birim fiyatı yaklaşık 31 kuruştur. x, tüketilen su miktarını (m^3) ve $f(x)$ su ücretini (TL) göstermek üzere

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \le x \le 10 \text{ ise} \\ 6x, & 10 < x \le 20 \text{ ise} \\ 9x, & x > 20 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklindedir. Akvaryum, şekildeki gibi merdivenin 4. basamağı hizasından başlatılacaktır. Buna göre

18. Akvaryumun kaç litre su alacağını bulunuz.

19. Akvaryum suyunun %20 si 15 günde bir yenilendiğine göre akvaryumun aylık su tüketimini m^3 cinsinden bulunuz.

20. Akvaryuma filtre, ısıtıcı, hava motoru gibi cihazlar taktırıldığında günlük elektrik tüketimi ortalama 9100 watt olmaktadır.

Su tüketimi de düşünüldüğünde akvaryum için yapılan aylık (30 gün) masrafın kaç TL olduğunu bulunuz (1 kw = 1000 watt).

ÇÖZÜM

SEMBOLLER VE ANLAMLARI

Sembol	Anlamı
$n!$	n faktöriyel
$P(n,r)$	n elemalı kümenin r elemanlı permütasyonlarının sayısı
$C(n,r), \binom{n}{r}$	n elemalı kümenin r elemanlı kombinasyonlarının sayısı
E	Örnek uzay
$P(A)$	A olayının olasılığı
$P(A')$	A olayının tümleyeninin olasılığı
$P(A \cup B)$	A veya B olayının olasılığı
$P(A \cap B)$	A ve B olayının olasılığı
$f : A \rightarrow B$	A dan B ye f fonksiyonu
$y = f(x)$	x in f fonksiyonu altındaki görüntüsü y dir.
$f(A)$	A kümesinin f fonksiyonu altındaki görüntü kümesi
$f+g$	f ve g fonksiyonlarının toplamı
$f-g$	f ve g fonksiyonlarının farkı
$f \cdot g$	f ve g fonksiyonlarının çarpımı
$\frac{f}{g}$	f ve g fonksiyonlarının bölümü
I	Birim fonksiyon
o	Bileşke işlemi
$f \circ g$	f ve g fonksiyonlarının bileşkesi
f^{-1}	f fonksiyonunun tersi
$P(x)$	x değişkenli P polinomu
$P(x, y)$	x ve y değişkenli P polinomu
Δ	Delta
i	Sanal birim
$a + ib$	Reel kısmı a, sanal kısmı b olan karmaşık sayı
z	z karmaşık sayısı
$\bar{z}$	z karmaşık sayısının eşleniği
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
Ç(ABCD)	ABCD dörtgeninin çevresi
A(ABCD)	ABCD dörtgeninin alanı

ALIŞTIRMA ÇÖZÜMLERİ

10.1. SAYMA OLASILIK

ALIŞTIRMALAR-1

Soru No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Cevap	9	20	1470, 750, 390, 870, 370	132	86	20	2	130	8	3	765	120	8k	50

ALIŞTIRMALAR-2

Soru No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Cevap	a) 720, b) 240	72	$5^{15}, 5 \cdot 2^{28}, 20 \cdot 3^{13}$	72	5	336	96	96	$4! \cdot 5!$	a) 300 b) 140	1260	375

ALIŞTIRMALAR-3

Soru No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Cevap	5	10	35	286	30	231	15	36	121	69	150	15 686	14	38

ALIŞTIRMALAR-4

Soru No.	1	2	3	4	5
Cevap	$= 27x^3 - 108x^2y + 144xy^2 - 64y^3$	Sabit terim $= -128$ Katsayılar toplamı $= 128$	216	$A = -720$	125
Soru No.	6	7	8		
Cevap	-	45	$\binom{n+1}{2}$		

ALIŞTIRMALAR-5

Soru No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cevap	$\frac{31}{32}$	$\frac{1}{210}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{9}$

