ORTAÖĞRETİM

FEN LİSESİ

MATEMATİK 11

DERS KİTABI

YAZARLAR

Beytullah ÖZ
Büşra KOŞANSER
Emin EMİR
Hasan ATA
Hüseyin Fatih PARLAR
Metin YAYMACI

DEVLET KİTAPLARI
İKİNCİ BASKI
........................., 2019

MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI YAYINLARI ....: 6672
DERS KİTAPLARI DİZİSİ ....: 1747

HAZIRLAYANLAR

Editör
Prof. Dr. Erdal ULUALAN

Dil Uzmanı
Gülçin GÜRPINAR

Program Geliştirme Uzmanı
Raşit ATEŞ

Ölçme ve Değerlendirme Uzmanı
Fikret DOLAŞIK

Rehberlik ve Gelişim Uzmanı
Mevlüt DURAN

Görsel ve Grafik Tasarım Uzmanı
Hacı Mehmet ÖZTÜRKOĞLU

ISBN 978-975-11-4553-6

Millî Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulunun 28.05.2018 gün ve 78 sayılı kararı ile ders kitabı olarak kabul edilmiş, Destek Hizmetleri Genel Müdürlüğünün 28.05.2019 gün ve 10443977 sayılı yazısı ile ikinci defa 67.163 adet basılmıştır.

İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl.
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl.

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,
Medeniyyet dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş, yurduma alçakları uğratma sakın;
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın;
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın.

Bastığın yerleri toprak diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki feda?
Şüheda fışkıracak toprağı sıksan, şüheda!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüda.

Ruhumun senden İlâhî, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar -ki şehadetleri dinin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,
Her cerîhamdan İlâhî, boşanıp kanlı yaşım,
Fışkırır ruh-ı mücerret gibi yerden na'şım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalan sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl;
Hakkıdır hür yaşamış bayrağımın hürriyyet;
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif Ersoy

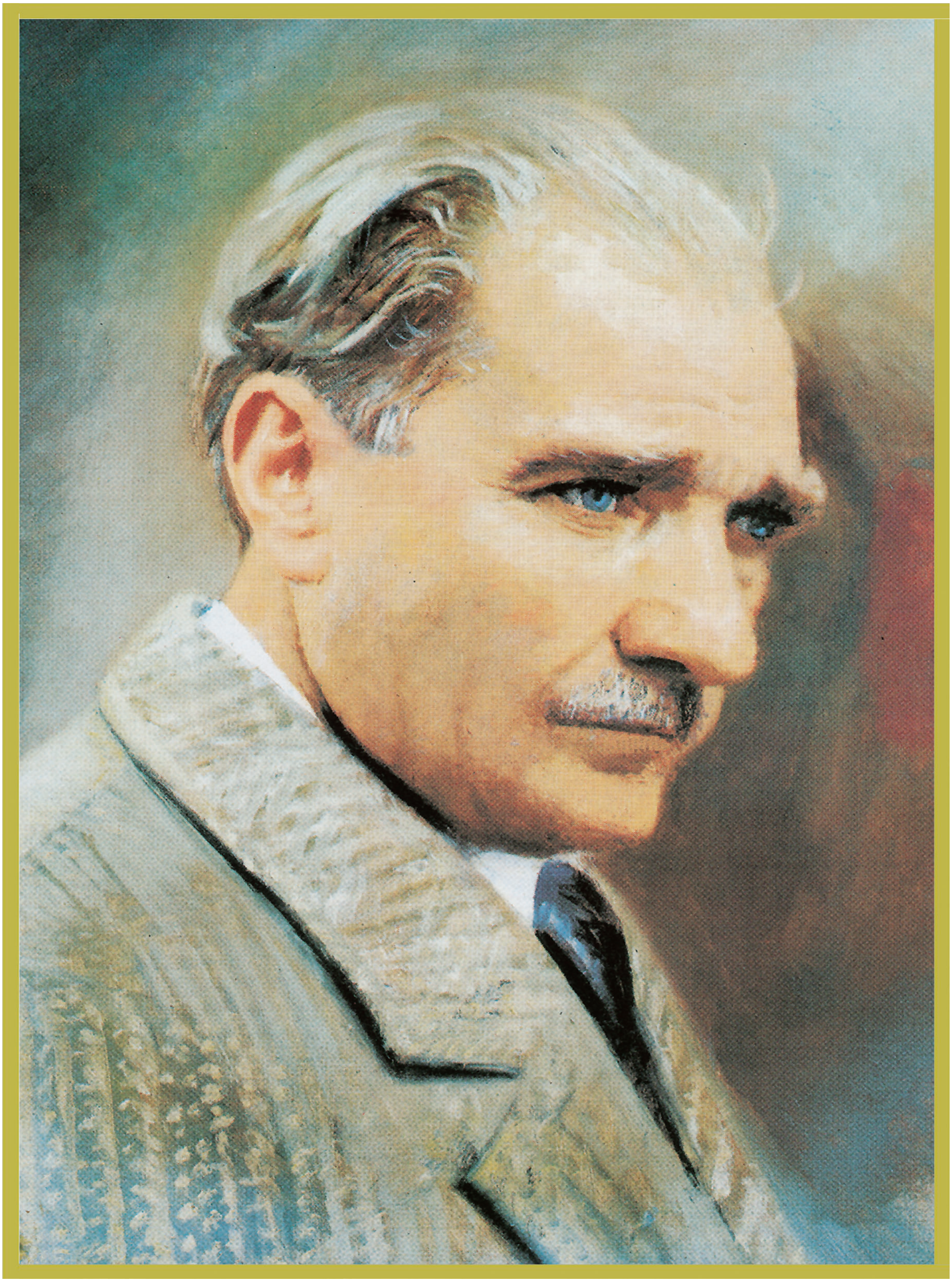
GENÇLİĞE HİTABE

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk Cumhuriyetini, ilelebet muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni bu hazineden mahrum etmek isteyecek dâhilî ve hâricî bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok namüsait bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dâhilinde iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlîlerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi vazifen, Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır. Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asil kanda mevcuttur.

Mustafa Kemal Atatürk

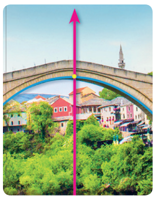


MUSTAFA KEMAL ATATÜRK

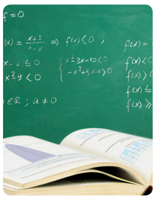
İÇİNDEKİLER

1

2



3



4

11.4. DENKLEM VE EŞİTSİZLİK SİSTEMLERİ

5

11.5. ÇEMBER VE DAİRE

6

11.6. UZAY GEOMETRİ

7

11.7. OLASILIK

KİTABIN TANITIMI

Öğrenme alanı

Alt öğrenme alanı

Karekod uygulamasıyla alt öğrenme alanlarına interaktif olarak ulaşabilirsiniz.

SAYILAR VE CEBİR

11.3. FONKSİYONLARDA UYGULAMALAR

Neler Öğreneceksiniz?

11.3.1. FONKSİYONLARLA İLGİLİ UYGULAMALAR
Fonksiyonun Grafik, Tablo Gösterimi ve Uygulamaları

11.3.2. İKİNCİ DERECEDEN FONKSİYONLAR VE GRAFİKLERİ
İkinci Dereceden Bir Değişkenli Fonksiyonlar

11.3.3. FONKSİYONLARIN DÖNÜŞÜMLERİ
Fonksiyon Grafikleri ve Simetri Dönüşümleri

Fonksiyon Uygulamalarının Kullanım Alanları

- Birbirleriyle ilişkili değişkenler arasındaki modellemelerin (gelir gider dengesi, ekonomik veriler ve ekonominin büyüme oranı vb.) yorumlanmasında kullanılır.
- Kurulan modellemeler sayesinde fiziki olarak ölçülemeyecek ya da hesaplanamayacak değerlerin kolaylıkla hesaplanmasında kullanılır.
- Tüneller, mimari eserler, tarihi köprüler ile teknoloji kullanılarak yapılan asma köprüler gibi pek çok yapıtın yapımında paraboller kullanılır.

112 Fen Lisesi Matematik 11

Hazırlık Çalışmaları

1. Yandaki görselde bulunan dağların göl üzerindeki yansımasının gün içerisinde nasıl değişebileceğini düşününüz.
2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun eğrisinin eksenler boyunca (negatif veya pozitif yönde) kaydırılması halinde aşağıdaki ifadelerin doğruluğunu düşününüz.
   a) Fonksiyonun kuralı değişir.
   b) Fonksiyonun grafiğinin şekli değişmez.
3. $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ ikinci dereceden denklemin çözümünde sıklıkla kullandığınız yöntemlerden iki tanesini yazınız.
   ....
   ....
4. Kökleri $x_1 = 2$ ve $x_2 = -3$ olan ikinci dereceden denklemi yazınız.

Fen Lisesi Matematik 11 113

Alt öğrenme alanı ile ilgili öğrenilecek kazanımların verildiği bölümdür.

Alt öğrenme alanı ile ilgili bazı kullanım alanlarının verildiği bölümdür.

Alt öğrenme alanlarının günlük hayatla ilişkilendirilmiş hazırlık sorularının bulunduğu bölümdür.

İspat

$d_1: ax + by + c_1 = 0$ doğrusu üzerinde bir (x_1, y_1) noktası alındığında bu noktanın $d_2: ax + by + c_2 = 0$ doğrusuna olan uzaklığı, d_1 doğrusunun d_2 doğrusuna olan uzaklığıdır.

(x_1, y_1) noktası d_1 doğrusu üzerinde olduğundan denklemi sağlar. Buradan

$ax_1 + by_1 + c_1 = 0 \Rightarrow ax_1 + by_1 = -c_1$ olur.

(x_1, y_1) noktasının d_2 doğrusuna olan uzaklığı

$$\ell = \frac{|ax_1 + by_1 + c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-c_1 + c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

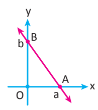
$$= \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ bulunur.}$$

Konu ile ilgili teorem ve ispatlarının verildiği bölümdür.

Sonuç

Şekil 2.1.14'te $A(a, 0)$ ve $B(0, b)$ noktasından geçen doğrunun denklemi

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ olur.



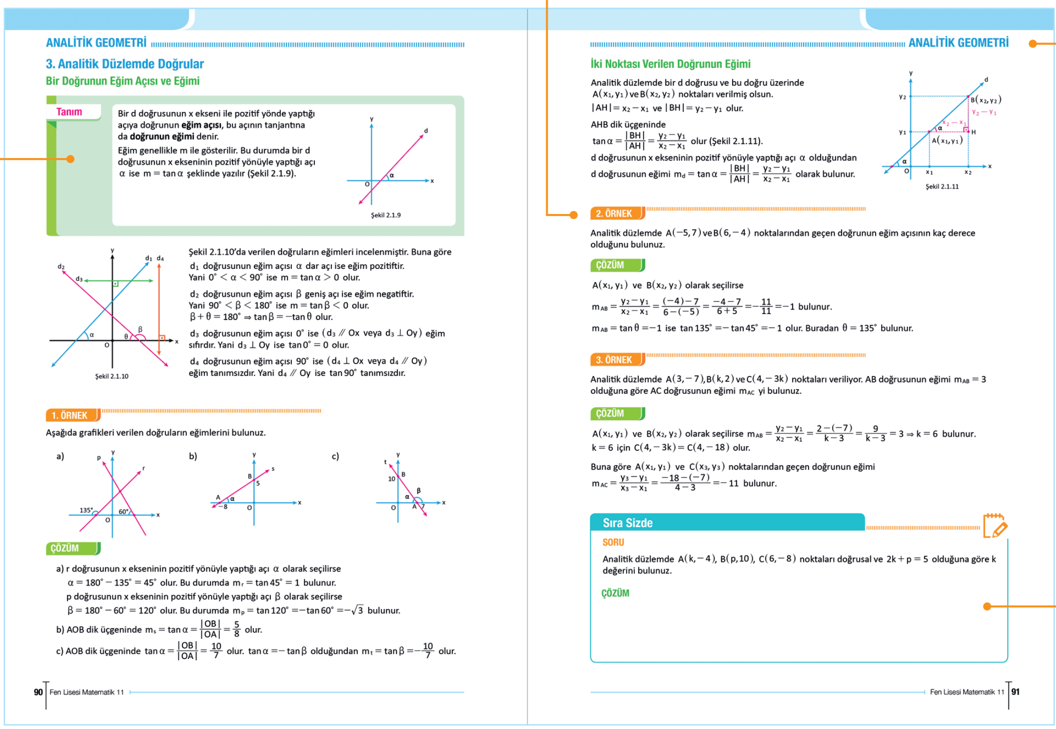
Şekil 2.1.14

Konu ile ilgili varılan sonuçların bulunduğu bölümdür.

Konu ile ilgili tanım ve açıklamaların verildiği bölümdür.

İşlenen konu ile ilgili çözümlü örneklerin bulunduğu bölümdür.

Alt öğrenme alanı



Alt öğrenme alanının pekiştirilmesi amacıyla verilen uygulama sorularının bulunduğu bölümdür.

Özellik

2. Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları birbirine eşittir.

Konu ile ilgili özelliklerin verildiği bölümdür.

Konular ile ilgili pekiştirme sorularının bulunduğu bölümdür.

ALIŞTIRMALAR

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

Alt öğrenme alanının sonunda verilen değerlendirme sorularının bulunduğu bölümdür.

Tarih Köşesi

Archimedes (Arşimet),(Görsel 5.4.1) MÖ 290-280 ile MÖ 212-211 yıllarında Syrakusa'da (Siraküza) yaşamış eski Yunan matematikçisi ve mucitidir.

Arşimet'in bugüne ulaşan ve dokuz eserinden biri olan ''Dairenin Ölçümü''nde bir çemberin içine ve çevresine çizdiği düzgün çokgenler yardımıyla pi (π) sayısının değerinin 3+1/7 ile 3+10/7 arasında olduğunu belirtmiştir.

Bu değerler, ondalık gösterimleriyle yazılırsa π sayısının 3,14285 ile 3,14084 sayıları arasında olduğu görülür. Bu iki değerin ortalaması alınırsa π sayısının yaklaşık değeri 3,14185 değeri çıkar ki Arşimet'in bulduğu bu değer, π sayısının gerçek değerinin ilk dört basamağı ile aynıdır.

Kaynak: Ana Britannica C 2, s. 307


Görsel 5.4.2: Archimedes (Arşimet)

Alt öğrenme alanındaki işlenişe yönelik kısa tarihî bilgilerin bulunduğu bölümdür.

GEOMETRİ

11.1. TRİGONOMETRİ

Neler Öğreneceksiniz?

11.1.1. YÖNLÜ AÇILAR

1. Yönlü Açı
2. Açı Ölçü Birimleri

11.1.2. TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

1. Trigonometrik Fonksiyonlar
2. Kosinüs Teoremi
3. Sinüs Teoremi
4. Trigonometrik Fonksiyonların Periyodu
5. Trigonometrik Fonksiyon Grafiklerini Yorumlama
6. Trigonometrik Fonksiyonların Ters Fonksiyonu

Trigonometrinin Kullanım Alanları

- Köprü, bina ve yol yapımında kısaca inşaat sektörü ve mimaride trigonometriden yararlanılır.
- Astronomide gök cisimleri arasındaki mesafenin ölçümünde, navigasyon ve GPS sistemlerinde, dağların zirve yüksekliklerinin hesaplanmasında trigonometri kullanılır.
- Fizikte optik uygulamaları ve dinamik problemleri trigonometri yardımıyla çözülür.
- Trigonometri denizcilikten mühendisliğe birçok alanda kullanılır.

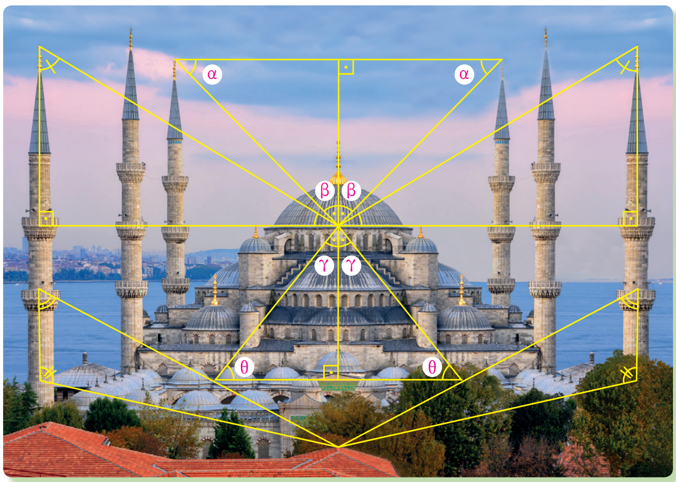
Hazırlık Çalışmaları

1. **Trigonometrinin bölgenizdeki geleneksel mimari eserlerde nasıl kullanıldığını düşününüz ve arkadaşlarınızla görüş alışverişinde bulununuz.**
2. **Dar açıların sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjant oranlarını kenar uzunlukları cinsinden bulunuz.**
3. **30, 45 ve 60 derecelik açıların sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjant değerlerini bulunuz.**
4. **Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız veya açılımını yapınız.**

$(x+y)^2$

$(x-y)^2$

x^2-y^2



11.1.1. YÖNLÜ AÇILAR

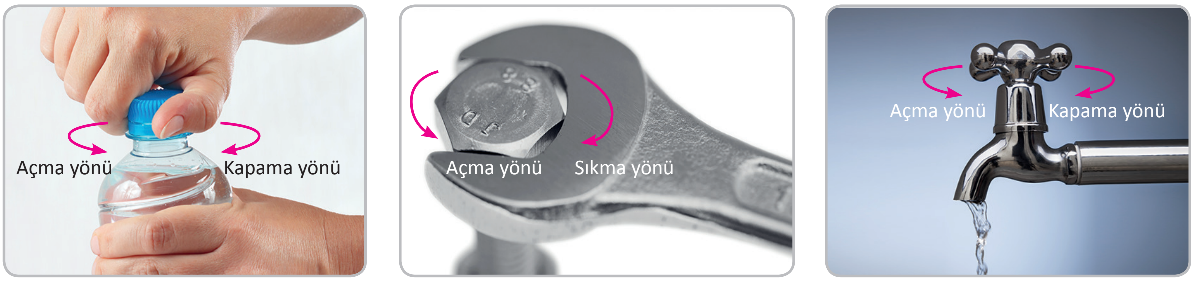
Trigonometri, eski Yunancada trigon (üçgen) ve metrio (ölçü) kelimelerinin birleşiminden oluşmuştur. Konusu, bir üçgenin kenarları ile açıları arasındaki bağıntılardır. İlk zamanlar topoğrafya, denizcilik ve astronomide kullanılan trigonometri; 17. yüzyıldan itibaren günlük hayatın pek çok alanında yaygın olarak kullanılmaya başlanmıştır. Yandaki görselde de görüldüğü gibi trigonometri Türk mimarisinde de kullanılmıştır (Görsel 1.1.1).


Görsel 1.1.1: Geleneksel Türk mimari örneği

1. Yönlü Açı

Evinizde kullandığınız şişe ve kavanoz kapakları, cıvata, vida ile muslukların hangi yöne açılıp kapandığını hatırlayınız (Görsel 1.1.2). Ortak bir yönde açma ve kapama olup olmadığını gözlemleyiniz.

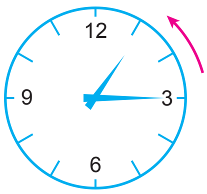
Saatin yelkovanının dönme yönü ile gözlem sonucunuzu ilişkilendirebilir misiniz? Dönme yönleri ile oluşan açının yönü arasındaki ilişkiyi ifade ediniz.



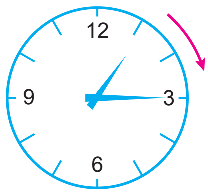
Görsel 1.1.2: Şise kapağı, cıvata ve musluğun açma ve kapama yönleri

Tanım

Saatin yelkovanının dönme yönünün tersi olan yöne **pozitif yön** (Şekil 1.1.1), aynı olan yöne **negatif yön** denir (Şekil 1.1.2).

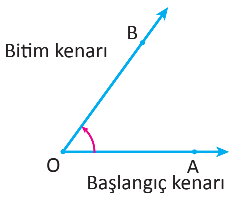


Şekil 1.1.1

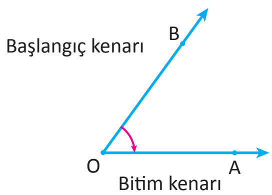


Şekil 1.1.2

Bir açının kenarlarından birini başlangıç kenarı, diğerini bitim kenarı alarak elde edilen açıya **yönlü açı** denir. Yönü pozitif olan yönlü açı ‘‘pozitif yönlü açı’’ (Şekil 1.1.3), yönü negatif olan yönlü açı ‘‘negatif yönlü açı’’ (Şekil 1.1.4) olarak adlandırılır.



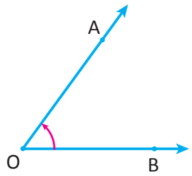
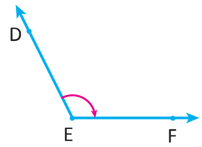
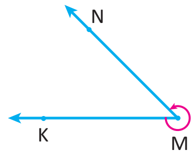
Şekil 1.1.3: AOB pozitif yönlü açı



Şekil 1.1.4: BOA negatif yönlü açı

Aşağıda Tablo 1.1.1'de verilen boşlukları uygun ifade ve gösterimlerle tamamlayınız.

Tablo 1.1.1

Açı			
Sembolle Gösterimi	$\widehat{BOA}$		
Başlangıç Kenarı		[ED	
Bitim Kenarı			[MN
Yönü	Pozitif		

2. Açı Ölçü Birimleri

Açının kolları arasındaki açıklığı ölçmek, açıyı ölçmek demektir. Bir açının kolları arasındaki açıklığın büyüklüğü veya küçüklüğünü ifade etmek için bazı açı ölçü birimleri tanımlanmıştır. Yaygın olarak kullanılan açı ölçme birimleri **derece** ve **radyan**dır.

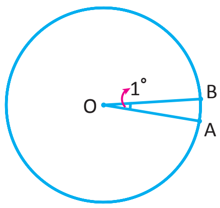
Derece

Tanım

Bir çember çevresi 360 eş parçaya bölündüğünde her bir yay parçasını gören merkez açının ölçüsüne **1 derece** denir. Derece (°) sembolü ile gösterilir.

a) $\mathbf{1^\circ}$ nin $\frac{1}{60}$ ine **1 dakika** denir. $\mathbf{1'}$ sembolü ile gösterilir.

b) $\mathbf{1'}$ nın $\frac{1}{60}$ ine **1 saniye** denir. $\mathbf{1''}$ sembolü ile gösterilir.



Şekil 1.1.5

Şekil 1.1.5'te O merkezli çemberde
$1^\circ = 60' = 3600'' = 59'\,60''$
$1' = 60''$
Çember yayı tam açı olduğundan ölçüsü 360° dir.

1. ÖRNEK

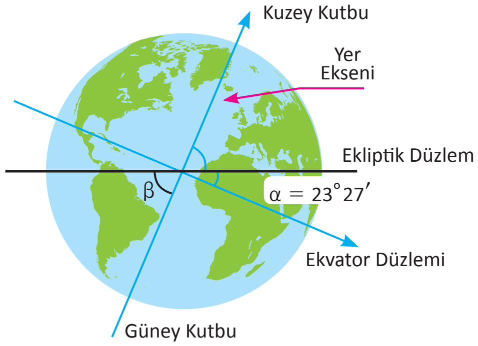
$m(\widehat{K}) = 5^\circ\,7'\,9''$ olduğuna göre
K açısının ölçüsünün kaç saniye olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$1^\circ = 60' = 3600''$ olduğundan $5^\circ = 5 \cdot 3600'' = 18\,000''$
$1' = 60''$ olduğundan $7' = 7 \cdot 60'' = 420''$ olur.
Bu durumda

$$m(\widehat{K}) = 5^\circ\,7'\,9'' = 18\,000'' + 420'' + 9''$$
$$= 18\,429'' \text{ olarak bulunur.}$$

2. ÖRNEK

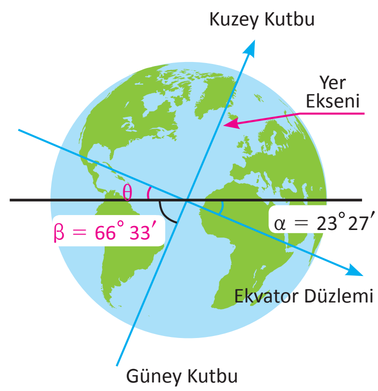


Yandaki şekilde dünya ile ilgili coğrafi terimler görseli verilmiştir. Dünyanın eksen eğikliği $\alpha = 23^\circ 27'$ olduğuna göre görselde verilen β değerini derece ve dakika cinsinden bulunuz (ekvator düzlemi yer eksenine diktir).

ÇÖZÜM

Şekilde α nın ters açısının ölçüsü θ olmak üzere $\alpha = \theta$ olur.
Yer ekseni ile ekvator düzlemi dik kesiştiğinden $\theta + \beta = 90^\circ$ olur.
$90^\circ = 89^\circ 60'$ olduğundan

$$\theta + \beta = 90^\circ \Rightarrow 23^\circ 27' + \beta = 90^\circ$$
$$\beta = 90^\circ - 23^\circ 27'$$
$$= 89^\circ 60' - 23^\circ 27'$$
$$= 66^\circ 33' \text{ elde edilir.}$$



3. ÖRNEK

Aşağıda verilenleri istenen birimler cinsinden yazınız.

a) $7460'' =$ .....derece .....dakika .....saniye

b) $39^\circ 23' =$ ... dakika

c) $(14,53)^\circ =$ ... dakika

ÇÖZÜM

a) $1^\circ = 60'$ ve $1' = 60''$ olduğundan verilen ifade 60 a bölünür. Elde edilen sonuçta son bölüm değerinden başlayarak başa doğru kalan değerleri yazılarak sırasıyla derece, dakika ve saniye değerleri bulunur.

O hâlde $7460'' = \boxed{2^\circ\, 4'\, 20''}$

$$\begin{array}{r|l} 7460 & 60 \\ \underline{-\ 60} & 124' \\ 146 & \underline{-\ 120} \\ \underline{-\ 120} & \boxed{4'} \\ 260 & \\ \underline{-\ 240} & \\ \boxed{20''} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 124' & 60 \\ \underline{-\ 120} & \boxed{2^\circ} \\ \boxed{4'} & \end{array}$$

b) $1^\circ = 60'$ olduğundan

$$39^\circ 23' = (39 \cdot 60') + 23'$$
$$= 2340' + 23'$$
$$= 2363' \text{ bulunur.}$$

c) $1^\circ = 60'$

$(14,53)^\circ = 14,53 \cdot 60' = (871,8)'$ bulunur.