10.2. FONKSİYONLAR

ALIŞTIRMALAR-1

Soru No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cevap	a) Fonksiyon değildir. b) Fonksiyondur. c) Fonksiyondur. ç) Fonksiyondur. b) Fonksiyon değildir.	a) Fonksiyondur. b) Fonksiyon değildir. c) Fonksiyon değildir. ç) Fonksiyon değildir. b) Fonksiyon değildir.	$\left[-\frac{9}{2}, \frac{7}{4}\right)$	4	0	17	5	-26	$\frac{4}{7}$
Soru No.	10	11	12	13	14	15			
Cevap	$-\frac{63}{2}$	-8	8	$-\frac{9}{2}$	1	1			
Soru No.	16	17							
Cevap	$f(x) = \begin{cases} 8, & 0 < x \leq 2 \\ 3x+2, & x > 2 \end{cases}$	$f(x) = \frac{3}{2}x + 1800$							

10.2. FONKSİYONLAR

ALIŞTIRMALAR-2

Soru No.	1	2	3	4	5	6	7	8
Cevap	11	-6	-5	9	$\frac{13}{4}$	$f^{-1}(x)=\sqrt{x+3}+2$	$-\frac{5}{6}$	-13

10.3. POLİNOMLAR

ALIŞTIRMALAR-1

Soru No. 1 — Cevap

Fonksiyon	Polinom mu? (E/H)	Polinom ise: Derecesi	Baş Katsayısı	Sabit Terimi	Katsayılar Toplamı
$g(x)=x^2-\sqrt{x}+1$	H	-	-	-	-
$h(x)=5x^2+3x$	E	2	5	0	8
$p(x)=-4$	E	0	-4	-4	-4
$q(x)=\frac{-2x+3}{x-1}$	H	-	-	-	-
$r(x)=\sqrt{2}x-\sqrt{3}$	E	1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{2}-\sqrt{3}$

Soru No.	2	3	4	5	6	7	8
Cevap	9	$\frac{1}{36}$	28	3	10	1	5

Soru No.	9	10	11	12	13	14
Cevap	0	$-\frac{7}{2}$	21	20	9	5

ALIŞTIRMALAR-2

Soru No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cevap	$\sqrt{3}$	1805	72	12	a) $(3^x-2)(3^x+1)$ b) $(6x+11)(2x-1)$	127	13	$\pm\sqrt{29}$	$\frac{8}{3}$	12

Soru No.	11	12	13	14	15	16
Cevap	$\frac{-8}{9}$	0	140	$(x^2+2y^2-2xy)\cdot(x^2+2y^2+2xy)$	-7	$(y^2+2+y)\cdot(y^2+2-y)$

Soru No.	17	18	19
Cevap	$(3x+2y-3)\cdot(x-2y-3)$	9	$\frac{x\cdot(x+3)}{x-3}$

10.4. İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER

ALIŞTIRMALAR-1						
Soru No.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Cevaplar	$0, -4$	$\{2\sqrt{2}-2, -2\sqrt{2}-2, 2, -2\}$	7	3	$\left\{-1, \frac{9}{2}\right\}$	$\left\{1, \frac{6}{5}\right\}$
Soru No.	**7**	**8**	**9**	**10**		
Cevaplar	$\left\{-\frac{2}{a+2b}, -\frac{2}{a-2b}\right\}$	$a > \frac{7}{2} \vee a < -\frac{5}{2}$	$-19 \leq a \leq 17$	$a \in (1, \infty)$		
Soru No.	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	
Cevaplar	$-\frac{9}{7}$	-2	5	-18	43	

ALIŞTIRMALAR-2					
Soru No.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Cevaplar	$-16-4i$	$-8-24i$	$-i$	14	$1+\frac{5}{2}i$
Soru No.	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Cevaplar	$\frac{-6+17i}{13}$	$\frac{3}{13}$	$x^2+x-3=0$	$\{-2+3i, -2-3i\}$	$\mp\frac{2i}{5}$
Soru No.	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Cevaplar	-143	$\frac{40}{3}$	-	$8x^2-26x+15=0$	$x^2+6x+10=0$
Soru No.	**16**				
Cevaplar	$x^2-14x+7=0$				

10.5. GEOMETRİ

ALIŞTIRMALAR-1						
Soru No.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Cevaplar	30°	$\frac{15+5\sqrt{5}}{2}$ cm	$7\ cm^2$	9	$\sqrt{67}$ cm	3 cm

ALIŞTIRMALAR-2						
Soru No.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Cevaplar	8 cm	3 cm	12 cm	6 cm	10 cm	12 cm
Soru No.	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Cevaplar	12 cm	$\frac{1}{2}$	$168\ cm^2$	$80\ cm^2$	$\frac{49}{4}\ cm^2$	$50\ cm^2$

ALIŞTIRMALAR-3						
Soru No.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Cevaplar	15°	32°	12 cm	7 cm	8 cm	38 cm
Soru No.	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Cevaplar	$\frac{1}{4}$	$70\ cm^2$	$72\ cm^2$	$100\ cm^2$	$64\ cm^2$	$48\ cm^2$

10.5. GEOMETRİ

ALIŞTIRMALAR-4						
Soru No.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Cevaplar	76°	$\frac{21}{4}$ cm	$14\sqrt{10}$ cm	$54\ cm^2$	$9\ cm^2$	$330\ cm^2$

ALIŞTIRMALAR-5						
Soru No.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Cevaplar	12°	24 cm	8 cm	$50\sqrt{3}\ cm^2$	$24\ cm^2$	14

ALIŞTIRMALAR-6						
Soru No.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Cevaplar	18°	3 cm	$\frac{8\sqrt{10}}{5}$ cm	384 cm	$72\ cm^2$	$20\ cm^2$

ALIŞTIRMALAR-7						
Soru No.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Cevaplar	60°	28 cm	17 cm	$\frac{1}{3}$	20 cm	$40\ cm^2$

10.6. UZAY GEOMETRİ

ALIŞTIRMALAR						
Soru No.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Cevaplar	3 cm	$44\ cm^3$	$90\ cm^2$	Alan $128\ cm^2$ Hacim $\frac{256\sqrt{3}}{3}\ cm^3$	$8\ cm^3$	$64\ cm^3$

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME CEVAP ANAHTARI

10.1. SAYMA VE OLASILIK

Soru No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Cevap	11	132	kesin olay	$\frac{1}{2}$	9	1-c, 2-ç, 3-a, 4-b	6	96	36	13	C	D

Soru No.	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
Cevap	E	C	D	B	B	B	B	B	C	C	E	D	E	D	C

Soru No.	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
Cevap	D	A	C	C	B	D	28	3	$\frac{1}{2}$ -	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$P(75,8)\cdot 2$

10.2. FONKSİYONLAR

Soru No.	1	2	3	4	5	6
Cevap	birim fonksiyon	bire bir ve örten	düşey doğru testi	169	-2	1-c, 2-d, 3-a,4-b

Soru No.	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Cevap	8	-2		$-\frac{1}{2}$	B	C	E	D	A	A	B	D	A

Soru No.	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Cevap	D	C	D	A	A	A	B	E	A	$f(x)=y=4x+20$	260	$\frac{65}{2}$	$f(t)=70t$

Soru No.	33	34	35	36	37
Cevap	438 dakika	1900 TL		$f(x)=\frac{46}{15}x$	58 696 ton

10.3. POLİNOMLAR

Soru No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cevap	baş katsayısı	0	$P(1)+P(0)$	11	1-a, 2-d, 3-ç, 4-c	13	30	20	1	42

Soru No.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Cevap	4	15	$(2\cdot 5^x-1)\cdot(5^x+7)$	D	E	B	A	B	C	D	E	B

Soru No.	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Cevap	D	B	E	A	E	E	E	C	B	C

Soru No.	33
Cevap	$P(x)=(15x^3+20x^2+30x+25).(30x^2+20x+10)$

Soru No.	34
Cevap	$Q(x)=P(x)-(3x+1)\cdot(x+2)-(9x^2+11x+10)\cdot(8x^2+7x+5)-(7x+3)\cdot(6x^3-4x^2-6x+7)$

Soru No.	35	36	37
Cevap	162	$x=-35, x=35, x=-15, x=15$	En uzun 30 m, en kısa 20 m

10.4. İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER

Soru No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cevap	b^2-4ac	$\frac{-b}{2a}$	$\frac{-b\cdot c}{a^2}$	$p+\sqrt{q}$	1-c, 2-b, 3-ç, 4-d	0	-9	-3	45

Soru No.	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Cevap	$a\in\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$	2	$-10-6\sqrt{3}$	D	E	D	C	A	E	C

Soru No.	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Cevap	B	D	C	E	E	C	A	E	A	B	B