4. ÖRNEK

$\alpha = 63^\circ 48' 35''$ ve $\beta = 47^\circ 53' 59''$ olduğuna göre aşağıdaki işlemlerin sonucunu bulunuz.

a) $\alpha + \beta$

b) $\alpha - \beta$

c) $3\alpha - 2\beta$

ÇÖZÜM

a)
$$\begin{array}{rl} \alpha = & 63^\circ 48' 35'' \\ + \quad \beta = & 47^\circ 53' 59'' \\ \hline \alpha + \beta = & 110^\circ 101' 94'' \end{array}$$

$1^\circ = 60'$ olduğundan $101' = 1^\circ 41'$ ve

$1' = 60''$ olduğundan $94'' = 1' 34''$ olur. Buna göre $\alpha + \beta = 110^\circ 101' 94''$

$= 111^\circ 42' 34''$ bulunur.

b) $\alpha = 63^\circ 48' 35'' = 62^\circ 107' 95''$ olduğundan
$$\begin{array}{rl} \alpha = & 62^\circ 107' 95'' \\ - \quad \beta = & 47^\circ 53' 59'' \\ \hline \alpha - \beta = & 15^\circ 54' 36'' \end{array}$$
bulunur.

c) $3\alpha = 3 \cdot (63^\circ 48' 35'') = (3 \cdot 63^\circ)(3 \cdot 48')(3 \cdot 35'')$

$= 189^\circ 144' 105''$

$= 190^\circ 84' 105''$ olur. $(144' = 1^\circ 84')$

$2\beta = 2 \cdot (47^\circ 53' 59'') = (2 \cdot 47^\circ)(2 \cdot 53')(2 \cdot 59'')$

$= 94^\circ 106' 118''$

$= 95^\circ 47' 58''$ olur. $(118'' = 1' 58''$ ve $106' = 1^\circ 46')$

Buna göre

$3\alpha - 2\beta = 190^\circ 84' 105'' - 95^\circ 47' 58''$

$= 95^\circ 37' 47''$ bulunur.

Sıra Sizde

SORU

Ölçüsü $60\,608''$ olan açının derece, dakika ve saniye cinsinden değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

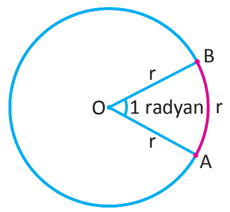
Radyan

Tanım

Şekil 1.1.6'da O merkezli r yarıçaplı çember verilmiştir.

Herhangi bir çemberde, yarıçap uzunluğundaki yayı gören merkez açının ölçüsüne **bir radyan** denir ve **1 rad** ile gösterilir.

Çember yayı tam açı olduğundan ölçüsü 2π radyan, yarım çember yayının ölçüsü π radyandır.



Şekil 1.1.6

5. ÖRNEK

Ölçüsü 135° olan açının radyan cinsinden değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Bir tam çember yayının ölçüsü derece cinsinden 360°, radyan cinsinden 2π olduğundan

360° 2π rad

135° x rad

$360^\circ x = 270^\circ \pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$ radyan bulunur.

Özellik

1. Bir tam çember yayının ölçüsü 2π radyan yada 360° dir. Derece D, radyan R olmak üzere

$360^\circ = 2\pi$ rad yazılır. Buradan

$\frac{D}{360^\circ} = \frac{R}{2\pi} \Rightarrow \frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi}$ bağıntısı elde edilir.

6. ÖRNEK

Aşağıdaki açı ölçü birimlerini istenen ölçü birimi cinsinden yazınız.

a) $30^\circ = \ldots$ rad	b) $144^\circ = \ldots$ rad
c) $\frac{7\pi}{6}$ rad $= \ldots^\circ$	ç) $\frac{11\pi}{12}$ rad $= \ldots^\circ$

ÇÖZÜM

a) $\frac{30^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow 180 \cdot R = 30\pi \Rightarrow R = \frac{\pi}{6}$ rad	b) $\frac{144^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow 180 \cdot R = 144\pi \Rightarrow R = \frac{4\pi}{5}$ rad
c) $\frac{\frac{7\pi}{6}}{\pi} = \frac{D}{180^\circ} \Rightarrow \cancel{\pi} \cdot D = 180^\circ \cdot \frac{7\cancel{\pi}}{6} \Rightarrow D = 210^\circ$	ç) $\frac{\frac{11\pi}{12}}{\pi} = \frac{D}{180^\circ} \Rightarrow \cancel{\pi} \cdot D = 180^\circ \cdot \frac{11\cancel{\pi}}{12} \Rightarrow D = 165^\circ$

7. ÖRNEK

Bir ABCD dörtgeninde $m(\widehat{A}) = \frac{3\pi}{4}$ rad, $m(\widehat{B}) = 46^\circ\, 28'$ ve $m(\widehat{C}) = 56\,892''$ olduğuna göre $m(\widehat{D})$ nün değerini derece, dakika ve saniye cinsinden bulunuz.

ÇÖZÜM

Dörtgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 360° dir. Buna göre $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 360^\circ$ olur.

$m(\widehat{A}) = \frac{3\pi}{4}$ rad $= \frac{3 \cdot 180^\circ}{4} = 135^\circ$ ve $m(\widehat{C}) = 56\,892'' = 15^\circ\, 48'\, 12''$ bulunur.

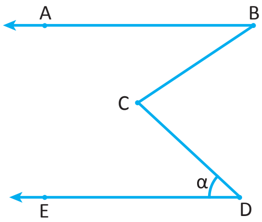
$$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 360^\circ$$

$$\underbrace{135^\circ + 46^\circ\, 28' + 15^\circ\, 48'\, 12''}_{197^\circ\, 16'\, 12''} + m(\widehat{D}) = 360^\circ \Rightarrow m(\widehat{D}) = 360^\circ - 197^\circ\, 16'\, 12''$$

$$= 359^\circ\, 59'\, 60'' - 197^\circ\, 16'\, 12''$$

$$= 162^\circ\, 43'\, 48''$$ bulunur.

8. ÖRNEK



Yandaki şekilde
$[BA \,/\!/\, [DE$
$m(\widehat{ABC}) = 38^\circ\, 43'\, 55''$
$m(\widehat{DCB}) = 51^\circ\, 29'\, 48''$ ve $m(\widehat{CDE}) = \alpha$ değerini derece, dakika ve saniye cinsinden bulunuz.

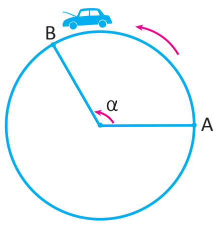
ÇÖZÜM

$m(\widehat{DCB}) = m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{CDE})$ olduğundan

$51^\circ\, 29'\, 48'' = 38^\circ\, 43'\, 55'' + \alpha \Rightarrow \alpha = 51^\circ\, 29'\, 48'' - 38^\circ\, 43'\, 55''$

$= 12^\circ\, 45'\, 53''$ bulunur.

9. ÖRNEK



Çapı 1800 metre olan dairesel bir pistte şekildeki gibi A noktasından pozitif yönde (ok yönünde) hareket eden bir araç 6000π metre yol gittikten sonra arızalanıp B noktasında duruyor.

Buna göre A noktası ile B noktası arasındaki yayı gören merkez açısının ölçüsü α nın kaç radyan olduğunu bulunuz.

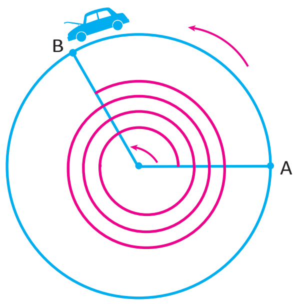
ÇÖZÜM

Dairesel pistin çapı 1800 metre ise yarıçapı $r = 900$ metre olur.

Buna göre dairenin çevresi $Ç = 2 \cdot \pi \cdot r$

$= 2 \cdot \pi \cdot 900$

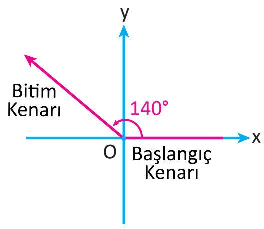
$= 1800\pi$ metre bulunur.



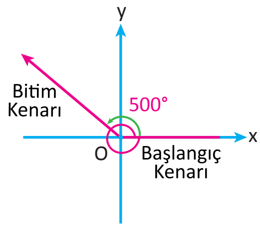
Araç dairesel pistte $1800\pi \cdot 3 = 5400\pi$ olduğundan 3 tur gittikten sonra arızalanıp 4. tur içinde durmuştur. Bu durumda araç 4. turda $6000\pi - 5400\pi = 600\pi$ radyanlık yol almış olur. Çemberin çevresi 1800π ve bir tam çember 360° olduğundan 600π radyanlık yol

$\alpha = \frac{600 \cdot 360^\circ}{1800} = 120^\circ \Rightarrow \alpha = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ radyan bulunur.

Esas Ölçü



Şekil 1.1.7



Şekil 1.1.8

Şekil 1.1.7'de pozitif yönlü ölçüsü 140° olan açı verilmiştir. Bu açının başlangıç kenarı sabit tutularak bitim kenarı bir tur (360°) pozitif yönde hareket ettirilerek ölçüsü 500° olan Şekil 1.1.8'deki açı oluşturulmuştur.

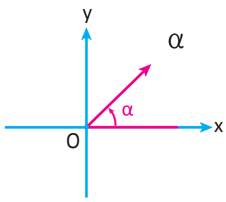
Bu durumda $500^\circ = 140^\circ + 1 \cdot 360^\circ$ şeklinde yazılabilir. Sonuç olarak ölçüleri farklı başlangıç kenarları aynı olan 140° ve 500° lik açıların bitim kenarları da çakışıktır. Başlangıç ve bitim kenarları aynı olan açılar denktir. Bu durum 500° lik açıyla 140° lik açının birbirine denk olması şeklinde ifade edilir.

Tanım

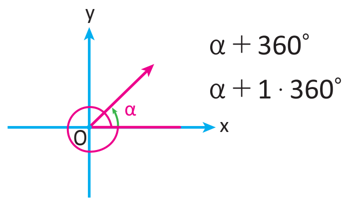
Birim çember üzerinde başlangıç kenarları Ox ekseni ve bitim kenarları aynı olan açılardan ölçüsü $[0^\circ, 360^\circ)$ aralığındaki açıya bu açıların **esas ölçüsü** denir.

$0^\circ \le \alpha < 360^\circ$ ve $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere ölçüsü $\alpha + k \cdot 360^\circ$ olan açının esas ölçüsü α derecedir.
$0\,\text{rad} \le \alpha\,\text{rad} < 2\pi\,\text{rad}$ ve $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere ölçüsü $\alpha + k \cdot 2\pi$ olan açının esas ölçüsü α radyandır.
Açının birimi ne olursa olsun esas ölçüsü daima pozitif yönlü açıdır.

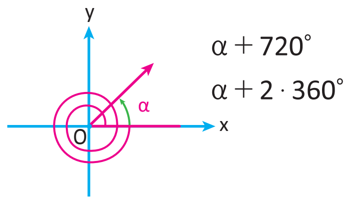
Aşağıdaki Şekil 1.1.9, Şekil 1.1.10 ve Şekil 1.1.11'de verilen açıları inceleyiniz.



Şekil 1.1.9



Şekil 1.1.10



Şekil 1.1.11

10. ÖRNEK

Aşağıda esas ölçüleri verilen açılardan her birine denk olan açıların oluşturduğu kümeleri yazınız.

a) 146°
b) $\frac{\pi}{5}$ radyan

ÇÖZÜM

a) $\{146^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\} = \{\ldots, -574^\circ, -214^\circ, 146^\circ, 506^\circ, 866^\circ, \ldots\}$ kümesindeki bütün açıların esas ölçüsü 146° dir. (146° lik açıya 360° nin katlarının eklenip çıkarıldığına dikkat ediniz.)

b) $\left\{\frac{\pi}{5} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\ldots, -\frac{19\pi}{5}, -\frac{9\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{11\pi}{5}, \frac{21\pi}{5}, \ldots\right\}$ kümesindeki bütün açıların esas ölçüsü $\frac{\pi}{5}$ radyandır. ($\frac{\pi}{5}$ radyanlık açıya 2π radyanın katlarının eklenip çıkarıldığına dikkat ediniz.)

11. ÖRNEK

Aşağıdaki açıların esas ölçülerini derece cinsinden bulunuz.

a) 780°

b) -1820°

ÇÖZÜM

a) $\begin{array}{r|l} 780 & 360 \\ \underline{-\ 720} & 2 \\ 60 & \end{array}$ olduğuna göre

$780^\circ = 60^\circ + 2 \cdot 360^\circ$ yazılır.

Bu durumda 780° nin esas ölçüsü 60° olur.

b) $\begin{array}{r|l} -1820 & 360 \\ \underline{-\ -2160} & -6 \\ 340 & \end{array}$ olduğuna göre

$-1820^\circ = 340^\circ + (-6) \cdot 360^\circ$ yazılır.

Bu durumda -1820° nin esas ölçüsü 340° olur.

Sonuç

Derece cinsinden verilen bir açının 360° ye bölümünden kalan, o açının esas ölçüsüdür.

12. ÖRNEK

Aşağıdaki açıların esas ölçülerini radyan cinsinden bulunuz.

a) $\dfrac{29\pi}{3}$

b) $-\dfrac{17\pi}{5}$

ÇÖZÜM

a) $\dfrac{29\pi}{3}$ radyanlık açının esas ölçüsü α ise $\dfrac{29\pi}{3} = \alpha + k \cdot 2\pi$ olur. Bu durumda 29π içinde bulunan 2π ler aşağıdaki gibi bulunur.

$$\frac{29\pi}{3} = \frac{(24+5)\pi}{3} = \frac{(4 \cdot 6 + 5)\pi}{3} = \frac{4 \cdot 6\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = \underbrace{4}_{k} \cdot 2\pi + \underbrace{\frac{5\pi}{3}}_{\alpha}$$

Bu durumda $\dfrac{29\pi}{3}$ radyanlık açının esas ölçüsü $\alpha = \dfrac{5\pi}{3}$ radyan olur.

b) $-\dfrac{17\pi}{5}$ radyanlık açının esas ölçüsü β ise

$-\dfrac{17\pi}{5} = \beta + k \cdot 2\pi$ olacak şekilde $0 \le \beta < 2\pi$ bulunmalıdır.

$$\begin{aligned} -\frac{17\pi}{5} &= -\frac{17\pi}{5} + (4\pi - 4\pi) \\ &= -\frac{17\pi}{5} + 4\pi - 4\pi \\ &= \frac{3\pi}{5} + (-2) \cdot 2\pi \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Bu durumda $-\dfrac{17\pi}{5}$ radyanlık açının esas ölçüsü $\beta = \dfrac{3\pi}{5}$ radyan olur.

Sonuç

Radyan cinsinden verilen bir açının 2π ye bölümünden kalan, o açının esas ölçüsüdür.

13. ÖRNEK

$-127^\circ 32' 43''$ nin esas ölçüsünün kaç derece, dakika ve saniye olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

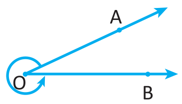
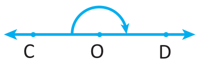
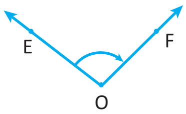
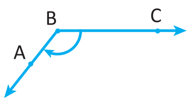
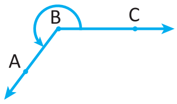
$360^\circ 0' 0'' = 359^\circ 59' 60''$ olduğundan açının esas ölçüsü

$$\begin{array}{r} 359^\circ 59' 60'' \\ + \quad -127^\circ 32' 43'' \\ \hline 232^\circ 27' 17'' \end{array}$$

elde edilir.

ALIŞTIRMALAR-1

1. Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri örneğe uygun olarak doldurunuz.

Açı	Sembolle Gösterim	Başlangıç Kenarı	Bitim Kenarı	Yönü
	$\widehat{AOB}$	$[OA$	$[OB$	$+$
				
				
				
				

2. $\alpha = 17^\circ 12' 8''$ ve $\beta = 19^\circ 27' 36''$ olduğuna göre aşağıdaki açıları derece, dakika ve saniye cinsinden bulunuz.

a) $2\alpha + 3\beta$

b) $3\alpha - 2\beta$

3. $17\,825''$ lik açıyı derece, dakika ve saniye cinsinden bulunuz.

4. Aşağıda radyan cinsinden verilen açıların ölçülerini derece cinsinden bulunuz.

a) $\frac{10\pi}{3}$ b) $\frac{15\pi}{6}$ c) $\frac{11\pi}{12}$

5. Aşağıda derece cinsinden verilen açıların ölçülerini radyan cinsinden bulunuz.

a) 108° b) 162° c) 288°

6. Aşağıda derece cinsinden verilen açıların esas ölçülerini bulunuz.

a) 1630°

b) -3050°

c) 472°

ç) -80°

7. Aşağıda radyan cinsinden verilen açıların esas ölçülerini bulunuz.

a) $\frac{37\pi}{4}$

b) $-\frac{19\pi}{3}$

c) 19π

ç) 42π

8. $\widehat{ABC}$ nde $\widehat{A}$ nın ölçüsü 1470° nin esas ölçüsü, $\widehat{C}$ nın ölçüsü -580° nin esas ölçüsüne eşit olduğuna göre $\widehat{B}$ nın ölçüsünü radyan cinsinden bulunuz.

9. $\widehat{ABC}$ nde $\widehat{A}$ nın ölçüsü $\frac{77\pi}{9}$ radyanlık açının esas ölçüsü, $\widehat{C}$ nın ölçüsü $-\frac{53\pi}{3}$ radyanlık açının esas ölçüsüne eşit olduğuna göre $\widehat{B}$ nın ölçüsünü radyan cinsinden bulunuz.

10. $\alpha = 65^\circ\, 48'\, 23''$ açısının tümler ve bütünler açılarının toplamını derece, dakika ve saniye cinsinden bulunuz.

11.1.2. TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

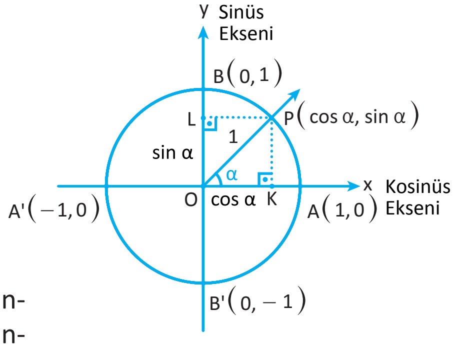
Şekil 1.2.1'de birim çemberde $m(\widehat{KOP}) = \alpha$ açısı verilmiş olsun.

$\widehat{OKP}$ dik üçgen olduğundan

$$\sin\alpha = \frac{|PK|}{|OP|} = \frac{|PK|}{1} = |PK| = y$$

$$\cos\alpha = \frac{|OK|}{|OP|} = \frac{|OK|}{1} = |OK| = x \text{ olur.}$$

α nın değeri değiştiğinde birim çember üzerindeki $P(x,y)$ noktasının da yeri değişir. α nın değişen değerlerine göre birim çember üzerindeki her bir noktanın apsis değeri $\cos\alpha$, ordinat değeri $\sin\alpha$ olarak ifade edilir.



Şekil 1.2.1

Bu durumda x ekseni kosinüs ekseni, y ekseni sinüs ekseni olarak adlandırılır.
Birim çember üzerindeki her P noktası $P(x, y) = P(\cos\alpha, \sin\alpha)$ şeklinde yazılabilir.
Şekil 1.2.1'deki A, B, A', B' noktaları sırasıyla $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ ve 270° lik açıların bitim kenarları birim çemberi kestiği noktalar olmak üzere

$A(1,0)$ olduğundan $\cos 0^\circ = \cos 360^\circ = 1$ ve $\sin 0^\circ = \sin 360^\circ = 0$ olur.

$B(0,1)$ olduğundan $\cos 90^\circ = 0$ ve $\sin 90^\circ = 1$ olur.

$A'(-1,0)$ olduğundan $\cos 180^\circ = -1$ ve $\sin 180^\circ = 0$ olur.

$B'(0,-1)$ olduğundan $\cos 270^\circ = 0$ ve $\sin 270^\circ = -1$ olur.

1. Trigonometrik Fonksiyonlar

Sinüs ve Kosinüs Fonksiyonları

$P(x, y)$ noktası; birim çember üzerinde olduğundan P noktasının apsisi (α nın kosinüsü) -1 den küçük, 1 den büyük olamaz. Benzer düşünce ile P noktasının ordinatı (α nın sinüsü) -1 den küçük, 1 den büyük olamaz.

Bu durumda her α açısı için kosinüs ve sinüs değerleri $[-1,1]$ olduğundan $-1 \le \cos\alpha \le 1$, $-1 \le \sin\alpha \le 1$ yazılabilir.

Tanım

Bir x gerçek sayısını $\cos x$ e dönüştüren f fonksiyonuna **kosinüs fonksiyonu** denir.

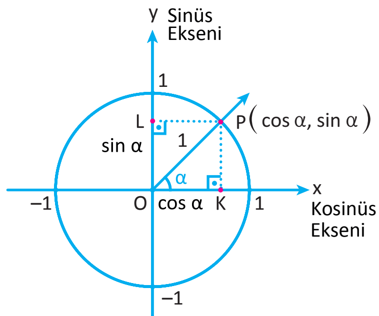
$f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$

$f(x) = \cos x$ şeklinde gösterilir.

Bir x gerçek sayısını $\sin x$ e dönüştüren f fonksiyonuna **sinüs fonksiyonu** denir.

$f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$

$f(x) = \sin x$ şeklinde gösterilir.



Şekil 1.2.2

$k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere ölçüsü $\alpha + k\cdot 2\pi$ olan açıların esas ölçüsü α olduğundan (çemberde karşılık geldiği nokta aynı olduğundan) $\sin(\alpha + k\cdot 2\pi) = \sin\alpha$ ve $\cos(\alpha + k\cdot 2\pi) = \cos\alpha$ olur.

Şekil 1.2.2'de OKP dik üçgeninde $|OK| = \cos\alpha$, $|KP| = \sin\alpha$ olduğundan Pisagor teoreminden $|OK|^2 + |KP|^2 = 1$ ise $(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$ dolayısıyla $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ olur.

1. ÖRNEK

$K = \sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4} - \sin\left(\frac{13\pi}{3}\right)$ ifadesinin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$\sin\left(\frac{13\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + 4\pi\right) = \sin\frac{\pi}{3}$ olduğundan

$$K = \sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4} - \sin\left(\frac{13\pi}{3}\right) = \cancel{\sin\frac{\pi}{3}} + \cos\frac{\pi}{4} - \cancel{\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$= \cos\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ bulunur.}$$

2. ÖRNEK

$P\left(\frac{\sqrt{5}}{4}, k\right)$ noktası birim çember üzerinde olduğuna göre k nin alabileceği değerlerin çarpımını bulunuz.

ÇÖZÜM

P noktası birim çember üzerinde olduğundan bu noktanın apsis değeri $\cos\alpha$ ya, ordinat değeri $\sin\alpha$ ya eşit olur.

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{4}$ ve $\sin\alpha = k$ yazılır.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ olduğundan

$$k^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2 = 1$$

$$k^2 = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$$

$k_{1,2} = \mp\frac{\sqrt{11}}{4}$ bulunur. Buna göre $k_1 \cdot k_2 = \frac{\sqrt{11}}{4} \cdot \left(-\frac{\sqrt{11}}{4}\right) = -\frac{11}{16}$ elde edilir.

3. ÖRNEK

$k \in \mathbb{Z}$ ve

$A = 4 + 3\sin(x + k \cdot 2\pi)$

olduğuna göre A nın alabileceği kaç tam sayı değeri olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\sin(x + k \cdot 2\pi) = \sin x$ dir.

Her $x \in \mathbb{R}$ için $-1 \le \sin x \le 1$ olduğundan $3 \cdot (-1) \le 3\sin x \le 3 \cdot 1$

$$-3 \le 3\sin x \le 3$$

$$4 + (-3) \le 4 + 3\sin x \le 4 + 3$$

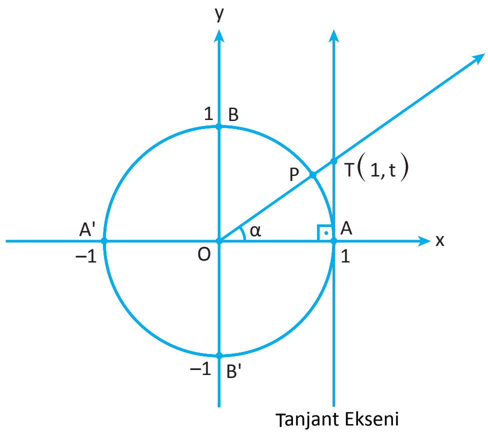
$$1 \le 4 + 3\sin x \le 7 \text{ elde edilir.}$$

Buna göre A nın alabileceği tam sayı değerleri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 olmak üzere 7 tane olur.

Tanjant ve Kotanjant Fonksiyonları

Tanjant Fonksiyonu

Şekil 1.2.3'te birim çemberde $m(\widehat{AOP}) = \alpha$ açısı verilmiş olsun, AOP açısının $[OP$ nın birim çemberi kestiği nokta P ve $[OP$ nın $x = 1$ doğrusunu kestiği nokta T olsun.



Şekil 1.2.3

Tanım

Birim çemberde ölçüsü α olan $\widehat{AOP}$ verilsin. OP ışınının $x = 1$ doğrusunu kestiği $T(1, t)$ noktasının ordinatına $\widehat{AOP}$ **nın tanjantı** denir ve $\tan\alpha$ ile gösterilir.

OAT dik üçgeninde $\tan\alpha = \dfrac{|TA|}{|OA|} = \dfrac{|TA|}{1} = |TA| = t$ ise $\alpha, t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\tan\alpha = t$ olur.

Bu durumda $x = 1$ doğrusuna **tanjant ekseni** denir.

Şekil 1.2.3'teki A, B, A', B' noktaları sırasıyla $0°, 90°, 180°$ ve $270°$ lik açıların bitim kenarlarının birim çemberi kestiği noktalar olmak üzere

$A(1, 0)$ olduğunda $\alpha = 0°$ ise $\tan 0° = 0$ olur.

$B(0, 1)$ olduğunda OP ışını $x = 1$ doğrusuna paraleldir. OP ışınının $x = 1$ doğrusunu kestiği nokta bulunmadığı için $\alpha = 90° = \dfrac{\pi}{2}$ ise $\tan 90° = \tan\dfrac{\pi}{2}$ tanımsız olur.

$A'(-1, 0)$ olduğunda $\alpha = 180° = \pi$ ise $\tan 180° = \tan\pi = 0$ olur.

$B'(0, -1)$ olduğunda OP ışını $x = 1$ doğrusuna paraleldir. OP ışınının $x = 1$ doğrusunu kestiği nokta bulunmadığı için $\alpha = 270° = \dfrac{3\pi}{2}$ ise $\tan 270° = \tan\dfrac{3\pi}{2}$ tanımsız olur.

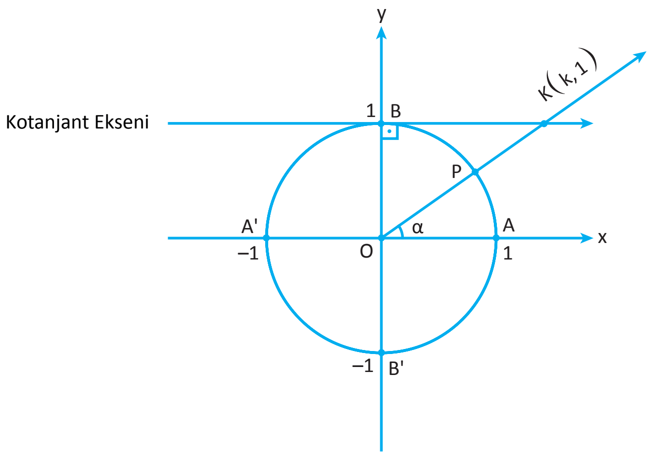
Tanım

Her $x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ gerçek sayılarını $\tan x$ e dönüştüren fonksiyona **tanjant fonksiyonu** denir.

$f : \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$ şeklinde gösterilir.

Kotanjant Fonksiyonu

Şekil 1.2.4'te birim çemberde AOP açısı verilmiş olsun. AOP açısının $[OP$ nın birim çemberi kestiği nokta P olsun.



Şekil 1.2.4

Tanım

Birim çemberde ölçüsü α olan $\widehat{AOP}$ verilsin. OP ışınının $y=1$ doğrusunu kestiği $K(k,1)$ noktasının apsisine $\widehat{AOP}$ **nın kotanjantı** denir ve $\cot\alpha$ ile gösterilir.

OBK dik üçgeninde $\cot\alpha=\dfrac{|BK|}{|OB|}=\dfrac{|BK|}{1}=|BK|=k$ ise $k\in\mathbb{R}$ olmak üzere $\cot\alpha=k$ olur.

Bu durumda $y=1$ doğrusuna **kotanjant ekseni** denir.

Şekil 1.2.4'teki A, B, A', B' noktaları sırasıyla $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ ve 270° lik açıların bitim kenarlarının birim çemberi kestiği noktalar olmak üzere

$A(1,0)$ olduğunda OP ışını $y=1$ doğrusuna paraleldir. OP ışınının $y=1$ doğrusunu kestiği nokta bulunmadığı için $\alpha=0^\circ$ ise $\cot 0^\circ$ tanımsız olur.

$B(0,1)$ olduğunda $\alpha=90^\circ=\dfrac{\pi}{2}$ ise $\cot 90^\circ=\cot\dfrac{\pi}{2}=0$ olur.

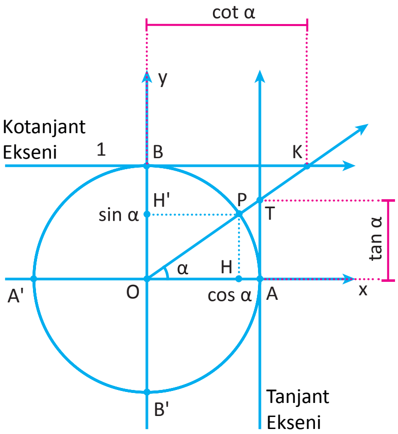
$A'(-1,0)$ olduğundan OP ışını $y=1$ doğrusuna paraleldir. OP ışınının $y=1$ doğrusunu kestiği nokta bulunmadığı için $\alpha=180^\circ=\pi$ ise $\cot 180^\circ=\cot\pi$ tanımsız olur.

$B'(0,-1)$ olduğunda $\alpha=270^\circ=\dfrac{3\pi}{2}$ ise $\cot 270^\circ=\cot\dfrac{3\pi}{2}=0$ olur.

Tanım

Her $x\in\mathbb{R}-\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$ gerçek sayılarını $\cot x$ e dönüştüren fonksiyona **kotanjant fonksiyonu** denir.

$f:\mathbb{R}-\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\cot x$ şeklinde tanımlanır.



Şekil 1.2.5

Şekil 1.2.5'te görüldüğü gibi
$[PH] \parallel [TA]$ olduğundan $\widehat{OHP} \sim \widehat{OAT}$ olur.
Benzer şekilde
$[PH'] \parallel [KB]$ olduğundan $\widehat{OH'P} \sim \widehat{OBK}$ olur.

$$\widehat{OHP} \sim \widehat{OAT} \Rightarrow \frac{|OH|}{|OA|} = \frac{|HP|}{|AT|}$$

$$\frac{\cos\alpha}{1} = \frac{\sin\alpha}{\tan\alpha} \Rightarrow \boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} \quad (\cos\alpha \neq 0)$$

$$\widehat{OH'P} \sim \widehat{OBK} \Rightarrow \frac{|OH'|}{|OB|} = \frac{|H'P|}{|BK|}$$

$$\frac{\sin\alpha}{1} = \frac{\cos\alpha}{\cot\alpha} \Rightarrow \boxed{\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} \quad (\sin\alpha \neq 0)$$

$$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1$$

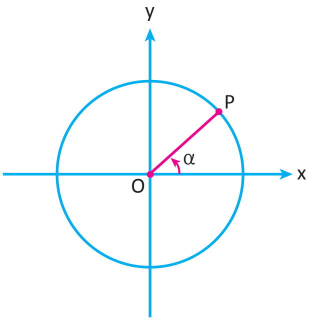
olduğundan $\boxed{\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1}$ olur.

Buradan $\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha}$ ve $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$ eşitlikleri bulunur.

Trigonometrik Fonksiyonların Bölgelere göre İşaretleri

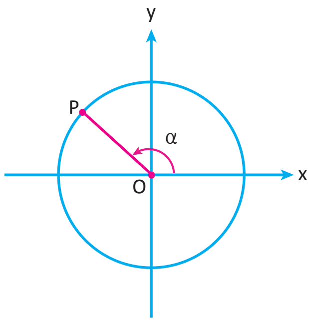
Trigonometrik fonksiyonların bölgelere göre işaretlerini belirlemek için birim çember de α açısının bitim kenarını kapsayan doğru alınır. Bu doğrunun birim çemberi, tanjant ve kotanjant eksenlerini kestiği noktalara göre trigonometrik fonksiyonların bölgelere göre işaretleri tespit edilir (Şekil 1.2.6).

1. Bölgede



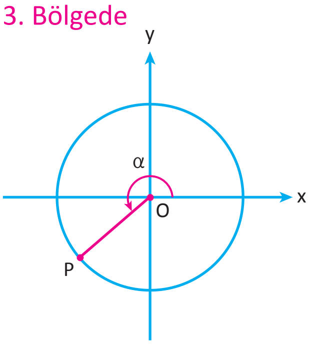
$0^\circ < \alpha < 90^\circ$
$\sin\alpha > 0$
$\cos\alpha > 0$
$\tan\alpha > 0$
$\cot\alpha > 0$

2. Bölgede



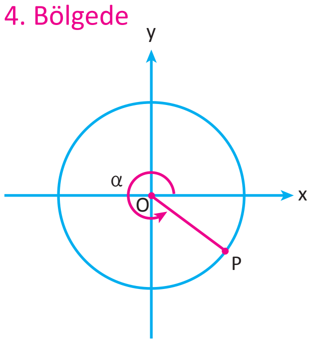
$90^\circ < \alpha < 180^\circ$
$\sin\alpha > 0$
$\cos\alpha < 0$
$\tan\alpha < 0$
$\cot\alpha < 0$

3. Bölgede



$180^\circ < \alpha < 270^\circ$
$\sin\alpha < 0$
$\cos\alpha < 0$
$\tan\alpha > 0$
$\cot\alpha > 0$

4. Bölgede



$270^\circ < \alpha < 360^\circ$
$\sin\alpha < 0$
$\cos\alpha > 0$
$\tan\alpha < 0$
$\cot\alpha < 0$

Şekil 1.2.6

4. ÖRNEK

Aşağıda verilen trigonometrik değerlerin işaretlerini bulunuz.

$\cos 72^\circ$

$\sin 325^\circ$

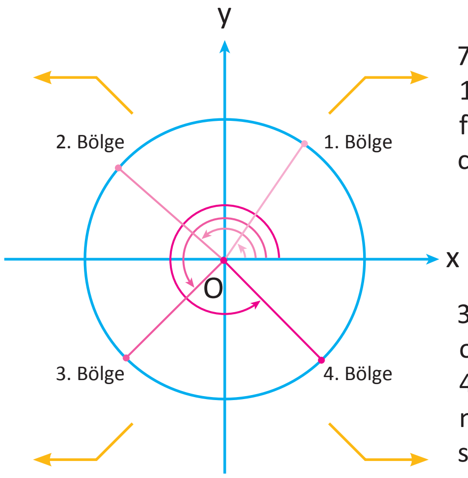
$\tan 237^\circ$

$\cot 148^\circ$

ÇÖZÜM

148°, $90^\circ < 148^\circ < 180^\circ$ olduğundan 2. bölgededir. 2. bölgede kotanjant fonksiyonu negatif olduğundan $\cot 148^\circ < 0$ olur.

237°, $180^\circ < 237^\circ < 270^\circ$ olduğundan 3. bölgededir. 3. bölgede tanjant fonksiyonu pozitif olduğundan $\tan 237^\circ > 0$ olur.



72°, $0^\circ < 72^\circ < 90^\circ$ olduğundan 1. bölgededir. 1. bölgede kosinüs fonksiyonu pozitif olduğundan $\cos 72^\circ > 0$ olur.

325°, $270^\circ < 325^\circ < 360^\circ$ olduğundan 4. bölgededir. 4. bölgede sinüs fonksiyonu negatif olduğundan $\sin 325^\circ < 0$ olur.

5. ÖRNEK

$x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 5\cos x - 2$ fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x \in \mathbb{R}$ için $\cos x$ fonksiyonunun görüntü kümesi $[-1, 1]$ olur.

Buna göre $-1 \leq \cos x \leq 1$ olduğundan

$$5 \cdot (-1) \leq 5\cos x \leq 5 \cdot 1$$
$$-5 \leq 5\cos x \leq 5$$
$$-5 - 2 \leq 5\cos x - 2 \leq 5 - 2$$
$$-7 \leq 5\cos x - 2 \leq 3$$
$$-7 \leq f(x) \leq 3 \text{ bulunur.}$$

6. ÖRNEK

$A = 7\sin\alpha + 4\cos\theta$ olduğuna göre A nın alabileceği en büyük tam sayı değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\forall\, \alpha, \theta$ için $\sin\alpha \in [-1, 1]$ ve $\cos\theta \in [-1, 1]$ olur.

A nın en büyük değeri alması için $\sin\alpha = 1$ ve $\cos\theta = 1$ olmalıdır. Bu durumda

A nın en büyük değeri

$$A = 7 \cdot \underbrace{\sin\alpha}_{1} + 4 \cdot \underbrace{\cos\theta}_{1}$$
$$= 7 \cdot 1 + 4 \cdot 1$$
$$= 11 \text{ bulunur.}$$

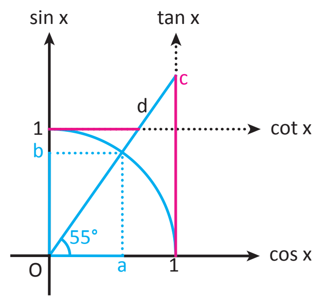
7. ÖRNEK

$a = \cos 55^\circ$, $b = \sin 55^\circ$, $c = \tan 55^\circ$, $d = \cot 55^\circ$
olduğuna göre a, b, c ve d sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

ÇÖZÜM

Şekilde ölçüsü 55° olan açının bitim kenarının birim çemberi, tanjant ve kotanjant eksenlerini kestiği noktaların değerleri karşılaştırıldığında, $\alpha = 45^\circ$ olursa $a = b < c = d$ bulunur. Ancak $\alpha = 55^\circ$ olduğunda d değeri küçülerek a değerine yaklaşırken b değeri artarak a değerinden uzaklaşıp 1 e yaklaşır. c değeri de artarak 1 den büyük değer alır. Bu durumda

$a < d < b < c$ sıralaması elde edilir.



8. ÖRNEK

$a = \sin 200^\circ$, $b = \cos 290^\circ$, $c = \tan 250^\circ$ ve $d = \cot 330^\circ$ olduğuna göre a, b, c ve d sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

ÇÖZÜM

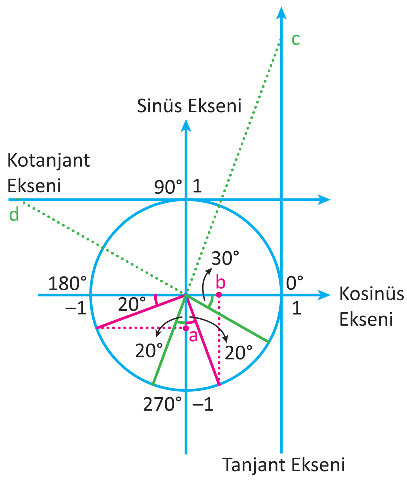
$\sin 200^\circ < 0$ ve $\cos 290^\circ > 0$ olduğundan $a < b$ olur.

Ölçüsü 330° olan açının bitim kenarının uzantısı kotanjant eksenini -1 den küçük bir değerde kestiği için d değeri sıralamada en küçük olur.

Ölçüsü 250° olan açının bitim kenarının uzantısı tanjant eksenini 1 den büyük bir değerde kestiği için c değeri sıralamada en büyük olur.

Buna göre

$d < a < b < c$ sıralaması elde edilir.



9. ÖRNEK

$0^\circ < x < 90^\circ$ olmak üzere $\cot x = \frac{1}{2}$ olduğuna göre $\cos x - \sin x$ değerini bulunuz.

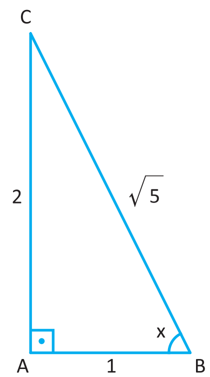
ÇÖZÜM

$\cot x = \frac{1}{2}$ olduğundan ABC dik üçgeninde
Pisagor teoreminden $|BC| = \sqrt{5}$ birim olur. Buna göre

$\sin x = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ve

$\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

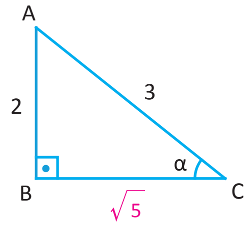
$\cos x - \sin x = \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{2\sqrt{5}}{5} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ bulunur.



10. ÖRNEK

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ olmak üzere $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ olduğuna göre $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ ve $\cot\alpha$ değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM



$\sin\alpha = \frac{2}{3}$ olacak şekilde bir ABC dik üçgeni çizilip

$|AB| = 2$ ve $|AC| = 3$ alınırsa Pisagor teoreminden

$|BC|^2 = |AC|^2 - |AB|^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 \Rightarrow |BC| = \sqrt{5}$ birim olur.

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ olduğundan α, 2. bölgededir.

2. bölgede $\cos\alpha < 0$, $\tan\alpha < 0$, $\cot\alpha < 0$ olduğundan

$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\tan\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ve $\cot\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ elde edilir.

11. ÖRNEK

$x \neq \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\frac{\tan x}{1+\tan^2 x}$ ifadesinin en sade şeklini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ eşitliği yerine yazılırsa ve düzenlenirse

$$\frac{\tan x}{1+\tan^2 x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$= \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$= \frac{\sin x}{\underset{1}{\cancel{\cos x}}} \cdot \frac{\overset{\cos x}{\cancel{\cos^2}} x}{1} = \sin x \cdot \cos x \text{ elde edilir.}$$

12. ÖRNEK

Tanımlı olduğu yerlerde $\frac{\cos x}{1+\sin x} + \tan x$ ifadesinin en sade şeklini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{\cos x}{1+\sin x} + \tan x = \frac{\cos x}{\underset{(1-\sin x)}{1+\sin x}} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x\cdot(1-\sin x)}{(1+\sin x)\cdot(1-\sin x)} + \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{\cos x\cdot(1-\sin x)}{(1-\sin^2 x)} + \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{\cos x}}\cdot(1-\sin x)}{\underset{\cos x}{\cancel{\cos^2 x}}} + \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{1 - \cancel{\sin x} + \cancel{\sin x}}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} \text{ bulunur.}$$

13. ÖRNEK

$f(x) = (7 + \cos x) \cdot (4 - \cos x)$ olduğuna göre $f(x)$ in en küçük değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

İfadedeki çarpma işlemi yapılırsa

$$f(x) = (7 + \cos x) \cdot (4 - \cos x)$$
$$= 28 - 7\cos x + 4\cos x - \cos^2 x$$
$$= -\cos^2 x - 3\cos x + 28$$ elde edilir. Bu ifade tam kareye benzetilirse

$$f(x) = -\left[\cos^2 x + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \cos x + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] + 28 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$= -\left(\cos x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{121}{4}$$ şeklinde yazılabilir. Buna göre

$$-1 \le \cos x \le 1$$
$$-1 + \frac{3}{2} \le \cos x + \frac{3}{2} \le 1 + \frac{3}{2}$$
$$\frac{1}{2} \le \cos x + \frac{3}{2} \le \frac{5}{2}$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \le \left(\cos x + \frac{3}{2}\right)^2 \le \left(\frac{5}{2}\right)^2$$
$$\frac{1}{4} \le \left(\cos x + \frac{3}{2}\right)^2 \le \frac{25}{4}$$
$$-\frac{25}{4} \le -\left(\cos x + \frac{3}{2}\right)^2 \le -\frac{1}{4}$$
$$-\frac{25}{4} + \frac{121}{4} \le -\left(\cos x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{121}{4} \le -\frac{1}{4} + \frac{121}{4}$$
$$\frac{96}{4} \le -\left(\cos x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{121}{4} \le \frac{120}{4}$$
$$24 \le f(x) \le 30$$ olur.

O hâlde $f(x)$ in en küçük değeri 24 bulunur.

Sıra Sizde

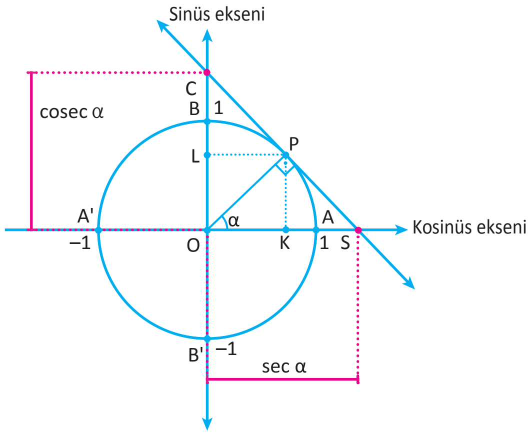
SORU

$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ olmak üzere $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ olduğuna göre $\tan\alpha$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Sekant ve Kosekant Fonksiyonları

Birim çember üzerinde hareketli bir $P(x,y)$ noktası verilsin. Birim çemberin P noktasındaki teğetinin x eksenini kestiği nokta S, y eksenini kestiği nokta C olsun (Şekil 1.2.7).



Şekil 1.2.7

$S(s,0)$ noktasının apsisine α gerçek sayısının **sekantı** denir.

α nın esas ölçüsünün 90° veya 270° olması hâlinde P noktası sırasıyla B ve B' noktaları ile çakışır.

Bu durumda B ve B' noktalarındaki çemberin teğetleri x eksenine paralel olduğundan

$\sec 90^\circ = \sec\dfrac{\pi}{2}$ ve $\sec 270^\circ = \sec\dfrac{3\pi}{2}$ tanımsız olur.

Tanım

Her $x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ gerçek sayılarını $\sec x$ e dönüştüren fonksiyona **sekant fonksiyonu** denir.

$f : \mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \longrightarrow \mathbb{R} - (-1,1)$, $f(x) = \sec x$ şeklinde tanımlanır.

$C(0,c)$ noktasının ordinatına α gerçek sayısının **kosekantı** denir.

α nın esas ölçüsünün 0° veya 180° olması hâlinde P noktası sırasıyla A ve A' noktaları ile çakışır. Bu durumda A ve A' noktalarındaki çemberin teğetleri y eksenine paralel olduğundan $\operatorname{cosec} 0^\circ$ ve $\operatorname{cosec} 180^\circ = \operatorname{cosec} \pi$ tanımsız olur.

Tanım

Her $x \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ gerçek sayılarını $\operatorname{cosec} x$ e dönüştüren fonksiyona **kosekant fonksiyonu** denir.

$f : \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R} - (-1,1)$, $f(x) = \operatorname{cosec} x$ şeklinde tanımlanır.

Şekil 1.2.7'ye göre $\widehat{OPK} \sim \widehat{OSP}$ $(A.A.) \Rightarrow \dfrac{|OP|}{|OS|} = \dfrac{|OK|}{|OP|}$

$$\frac{1}{\sec\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$\widehat{POL} \sim \widehat{COP}$ $(A.A.) \Rightarrow \dfrac{|PO|}{|CO|} = \dfrac{|OL|}{|OP|}$

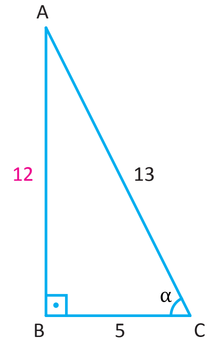
$$\frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1}$$

$\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$ eşitlikleri elde edilir.

14. ÖRNEK

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ olduğuna göre $\frac{\cot\alpha + \operatorname{cosec}\alpha}{\tan\alpha}$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

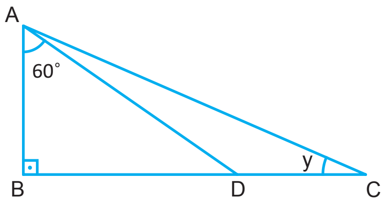


$\cos\alpha = \frac{5}{13}$ ise ABC dik üçgeninde $|AB| = 12$ birimdir.
Buna göre

$\cot\alpha = \frac{5}{12}$, $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{13}{12}$, $\tan\alpha = \frac{12}{5}$ olur.

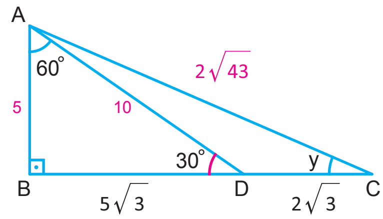
$$\frac{\cot\alpha + \operatorname{cosec}\alpha}{\tan\alpha} = \frac{\frac{5}{12} + \frac{13}{12}}{\frac{12}{5}} = \frac{\frac{18}{12}}{\frac{12}{5}} = \frac{18}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{8}$$ bulunur.

15. ÖRNEK



Şekildeki ABC üçgeninde
$|BD| = 5\sqrt{3}$ cm
$|DC| = 2\sqrt{3}$ cm
$m(\widehat{BAD}) = 60°$
$m(\widehat{BCA}) = y$ olsun.
Buna göre $\operatorname{cosec} y$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



ABD üçgeni $30° - 60° - 90°$ özel dik üçgenidir.

$|AB| = 5$, $|AD| = 10$ ve ABC dik üçgeninde Pisagor teoreminden

$$|AC|^2 = |BC|^2 + |AB|^2 \Rightarrow |AC|^2 = (7\sqrt{3})^2 + 5^2$$
$$= 49 \cdot 3 + 25$$
$$= 147 + 25$$
$$= 172$$

$|AC| = 2\sqrt{43}$ cm bulunur. Buradan $\operatorname{cosec} y = \frac{2\sqrt{43}}{5}$ elde edilir.

16. ÖRNEK

$x \neq k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x} + 2\cot x}$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x} + 2\cot x} = \sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} + 2 \cdot \frac{\cos x}{\sin x}} = \sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x + 2 \cdot \cos x \cdot \sin x}{\sin^2 x}}$$
$$= \sqrt{\frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin^2 x}}$$
$$= \left|\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}\right|$$
$$= \left|\frac{\sin x}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right| = |1 + \cot x|$$ bulunur.

17. ÖRNEK

Tanımlı olduğu yerlerde $\operatorname{cosec} x + \dfrac{1 - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{\cos x - \sin x} - \dfrac{\cot x}{\sec x}$ ifadesinin en sade şeklini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}
\operatorname{cosec} x + \frac{1 - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{\cos x - \sin x} - \frac{\cot x}{\sec x} &= \frac{1}{\sin x} + \frac{\cos^2 x + \sin^2 x - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{\cos x - \sin x} - \cos x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \\
&= \frac{1}{\sin x} + \frac{(\cos x - \sin x)^2}{\cos x - \sin x} - \frac{\cos^2 x}{\sin x} \\
&= \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x} + \cos x - \sin x \\
&= \frac{\sin^2 x}{\sin x} + \cos x - \sin x \\
&= \sin x + \cos x - \sin x \\
&= \cos x \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

18. ÖRNEK

Tanımlı olduğu yerlerde $\dfrac{\cos x - \sec x}{\sec x} + \tan^2 x \cdot \cos^2 x$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}
\frac{\cos x - \sec x}{\sec x} + \tan^2 x \cdot \cos^2 x &= \frac{\cos x - \dfrac{1}{\cos x}}{\dfrac{1}{\cos x}} + \frac{\sin^2 x}{\cancel{\cos^2 x}} \cdot \cancel{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x - 1}{\cancel{\cos x}} \cdot \frac{\cancel{\cos x}}{1} + \sin^2 x \\
&= \cos^2 x - 1 + \sin^2 x \\
&= \underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{1} - 1 \\
&= 1 - 1 = 0 \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

Sıra Sizde

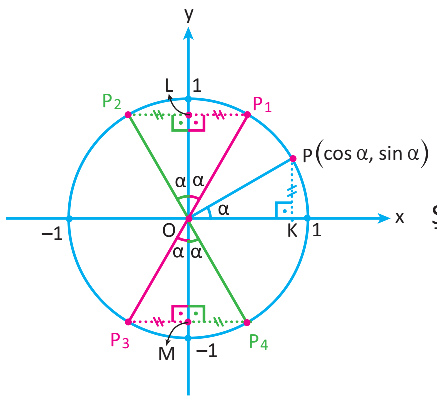
SORU

Tanımlı olduğu yerlerde $\dfrac{\sin x}{\cot x + \operatorname{cosec} x} - \dfrac{\sin x}{\cot x - \operatorname{cosec} x}$ ifadesinin en sade şeklini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\frac{k\pi}{2} \mp \alpha$ Şeklindeki Açılarının Trigonometrik Oranları

1. k nin Tek Tam Sayı Olması Hâli



Şekil 1.2.8

Şekil 1.2.8'de α açısının bitim kenarının birim çemberi kestiği nokta $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$ olur.

$[PK] \perp Ox$ olduğundan $\widehat{KOP}$ dik üçgen olur.

$P_1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)$ ve $P_2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)$ olmak üzere

$\widehat{KOP} \cong \widehat{LOP_1} \cong \widehat{LOP_2}$ bulunur.

1. $\widehat{KOP} \cong \widehat{LOP_1}$ için $|KO| = |LO|$, $|OP| = |OP_1|$, $|KP| = |LP_1|$ olur. Buradan

$$\left.\begin{array}{l} |LP_1| = |KP| \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha \\ |LO| = |KO| \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha \end{array}\right\} P_1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right) = P_1(\sin\alpha, \cos\alpha) \text{ ve}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha \Rightarrow \cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \tan\alpha \text{ elde edilir.}$$

2. $\widehat{KOP} \cong \widehat{LOP_2}$ için $|KO| = |LO|$, $|OP| = |OP_2|$, $|KP| = |LP_2|$ olur. Buradan

$$\left.\begin{array}{l} |LP_2| = |KP| \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha \\ |LO| = |KO| \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha \end{array}\right\} P_2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right) = P_2(-\sin\alpha, \cos\alpha) \text{ ve}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\cot\alpha \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha \Rightarrow \cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\tan\alpha \text{ elde edilir.}$$

$P_3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right), \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right)$ ve $P_4\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right), \sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\right)$ olmak üzere

$\widehat{KOP} \cong \widehat{MOP_3} \cong \widehat{MOP_4}$ bulunur.