Soru No.	31	32	33	34	35	36	37	38
Cevap	E	E	A	30 m	$23<x<24$ m	2,53 m	Jüpiter	Dünya 877,5 m, Jüpiter 711,25 m

10.5. GEOMETRİ

Soru No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cevap	77	$\frac{27}{2}$	paralelkenar /yarısıdır	1-d, 2-ç, 3-b, 4-a, 5-c	20	$72\sqrt{2}$	$8\sqrt{3}$	8	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Soru No.	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Cevap	35	$4\sqrt{2}$	B	E	B	A	D	D	C	B	D	E	E

Soru No.	23	24	25	26	27	28	29	30
Cevap	A	D	B	B	E	160	$\frac{6-2\sqrt{3}}{3}$	33,6 metre

10.6. UZAY GEOMETRİ

Soru No.	1	2	3	4	5	6	7	8
Cevap	$152\sqrt{3}$ cm^2	$64\sqrt{3}$ cm^2	$\frac{21}{20}$	1-d, 2-ç, 3-a, 4-b	44 cm	$3\sqrt{2}$ cm	12 cm	$144\sqrt{2}$ cm^3

Soru No.	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Cevap	C	C	E	C	D	E	E	E	B	1200 L	$1,68\,m^3$	91,35 TL

A

alan	: Bir bölgenin düzlemde kapladığı yer veya bir yüzey parçasına karşılık gelen pozitif sayı.
ana doğru	: Çokgenin kenar noktalarını birleştiren doğruların paralel olduğu doğru.
asal polinom	: Baş katsayısı 1 olan indirgenemeyen polinomdur.
ayrık olaylar	: Kesişimi olmayan olaylar.
ayrık olmayan olay	: Kesişimi olan olaylar.
ayrıt	: İki yüzeyin kesişme noktalarının oluşturduğu doğru parçası.

B

bileşke fonksiyon	: $f:A\to B$ ve $g:B\to C$ birer fonksiyon olmak üzere A dan C ye $(gof)(x)=g(f(x))$ kuralı ile bulunan fonksiyon.
binom açılımı	: İki sayı veya harfli ifadenin toplamının üslü ifadesinin açılımı.
bir olayın tümleyeni	: Örnek uzayın bir olayı dışındaki tüm elemanları.
bire bir fonksiyon	: Tanım kümesinin her bir elemanını değer kümesinin farklı bir elemanı ile eşleyen fonksiyon.
birim fonksiyon	: Her değeri kendisine eşleyen fonksiyon.

C-Ç

cisim köşegeni	: Bir pirizmada aynı düzlemde bulunmayan iki köşeyi birleştiren doğru parçası.
cisim yüksekliği	: Bir piramitte, tepe noktasını tabanın ağırlık merkezine birleştiren doğru parçası.
çarpan	: $P(x), Q(x), R(x)$ polinomları için $P(x)=Q(x)\cdot R(x)$ eşitliğini sağlayan $Q(x)$ ve $R(x)$ polinomları.
çarpma yöntemi	: Farklı biçimde birbirine bağlı gerçekleşen işlemlerin birlikte gerçekleşme sayısını bulma yöntemi.
çevre	: Kapalı bir şeklin kenar uzunlukları toplamı veya kapalı bir eğrinin uzunluğu.
çıktı	: Örnek uzayın bir elemanı veya bir deneyin olası sunuçlarından her biri.
çift fonksiyon	: Tanım kümesindeki her x elemanının görüntüsü $-x$ elemanının görüntüsüyle aynı olan fonksiyon.
çokgen	: Bir düzlemde en az üçü doğrusal olmayan en az üç noktanın birbirini kesmeyecek şekilde ikişer ikişer birleştirilmesiyle oluşan kapalı düzlemsel şekil.
çözüm kümesi	: İçinde bilinmeyenin bulunduğu bir önermeyi doğrulayan değerlerin oluşturduğu küme.