3. $\widehat{KOP} \cong \widehat{MOP_3}$ için $|KO| = |MO|$, $|OP| = |OP_3|$, $|KP| = |MP_3|$ olur. Buradan

$$\left.\begin{array}{l} |MP_3| = |KP| \Rightarrow \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -\sin\alpha \\ |MO| = |KO| \Rightarrow \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -\cos\alpha \end{array}\right\} P_3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right), \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right) = P_3(-\sin\alpha, -\cos\alpha) \text{ ve}$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \cot\alpha \Rightarrow \tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = \cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \tan\alpha \Rightarrow \cot\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = \tan\alpha \text{ elde edilir.}$$

4. $\widehat{KOP} \cong \widehat{MOP_4}$ için $|KO| = |MO|$, $|OP| = |OP_4|$, $|KP| = |MP_4|$ olur. Buradan

$$\left.\begin{array}{l} |MP_4| = |KP| \Rightarrow \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = \sin\alpha \\ |MO| = |KO| \Rightarrow \sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\cos\alpha \end{array}\right\} P_4\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right), \sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\right) = P_4(\sin\alpha, -\cos\alpha) \text{ ve}$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)} = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\cot\alpha \Rightarrow \tan\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\tan\alpha \Rightarrow \cot\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\tan\alpha \text{ elde edilir.}$$

19. ÖRNEK

Aşağıda verilen ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) $\cos 120^\circ$

b) $\sin\frac{5\pi}{6}$

c) $\tan 240^\circ$

ç) $\cos\frac{7\pi}{6}$

ÇÖZÜM

a) $\cos 120^\circ = \cos(90^\circ + 30^\circ)$

$= -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$ bulunur.

b) $\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ bulunur.

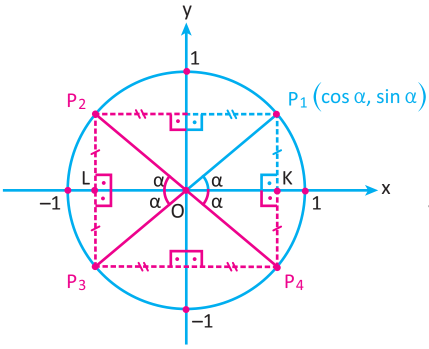
c) $\tan 240^\circ = \tan(270^\circ - 30^\circ)$

$= \cot 30^\circ = \sqrt{3}$ bulunur.

ç) $\cos\frac{7\pi}{6} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$

$= -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ bulunur.

2. k nin Çift Tam Sayı Olması Hâli



Şekil 1.2.9

Şekil 1.2.9'da α açısının bitim kenarının birim çemberi kestiği nokta $P_1(\cos\alpha, \sin\alpha)$ olur. $[P_1K] \perp Ox$ olduğundan $\widehat{KOP_1}$ dik üçgen olur.

1. $P_1(\cos\alpha, \sin\alpha)$ ve $P_2(\cos(\pi-\alpha), \sin(\pi-\alpha))$ olmak üzere $\widehat{KOP_1} \cong \widehat{LOP_2}$ bulunur.
$\widehat{KOP_1} \cong \widehat{LOP_2}$ ise $|KO|=|LO|, |OP_1|=|OP_2|, |KP_1|=|LP_2|$ olur. Buradan

$$\left.\begin{array}{l} |LP_2|=|KP_1| \Rightarrow \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha \\ |LO|=|KO| \Rightarrow \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha \end{array}\right\} P_2(\cos(\pi-\alpha), \sin(\pi-\alpha))=P_2(-\cos\alpha, \sin\alpha) \text{ ve}$$

$$\tan(\pi-\alpha)=\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-\tan\alpha \Rightarrow \tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$

$$\cot(\pi-\alpha)=\frac{\cos(\pi-\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)}=\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\cot\alpha \Rightarrow \cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha \text{ elde edilir.}$$

2. $P_1(\cos\alpha, \sin\alpha)$ ve $P_3(\cos(\pi+\alpha), \sin(\pi+\alpha))$ olmak üzere $\widehat{KOP_1} \cong \widehat{LOP_3}$ bulunur..
$\widehat{KOP_1} \cong \widehat{LOP_3}$ ise $|KO|=|LO|, |OP_1|=|OP_3|, |KP_1|=|LP_3|$ olur. Buradan

$$\left.\begin{array}{l} |LP_3|=|KP_1| \Rightarrow \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha \\ |LO|=|KO| \Rightarrow \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha \end{array}\right\} P_3(\cos(\pi+\alpha), \sin(\pi+\alpha))=P_3(-\cos\alpha, -\sin\alpha)$$

$$\tan(\pi+\alpha)=\frac{\sin(\pi+\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\tan\alpha \Rightarrow \tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$$

$$\cot(\pi+\alpha)=\frac{\cos(\pi+\alpha)}{\sin(\pi+\alpha)}=\frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha}=\cot\alpha \Rightarrow \cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha \text{ elde edilir.}$$

3. $P_1(\cos\alpha, \sin\alpha)$ ve $P_4(\cos(2\pi-\alpha), \sin(2\pi-\alpha))$ olmak üzere $\widehat{KOP_1} \cong \widehat{KOP_4}$ bulunur.
$\widehat{KOP_1} \cong \widehat{KOP_4}$ ise $|KO|=|KO|, |OP_1|=|OP_4|, |KP_1|=|KP_4|$ olur. Buradan

$$\left.\begin{array}{l} |KP_4|=|KP_1| \Rightarrow \sin(2\pi-\alpha)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha \\ |KO|=|KO| \Rightarrow \cos(2\pi-\alpha)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha \end{array}\right\} P_4(\cos(2\pi-\alpha), \sin(2\pi-\alpha))=P_4(\cos\alpha, -\sin\alpha)$$

ve

$$\tan(2\pi-\alpha)=\frac{\sin(2\pi-\alpha)}{\cos(2\pi-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\tan\alpha \Rightarrow \tan(2\pi-\alpha)=\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$

$$\cot(2\pi-\alpha)=\frac{\cos(2\pi-\alpha)}{\sin(2\pi-\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\cot\alpha \Rightarrow \cot(2\pi-\alpha)=\cot(-\alpha)=-\cot\alpha \text{ elde edilir.}$$

4. $0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$ olmak üzere
$\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha$
$\cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha$

$$\tan(2\pi+\alpha)=\frac{\sin(2\pi+\alpha)}{\cos(2\pi+\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha \Rightarrow \tan(2\pi+\alpha)=\tan\alpha$$

$$\cot(2\pi+\alpha)=\frac{\cos(2\pi+\alpha)}{\sin(2\pi+\alpha)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cot\alpha \Rightarrow \cot(2\pi+\alpha)=\cot\alpha \text{ olur.}$$

20. ÖRNEK

Aşağıda verilen ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) $\sin 150^\circ$ b) $\tan \frac{3\pi}{4}$

c) $\cot 210^\circ$ ç) $\cos \frac{4\pi}{3}$

d) $\tan 300^\circ$ e) $\sin \frac{7\pi}{4}$

ÇÖZÜM

a) $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ)$
$= \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ bulunur.

b) $\tan \frac{3\pi}{4} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$
$= -\tan \frac{\pi}{4} = -1$ bulunur.

c) $\cot 210^\circ = \cot(180^\circ + 30^\circ)$
$= \cot 30^\circ = \sqrt{3}$ bulunur.

ç) $\cos \frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$
$= -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ bulunur.

d) $\tan 300^\circ = \tan(360^\circ - 60^\circ)$
$= -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$ bulunur.

e) $\sin \frac{7\pi}{4} = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$
$= -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ bulunur.

21. ÖRNEK

Aşağıda verilen ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) $\cos 420^\circ$

b) $\cot \frac{7\pi}{3}$

ÇÖZÜM

a) $\cos 420^\circ = \cos(360^\circ + 60^\circ)$
$= \cos 60^\circ$
$= \frac{1}{2}$ bulunur.

b) $\cot \frac{7\pi}{3} = \cot\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right)$
$= \cot \frac{\pi}{3}$
$= \frac{\sqrt{3}}{3}$ bulunur.

22. ÖRNEK

$\tan(-45^\circ) - 2 \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \cos 330^\circ - \frac{1}{2} \cdot \cot \frac{7\pi}{6}$ ifadesinin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$\tan(-45^\circ) - 2 \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \cos 330^\circ - \frac{1}{2} \cdot \cot \frac{7\pi}{6}$

$= \tan(360^\circ - 45^\circ) - 2 \cdot \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \cos(360^\circ - 30^\circ) - \frac{1}{2} \cdot \cot\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$= -\tan 45^\circ - 2 \cdot (-1) \cdot \sin \frac{\pi}{6} + \cos 30^\circ - \frac{1}{2} \cdot \cot \frac{\pi}{6}$

$= -1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$

$= 0$ bulunur.

23. ÖRNEK

$\cos(5\pi+\beta)+\sin(6\pi-\beta)-\cos(\beta-7\pi)+\sin(\beta-8\pi)$ ifadesinin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$5\pi = 2\cdot 2\pi+\pi$ ve $-7\pi=(-4)\cdot 2\pi+\pi$ olduğundan
5π ve -7π açılarının esas olçüsü π radyandır.

$6\pi = 3\cdot 2\pi+0$ ve $-8\pi=(-4)\cdot 2\pi+0$ olduğundan 6π ve -8π açılarının esas ölçüsü 0 radyandır.

Bu durumda

$$\begin{aligned}\cos(5\pi+\beta)+\sin(6\pi-\beta)-\cos(\beta-7\pi)+\sin(\beta-8\pi) &= \cos(\pi+\beta)+\sin(-\beta)-\cos(\pi+\beta)+\sin\beta\\ &= -\cos\beta+\sin(2\pi-\beta)-(-\cos\beta)+\sin\beta\\ &= -\cancel{\cos\beta}-\cancel{\sin\beta}+\cancel{\cos\beta}+\cancel{\sin\beta}\\ &= 0 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Sıra Sizde

SORU

Aşağıdaki trigonometrik ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) $\cos 150^\circ$ b) $\cot 330^\circ$

c) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ ç) $\sin 840^\circ$

d) $\tan\frac{2\pi}{3}$ e) $\cos\frac{27\pi}{4}$

f) $\tan 1215^\circ$ g) $\cot\left(-\frac{44\pi}{3}\right)$

ÇÖZÜM

24. ÖRNEK

Tanımlı olduğu yerlerde $f(x) = \sin(\pi + x) + \cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ olduğuna göre $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + \cot\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\sin\frac{\pi}{3} + \tan\frac{\pi}{3} - \left(-\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \cancel{-\frac{\sqrt{3}}{2}} + \sqrt{3} + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$= \sqrt{3}$ bulunur.

25. ÖRNEK

$A = \tan 15^\circ \cdot \tan 16^\circ \cdot \tan 17^\circ \cdot \ldots \cdot \tan 75^\circ$ ifadesinin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$\alpha + \beta = 90^\circ$ ise $\tan\alpha = \cot\beta$ ve $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$ olduğundan

$$A = \tan 15^\circ \cdot \tan 16^\circ \cdot \tan 17^\circ \cdot \ldots \cdot \tan 75^\circ$$

$$= \tan 15^\circ \cdot \tan 16^\circ \cdot \ldots \cdot \tan 44^\circ \cdot \tan 45^\circ \cdot \tan 46^\circ \cdot \ldots \cdot \tan 74^\circ \cdot \tan 75^\circ$$

$$= \tan 15^\circ \cdot \tan 16^\circ \cdot \ldots \cdot \tan 44^\circ \cdot \tan 45^\circ \cdot \cot 44^\circ \cdot \ldots \cdot \cot 16^\circ \cdot \cot 15^\circ$$

$$= \underbrace{\tan 15^\circ \cdot \cot 15^\circ}_{1} \cdot \underbrace{\tan 16^\circ \cdot \cot 16^\circ}_{1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\tan 44^\circ \cdot \cot 44^\circ}_{1} \cdot \underbrace{\tan 45^\circ}_{1}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 1$$

$= 1$ bulunur.

26. ÖRNEK

$A = \dfrac{\cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \ldots + \cos^2 88^\circ + \cos^2 89^\circ}{\cot 25^\circ \cdot \cot 26^\circ \cdot \ldots \cdot \cot 65^\circ}$ ifadesinin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$\alpha + \beta = 90^\circ$ ise $\tan\alpha = \cot\beta$ ve $\sin\alpha = \cos\beta$, $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$ ve $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ olur.

$$A = \frac{\cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \ldots + \cos^2 88^\circ + \cos^2 89^\circ}{\cot 25^\circ \cdot \cot 26^\circ \cdot \ldots \cdot \cot 65^\circ}$$

$$= \frac{\cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \ldots + \cos^2 45^\circ + \ldots + \sin^2 2^\circ + \sin^2 1^\circ}{\cot 25^\circ \cdot \cot 26^\circ \cdot \ldots \cdot \cot 45^\circ \cdot \ldots \cdot \tan 26^\circ \cdot \tan 25^\circ}$$

$$= \frac{\overbrace{\cos^2 1^\circ + \sin^2 1^\circ}^{1} + \overbrace{\cos^2 2^\circ + \sin^2 2^\circ}^{1} + \ldots + \overbrace{\cos^2 45^\circ}^{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}}}{\underbrace{\cot 25^\circ \cdot \tan 25^\circ}_{1} \cdot \underbrace{\cot 26^\circ \cdot \tan 26^\circ}_{1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\cot 45^\circ}_{1}}$$

$= \dfrac{44 + \frac{1}{2}}{1} = \dfrac{89}{2}$ bulunur.

27. ÖRNEK

A, B ve C bir üçgenin iç açılarının ölçüleri olmak üzere $\dfrac{\cot\dfrac{B+C}{2}\cdot\cot\dfrac{A}{2}}{\sin^2\dfrac{B}{2}+\sin^2\dfrac{A+C}{2}}$ ifadesinin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$A+B+C=180^\circ$, $B+C=180^\circ-A$ ve $A+C=180^\circ-B$ olur. Buradan

$$\frac{\cot\left(\frac{B+C}{2}\right)\cdot\cot\left(\frac{A}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{B}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{A+C}{2}\right)}=\frac{\cot\left(\frac{180^\circ-A}{2}\right)\cdot\cot\left(\frac{A}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{B}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{180^\circ-B}{2}\right)}$$

$$=\frac{\cot\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)\cdot\cot\left(\frac{A}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{B}{2}\right)+\sin^2\left(90^\circ-\frac{B}{2}\right)}$$

$$=\frac{\tan\left(\frac{A}{2}\right)\cdot\cot\left(\frac{A}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{B}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{B}{2}\right)}=\frac{1}{1}=1 \text{ bulunur.}$$

28. ÖRNEK

$\cos 18^\circ=m$ olmak üzere $\dfrac{1+\sin^2 72^\circ-\cot^2 165^\circ\cdot\cot^2 285^\circ}{\cos 198^\circ}$ ifadesinin m türünden eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{1+\sin^2 72^\circ-\cot^2 165^\circ\cdot\cot^2 285^\circ}{\cos 198^\circ}=\frac{1+\cos^2 18^\circ-\cot^2(180^\circ-15^\circ)\cdot\cot^2(270^\circ+15^\circ)}{\cos(180^\circ+18^\circ)}$$

$$=\frac{1+m^2-(-\cot 15^\circ)^2\cdot(-\tan 15^\circ)^2}{-\cos 18^\circ}$$

$$=\frac{1+m^2-(\cot 15^\circ\cdot\tan 15^\circ)^2}{-m}$$

$$=\frac{1+m^2-1}{-m}=-\frac{m^2}{m}=-m \text{ bulunur.}$$

29. ÖRNEK

Tanımlı olduğu yerlerde $x+y=\frac{\pi}{2}$ olduğuna göre $\cot(4x+5y)\cdot\cot(5x+4y)$ çarpımının değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\cot(4x+5y)\cdot\cot(5x+4y)=\cot(4\cdot(x+y)+y)\cdot\cot(4\cdot(x+y)+x)$$

$$=\cot\left(4\cdot\frac{\pi}{2}+y\right)\cdot\cot\left(4\cdot\frac{\pi}{2}+x\right)$$

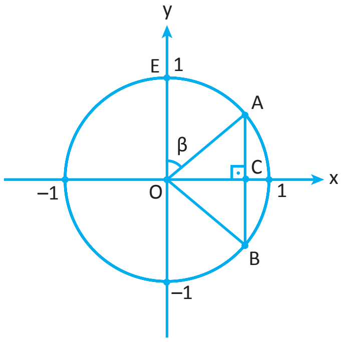
$$=\cot(2\pi+y)\cdot\cot(2\pi+x)$$

$$=\cot y\cdot\cot x \quad \left(x+y=\frac{\pi}{2} \text{ ise } \cot y=\tan x\right)$$

$$=\tan x\cdot\cot x$$

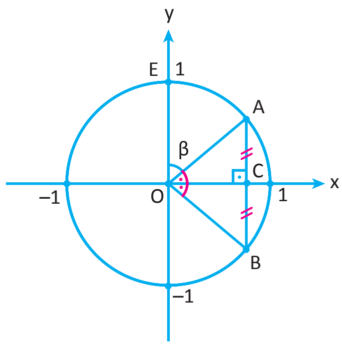
$$=1 \text{ bulunur.}$$

30. ÖRNEK



Şekildeki
O merkezli birim çemberde
$[OC] \perp [AB]$ ve $m(\widehat{AOE}) = \beta$
olduğuna göre
$A(\widehat{AOB})$ nı bulunuz.

ÇÖZÜM



$m(\widehat{AOC}) = 90° - \beta$ olduğundan

$\sin(\widehat{AOC}) = \sin(90° - \beta) = \dfrac{|AC|}{1} = |AC| = \cos\beta$ olur.

$|OA| = |OB| = 1$ birim olduğundan AOB ikizkenar üçgendir. [AB] tabanına ait yükseklik hem kenarortay hem de açıortaydır.

$|AB| = 2 \cdot |AC|$ olduğundan $|AB| = 2 \cdot \cos\beta$ olur.

$\cos(\widehat{AOC}) = \cos(90° - \beta) = \dfrac{|CO|}{1} = |CO| = \sin\beta$ bulunur.

O hâlde $A(\widehat{AOB}) = \dfrac{|AB| \cdot |CO|}{2} = \dfrac{\cancel{2} \cdot \cos\beta \cdot \sin\beta}{\cancel{2}} = \cos\beta \cdot \sin\beta$ elde edilir.

31. ÖRNEK

$\dfrac{\pi}{2} < -x < \pi$ ve $\sin x = -\dfrac{3}{5}$ olduğuna göre $\dfrac{\sec(-x) + \tan(x+\pi)}{\cot(\pi + x)}$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\dfrac{\pi}{2} < -x < \pi \Rightarrow -\dfrac{\pi}{2} > x > -\pi$ olur.

Bu durumda x açısı 3. bölgede olur.
Buna göre $\sin x = -\dfrac{3}{5}$ olduğundan 3-4-5 özel dik üçgeninden ve trigonometrik oranların bölgelerdeki işaret incelemesinden

$\cos x = -\dfrac{4}{5}$, $\tan x = \dfrac{3}{4}$, $\cot x = \dfrac{4}{3}$

$\sec(-x) = \dfrac{1}{\cos(-x)} = \dfrac{1}{\cos x} = -\dfrac{5}{4}$ elde edilir. $(\cos(2\pi - x) = \cos(-x))$

Bulunan değerler istenilen ifadede yerine yazılırsa

$$\dfrac{\sec(-x) + \tan(x+\pi)}{\cot(\pi + x)} = \dfrac{\sec x + \tan x}{\cot x} \quad (\sec(2\pi - x) = \sec(-x))$$

$$= \dfrac{-\dfrac{5}{4} + \dfrac{3}{4}}{\dfrac{4}{3}} = -\dfrac{2}{4} \cdot \dfrac{3}{4} = -\dfrac{3}{8} \text{ bulunur.}$$

32. ÖRNEK

Tanımlı olduğu yerlerde $\dfrac{\cos(9\pi-\alpha)+\sin\left(\dfrac{19\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos(8\pi+\alpha)+\sin\left(\dfrac{81\pi}{2}+\alpha\right)}$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{\cos(9\pi-\alpha)+\sin\left(\dfrac{19\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos(8\pi+\alpha)+\sin\left(\dfrac{81\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\cos(8\pi+\pi-\alpha)+\sin\left(8\pi+\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos(8\pi+\alpha)+\sin\left(40\pi+\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}$$

$$=\frac{\cos(\pi-\alpha)+\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos(\alpha)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}$$

$$=\frac{-\cos\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha+\cos\alpha}$$

$$=\frac{-2\cos\alpha}{2\cos\alpha}=-1 \text{ bulunur.}$$

33. ÖRNEK

$\dfrac{\tan 315^\circ-\sin 240^\circ}{\cot 855^\circ+\cos 480^\circ}$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{\tan 315^\circ-\sin 240^\circ}{\cot 855^\circ+\cos 480^\circ}=\frac{\tan(360^\circ-45^\circ)-\sin(180^\circ+60^\circ)}{\cot(2\cdot 360^\circ+135^\circ)+\cos(360^\circ+120^\circ)}$$

$$=\frac{-\tan 45^\circ-(-\sin 60^\circ)}{\cot 135^\circ+\cos 120^\circ}=\frac{-1-\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\cot(180^\circ-45^\circ)+\cos(180^\circ-60^\circ)}$$

$$=\frac{-1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{-\cot 45^\circ-\cos 60^\circ}$$

$$=\frac{-1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{-1-\dfrac{1}{2}}=\frac{\dfrac{-2+\sqrt{3}}{2}}{-\dfrac{3}{2}}=\frac{-2+\sqrt{3}}{-3}=\frac{2-\sqrt{3}}{3} \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

SORU

$\tan 12^\circ = m$ olmak üzere $\dfrac{\cos 348^\circ\cdot\sin 192^\circ}{\tan 258^\circ+\tan 102^\circ-1}$ ifadesinin m türünden eşitini bulunuz.

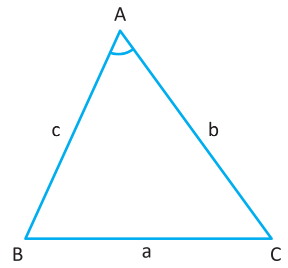
ÇÖZÜM

2. Kosinüs Teoremi

Bu teorem ile bir üçgende iki kenar uzunluğu ve bu kenarlar arasındaki açı veya bu açının kosinüsü verildiğinde diğer kenar uzunluğunu bulmayı öğreneceksiniz.

$\overset{\frown}{ABC}$ nin kenar uzunlukları a, b, c ve bu kenarları gören açılar $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ ve $\widehat{C}$ olmak üzere

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\widehat{A}$ bağıntısı yazılabilir (Şekil 1.2.10).



Şekil 1.2.10

İspat

$[AB] \perp [CH]$ olacak şekilde AB kenarına ait yükseklik $[CH]$ olsun.

Şekil 1.2.11'deki $\overset{\frown}{AHC}$ dik üçgeninde

$\cos\widehat{A} = \dfrac{|AH|}{b}$ ve $\sin\widehat{A} = \dfrac{|HC|}{b}$ olduğundan

$|AH| = b \cdot \cos\widehat{A}$ ve $|HC| = b \cdot \sin\widehat{A}$ yazılabilir.

$\overset{\frown}{BHC}$ dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

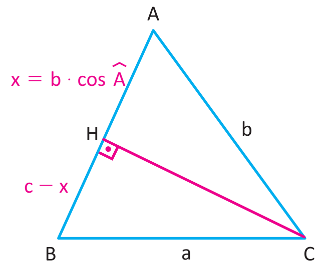
$|BC|^2 = |BH|^2 + |HC|^2$

$$a^2 = (c - b \cdot \cos\widehat{A})^2 + (b \cdot \sin\widehat{A})^2$$

$$a^2 = c^2 - 2bc \cdot \cos\widehat{A} + b^2 \cdot \cos^2\widehat{A} + b^2 \cdot \sin^2\widehat{A}$$

$$a^2 = b^2 \cdot \underbrace{(\sin^2\widehat{A} + \cos^2\widehat{A})}_{1} + c^2 - 2bc \cdot \cos\widehat{A}$$

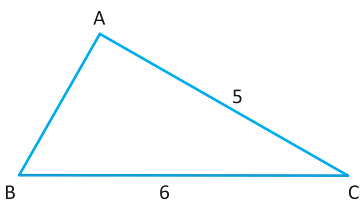
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\widehat{A}$ elde edilir.



Şekil 1.2.11

Herhangi bir üçgende bir kenar uzunluğunun karesi, diğer iki kenar uzunluğunun kareleri toplamından bu kenar uzunlukları ile bu iki kenar arasındaki açının kosinüs değerinin çarpımının iki katının çıkarılmasıyla elde edilir.

1. ÖRNEK



Şekildeki ABC üçgeninde $2 \cdot |AB| = |BC| = 6$ cm ve $|AC| = 5$ cm olduğuna göre $\cos\widehat{A}$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

ABC üçgeninde Kosinüs teoremi uygulanırsa

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\widehat{A}$

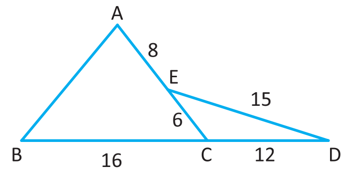
$6^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos\widehat{A}$

$36 = 25 + 9 - 30 \cdot \cos\widehat{A} \Rightarrow 36 - 34 = -30 \cdot \cos\widehat{A}$

$2 = -30 \cdot \cos\widehat{A}$

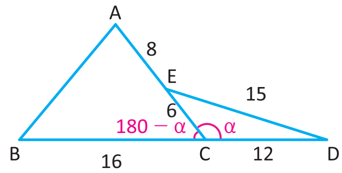
$\cos\widehat{A} = -\dfrac{2}{30} = -\dfrac{1}{15}$ bulunur.

2. ÖRNEK



Yandaki şekilde B, C, D noktaları ve A, E, C noktaları doğrusal
$|AE| = 8$ cm, $|EC| = 6$ cm, $|DE| = 15$ cm, $|BC| = 16$ cm
ve $|CD| = 12$ cm olduğuna göre
$|AB|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



$m(\widehat{DCA}) = \alpha$ olarak seçilirse $m(\widehat{ACB}) = 180^\circ - \alpha$ olur.
$\overset{\frown}{ECD}$ nde Kosinüs teoremi uygulanırsa

$$15^2 = 6^2 + 12^2 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \cos\alpha$$
$$225 = 36 + 144 - 144 \cdot \cos\alpha$$
$$225 = 180 - 144 \cdot \cos\alpha \Rightarrow 144 \cdot \cos\alpha = 180 - 225$$
$$144 \cdot \cos\alpha = -45$$
$$\cos\alpha = -\frac{45}{144} = -\frac{5}{16} \text{ elde edilir.}$$

$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ olduğundan $\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{5}{16}$ bulunur.

$\overset{\frown}{ABC}$ nde Kosinüs teoreminden

$$|AB|^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$
$$= 16^2 + 14^2 - 2 \cdot 16 \cdot 14 \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$
$$= 256 + 196 - 448 \cdot \frac{5}{16}$$
$$= 452 - 140$$
$$= 312 \Rightarrow |AB| = \sqrt{312} = \sqrt{4 \cdot 78} = 2\sqrt{78} \text{ cm bulunur.}$$

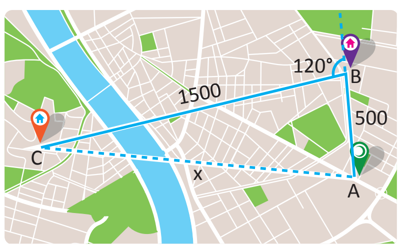
3. ÖRNEK

Buse iş çıkışı her gün anneanne ve dedesini ziyaret edip eve gitmektedir. Buse, işten çıkıp kuzey yönünde $0,5$ km yürüdükten sonra anneanne ve dedesinin evine varıyor. Ziyaret sonrası kuzey ile 120° lik açı yaparak $1,5$ km yürüdükten sonra eve varıyor.