D

değer kümesi	: $f:A\to B$ tanımlanan fonksiyon için B kümesi.
değişken değiştirme	: Matematiğin her alanında işlemi basitleştirmek için kullanılan matematiksel bir yöntem.
deltoid	: Komşu iki çift eşkenarı bulunan fakat karşılıklı kenarları eş olmayan dörtgen.
deney	: Kontrollü olaylar dizisinden belli olmayan sonuçlara ulaşma süreci.
denklemin kökü	: Denklemi sağlayan sayı.
dışbükey (konveks) çokgen	: Açılarının ölçüleri 180° den küçük olan çokgen.
dışbükey (konveks) dörtgen	: Açılarının ölçüleri 180° den küçük olan dörtgen.
dik piramit	: Cisim yüksekliği taban düzleminin ağırlık merkezinden geçen piramit.
dik prizma	: Ana doğruları taban düzlemine dik olan prizma.
dik yamuk	: Paralel olmayan kenarlarından biri kenarlara dik olan yamuk.
dikdörtgen	: Açıları eş olan paralelkenar.
dikey (düşey) doğru testi	: Verilen bir grafiğin bir fonksiyona ait olup olmadığını anlamak için y eksenine paralel çizilen doğruların grafiği birden fazla noktada kesip kesmediğine bakmak.

diskriminant : $ax^2+bx+c=0$ şeklindeki ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerde kök bulma veya denklem hakkında yorum yapmaya yarayan, değeri b^2-4ac olan ve Δ ile gösterilen sayı.

doğrusal fonksiyon : $a\neq 0$ ve $a,b\in\mathbb{R}$ olmak üzere $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $y=f(x)=ax+b$ şeklinde tanımlanan fonksiyon.

dönel permütasyon : Bir daire etrafındaki sıralama, diziliş.

düzgün çokgen : Kenar uzunlukları ve açıları eş olan çokgen.

E-F

eşit fonksiyonlar : Tanım kümesinin her elemanı için aynı değeri alan fonksiyonlar.

eşkenar dörtgen : Dört kenarı eş olan paralelkenar.

eşlenik : Bir karmaşık sayının sanal parçasının işaretini değiştirmekle elde edilen sayı.

faktöriyel : $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere 1 den n e kadar olan doğal sayıların çarpımı.

fonksiyon : A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere A nın her elemanını B nin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen bağıntı.

fonksiyonun grafiği : Bir f fonksiyonunun elemanları olan sıralı ikililerin analitik düzlemde gösterilmesi ile elde edilen noktalar kümesi.

fonksiyonun tersi : Birebir ve örten bir f fonksiyonunda, değer kümesinin elemanlarını tanım kümesinin bir ve yalnız bir elemanı ile eşleyen fonksiyon.

G-H

görüntü kümesi : Bir fonksiyonun görüntülerinden oluşan küme.

hacim : Bir cismin uzayda kapladığı yer.

İ

içbükey (konkav) çokgen : En az bir açısının ölçüsü 180° den büyük olan çokgen.

içbükey (konkav) dörtgen : En az bir açısının ölçüsü 180° den büyük olan dörtgen.

içine fonksiyon : Görüntü kümesi, değer kümesinin alt kümesi olan fonksiyon. Görüntü kümesi, değer kümesine eşit olmayan fonksiyon.

ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem : $a\neq 0$, $a,b,c\in\mathbb{R}$ ve x bilinmeyen olmak üzere $ax^2+bx+c=0$ şeklinde yazılan denklem.

ikizkenar yamuk : Paralel olmayan iki kenarı eş olan yamuk.

imkânsız olay : Olma olasılığı olmayan olay.

K-L

kare : Açıları dik açı olan eşkenar dörtgen.

karmaşık sayı : a ve b gerçek sayılar olam üzere $a+ib$ biçiminde bir gerçek, bir de sanal iki terimle tanımalan sayı

kesin olay : Olma olasılığı kesin olan olay.

kombinasyon : Seçme, gruplama.

kökler çarpımı : $ax^2+bx+c=0$ ikinci derece denkleminde $\frac{c}{a}$ değeri.

kökler toplamı : $ax^2+bx+c=0$ ikinci derece denkleminde $-\frac{b}{a}$ değeri.

köşe : Bir çokgenin ardışık iki kenarının veya bir prizmanın ayrıtlarının kesişme noktası.

köşegen : Bir çokgenin ardışık olmayan iki köşesini birleştiren doğru parçası.

O-Ö

olasılık : İhtimal.

olay : Bir örnek uzayın her alt kümesi.