Buna göre Buse'nin iş yeri ile evi arasındaki uzaklığın yaklaşık kaç km olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

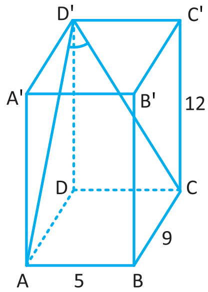
Yandaki şekilde bulunan ABC üçgeninde Kosinüs teoreminden



$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos 60^\circ$$
$$= (1,5)^2 + (0,5)^2 - 2 \cdot (1,5) \cdot (0,5) \cdot \frac{1}{2}$$
$$= 2,25 + 0,25 - 0,75$$
$$= 1,75$$

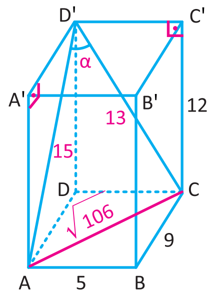
$|AC| \cong 1,3228$ km bulunur.

4. ÖRNEK



Şekildeki dikdörtgenler prizmasında $|AB| = 5$ cm, $|BC| = 9$ cm ve $|CC'| = 12$ cm olduğuna göre $\cos(\widehat{AD'C})$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



$m(\widehat{AD'C}) = \alpha$ olsun.

$\widehat{ADD'}$ 9-12-15 özel dik üçgeni olduğundan $|AD'| = 15$ cm ve

$\widehat{CDD'}$ 5-12-13 özel dik üçgeni olduğundan $|CD'| = 13$ cm bulunur.

ADC dik üçgeninde $|AD| = 9$ cm ve $|DC| = 5$ cm olduğundan

Pisagor teoreminden

$|AC| = \sqrt{5^2 + 9^2} = \sqrt{25 + 81} = \sqrt{106}$ cm bulunur.

Buna göre $\widehat{AD'C}$ nde Kosinüs teoremi uygulanırsa

$$|AC|^2 = |AD'|^2 + |D'C|^2 - 2 \cdot |AD'| \cdot |D'C| \cdot \cos\alpha$$

$$(\sqrt{106})^2 = 15^2 + 13^2 - 2 \cdot 15 \cdot 13 \cdot \cos\alpha$$

$$106 = 225 + 169 - 390 \cdot \cos\alpha$$

$$106 = 394 - 390 \cdot \cos\alpha \Rightarrow 390 \cdot \cos\alpha = 288$$

$$\cos\alpha = \frac{288}{390} = \frac{48}{65} \text{ bulunur.}$$

5. ÖRNEK

Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları a, b, c ve $b \neq c$ olmak üzere $b \cdot a^2 - b^3 + c^3 = a^2 \cdot c$ bağıntısı olduğuna göre $m(\widehat{A}) = \alpha$ nın radyan cinsinden değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$b \cdot a^2 - b^3 + c^3 = a^2 \cdot c \Rightarrow b \cdot a^2 - a^2 \cdot c - (b^3 - c^3) = 0$$

$$a^2 \cdot (b - c) - [(b - c) \cdot (b^2 + b \cdot c + c^2)] = 0$$

$$(b - c) \cdot [a^2 - (b^2 + b \cdot c + c^2)] = 0$$

$b - c \neq 0$ olduğundan $a^2 - (b^2 + b \cdot c + c^2) = 0$

$$a^2 = b^2 + b \cdot c + c^2$$

$$\underbrace{\cancel{b^2} + \cancel{c^2} - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\widehat{A}}_{a^2} = \cancel{b^2} + b \cdot c + \cancel{c^2}$$

$$-2 \cdot \cancel{b} \cdot \cancel{c} \cdot \cos\widehat{A} = \cancel{b} \cdot \cancel{c}$$

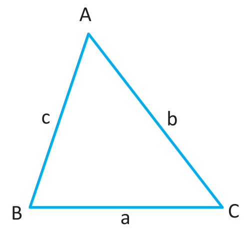
$$-2 \cdot \cos\widehat{A} = 1$$

$\cos\widehat{A} = -\frac{1}{2}$ olduğundan $m(\widehat{A}) = \alpha = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ radyan bulunur.

3. Sinüs Teoremi

Bir üçgende her kenarın uzunluğu, karşısındaki açının sinüs değeri ile doğru orantılıdır.

Şekil 1.2.12'deki ABC üçgeninin kenar uzunlukları a, b, c olmak üzere $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}}=\dfrac{b}{\sin\widehat{B}}=\dfrac{c}{\sin\widehat{C}}$ tir.



Şekil 1.2.12

İspat

Bir $\widehat{ABC}$ nde sinüslü alan formülünden

$$A(\widehat{ABC})=\frac{b\cdot c\cdot\sin\widehat{A}}{2}=\frac{a\cdot c\cdot\sin\widehat{B}}{2}=\frac{a\cdot b\cdot\sin\widehat{C}}{2}$$

olur. Buradan

$$\frac{b\cdot c\cdot\sin\widehat{A}}{\cancel{2}}=\frac{a\cdot c\cdot\sin\widehat{B}}{\cancel{2}}=\frac{a\cdot b\cdot\sin\widehat{C}}{\cancel{2}}$$

$$b\cdot c\cdot\sin\widehat{A}=a\cdot c\cdot\sin\widehat{B}=a\cdot b\cdot\sin\widehat{C}$$

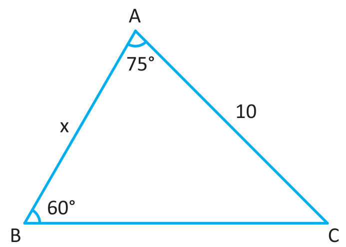
Eşitlik $a\cdot b\cdot c$ ile bölünürse

$$\frac{\cancel{b}\cdot\cancel{c}\cdot\sin\widehat{A}}{a\cdot\cancel{b}\cdot\cancel{c}}=\frac{\cancel{a}\cdot\cancel{c}\cdot\sin\widehat{B}}{\cancel{a}\cdot b\cdot\cancel{c}}=\frac{\cancel{a}\cdot\cancel{b}\cdot\sin\widehat{C}}{\cancel{a}\cdot\cancel{b}\cdot c}$$

$$\frac{\sin\widehat{A}}{a}=\frac{\sin\widehat{B}}{b}=\frac{\sin\widehat{C}}{c}\Rightarrow\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}$$

elde edilir.

1. ÖRNEK

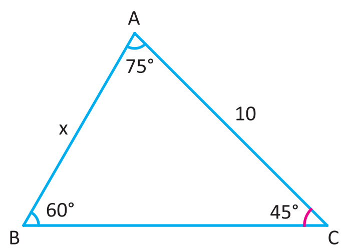


Şekildeki ABC üçgeninde
$|AC|=10$ cm
$m(\widehat{BAC})=75^\circ$
$m(\widehat{ABC})=60^\circ$ olduğuna göre
$|AB|=x$ değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Bir $\widehat{ABC}$ nde $m(\widehat{BAC})+m(\widehat{ABC})+m(\widehat{BCA})=180^\circ$ olduğundan

$m(\widehat{BCA})=180^\circ-(75^\circ+60^\circ)=45^\circ$ olur.



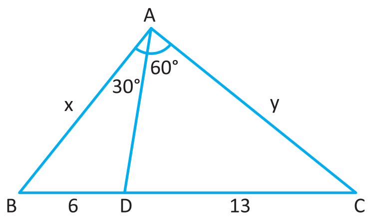
Sinüs teoreminden

$$\frac{x}{\sin\widehat{C}}=\frac{10}{\sin\widehat{B}}\Rightarrow\frac{x}{\sin 45^\circ}=\frac{10}{\sin 60^\circ}$$

$$\frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\overset{1}{\cancel{2}}x}{\sqrt{2}}=\frac{\overset{10}{\cancel{20}}}{\sqrt{3}}$$

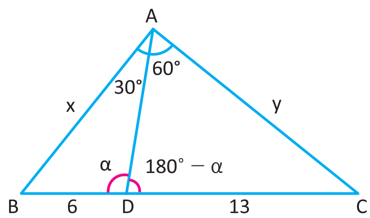
$$x=\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\Rightarrow x=\frac{10\sqrt{6}}{3}\text{ cm bulunur.}$$

2. ÖRNEK



Şekildeki ABC üçgeninde
$|BD| = 6$ cm
$|DC| = 13$ cm
$|AB| = x$
$|AC| = y$
$m(\widehat{BAD}) = 30°$
$m(\widehat{DAC}) = 60°$ olduğuna göre $\dfrac{x}{y}$ oranını bulunuz.

ÇÖZÜM



$m(\widehat{ADB}) = \alpha$ olsun. Buradan $m(\widehat{ADC}) = 180° - \alpha$ olur.

Şekildeki $\overset{\frown}{ABD}$ ve $\overset{\frown}{ADC}$ üçgenlerinde ayrı ayrı Sinüs teoremi uygulanırsa

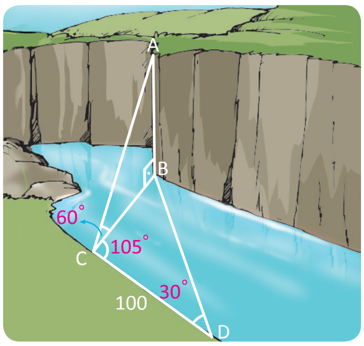
$\overset{\frown}{ABD}$ nde $\dfrac{x}{\sin\alpha} = \dfrac{6}{\sin 30°} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{x \cdot \sin 30°}{6}$ ve

$\overset{\frown}{ADC}$ nde $\dfrac{y}{\sin(180° - \alpha)} = \dfrac{13}{\sin 60°} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{y \cdot \sin 60°}{13}$ bulunur.

Buradan $\dfrac{x \cdot \sin 30°}{6} = \dfrac{y \cdot \sin 60°}{13}$

$$\frac{x}{y} = \frac{6 \cdot \sin 60°}{13 \cdot \sin 30°} = \frac{6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{13 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{6\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{13} = \frac{6\sqrt{3}}{13} \text{ elde edilir.}$$

3. ÖRNEK



Şekilde
$[AB] \perp [CB]$
$|CD| = 100$ m
$m(\widehat{ACB}) = 60°$
$m(\widehat{BCD}) = 105°$
$m(\widehat{BDC}) = 30°$ veriliyor.

Buna göre nehrin genişliğinin $(|CB|)$ ve uçurumun yüksekliğinin $(|AB|)$ kaç metre olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$\overset{\frown}{CBD}$ nde

$m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 180°$

$m(\widehat{B}) + 105° + 30° = 180°$

$m(\widehat{B}) = 45°$ olur.

$\overset{\frown}{CBD}$ nde Sinüs teoreminden $\dfrac{100}{\sin 45°} = \dfrac{|CB|}{\sin 30°} \Rightarrow \dfrac{100}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{|CB|}{\frac{1}{2}}$

$|CB| = 50\sqrt{2}$ m olur.

$\overset{\frown}{ABC}$ dik üçgeninden $\tan 60° = \dfrac{|AB|}{|CB|} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{|AB|}{50\sqrt{2}}$

$|AB| = 50\sqrt{6}$ m bulunur.

4. ÖRNEK

Kenar uzunlukları a, b, c cm olan $\overset{\frown}{ABC}$ nde $\dfrac{\sin \widehat{B}}{\sin \widehat{C}} = \dfrac{2}{3}$, $b + c = 15$ cm, $m(\widehat{A}) = 60^\circ$

olduğuna göre a değerinin kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$\overset{\frown}{ABC}$ nde Sinüs teoremi uygulanırsa $\dfrac{b}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin \widehat{C}} \Rightarrow \dfrac{\sin \widehat{B}}{\sin \widehat{C}} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{2}{3}$ olur.

$b = 2k$ ve $c = 3k$ alınırsa $b + c = 15$ olduğundan

$2k + 3k = 15 \Rightarrow 5k = 15$

$k = 3$ cm bulunur.

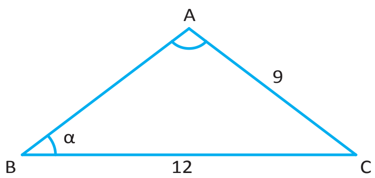
Bu durumda $b = 6$ cm ve $c = 9$ cm olur.

$\overset{\frown}{ABC}$ nde Kosinüs teoremi uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 60^\circ \\
&= 9^2 + 6^2 - 2 \cdot 9 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \\
&= 81 + 36 - 54 \\
&= 63 \Rightarrow a = 3\sqrt{7} \text{ cm olarak bulunur.}
\end{aligned}
$$

Sıra Sizde

SORU



Yandaki ABC üçgeninde

$m(\widehat{ABC}) = \alpha$

$m(\widehat{BAC}) = 90^\circ + \alpha$

$|AC| = 9$ cm

$|BC| = 12$ cm olduğuna göre

$\sin \alpha$ değerini bulunuz.

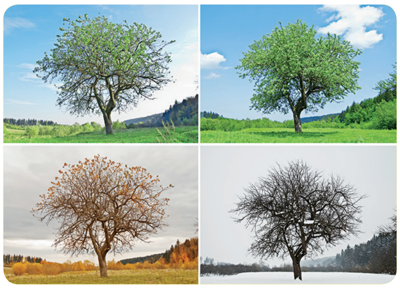
ÇÖZÜM

4. Trigonometrik Fonksiyonların Periyodu

Dünya, Güneş etrafındaki dönüşünü 365 gün 5 saat 49 dakika 12 saniyede tamamlar. Dünya'nın Güneş etrafındaki dönüşünü tamamlamak için geçen süre bir yıldır. Bir yıl, Dünya'nın Güneş etrafındaki dönüşünün periyodu olarak ifade edilebilir. Mevsimler, bu periyoda örnek olarak gösterilebilir (Görsel 1.2.1).

Ay'ın Dünya etrafındaki tur süresi 24 saattir. Ay'ın tur süresi periyot olarak ifade edilir.

Bir fonksiyona ait grafik, eşit aralıklarda tekrarlanıyorsa periyodik fonksiyon, grafiği de periyodik grafik olur.



Görsel 1.2.1

Periyodik Fonksiyonlar

Tanım

$f: A \to B$ bir fonksiyon olsun. $\forall x \in A$ için $f(x+T)=f(x)$ eşitliğini sağlayan en az bir $T \neq 0$ gerçek sayısı varsa f fonksiyonuna **periyodik fonksiyon**, T gerçek sayısına da f **fonksiyonunun bir periyodu** denir. Bu eşitliği sağlayan T sayılarından pozitif olanların en küçüğüne f fonksiyonunun **esas periyodu** denir. Bir fonksiyonun periyodu ifadesinden o fonksiyonun esas periyodu anlaşılacaktır.

$k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x \in \mathbb{R} \to [-1,1]$ için $\sin(x+k\cdot 2\pi)=\sin x$ ve $\cos(x+k\cdot 2\pi)=\cos x$ olduğundan sinüs ve kosinüs fonksiyonları periyodik fonksiyonlardır. Bu durumda $T=k\cdot 2\pi$ olur. T sayılarından pozitif olanların en küçüğü $k=1$ için 2π olduğundan periyot $T=2\pi$ olur.

$\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$ için $\tan(x+k\pi)=\tan x$,

$\mathbb{R}-\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$ için $\cot(x+k\pi)=\cot x$

olduğundan tanjant ve kotanjant fonksiyonları periyodik fonksiyonlardır. Bu durumda $T=k\cdot\pi$ olur. T sayılarından pozitif olanların en küçüğü $k=1$ için π olduğundan periyot $T=\pi$ olur.

f (x)=p · sin(ax+b)+c veya *g* (x)=p · cos(ax+b)+c Fonksiyonlarının Periyotları

$a \neq 0$ için $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=p\cdot\sin(ax+b)+c$ ve $g(x)=p\cdot\cos(ax+b)+c$ fonksiyonlarının periyodik olup olmadığı incelenir, periyodik ise periyodu aşağıdaki gibi bulunur.

$f(x+T)=f(x)$ olacak şekilde T sayısı bulunmalıdır.

$f(x+T)=p\cdot\sin(a\cdot(x+T)+b)+c=p\cdot\sin(ax+aT+b)+c$ olduğundan

$$\cancel{p}\cdot\sin(ax+aT+b)+\cancel{c}=\cancel{p}\cdot\sin(ax+b)+\cancel{c}$$

$$\sin(ax+aT+b)=\sin(ax+b)$$

$$\cancel{ax}+aT+\cancel{b}=\cancel{ax}+\cancel{b}+2\pi$$

$$aT=2\pi$$

$$T=\frac{2\pi}{a} \text{ bulunur.}$$

O hâlde $f(x)=p\cdot\sin(ax+b)+c$ periyodik fonksiyondur ve periyot $T=\frac{2\pi}{|a|}$ olur.

Benzer şekilde $g(x)=p\cdot\cos(ax+b)+c$ periyodik fonksiyondur ve periyodu $T=\frac{2\pi}{|a|}$ olur.

Sonuç

$a \neq 0$ için $f(x)=p\cdot\sin(ax+b)+c$ ve $g(x)=p\cdot\cos(ax+b)+c$ şeklindeki fonksiyonların periyodu $T=\frac{2\pi}{|a|}$ olur.

1. ÖRNEK

Aşağıdaki fonksiyonların periyotlarını bulunuz.

a) $f(x)=\sin(2x+5)$

b) $g(x)=-11\cdot\sin\left(\frac{5x-1}{3}\right)-9$

c) $h(x)=\cos(6x+2)$

ç) $k(x)=-6\cdot\cos\left(-\frac{7x+5}{4}\right)$

ÇÖZÜM

$f(x)=p\cdot\sin(ax+b)+c$ ve $g(x)=p\cdot\cos(ax+b)+c$ şeklindeki fonksiyonların periyodu $T=\frac{2\pi}{|a|}$ olur.

a) $f(x)=\sin(2x+5)$ fonksiyonunda $a=2$ olduğundan periyodu $T=\frac{2\pi}{|2|}=\pi$ bulunur.

b) $g(x)=-11\cdot\sin\left(\frac{5x-1}{3}\right)-9=-11\cdot\sin\left(\frac{5}{3}x+\left(-\frac{1}{3}\right)\right)-9$ fonksiyonunda $a=\frac{5}{3}$ olduğundan periyodu $T=\frac{2\pi}{\left|\frac{5}{3}\right|}=\frac{6\pi}{5}$ bulunur.

c) $h(x)=\cos(6x+2)$ fonksiyonunda $a=6$ olduğundan periyodu $T=\frac{2\pi}{|6|}=\frac{\pi}{3}$ bulunur.

ç) $k(x)=-6\cdot\cos\left(-\frac{7x+5}{4}\right)=-6\cdot\cos\left(-\frac{7}{4}x-\frac{5}{4}\right)$ fonksiyonunda $a=-\frac{7}{4}$ olduğundan periyodu $T=\frac{2\pi}{\left|-\frac{7}{4}\right|}=\frac{8\pi}{7}$ bulunur.

f (x)=p · tan(ax+b)+c veya *g* (x)=p · cot(ax+b)+c Fonksiyonlarının Periyotları

$a\neq 0$ için $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=p\cdot\tan(ax+b)+c$ ve $g(x)=p\cdot\cot(ax+b)+c$ fonksiyonlarının periyodik olup olmadığı incelenir, periyodik ise periyodu aşağıdaki gibi bulunur.

$f(x+T)=f(x)$ olacak şekilde T sayısı bulunmalıdır.

$f(x+T)=p\cdot\tan(a\cdot(x+T)+b)+c=p\cdot\tan(ax+aT+b)+c$ olduğundan

$$\cancel{p}\cdot\tan(ax+aT+b)+\cancel{c}=\cancel{p}\cdot\tan(ax+b)+\cancel{c}$$
$$\tan(ax+aT+b)=\tan(ax+b)$$
$$\cancel{ax}+aT+\cancel{b}=\cancel{ax}+\cancel{b}+\pi$$
$$aT=\pi$$

$T=\frac{\pi}{a}$ bulunur. O hâlde $f(x)=p\cdot\tan(ax+b)+c$ periyodik fonksiyondur ve periyot $T=\frac{\pi}{|a|}$ olur.

Benzer şekilde $g(x)=p\cdot\cot(ax+b)+c$ periyodik fonksiyondur ve periyodu $T=\frac{\pi}{|a|}$ olur.

Sonuç

$a\neq 0$ için $f(x)=p\cdot\tan(ax+b)+c$ ve $g(x)=p\cdot\cot(ax+b)+c$ şeklindeki fonksiyonların periyodu $T=\frac{\pi}{|a|}$ olur.

2. ÖRNEK

Aşağıdaki fonksiyonların periyotlarını bulunuz.

a) $f_1(x) = \tan\left(5x - \frac{7}{8}\right) + 4$

b) $f_2(x) = 4 - 6 \cdot \tan\left(-\frac{x}{7} + 2\right)$

c) $f_3(x) = \dfrac{2 \cdot \cot\left(\frac{3x-5}{4}\right) - 1}{5}$

ç) $f_4(x) = 1 - \cot\left(-\frac{11x}{2} + \frac{9}{8}\right)$

ÇÖZÜM

$f(x) = p \cdot \tan(ax + b) + c$ ve $g(x) = p \cdot \cot(ax + b) + c$ şeklindeki trigonometrik fonksiyonların periyodu $T = \frac{\pi}{|a|}$ olur.

a) $f_1(x) = \tan\left(5x - \frac{7}{8}\right) + 4$ fonksiyonunda $a = 5$ olduğundan periyodu $T = \frac{\pi}{|5|} = \frac{\pi}{5}$ bulunur.

b) $f_2(x) = 4 - 6 \cdot \tan\left(-\frac{x}{7} + 2\right) = 4 - 6 \cdot \tan\left(-\frac{1}{7}x + 2\right)$ fonksiyonunda $a = -\frac{1}{7}$ olduğundan periyodu $T = \dfrac{\pi}{\left|-\frac{1}{7}\right|} = 7\pi$ bulunur.

c) $f_3(x) = \dfrac{2 \cdot \cot\left(\frac{3x-5}{4}\right) - 1}{5} = \frac{2}{5} \cdot \cot\left(\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}\right)$ fonksiyonunda $a = \frac{3}{4}$ olduğundan periyodu $T = \dfrac{\pi}{\left|\frac{3}{4}\right|} = \frac{4\pi}{3}$ bulunur.

ç) $f_4(x) = 1 - \cot\left(-\frac{11x}{2} + \frac{9}{8}\right)$ fonksiyonunda $a = -\frac{11}{2}$ olduğundan periyodu $T = \dfrac{\pi}{\left|-\frac{11}{2}\right|} = \frac{2\pi}{11}$ bulunur.

3. ÖRNEK

$f(x) = \pi - 4 \cdot \cos\left(\frac{x-7}{k}\right)$ fonksiyonunun periyodu 20π olduğuna göre k nin alabileceği değerleri bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x) = \pi - 4 \cdot \cos\left(\frac{x-7}{k}\right) = \pi - 4 \cdot \cos\left(\frac{1}{k}x - \frac{7}{k}\right)$ olduğundan $a = \frac{1}{k}$ olur.

$T = \dfrac{2\pi}{\left|\frac{1}{k}\right|} = 20\pi$ eşitliğinden

$|2k|\pi = 20\pi \Rightarrow |k| = 10 \Rightarrow k = 10$ veya $k = -10$ bulunur.

4. ÖRNEK

$k > 0$ olmak üzere $f(x) = 3\sin\left(\frac{x}{k} - \frac{\pi}{9}\right) + 7$ fonksiyonunun periyodu $\frac{\pi}{6}$ olduğuna göre $g(x) = \tan\left(\frac{kx}{3} + \frac{3\pi}{5}\right)$ fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x) = 3\sin\left(\frac{x}{k} - \frac{\pi}{9}\right) + 7$ fonksiyonunun periyodu $a = \frac{1}{k}$ olduğundan

$T = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{k}\right|} = \frac{\pi}{6}$ eşitliğinden $k = \frac{1}{12}$ bulunur.

k değeri, $g(x)$ fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$g(x) = \tan\left(\frac{\frac{1}{12} \cdot x}{3} + \frac{3\pi}{5}\right) = \tan\left(\frac{x}{36} + \frac{3\pi}{5}\right) \text{ olur.}$$

Buna göre $g(x)$ fonksiyonunun periyodu

$T = \frac{\pi}{\left|\frac{1}{36}\right|} = 36\pi$ olur.

Sıra Sizde

SORU

Aşağıdaki fonksiyonların periyotlarını bulunuz.

a) $f_1(x) = \pi - 3 \cdot \tan\left(\frac{2x-5}{9}\right)$

b) $f_2(x) = 2\pi - 3 \cdot \cot\left(\frac{x-7}{2}\right)$

c) $f_3(x) = 8 \cdot \sin\left(-\frac{3}{4}x + 3\right)$

ç) $f_4(x) = 3 \cdot \cos\left(\frac{5}{3}x - 4\right) + 21$

ÇÖZÜM

5. Trigonometrik Fonksiyonların Grafikleri ve Yorumlanması

Trigonometrik fonksiyonların grafikleri çizilirken fonksiyonlar periyodik olduğundan grafiğin değişimini periyot aralığında gözlemlemek yeterlidir.

Örneğin $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun periyodu $T = 2\pi$ olduğundan grafik 2π uzunluğundaki bir aralıkta çizilir. Elde edilen grafik 2π uzunluğundaki her aralıkta tekrarlandığında $f(x) = \cos x$ grafiği çizilmiş olur. Bu bölümde $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ ve $\cot x$ grafikleri çizilip yorumlanacaktır.

Sinüs Fonksiyonunun Grafiği

$f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun periyodu $T = 2\pi$ olduğundan ilk olarak grafik $[0, 2\pi]$ aralığında çizilir.

Elde edilen grafik $..., [-6\pi, -4\pi], [-4\pi, -2\pi], [-2\pi, 0], [0, 2\pi], [2\pi, 4\pi], [4\pi, 6\pi], ...$ aralıklarında tekrarlanırsa $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun grafiği çizilmiş olur.

$[0, 2\pi]$ aralığında $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun bazı özel açılar için değerleri hesaplanmıştır.

$x = 0$ için $y = \sin 0 = 0$ ise $(0, 0)$

$x = \frac{\pi}{2}$ için $y = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ ise $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

$x = \pi$ için $y = \sin\pi = 0$ ise $(\pi, 0)$

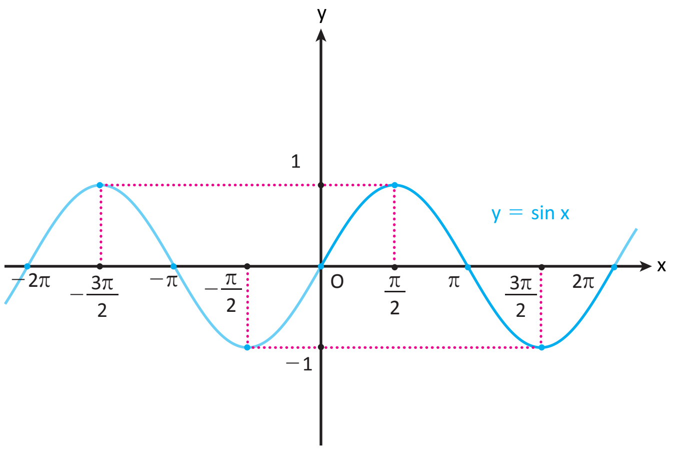
$x = \frac{3\pi}{2}$ için $y = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$ ise $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$

$x = 2\pi$ için $y = \sin 2\pi = 0$ ise $(2\pi, 0)$ olur.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \sin x$	0	1	0	-1	0

Bulunan noktalar analitik düzlemde işaretlenirse $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun periyot aralığındaki grafiği elde edilir. Bu grafik her periyot aralığında tekrarlandığında istenen grafik (Grafik 1.2.1) çizilmiş olur.

Bilgi iletişim teknolojileri yardımıyla aşağıdaki grafik çizilir.



Grafik 1.2.1

Grafik incelenirse

$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ ile $\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right)$, $(\pi, 0)$ ile $(-\pi, 0)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$ ile $\left(-\frac{3\pi}{2}, 1\right)$,

$(2\pi, 0)$ ile $(-2\pi, 0)$ vb. periyot aralığındaki noktaların orijine göre simetrik olduğu görülür.

Bir fonksiyonun grafiği orijine göre simetrik ise fonksiyon tek fonksiyon şeklinde adlandırılır.

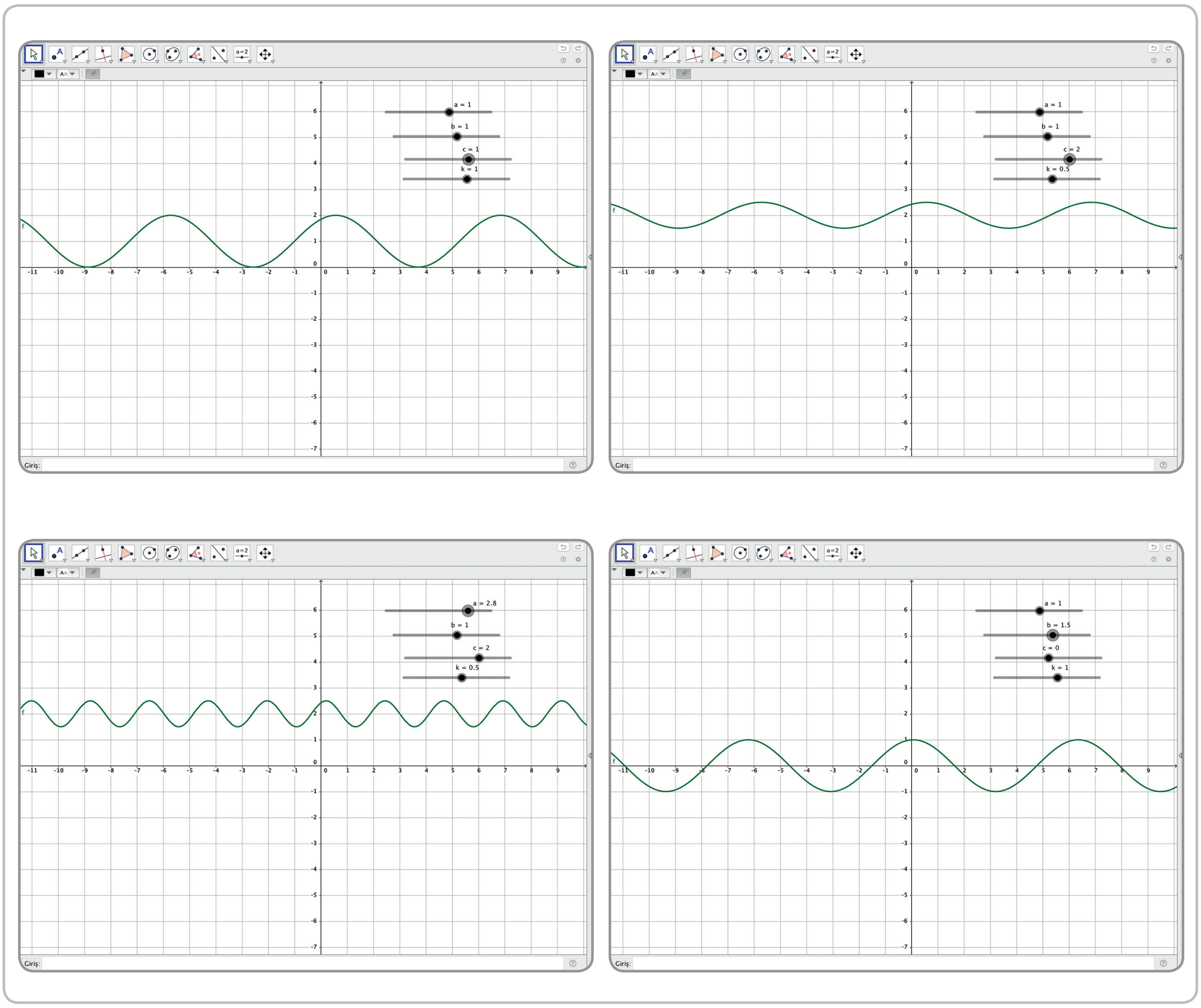
Buna göre sinüs fonksiyonunun periyot aralığındaki grafiği, orijine göre simetrik noktalardan oluştuğundan sinüs fonksiyonu tek fonksiyondur.

Bu durumda $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$ olur.

Teknoloji Uygulaması

Aşağıda GeoGebra programı kullanılarak $f(x) = k \cdot \sin(ax + b) + c$ türündeki fonksiyonların grafikleri incelenmiştir (Görsel 1.2.2).

Grafik Çizme	Programı çalıştırdığınızda **Grafik Çizme** kutucuğunu seçiniz.
a=2	**Sürgü** aracını seçiniz. a, b, c ve k isimli sürgüleri tanımlayınız.
Giriş:	**Giriş** kısmına f(x) = k*sin(ax+b)+c yazdıktan sonra **Enter** tuşuna basınız.
k = 0	k, a, b ve c sürgülerinin farklı değerleri için fonksiyonun grafiğindeki değişimleri inceleyiniz.



Görsel 1.2.2

GeoGebra uygulamasını yaptığınız k, a, b ve c sürgülerinin farklı değerleri için fonksiyonun grafiğini inceleyiniz. a sürgüsü fonksiyonun periyodunun değiştiğine, b sürgüsü için grafiğin yatay eksende sağa ya da sola kaydığına, c sürügüsü için grafiğin düşey eksende yukarı ya da aşağı kaydığına dikkat ediniz.

Kosinüs Fonksiyonunun Grafiği

$f:\mathbb{R}\rightarrow[-1,1]$, $f(x)=\cos x$ fonksiyonunun periyodu $T=2\pi$ olduğundan ilk olarak grafik $[0,2\pi]$ aralığında çizilir.

Elde edilen grafik $...,[-6\pi,-4\pi],[-4\pi,-2\pi],[-2\pi,0],,[0,2\pi],[2\pi,4\pi],[4\pi,6\pi],...$ aralıklarında tekrarlanırsa $f(x)=\cos x$ fonksiyonunun grafiği çizilmiş olur.

$[0,2\pi]$ aralığında $f(x)=\cos x$ fonksiyonunun bazı özel açılar için değerleri hesaplanmıştır.

$x=0$ için $y=\cos 0=1$ ise $(0,1)$

$x=\frac{\pi}{2}$ için $y=\cos\frac{\pi}{2}=0$ ise $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$

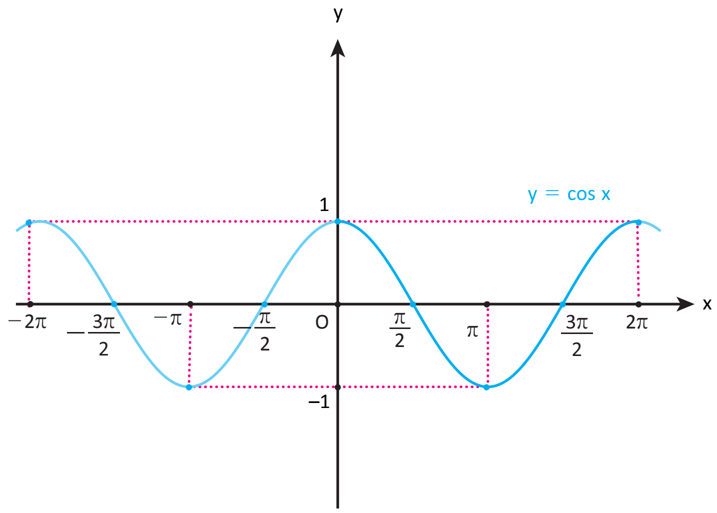
$x=\pi$ için $y=\cos\pi=-1$ ise $(\pi,-1)$

$x=\frac{3\pi}{2}$ için $y=\cos\frac{3\pi}{2}=0$ ise $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$

$x=2\pi$ için $y=\cos 2\pi=1$ ise $(2\pi,1)$ olur.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\cos x$	1	0	-1	0	1

Bulunan noktalar analitik düzlemde işaretlenirse $f(x)=\cos x$ fonksiyonunun periyot aralığındaki grafiği elde edilir. Bu grafik her periyot aralığında tekrarlandığında istenen grafik (Grafik 1.2.2) çizilmiş olur.
Bilgi iletişim teknolojileri yardımıyla aşağıdaki grafik çizilir.



Grafik 1.2.2

Grafik incelenirse

$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ ile $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, $(\pi,-1)$ ile $(-\pi,-1)$,

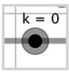
$\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$ ile $\left(-\frac{3\pi}{2},0\right)$, $(2\pi,1)$ ile $(-2\pi,1)$ vb. periyot aralığındaki noktaların y eksenine göre simetrik olduğu görülür.

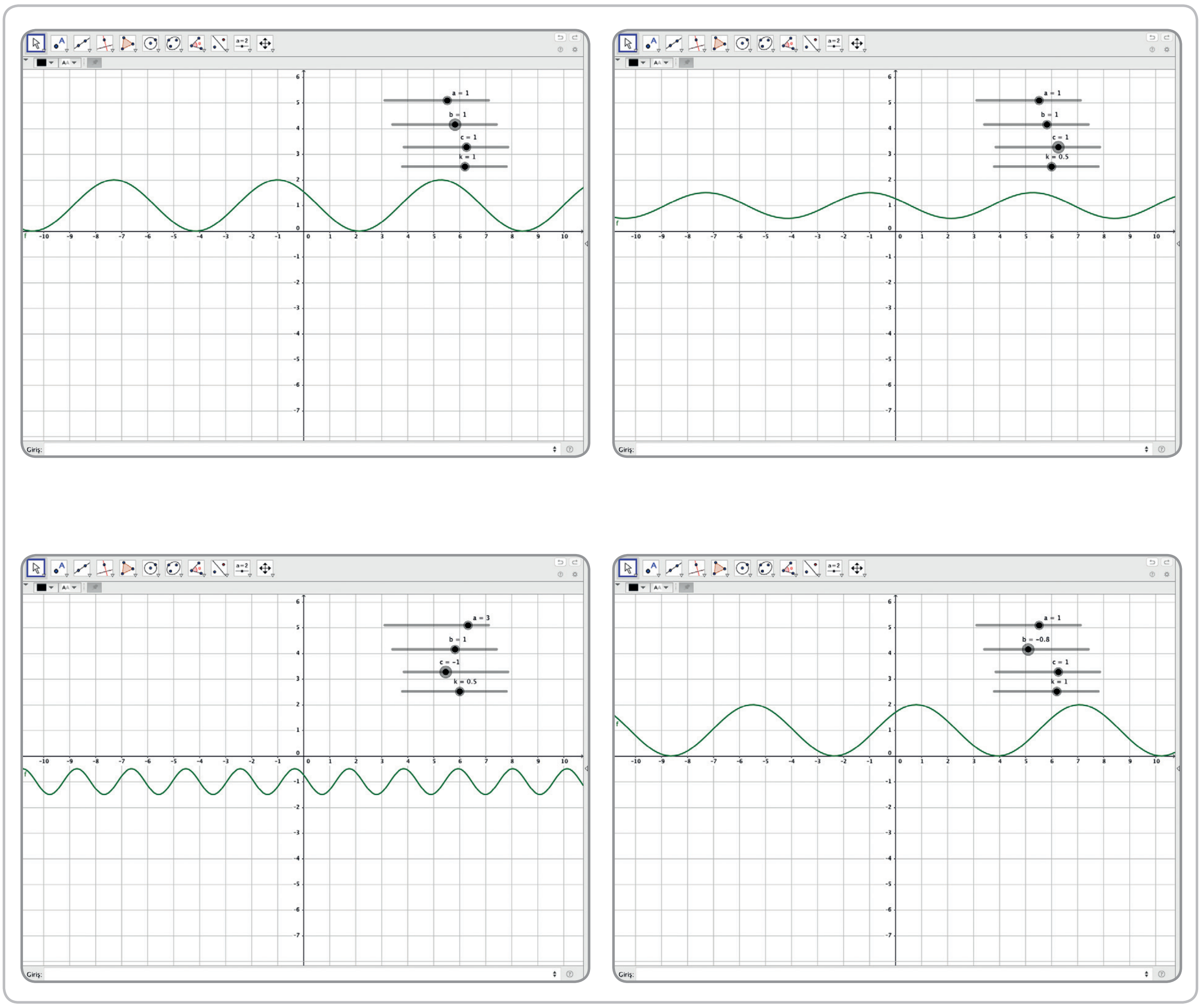
Bir fonksiyonun grafiği, y eksenine göre simetrik ise fonksiyon çift fonksiyon şeklinde adlandırılır.
Buna göre kosinüs fonksiyonunun periyot aralığındaki grafiği, y eksenine göre simetrik noktalardan oluştuğundan kosinüs fonksiyonu çift fonksiyondur.

Bu durumda $f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$ olur.

Teknoloji Uygulaması

Aşağıda GeoGebra programı kullanılarak $f(x) = k \cdot \cos(ax + b) + c$ türündeki fonksiyonların grafikleri incelenmiştir.

Grafik Çizme	Programı çalıştırdığınızda **Grafik Çizme** kutucuğunu seçiniz.
	**Sürgü** aracını seçiniz. a, b, c ve k isimli sürgüleri tanımlayınız.
Giriş:	**Giriş** kısmına f(x) = k*cos(ax+b)+c yazdıktan sonra **Enter** tuşuna basınız.
	k, a, b ve c sürgülerinin farklı değerleri için fonksiyonun grafiğindeki değişimleri inceleyiniz.



Görsel 1.2.3

GeoGebra uygulamasını yaptığınız k, a, b ve c sürgülerinin farklı değerleri için fonksiyonun grafiğini inceleyiniz. a sürgüsü fonksiyonun periyodunun değiştiğine, b sürgüsü için grafiğin yatay eksende sağa ya da sola kaydığına, c sürügüsü için grafiğin düşey eksende yukarı ya da aşağı kaydığına dikkat ediniz.

Tanjant Fonksiyonunun Grafiği

Tanjant fonksiyonu $\tan:\mathbb{R}-\left\{x : x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\longrightarrow\mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyondur. Periyodu $T=\pi$ olur. $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ aralığının uzunluğu π olduğundan bu aralıktaki tanjant fonksiyonunun grafiği her π uzunluğundaki aralıkta tekrarlanır.

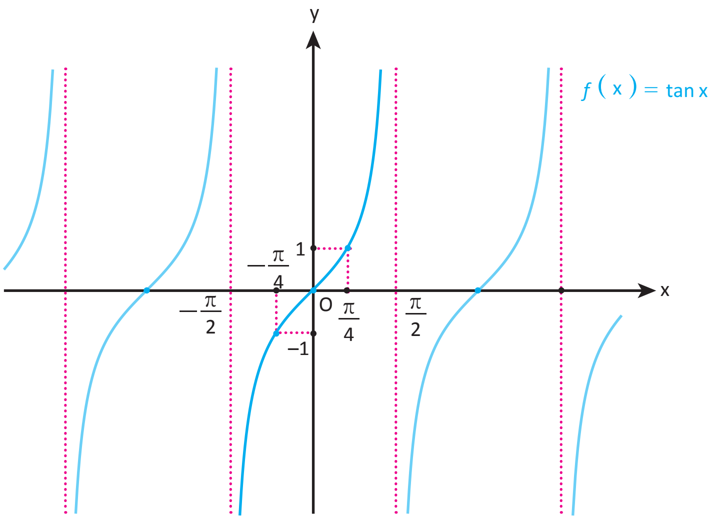
$f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\tan x$ fonksiyonunun grafiği örnek olarak çizilirse

$f(x)=\tan x$ fonksiyonu $k\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $x=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$ değerlerinde tanımsızdır.
Aşağıda $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ aralığında $f(x)=\tan x$ fonksiyonunun bazı özel açılar için değerleri hesaplanmıştır.

$x=-\frac{\pi}{4}$ için $y=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$ ise $\left(-\frac{\pi}{4},-1\right)$
$x=0$ için $y=\tan 0=0$ ise $(0,0)$
$x=\frac{\pi}{4}$ için $y=\tan\frac{\pi}{4}=1$ ise $\left(\frac{\pi}{4},1\right)$
$x=\mp\frac{\pi}{2}$ için $y=\tan\left(\mp\frac{\pi}{2}\right)$ tanımsızdır.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$y=\tan x$	$\Vert$ tanımsız	-1	0	1	$\Vert$ tanımsız

Bulunan noktalar analitik düzlemde işaretlenirse $f(x)=\tan x$ fonksiyonunun periyot aralığındaki grafiği elde edilir. Bu grafik, her periyot aralığında tekrarlandığında istenen grafik (Grafik 1.2.3) çizilmiş olur.
Bilgi iletişim teknolojileri yardımıyla aşağıdaki grafik çizilir.



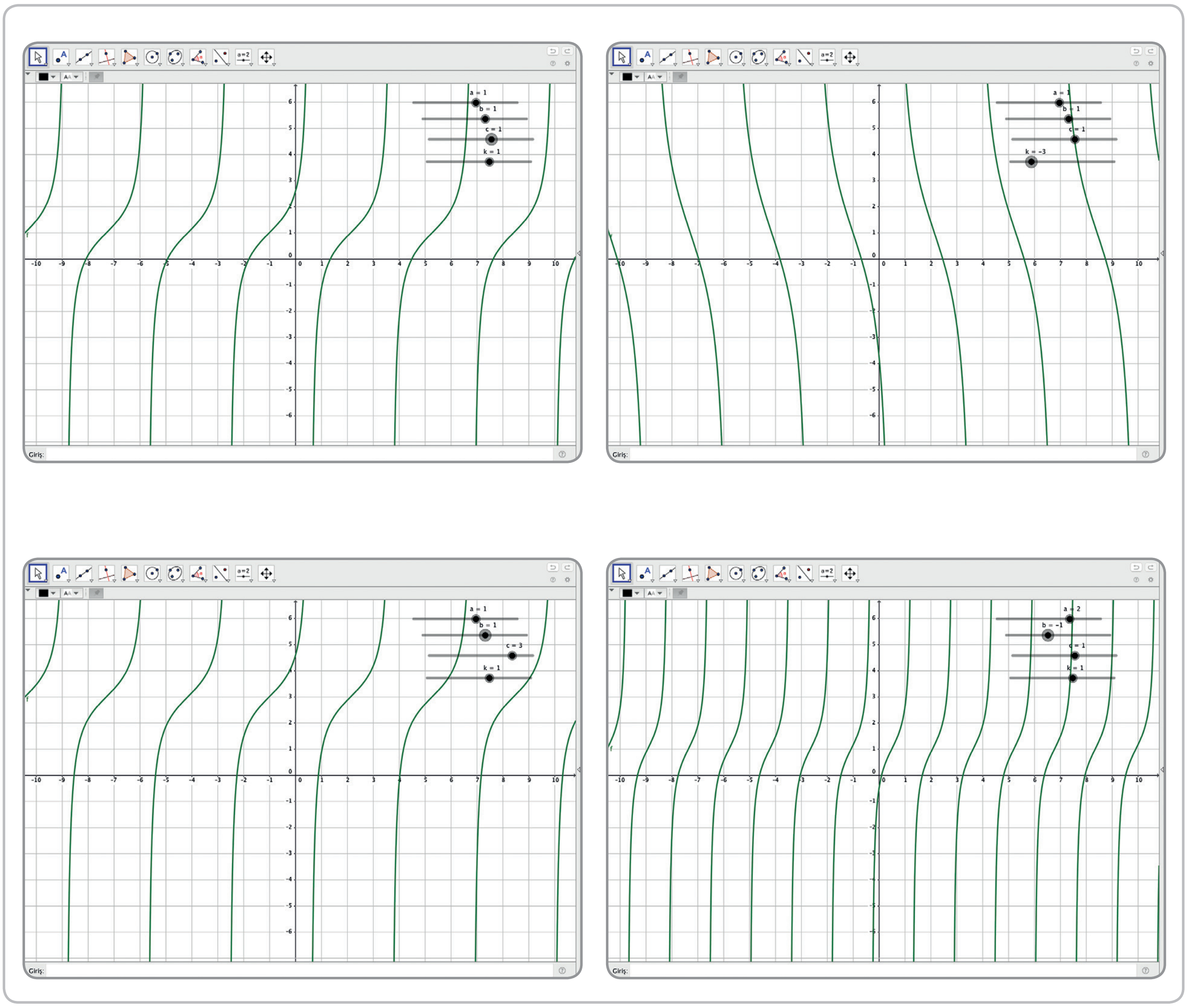
Grafik 1.2.3

Grafik incelenirse
$\left(\frac{\pi}{4},1\right)$ ile $\left(-\frac{\pi}{4},-1\right)$ vb. periyot aralığındaki noktaların orijine göre simetrik olduğu görülür.
Buna göre tanjant fonksiyonunun periyot aralığındaki grafiği, orijine göre simetrik noktalardan oluştuğundan tanjant fonksiyonu tek fonksiyondur.
$f(-x)=\tan(-x)=-\tan x=-f(x)$ olur.

Teknoloji Uygulaması

Aşağıda GeoGebra programı kullanılarak $f(x) = k \cdot \tan(ax + b) + c$ türündeki fonksiyonların grafikleri incelenmiştir (Görsel 1.2.4).

Grafik Çizme	Programı çalıştırdığınızda **Grafik Çizme** kutucuğunu seçiniz.
a = 2	**Sürgü** aracını seçiniz. a, b, c ve k isimli sürgüleri tanımlayınız.
Giriş:	**Giriş** kısmına f(x) = k*tan(ax+b)+c yazdıktan sonra **Enter** tuşuna basınız.
k = 0	k, a, b ve c sürgülerinin farklı değerleri için fonksiyonun grafiğindeki değişimleri inceleyiniz.



Görsel 1.2.4

GeoGebra uygulamasını yaptığınız k, a, b ve c sürgülerinin farklı değerleri için fonksiyonun grafiğini inceleyiniz. a sürgüsü fonksiyonun periyodunun değiştiğine, b sürgüsü için grafiğin yatay eksende sağa ya da sola kaydığına, c sürügüsü için grafiğin düşey eksende yukarı ya da aşağı kaydığına dikkat ediniz.

Kotanjant Fonksiyonunun Grafiği

Kotanjant fonksiyonu $\cot : \mathbb{R} - \{x : x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyondur. Periyodu $T = \pi$ olur. $(0, \pi)$ aralığının uzunluğu π olduğundan bu aralıktaki kotanjant fonksiyonunun grafiği her π uzunluğundaki aralıkta tekrarlanır.

$f : (0, \pi) \to \mathbb{R},\ f(x) = \cot x$ fonksiyonunun grafiği örnek olarak çizilirse

$f(x) = \cot x$ fonksiyonu $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x = \pi + k \cdot \pi$ değerlerinde tanımsızdır.

Aşağıda $(0, \pi)$ aralığında $f(x) = \cot x$ fonksiyonunun bazı özel açılar için değerleri hesaplanmıştır.

$x = \frac{\pi}{4}$ için $y = \cot\frac{\pi}{4} = 1$ ise $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

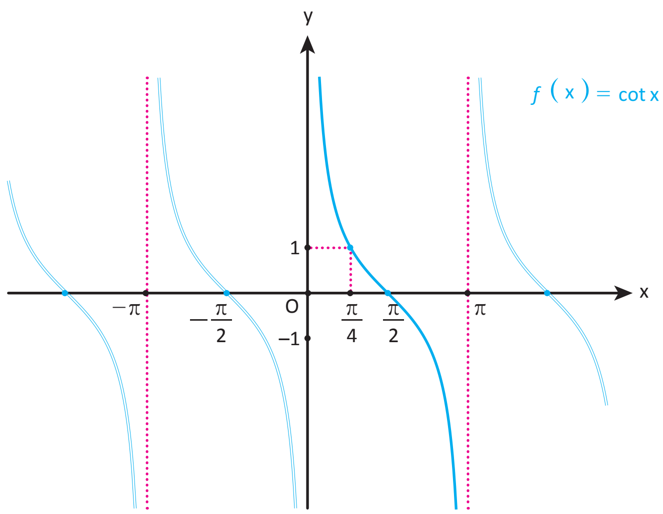
$x = \frac{\pi}{2}$ için $y = \cot\frac{\pi}{2} = 0$ ise $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

$x = \frac{3\pi}{4}$ için $y = \cot\frac{3\pi}{4} = -1$ ise $\left(\frac{3\pi}{4}, -1\right)$

$x = 0$ ve $x = \pi$ için kotanjant fonksiyonu tanımsızdır.

Bulunan noktalar analitik düzlemde işaretlenirse $f(x) = \cot x$ fonksiyonunun periyot aralığındaki grafiği elde edilir. Bu grafik, her periyot aralığında tekrarlandığında istenen grafik (Grafik 1.2.4) çizilmiş olur. Bilgi iletişim teknolojileri yardımıyla aşağıdaki grafik çizilir.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$y = \cot x$	$\|\|$ tanımsız	1	0	-1	$\|\|$ tanımsız



Grafik 1.2.4

Grafik incelenirse

Kotanjant fonksiyonunun periyot aralığındaki noktalarının orijine göre simetrik olduğu görülür.

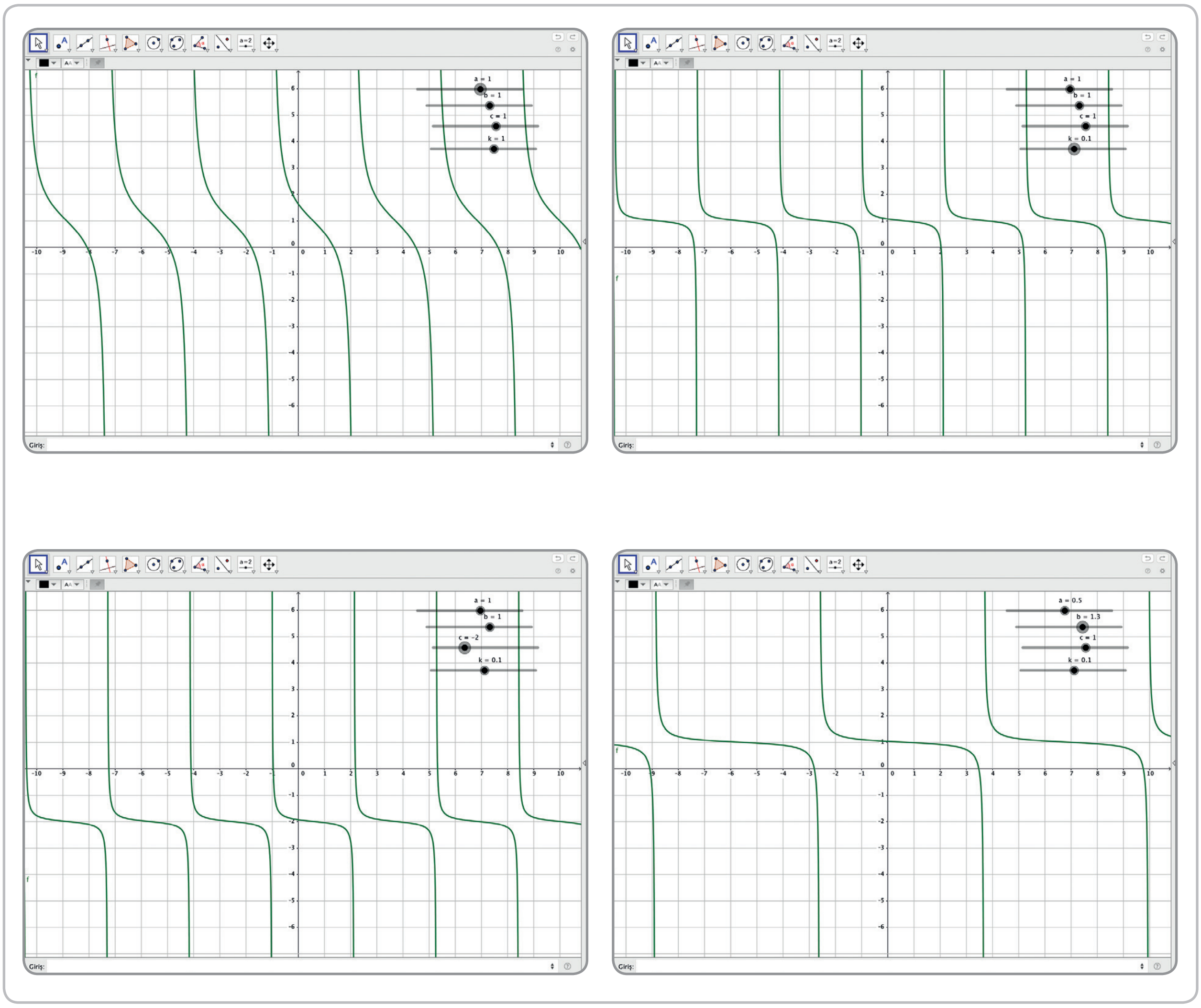
Buna göre kotanjant fonksiyonunun periyot aralığındaki grafiği, orijine göre simetrik noktalardan oluştuğundan kotanjant fonksiyonu tek fonksiyondur.