özdeşlik : Her değer için sağlanan eşitlik.

örnek uzay : Bir deneyin olası tüm sonuçlarının kümesi.

örten fonksiyon : Değer kümesinde açıkta eleman bırakmayan fonksiyon.

P-R

paralelkenar : Karşılıklı kenarları paralel olan dörtgen.

Pascal üçgeni : Matematikte binom katsayıları ile oluşturulan üçgensel bir dizi.

permütasyon : Sıralama, diziliş.

piramit : Bir noktadan geçen ve bir noktaya dayanarak hareket eden bir doğrunun oluşturduğu yüzey.

prizma : Bir doğrunun bir çokgene dayanarak çokgene paralel hareket etmesiyle oluşan yüzey.

polinom : Çok terimli.

polinomun baş katsayısı : Polinomun derecesini veren terimin gerçek sayı çarpanı.

polinomun derecesi : Polinomun bilinmeyeninin en büyük doğal sayı kuvveti.

polinom için bölme algoritması : Bir polinomu, eşit ya da daha düşük dereceli bir başka polinoma bölerek kalanı bulma işlemi.

polinomun katsayıları : Polinomun her bir terimindeki gerçek sayı çarpanı.

polinomun sabit terimi : Bir polinomda değişken bulundurmayan terim.

polinomun sıfırları : Bir polinomu sağlayan sayılar.

rasyonel ifade : Kesirli ifade.

S-T

sabit fonksiyon : Tanım kümesinin her elemanını değer kümesinin yalnız bir elemanına eşleyen fonksiyon.

sabit polinom : Tüm değerleri sabit bir gerçek sayıya eşit olan polinom.

sıfır polinom : Bütün terimleri sıfır olan polinom.

taban alanı : Bir cismin üzerine oturduğu düzlemsel şeklin pozitif sayısal değeri.

tanım kümesi : Bir fonksiyonun tanımlı olduğu küme.

tek fonksiyon : Grafiği orijine göre simetrik olan fonksiyon.

tekrarlı permütasyon : Bazıları birbirinden farklı olmayan nesnelerin farklı dizilişleri.

ters görüntü : Görüntü kümesindeki bir elemanın tanım kümesinde eşleştiği eleman.

tepe noktası : Bir parabolün en alt ya da en üst noktası.

toplama yöntemi : Sonlu ve ayrık kümelerin eleman sayısını bulmak için kullanılan sayma yöntemi.

V-Y

yamuk : En az iki kenarı paralel olan konveks dörtgen.

yan yüz yüksekliği : Bir cismin yanal yüzüne ait yükseklik.

yanal alan : Bir cismin alt ve üst tabanları dışında kalan yan yüzlerinin alanı.

yatay doğru testi : Bir f fonksiyonunun birebir olup olmadığını anlamak için x eksenine paralel çizilen doğruların fonksiyon grafiğini kaç noktada kestiğini öğrenmek için yapılan test.

yüz : Bir cismin düzlemsel yüzeylerinden her biri.

yüzey alanı : Bir cismin bütün yüzey alanlarının toplamı.

yüzey köşegeni : Komşu olmayan iki köşeyi birleştiren doğru parçası.

KAYNAKÇA

[1] H. H. HACISALİHOĞLU, M. BALCI, F. GÖKDAL, Temel ve Genel Matematik Cilt -1, Ankara: Baskı ÖZYEŞİM Web Ofset Tesisleri,1988.

[2] C. TAYFUR, E. ZENCİROĞLU, Matematik I, Olasılık ve İstatistik, Eskişehir: Bizim Büro Basımevi, 1986.

[3] D. ÇOKER, H. IRMAK, Genel Matematik, Eskişehir: T.C. Anadolu Üniversitesi Eğitim, Sağlık ve Bilimsel Araştırma Çalışmaları Vakfı Yayınları, 1994.

[4] N. ERSOY, E. AĞLI, İhtimaller Hesabı I, Ankara: Gazi Üniversitesi Basın-Yayın Yüksekokulu Matbaası, 1986.

[5] A. SHAHBAZOV, Olasılık Teorisine Giriş, Birsen Yayınevi, 2005.

[6] A. DERNEK, Genel Matematik, Ankara: Nobel Yayın Dağıtım, 2009.