$f(-x) = \cot(-x) = -\cot x = -f(x)$ olur.

Teknoloji Uygulaması

Aşağıda GeoGebra programı kullanılarak $f(x) = k \cdot \cot(ax + b) + c$ türündeki fonksiyonların grafikleri incelenmiştir (Görsel 1.2.5).

Grafik Çizme	Programı çalıştırdığınızda **Grafik Çizme** kutucuğunu seçiniz.
a=2	**Sürgü** aracını seçiniz. a, b, c ve k isimli sürgüleri tanımlayınız.
Giriş:	**Giriş** kısmına f(x) = k*cot(ax+b)+c yazdıktan sonra **Enter** tuşuna basınız.
k = 0	k, a, b ve c sürgülerinin farklı değerleri için fonksiyonun grafiğindeki değişimleri inceleyiniz.



Görsel 1.2.5

GeoGebra uygulamasını yaptığınız k, a, b ve c sürgülerinin farklı değerleri için fonksiyonun grafiğini inceleyiniz. a sürgüsü fonksiyonun periyodunun değiştiğine, b sürgüsü için grafiğin yatay eksende sağa ya da sola kaydığına, c sürügüsü için grafiğin düşey eksende yukarı ya da aşağı kaydığına dikkat ediniz.

6. Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

Bir f fonksiyonun tersinin de fonksiyon olabilmesi için f fonksiyonunun bire bir ve örten olması gerektiği öğrenilmişti.

$f: A \to B$, $y = f(x)$ bire bir ve örten fonksiyon ise $f^{-1}: B \to A$ ters fonksiyonu vardır.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlanan trigonometrik fonksiyonlar bire bir ve örten olmadıkları için, trigonometrik fonksiyonların tersinin alınabilmesi için bu fonksiyonların bire bir ve örten olduğu reel sayı aralıkları seçilerek bu aralıklarda ters fonksiyonları tanımlanabilir.

Sinüs Fonksiyonunun Ters Fonksiyonu

$f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ fonksiyonu tanımlı olduğu belli aralıklarda bire bir ve örtendir.

$f(x) = \sin x$ fonksiyonu tanım kümesinin $\ldots, \left[-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right], \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right], \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right], \ldots$ alt aralıklarında bire bir ve örten fonksiyondur.

Tanım

Sinüs fonksiyonunun birebir ve örten olduğu alt aralıklardan biri olan $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığı tanım kümesi olarak alınırsa;

$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ fonksiyonu bire bir ve örten olup tersi vardır.

$f^{-1}: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ fonksiyonuna **sinüs fonksiyonunun ters fonksiyonu** denir.

Bu fonksiyonun ters fonksiyonu $f^{-1}(x) = \arcsin x$ şeklinde gösterilir.

$y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y$ ve $\arcsin(\sin x) = x$ olur.

Aşağıdaki tablolarda $y = \sin x$ ve $y = f^{-1}(x) = \arcsin x$ fonksiyonlarının bire bir ve örten olduğu aralıktaki bazı değerleri verilmiştir. İnceleyiniz.

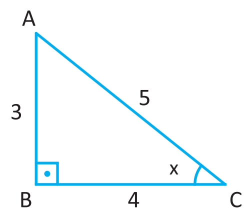
x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$y = \sin x$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

x	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$y = \arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$

1. ÖRNEK

$x = \arcsin\frac{3}{5}$ olduğuna göre cosx değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



$x = \arcsin y \Leftrightarrow y = \sin x$

$x = \arcsin\frac{3}{5} \Rightarrow \sin x = \sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$

$\sin x = \frac{3}{5}$ olur.

ABC üçgeni 3-4-5 özel dik üçgeni olduğundan $\cos x = \frac{4}{5}$ olarak bulunur.

2. ÖRNEK

Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$

b) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c) $\tan\left[\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

ç) $\cos\left[\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right]$

ÇÖZÜM

$\arcsin:[-1,1]\rightarrow\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ olduğundan $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ olur.

$\arcsin(\sin x)=x$ bağıntısından yararlanılarak

a) $x=\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow \sin x=\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

$\sin x=-\frac{1}{2}$

$x=-\frac{\pi}{6}$ bulunur.

b) $x=\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Rightarrow \sin x=\sin\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x=\frac{\pi}{4}$ bulunur.

c) $\tan\underbrace{\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)}_{x}$ ifadesinde $x=\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\Rightarrow \sin x=\sin\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x=\frac{\pi}{3}$

Bu durumda $\tan\left[\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]=\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ bulunur.

ç) $\cos\underbrace{\left[\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right]}_{x}$ ifadesinde $x=\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\Rightarrow \sin x=\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

$\sin x=\frac{1}{2}$

$x=\frac{\pi}{6}$

Bu durumda $\cos\left[\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ bulunur.

Kosinüs Fonksiyonunun Ters Fonksiyonu

$f:\mathbb{R}\rightarrow[-1,1]$, $f(x)=\cos x$ fonksiyonu, tanımlı olduğu alt aralıklarda bire bir ve örtendir. Bu aralıkların herhangi biri alınarak ters fonksiyon tanımlanabilir.

Tanım

Kosinüs fonksiyonunun birebir ve örten olduğu alt aralıklardan biri olan $[0,\pi]$ aralığı tanım kümesi olarak alınırsa

$f:[0,\pi]\rightarrow[-1,1]$, $f(x)=\cos x$ fonksiyonu bire bir ve örten olup tersi vardır.

$f^{-1}:[-1,1]\rightarrow[0,\pi]$ fonksiyonuna **kosinüs fonksiyonunun ters fonksiyonu** denir.

Bu fonksiyonun ters fonksiyonu $f^{-1}(x)=\arccos x$ şeklinde gösterilir.

$y=\cos x \Leftrightarrow x=\arccos y$ ve $\arccos(\cos x)=x$ olur.

Aşağıdaki tablolarda $y=\cos x$ ve $y=f^{-1}(x)=\arccos x$ fonksiyonlarının bire bir ve örten olduğu aralıktaki değerleri verilmiştir. İnceleyiniz.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$y=\cos x$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1

x	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$y=\arccos x$	π	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	0

3. ÖRNEK

Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) $x=\arccos(1)$

b) $x=\sin\left[\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

ÇÖZÜM

$\arccos:[-1,1]\rightarrow[0,\pi]$ olduğundan $x\in[0,\pi]$ olur.

a) $x=\arccos(1)\Rightarrow \cos x=\cos(\arccos(1))$ olduğundan

$\cos x=1$

$x=0$ radyan olur.

b) $\sin\underbrace{\left[\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]}_{x}$ ifadesinde $x=\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \cos x=\cos\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}$

Bu durumda $\sin\underbrace{\left[\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]}_{x}=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ bulunur.

Tanjant Fonksiyonunun Ters Fonksiyonu

$\tan : \mathbb{R} - \left\{ x : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyondur.

$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = \tan x$ fonksiyonu bire bir ve örten fonksiyondur. Ters fonksiyonu tanımlanabilir.

Tanım

$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},\ f(x) = \tan x$ fonksiyonu bire bir ve örten olsun. Bu durumda $f^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ şeklinde tanımlanan fonksiyona **tanjant fonksiyonunun ters fonksiyonu** denir. $f^{-1}(x) = \arctan x$ şeklinde gösterilir.

$y = \tan x \Leftrightarrow x = \arctan y$ ve $\arctan(\tan x) = x$ olur.

4. ÖRNEK

Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ b) $\arctan\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$ c) $\sin\left[\arctan\left(\frac{7}{24}\right)\right]$

ÇÖZÜM

$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ olduğundan $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ olur.

a) $x = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow \tan x = \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$ olduğundan $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ve $x = \frac{\pi}{6}$ bulunur.

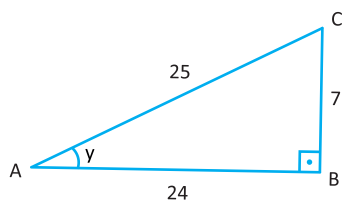
b) $x = \arctan\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \arctan(1) \Rightarrow \tan x = 1$

$x = \frac{\pi}{4}$ olur.

c) $x = \sin\left(\underbrace{\arctan\frac{7}{24}}_{y}\right)$ ifadesinde $y = \arctan\frac{7}{24} \Rightarrow$

$\tan y = \tan\left(\arctan\frac{7}{24}\right) = \frac{7}{24}$ olur.

7-24-25 dik üçgeninden $\sin y = \frac{7}{25}$ bulunur.



Sıra Sizde

SORU

Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) $\tan(\arctan(2n + 4))$

b) $\arctan\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)$

ÇÖZÜM

5. ÖRNEK

EDS, trafik akışının kontrolü, trafikte düzeni bozan araçlardan kaynaklanan kazaların önlenerek can ve mal emniyetinin sağlanması amacı ile geliştirilen bir denetleme sistemidir. Bu sistem ile kural ihlâli yapan araçların sensörler aracılığıyla tespiti yapılmaktadır. Görüntü işleme yazılımları ile aracın plakası tespit edilerek ilgili kanunda öngörülen cezalar uygulanmaktadır. EDS cihazlarının yerden yüksekliği 5 m olup yoldan geçen araçların hızlarını 400 metre mesafeden ölçebilmektedir.

Bu yolda hız sınırı otomobiller için 110 km/sa, ağır vasıtalar için 80 km/sa olup hız sınırını %10 a kadar aşanlara ceza yazılmamaktadır. Buna göre

a) Bir otomobil EDS cihazının ölçüm alanına girdikten 12 saniye sonra radar aracının otomobili görüş açısı 80° ölçülmüştür. Buna göre otomobilin kaç km/sa hızla gittiğini bulunuz. Hız sınırına uygun gidip gitmediğini yorumlayınız. ($\tan 10^\circ \cong 0,176$ alınacaktır.)

b) Kamyon EDS cihazının ölçüm alanına girdikten 15 saniye sonra radar aracının kamyonu görüş açısı 75° ölçülmektedir. Buna göre kamyonun kaç km/sa hızla gittiğini bulunuz. Hız sınırına uygun gidip gitmediğini yorumlayınız. ($\tan 15^\circ \cong 0,268$ alınacaktır.)

Not: Araçların yol üzerindeki konumları ihmâl edilecektir.

ÇÖZÜM

EDS cihazının bulunduğu nokta P ve P noktasından yola inilen dikmenin yolla kesiştiği nokta O olsun.

a) Otomobilin EDS cihazının ölçüm alanına girdiği nokta A, 12 saniyede gittiği yol x metre, 12. saniyede geçtiği nokta C alınırsa ve bu durum şekildeki gibi gösterilirse $m(\widehat{PCO}) = 10^\circ$ olduğundan

$$\tan 10^\circ = \frac{|PO|}{|OC|} \Rightarrow \frac{5}{400-x} = 0,176 \Rightarrow 400 - x = \frac{5}{0,176} \cong 28,4 \text{ m olur.}$$

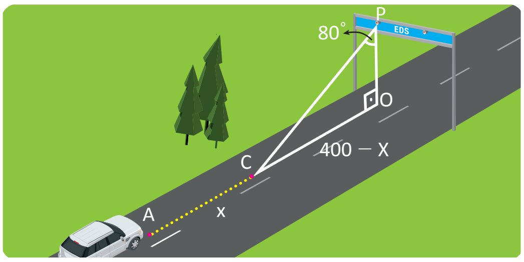
Buradan otomobilin 12 saniyede gittiği yol $x = 371,6$ m bulunur. Buna göre 1 saat 3600 saniye olduğundan

12 saniyede — 371,6 m
3600 saniyede — r m

$12r = 3600 \cdot 371,6$

$r = 111\,480$ m $= 111,48$ km olduğundan otomobilin hızı $111,48$ km/sa olur.

$111,48 < 110 + 110 \cdot \%10 = 110 + 11 = 121$ olduğundan otomobil hız sınırlarına uygun gitmektedir.



b) Kamyonun radar cihazının ölçüm alanına girdiği nokta A, 15 saniyede gittiği yol y metre, 15. saniyede geçtiği nokta D alınırsa ve bu durum şekildeki gibi gösterilirse $m(\widehat{PDO}) = 15^\circ$ olduğundan

$$\tan 15^\circ = \frac{|PO|}{|OD|} \Rightarrow \frac{5}{400-y} = 0,268 \Rightarrow 400 - y = \frac{5}{0,268} \cong 18,7 \text{ m olur.}$$

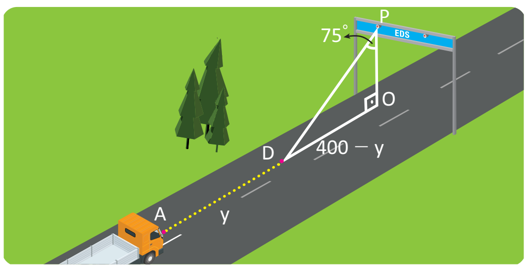
Buradan kamyonun 15 saniyede gittiği yol $y = 381,3$ m bulunur. Buna göre 1 saat 3600 saniye olduğundan

15 saniyede — 381,3 m
3600 saniyede — z m

$15z = 3600 \cdot 381,3$

$z = 91\,512$ m $= 91,512$ km olduğundan kamyonun hızı $91,512$ km/sa olur.

$91,512 > 80 + 80 \cdot \%10 = 80 + 8 = 88$ olduğundan kamyon hız sınırlarına uygun gitmemektedir. Bu yüzden cezai işlem uygulanacaktır.



ALIŞTIRMALAR-2

1. Tanımlı olduğu aralıklarda

$\dfrac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{1 + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \dfrac{3}{4}$ olduğuna göre

$\tan\alpha$ değerini bulunuz.

2. $a = \tan 260^\circ$

$b = \sin 23^\circ$

$c = \cot 110^\circ$

$d = \cos 350^\circ$

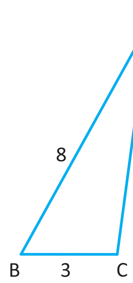
olduğuna göre a, b, c, d sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

3. $\dfrac{\cos\left(\dfrac{19\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \sin(\alpha - 9\pi)}{\cos\left(-\dfrac{15\pi}{2} + \alpha\right)}$

ifadesinin değerini bulunuz.

4. $\arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ifadesinin değerini bulunuz.

5.



Yandaki ABC üçgeninde

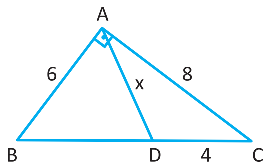
$|AB| = 8$ birim

$|AC| = 7$ birim

$|BC| = 3$ birim

olduğuna göre $m(\widehat{B})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

6.



Yandaki ABC üçgeninde

$[AB] \perp [AC]$

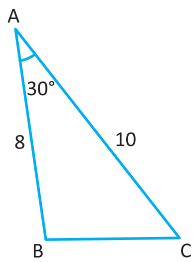
$|AB| = 6$ birim

$|AC| = 8$ birim

$|DC| = 4$ birim

olduğuna göre $|AD| = x$ in kaç birim olduğunu bulunuz.

7.



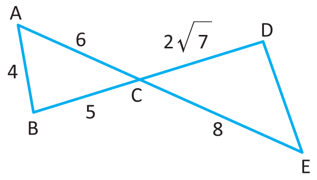
Yandaki ABC üçgeninde

$|AB| = 8$ birim

$|AC| = 10$ birim

$m(\widehat{BAC}) = 30^\circ$

olduğuna göre $A(\widehat{ABC})$ nın kaç birimkare olduğunu bulunuz.

8. 

Yandaki şekilde
$[AE]\cap[BD]=\{C\}$
$|AB|=4$ birim
$|AC|=6$ birim
$|BC|=5$ birim
$|CD|=2\sqrt{7}$ birim
$|CE|=8$ birim
olduğuna göre $A(\widehat{CDE})$ nın kaç birimkare olduğunu bulunuz.

9. Aşağıdaki fonksiyonların periyotlarını bulunuz.

a) $f(x)=\cos(4x+5)$

b) $f(x)=-9\sin\left(\frac{3x-2}{4}\right)$

c) $f(x)=8\cos\left(\frac{6x}{5}+3\right)-17$

ç) $f(x)=-5\tan\left(\frac{5x-7}{4}\right)+3$

d) $f(x)=\pi-3\cot\left(-\frac{4x}{7}-3\right)-4$

e) $f(x)=6-3\tan(2x-5)$

10. Tanımlı olduğu yerlerde
$f(x)=2\pi-3\tan\left(\frac{2x-5}{m}\right)$ fonksiyonunun periyodu 5π olduğuna göre m nin alabileceği gerçek sayı değerlerini bulunuz.

11. $f(x)=3\cos\left(ax+\frac{\pi}{2}\right)-4$ fonksiyonunun periyodu π olduğuna göre a nın alabileceği değerlerin toplamını bulunuz.

12. $3\arcsin(3x+\sqrt{3})=\pi$ eşitliğini sağlayan x değerini bulunuz.

13. Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bularak karşısındaki boşluğa yazınız.

a) $\sin\left[\arcsin\left(\frac{8}{23}\right)\right]$	
b) $\arcsin\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$	
c) $\arccos\left[\cos\left(\frac{7}{25}\right)\right]$	
ç) $\tan\left[\arccos\left(\frac{3}{5}\right)\right]$	
d) $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arctan(1)$	
e) $\tan\left[\arctan\left(-\frac{7\pi}{8}\right)\right]$	

14. $\arcsin\frac{1}{2}+\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A) Aşağıdaki 1-4. cümlelerde boş bırakılan yerlere uygun sözcük ya da değerleri yazınız.

1. -140° lik açı ...... radyandır.

2. $4865'' =$ ......°......′......″ olur.

3. $\frac{7\pi}{4}$ radyanlık açı ...... derecedir.

4. -1350° lik açının esas ölçüsü ...... derecedir.

B) Aşağıda 5-6. sorularda numaralar ile verilen ifadeleri, harf ile verilen ifadelerle eşleştiriniz.

5.

$\cos\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)$	1.	a)	$\cot\alpha$
$\tan(5\pi-\alpha)$	2.	b)	$\cos\alpha$
$\sin\left(-\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$	3.	c)	$\sin\alpha$
		ç)	$-\tan\alpha$

6.

Fonksiyon			Periyot
$f(x)=8-3\cdot\cos(5x+7)$	1.	a)	2π
$g(x)=\pi-5\cdot\sin\left(7x-\frac{3\pi}{4}\right)$	2.	b)	$\frac{\pi}{3}$
$h(x)=1+2\cdot\tan\left(\frac{x}{2}+\pi\right)$	3.	c)	$\frac{2\pi}{5}$
		ç)	$\frac{2\pi}{7}$

C) Aşağıdaki 7-10. açık uçlu soruların cevaplarını boş bırakılan yerlere yazınız.

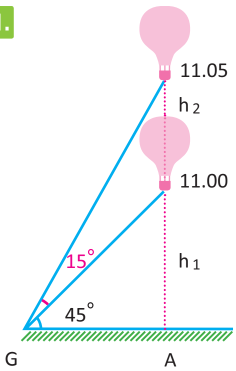
7. $\frac{1-\sin^2 x}{\cos x\cdot\sin x}$ ifadesinin en sade şeklini bulunuz.

8. $x\in(180^\circ, 270^\circ)$ olmak üzere $\sin x=-\frac{\sqrt{7}}{5}$ olduğuna göre tanx değerini bulunuz.

9. $A=7\cos x+13$ olduğuna göre A nın alabileceği tam sayı değerlerinin toplamını bulunuz.

10. $f(x)=-4\cdot\cos\left(\frac{5x+3}{k}\right)$ fonksiyonunun periyodu $\frac{\pi}{4}$ olduğuna göre $g(x)=2+3\cdot\cot\left(\frac{kx}{2}-5\right)$ fonksiyonunun periyodunu bulunuz.

Ç) Aşağıdaki 11-27. çoktan seçmeli soruları okuyunuz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

11. 

Yandaki sıcak hava balonu, A noktasından doğrusal yükselmeye başlıyor. Saat 11.00'de bulunduğu noktanın G gözlem noktası ile yaptığı açı $45°$ iken saat 11.05'te $60°$ dir.

Balonunun yükselme noktası ile gözlem noktası arasındaki uzaklık 300 m olduğuna göre $\frac{h_1}{h_1+h_2}$ oranı kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{2}{3}$

12. ABC üçgeninin iç açılarının ölçüleri α, β, θ olduğuna göre

$\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) -1 B) $-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ C) 1 D) $-\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ E) 0

13. $x = \sin 135°$

$y = \cos 170°$

$z = \sin 210°$

$t = \cos 260°$ olduğuna göre

x, y, z, t sayılarının büyükten küçüğe doğru sıralanışı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x > t > z > y$

B) $x > z > t > y$

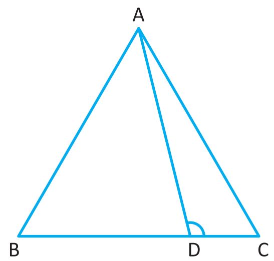
C) $y > z > t > x$

D) $x > t > y > z$

E) $t > x > y > z$

14. $a - b = \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $\cos(4a - 3b)$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\cos a$ B) $\sin a$ C) $-\sin a$ D) $2\cos a$ E) $-2\sin a$

15. 

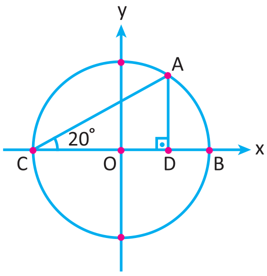
ABC bir eşkenar üçgen olmak üzere $3\cdot|DC| = |BD|$ olduğuna göre $\sin(\widehat{ADC})$ in değeri kaçtır?

A) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$ B) $\frac{3\sqrt{3}}{13}$ C) $\frac{5\sqrt{3}}{13}$ D) $\frac{2\sqrt{19}}{13}$ E) $\frac{4\sqrt{7}}{13}$

16. $\arctan\left(\frac{3}{5}\right)+\arctan\left(\frac{5}{3}\right)$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 30° B) 60° C) 90° D) 120° E) 180°

17.



Birim çemberdeki ADC dik üçgeninde $m(\widehat{ACD})=20^\circ$ olduğuna göre $|DB|$ nun eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2\sin 20^\circ$
B) $2\sin^2 20^\circ$
C) $\sin 20^\circ$
D) $1-2\sin^2 20^\circ$
E) $2\sin 10^\circ$

18. $x=\cot 50^\circ$ olduğuna göre

$\dfrac{\tan 220^\circ-\tan 130^\circ}{\tan 230^\circ+\tan 320^\circ}$ ifadesinin

x türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{x^2+1}{1-x^2}$ B) x^2+3 C) x D) $\dfrac{1-x^2}{x^2+1}$ E) $-x^2+1$

19. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ B) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ C) $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ D) $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ E) $\dfrac{6}{\sqrt{10}}$

20. $f(x)=\sin\left(-\frac{3\pi}{2}+2x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre $f(\pi)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) -1 B) 0 C) 1 D) $\dfrac{3}{2}$ E) 2

21. Tanımlı olduğu yerlerde $f(x)=\dfrac{\sin(2x-5)}{3}$ olduğuna göre $f^{-1}(x)$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\dfrac{5+\arcsin 3x}{2}$

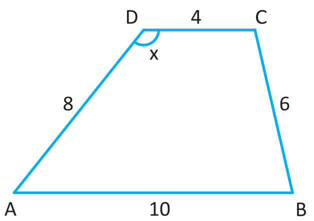
B) $-\frac{1}{3}(\arcsin(x+5))$

C) $\frac{1}{3}(\arcsin(3x-5))$

D) $-3(\arcsin(3x-5))$

E) $\arcsin(x+5)$

22. Aşağıdaki ABCD yamuğunda



$[AB] \,/\!/\, [DC]$

$2\cdot|DC|=|AD|=8$ cm

$|AB|=10$ cm

$|BC|=6$ cm

$m(\widehat{D})=x$

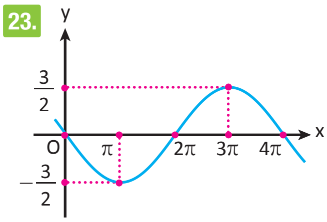
olduğuna göre

$\cos x$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 1

D) $-\frac{1}{3}$ E) $-\frac{2}{3}$

23.



Yanda grafiği verilen fonksiyonun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y=2\cos\frac{x}{2}-3$

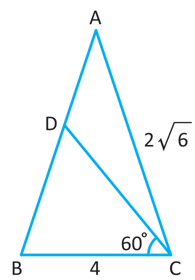
B) $y=-\frac{3}{2}\sin\frac{x}{2}$

C) $y=\frac{3}{2}\sin x+1$

D) $y=-\frac{3}{2}\sin x$

E) $y=-\frac{1}{2}\cos x+1$

24.



Yandaki ABC üçgeninde

$|AD|=|DB|$

$|BC|=4$ birim

$|AC|=2\sqrt{6}$ birim

$m(\widehat{BCD})=60^\circ$

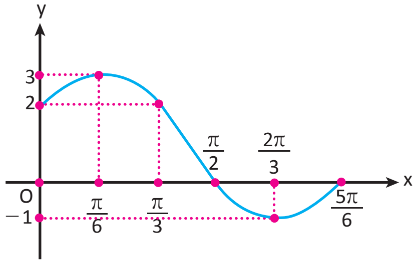
olduğuna göre

$m(\widehat{ABC})+m(\widehat{BAC})$ kaç derecedir?

A) 65 B) 75 C) 85

D) 95 E) 105

25.