[7] A. DÖNMEZ, Matematiğin Öyküsü ve Serüveni (Cilt VII), İstanbul: Toplumsal Dönüşüm Yayınları, 2005.

[8] N. CENGİZ, Ö. TARAKÇI, M. AKTAŞ, M. TOSUN, M. KADAKAL, S. ŞENGÜL, A. KAPLAN, E. KIR, Genel Matematik 1, Ankara: Pegem Yayıncılık, 2007.

[9] H. İ. KARAKAŞ, Cebir Dersleri, Ankara: Seçkin Yayıncılık, 2008.

[10] M. BALCI, Genel Matematik Analiz, Ankara: Balcı Yayınları, 1999.

[11] R. A. BARNETT, M.R. ZİEGLER, K. E. BYLEEN, College Algebra with Trigonomety, Mc Graw-hillHigher Education, 2001.

[12] Türk Dil Kurumu, Matematik Terimleri Sözlüğü, Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları, 2000.

[13] Türk Dil Kurumu, Türkçe Sözlük, Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları, 2012.

[14] Türk Dil Kurumu, Yazım Kılavuzu, Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları, 2012.

[15] T.C. Millî Eğitim Bakanlığı, Ortaöğretim Fen Lisesi Matematik Dersi (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı, Ankara: MEB Yayınları, 2018.

Görsel Kaynakça

Ağ adreslerinden alınan görseller

Sayfa 323/http: //medya.dpu.edu.tr/files/2017/11/08/5a02cd46769f1/20d394614ed7ad5b18a389c5cd9bc6ea_.jpeg
Erişim Tarihi: 14.11.2017, Erişim Saati: 19.03

Telif hakkı ödenerek alınan görseller (Dreamstime)

Sayfa 11/ID No: 63703680, Sayfa 12/ID No: 73533445 ve 31504405 (Yeniden düzenlenmiştir.),
Sayfa 13/ID No: 61732894,
Sayfa 28/ID No: 28658924 (Yeniden düzenlenmiştir),
Sayfa 31/ID No: 43148802, Sayfa 35/ID No: 11382014 Sayfa 36/ID No: 66095656,
Sayfa 39/ID No: 41931747, (Yeniden düzenlenmiştir), Sayfa 48/ID No: 76553546,
Sayfa 57/ID No: 13534668, Sayfa 68/ID No: 26906423 (Yeniden düzenlenmiştir.),
Sayfa 69/ID No: 56900630 (Yeniden düzenlenmiştir), Sayfa 70/ID No: 92988611,
Sayfa 71/ID No: 78379031 (Yeniden düzenlenmiştir), Sayfa 87/ID No: 55745822, Sayfa 99/ID No: 71974896,
Sayfa 99/ID No: 9111377 (Yeniden düzenlenmiştir), Sayfa 104/ID No: 67014161 (Yeniden düzenlenmiştir.),
Sayfa 104/ID No: 20429883, Sayfa 104/ID No: 41849173 (Yeniden düzenlenmiştir.),
Sayfa 131/ID No: 26475302, Sayfa 132/ID No: 79498000 (Yeniden düzenlenmiştir.),
Sayfa 142/ID No: 51189382, Sayfa 144/ID No: 1069881, (Yeniden düzenlenmiştir.),
Sayfa 179/ID No: 50660580 (Yeniden düzenlenmiştir.), Sayfa 180/ID No: 29707681,
Sayfa 181/ID No: 62741790, Sayfa 196/ID No: 72132055, Sayfa 199/ID No: 40197567, Sayfa 209/ID No: 41815005,
Sayfa 215/ID No: 79531400, Sayfa 224/ID No: 75412091, 45874976, Sayfa 225/ID No: 46241733,
Sayfa 226/ID No: 44465017, Sayfa 293/ID No: 95266791, 8249067, Sayfa 324/ID No:. 34011091,
Sayfa 347/ID No: 3000661

Telif hakkı ödenerek alınan görseller (Shutterstock)

Sayfa 124/ID No: 159654128, Sayfa 171/ID No: 496282585, Sayfa 194/ID No: 534362965,
Sayfa 251/ID No: 734490811, Sayfa 352/ID No: 261051461.
Kitap genelindeki diğer grafik, şekil ve çizimler görsel ve grafik tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.