Yukarıda grafiği verilen fonksiyonun kuralı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$

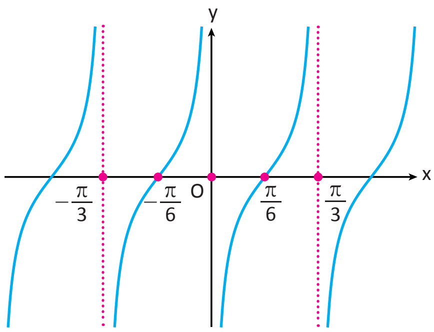
B) $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$

C) $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$

D) $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$

E) $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$

26.



Yukarıda grafiği verilen fonksiyonun kuralı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = \cot\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$

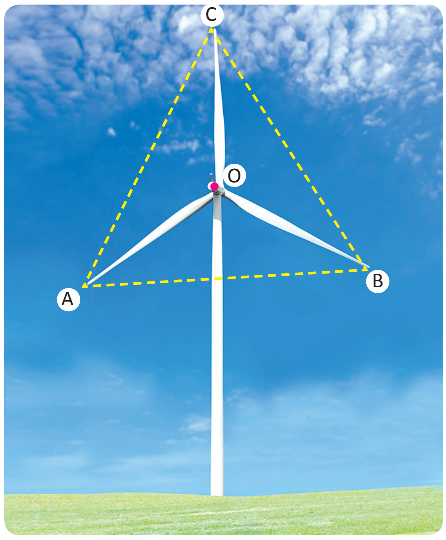
B) $y = \cot 3x$

C) $y = -\cot 3x$

D) $y = -\cot\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$

E) $y = -\cot\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$

27.



Görseldeki rüzgâr enerji türbini eşit açılarda monte edilmiş üç kanatlı olup her bir kanadın uzunluğu 16 m dir.

Rüzgâr türbininin kanatlarının uç noktaları A, B ve C olduğuna göre aşağıda verilenlerden kaç tanesi doğrudur?

I) $|AB| = 8\sqrt{3}$ m dir.

II) $\overset{\frown}{ABC}$ eşkenar üçgendir.

III) $A(\overset{\frown}{AOB}) = 96\sqrt{3}\ m^2$ dir.

IV) $\dfrac{A(\overset{\frown}{AOB})}{A(\overset{\frown}{ABC})} = \dfrac{1}{3}$ olur.

V) $m(\overset{\frown}{AOB}) = \dfrac{2\pi}{3}$ radyandır.

A) 1

B) 2

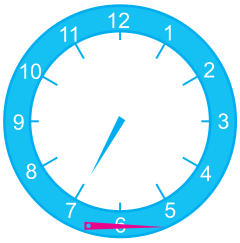
C) 3

D) 4

E) 5

D) 28-30. soruları aşağıda verilen ortak şekle ve metne göre cevaplandırınız.


Görsel 1


Görsel 2

Abdullah'ın odasında bulunan yuvarlak duvar saatindeki akrebin uzunluğu 6 cm, yelkovanın uzunluğu 10 cm dir.

Abdullah yattığında duvar saati Görsel 1'deki konumdadır.

Abdullah, sabah uyandığında duvar saatinde yelkovanın düştüğünü ve akrebin Görsel 2'deki konumda olduğunu görüyor.

28. Abdullah yatarken akrep ve yelkovanın uç noktaları arasındaki uzaklığın kaç cm olduğunu bulunuz.

29. Abdullah uyandığında yelkovan düşmemiş olsaydı yattığı saatten sabah uyandığı ana kadar yelkovanın kaç derecelik açı yapacağını ve bu açının esas ölçüsünü bulunuz.

30. Duvar saati birim çember olarak düşünülürse Abdullah, sabah uyandığında akrebin uzantısının çemberi kestiği noktanın koordinatını bulunuz.

ÇÖZÜM

E) 31 ve 32. soruyu aşağıda verilen ortak şekle ve metne göre cevaplandırınız.

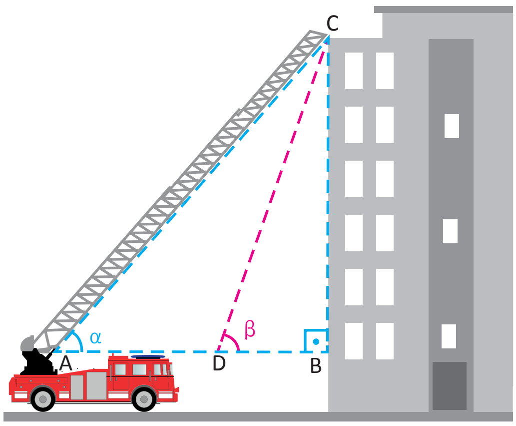
Bir apartman yönetimi, olası bir yangın durumunda binanın teras katında mahsur kalan apartman sakinlerinin tahliyesi için bir tatbikat planlamıştır. Apartman sakinleri tatbikat planını sabırla gerçekleştirmiştir. Buna göre

31. $|BC| = 32$ m, $|AC| = 64$ m olması durumunda tahliye merdiveni A noktasından C noktasına kaç derecelik açı ile uzatılmalıdır? (α kaç derecedir?)

32. A noktasının binaya olan uzaklığının $|DB| = 32$ m olması durumunda

a) Merdiven kaç derecelik açı ile uzatılmalıdır? (β kaç derecedir?)

b) İtfaiye merdiveninin açılan bölümünün uzunluğu yaklaşık kaç metre olur?



ÇÖZÜM

GEOMETRİ

11.2. ANALİTİK GEOMETRİ

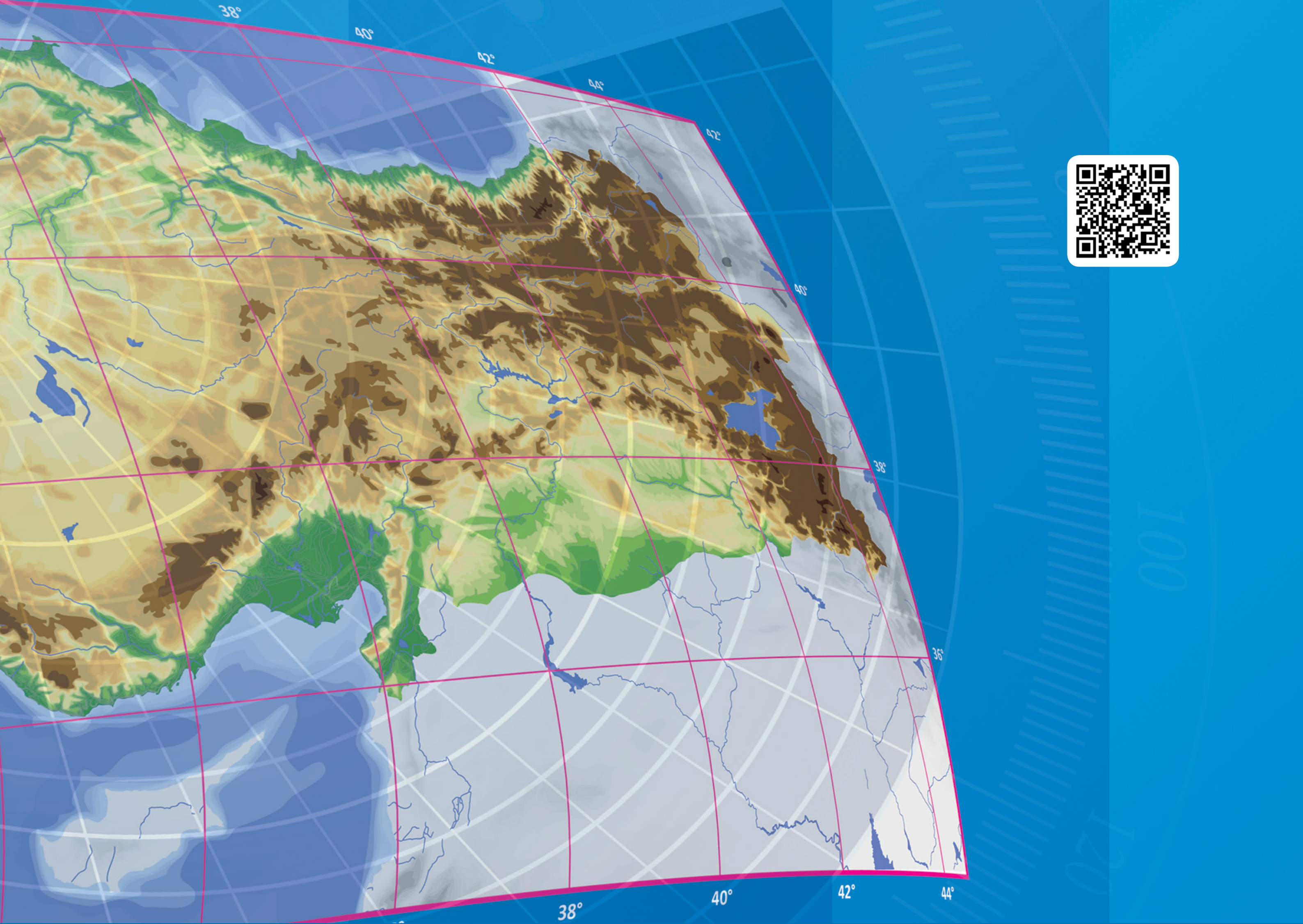
Neler Öğreneceksiniz?

11.2.1 DOĞRUNUN ANALİTİK İNCELENMESİ

1. **Analitik Düzlemde İki Nokta Arasındaki Uzaklık**
2. **Bir Doğru Parçasını Belli Oranda (İçten veya Dıştan) Bölen Noktanın Koordinatları**
3. **Analitik Düzlemde Doğrular**
4. **Bir Noktanın Bir Doğruya Olan Uzaklığı**

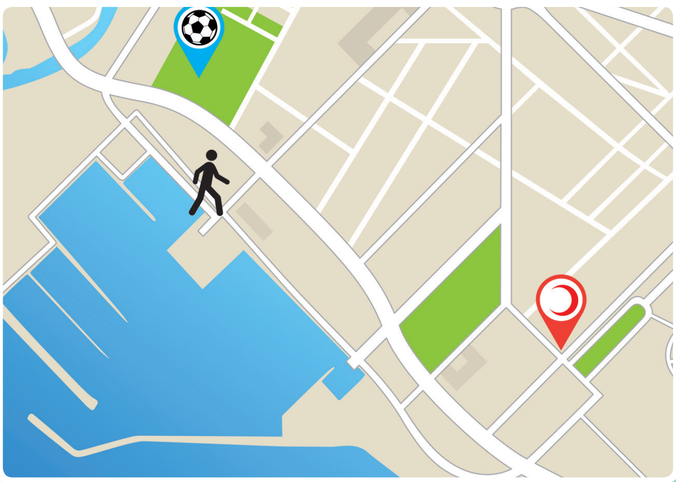
Analitik Geometrinin Kullanım Alanları

- **GPS ve radar sistemleri ile yapılan konum belirlemede analitik geometri kullanılır.**
- **İki değişken arasındaki bağıntının grafiği çizilirken analitik geometriden yararlanılır.**
- **Sinema ve tiyatro gibi etkinliklerin yapıldığı salonlarda izleyicilerin oturacağı koltukların numaralandırılmasında analitik geometri kullanılır.**



Hazırlık Çalışmaları

1. 30, 45, 60 ve 135 derecenin tanjant değerlerini yazınız.
2. Sabit ve doğrusal fonksiyon örnekleri yazınız.
3. Görseldeki kişinin belirtilen noktalardan birine gitmesi için yolu tarif ediniz. Yol tarifinde hangi noktaları referans aldığınızı arkadaşlarınızla tartışınız.
4. Yaşadığınız ilin coğrafi konumunu bulunuz. Bu coğrafi konumun başlangıç noktalarının nasıl belirlendiğini düşününüz.



11.2.1. DOĞRUNUN ANALİTİK İNCELENMESİ

1. Analitik Düzlemde İki Nokta Arasındaki Uzaklık

Analitik Düzlem

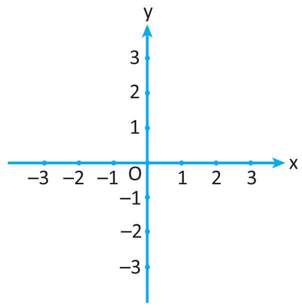
Tanım

Aynı düzlemde başlangıç noktaları ortak ve dik kesişen, iki sayı doğrusundan oluşan sisteme **koordinat sistemi**; üzerinde bir koordinat sisteminin bulunduğu düzleme ise **analitik düzlem** denir (Grafik 2.1.1).

Yatay alınan sayı doğrusuna **x ekseni** veya **apsisler ekseni**, düşey alınan sayı doğrusuna **y ekseni** veya **ordinatlar ekseni** denir.

x ve y eksenlerinin kesiştiği noktaya **başlangıç noktası (orijin)** denir.

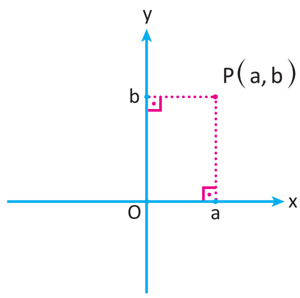
$O(0,0)$ şeklinde gösterilir.



Grafik 2.1.1

Analitik düzlemde noktalar, gerçek sayı ikilileri şeklinde gösterilir. Bir noktanın koordinatları, eksenlere çizilen dikme ayaklarına karşılık gelen sayılardır. $P(a,b)$ noktasından x eksenine çizilen dikmenin x eksenini kestiği noktaya P noktasının **apsisi**, y eksenine çizilen dikmenin y eksenini kestiği noktaya P noktasının **ordinatı** denir (Grafik 2.1.2).

a ve b gerçek sayıları, P noktasının koordinatlarıdır. x ekseni üzerindeki noktaların ordinat değeri, y ekseni üzerindeki noktaların apsis değeri sıfırdır.



Grafik 2.1.2

1. ÖRNEK

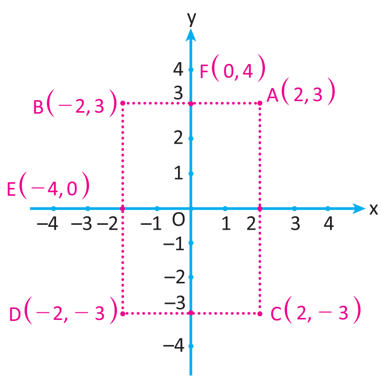
$A(2,3)$, $B(-2,3)$, $C(2,-3)$, $D(-2,-3)$ $E(-4,0)$ ve $F(0,4)$ noktalarını analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM

Verilen her bir nokta için birinci bileşen yatay eksen (apsisler ekseni), ikinci bileşen düşey eksen (ordinatlar ekseni) üzerinde işaretlenir. Daha sonra bu noktalardan geçen eksenlere paralel doğrular çizilir. Kesişme noktası, analitik düzlemde aranan nokta olur.

$C(2,-3)$ noktası için x ekseni üzerinde 2 ve y ekseni üzerinde -3 işaretlenip bu noktalardan eksenlere paralel doğrular çizilirse kesişme noktası $C(2,-3)$ olur.

Benzer şekilde A, B, D, E ve F noktaları analitik düzlemde işaretlenmiştir. Şekli inceleyiniz.



2. ÖRNEK

Analitik düzlemde $P(m-3,3m+1)$ noktasının apsis değeri, ordinat değerinin 2 katına eşit olduğuna göre P noktasının eksenlere olan uzaklıkları toplamının kaç birim olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

P noktasının apsisi $m-3$ ve ordinatı $3m+1$ olduğundan

$m-3=2\cdot(3m+1)$ olur. Buradan

$m-3=6m+2$

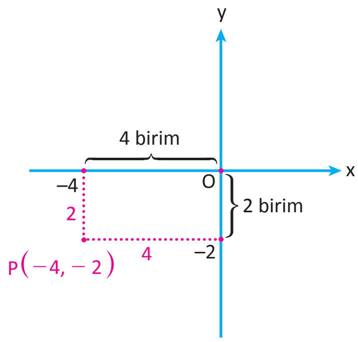
$-5=5m$

$m=-1$ bulunur.

$m=-1$ değeri yerine yazılırsa

$P(m-3,3m+1)=P(-1-3,\ 3\cdot(-1)+1)$

$=P(-4,-2)$ olur.



P noktasının ordinat değeri -2 olduğundan x eksenine olan uzaklığı 2 birimdir.
P noktasının apsis değeri -4 olduğundan y eksenine olan uzaklığı 4 birimdir.
Bu durumda P noktasının eksenlere olan uzaklıkları toplamı $2+4=6$ birim olur.

3. ÖRNEK

Analitik düzlemde $m<0$ olmak üzere $B(2m-1,5m-2)$ noktasının eksenlere olan uzaklıkları toplamı 24 birim olduğuna göre $P(m+1,3m+4)$ noktasının orijine olan uzaklığının kaç birim olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$|2m-1|+|5m-2|=24$ olur.

$m<0$ olduğundan $2m-1<0$ ve $|2m-1|=-(2m-1)$ ve

$5m-2<0$ ve $|5m-2|=-(5m-2)$ olur.

Bu durumda

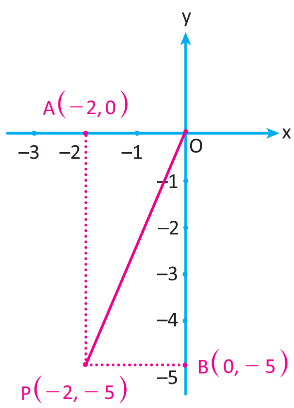
$|2m-1|+|5m-2|=24$

$-(2m-1)+[-(5m-2)]=24$

$-2m+1-5m+2=24$

$-7m=21$

$m=-3$ bulunur.



Bu değer yerine yazılırsa $P(-2,-5)$ olur.
Şekildeki PBO dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

$|OP|^2=|PB|^2+|OB|^2$

$|OP|^2=2^2+5^2$

$|OP|^2=4+25$

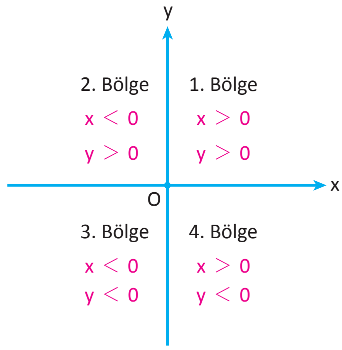
$|OP|^2=29 \Rightarrow |OP|=\sqrt{29}$ birim bulunur.

Analitik Düzlemde Bölgeler

Dik koordinat sistemi, analitik düzlemi 4 bölgeye ayırır. Bu bölgeler saatin dönme yönünün tersine göre adlandırılır.

$x > 0,\ y > 0$ olan noktalar 1. bölgede, $x < 0,\ y > 0$ olan noktalar 2. bölgede, $x < 0,\ y < 0$ olan noktalar 3. bölgede ve $x > 0,\ y < 0$ olan noktalar 4. bölgede bulunur (Grafik 2.1.3).

x ve y eksenleri herhangi bir bölgeye ait olmadığından eksenler üzerindeki noktalar da herhangi bir bölgeye ait değildir.



Grafik 2.1.3

4. ÖRNEK

$A(-1, m-4)$ ve $B(2-n, 3)$ noktaları analitik düzlemin aynı bölgesinde bulunduğuna göre

a) $m+n$ toplamının değer aralığını bulunuz.

b) $C(4-m, n-2)$ noktasının hangi bölgede olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

a) $A(-1, m-4)$ ve $B(2-n, 3)$ noktaları analitik düzlemin aynı bölgesinde olduğundan noktaların apsis ve ordinatlarının işaretleri aynı olur. A noktasının apsisi (-1) negatif ve B noktasının ordinatı (3) pozitif olduğundan bu noktaların işaret durumu $(-,+)$ şeklinde olur.

Bu durumda noktalar analitik düzlemin 2. bölgesinde olur.

$2-n < 0$ ise
$-n < -2$
$n > 2$

$m-4 > 0$ ise
$m > 4$ olur.

$$\begin{array}{rl} & n > 2 \\ + & m > 4 \\ \hline & n+m > 6 \Rightarrow (n+m) \in (6, \infty) \text{ bulunur.} \end{array}$$

b) $\left.\begin{array}{l} n > 2 \Rightarrow n-2 > 0 \\ m > 4 \Rightarrow 4-m < 0 \end{array}\right\}$ olduğundan $C(4-m, n-2)$ noktası 2. bölgede olur.

5. ÖRNEK

$A(m^2 \cdot n^5, m \cdot n^3)$ noktası, analitik düzlemde 3. bölgede olduğuna göre $B(m \cdot n, -n+m)$ noktasının analitik düzlemin hangi bölgesinde olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

A noktası 3. bölgede ise $m^2 \cdot n^5 < 0 \Rightarrow m^2 > 0$ olduğundan $n < 0$
$m \cdot n^3 < 0 \Rightarrow n^3 < 0$ olduğundan $m > 0$ olur.

Buna göre

$\left.\begin{array}{l} m > 0 \\ n < 0 \end{array}\right\}$ ise $m \cdot n < 0$ olur.

$$\begin{array}{rl} & -n > 0 \\ + & m > 0 \\ \hline & -n+m > 0 \end{array}$$

olduğundan $B(m \cdot n, -n+m)$ noktası analitik düzlemin 2. bölgesinde olur.

İki Nokta Arasındaki Uzaklık

Analitik düzlemde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları verilmiş olsun. Şekildeki ABC dik üçgeninde hipotenüs uzunluğu, A ile B noktaları arasındaki uzaklığı verir.

$|AC| = x_2 - x_1$ ve $|BC| = y_2 - y_1$ olur.

ABC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

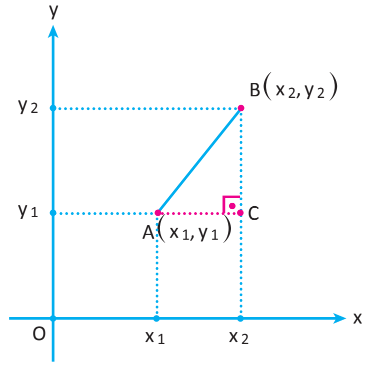
$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$

$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ bulunur.

Bu durumda A ve B noktaları arasındaki uzaklık

$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ olur (Grafik 2.1.4).

Bu ifade $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ şeklinde de yazılabilir.



Grafik 2.1.4

6. ÖRNEK

Analitik düzlemde verilen noktalar arasındaki uzaklıkların kaç birim olduğunu bulunuz.

a) $A(2, -7)$ ile $B(-3, 5)$

b) $C(-4, 5)$ ile $D(0, -1)$

ÇÖZÜM

a) $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(-3-2)^2 + (5-(-7))^2}$

$= \sqrt{(-5)^2 + 12^2}$

$= \sqrt{25 + 144}$

$= \sqrt{169}$

$|AB| = 13$ birim

b) $|CD| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{(0-(-4))^2 + (-1-5)^2}$

$= \sqrt{4^2 + (-6)^2}$

$= \sqrt{16 + 36}$

$= \sqrt{52}$

$|CD| = 2\sqrt{13}$ birim

7. ÖRNEK

Analitik düzlemde $A(m-2, n+1)$ ve $B(-3, n-5)$ noktaları arasındaki uzaklık 10 birim olduğuna göre m nin alabileceği değerlerin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

$10 = \sqrt{(m-2-(-3))^2 + (n+1-(n-5))^2}$

$10 = \sqrt{(m+1)^2 + 6^2}$

$100 = (m+1)^2 + 6^2$

$(m+1)^2 = 100 - 36$

$(m+1)^2 = 64$ ise $m+1 = 8$ veya $m+1 = -8$ olur. Buradan $m = 7$ veya $m = -9$ bulunur.

$\left.\begin{array}{l} m = 7 \\ m = -9 \end{array}\right\}$ ise $7 + (-9) = -2$ bulunur.

8. ÖRNEK

Yanda verilen görseldeki analitik düzlemde koordinatları $(-4,1)$ olan noktada duran bir balıkçı, 112 Acil Sağlık Hizmetlerinden yardım istemiştir. Balıkçı teknesi, koordinatları $(2,5)$ olan helikopter pistine ve sağlık kuruluşlarına eşit uzaklıkta olduğuna göre sağlık kuruluşlarının radar ekranındaki koordinatlarını bulunuz.

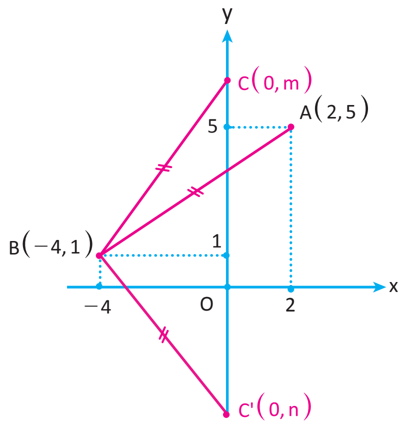
ÇÖZÜM

$A(2,5)$, $B(-4,1)$ ve $C(0,m)$ olsun. Bu durumda $|AB|=|BC|$ ise

$$\sqrt{(2-(-4))^2+(5-1)^2}=\sqrt{(0-(-4))^2+(m-1)^2}$$
$$\sqrt{6^2+4^2}=\sqrt{4^2+(m-1)^2}$$
$$36+\cancel{16}=\cancel{16}+(m-1)^2$$
$$(m-1)^2=36$$

$m-1=6$ veya $m-1=-6$ ise
$m=7$ veya $m=-5$ bulunur.

Son durumda sağlık kuruluşlarının koordinatları
$C(0,m)=C(0,7)$ veya $C'(0,n)=C'(0,-5)$ bulunur.



Sıra Sizde

SORU

Analitik düzlemde $A(-1,-2)$, $B(m-1,m+1)$ ve $C(3,1)$ noktaları veriliyor. $|AB|=|BC|$ olduğuna göre B noktasının orijine olan uzaklığının kaç birim olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

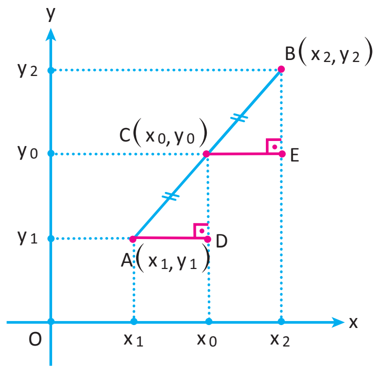
2. Bir Doğru Parçasını Belli Bir Oranda (İçten veya Dıştan) Bölen Noktanın Koordinatları

Bir Doğru Parçasının Orta Noktasının Koordinatları

Analitik düzlemde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ olmak üzere AB doğru parçasının orta noktası $C(x_0, y_0)$ olsun.
$D(x_0, y_1)$ ve $E(x_2, y_0)$ olmak üzere $\widehat{ADC} \cong \widehat{CEB}$ olur. Bu durumda
$|AC| = |CB|$, $|AD| = |CE|$ ve $|DC| = |EB|$ olur.

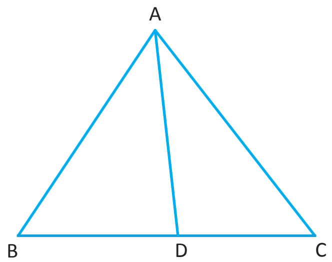
$$|AD| = |CE| \Rightarrow x_0 - x_1 = x_2 - x_0$$
$$2x_0 = x_1 + x_2$$
$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ ve}$$
$$|DC| = |EB| \Rightarrow y_0 - y_1 = y_2 - y_0$$
$$2y_0 = y_1 + y_2$$
$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} \text{ bulunur.}$$

Buna göre AB doğru parçasının orta noktasının koordinatları
$C(x_0, y_0) = C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ olur (Grafik 2.1.5).



Grafik 2.1.5

1. ÖRNEK



Şekildeki ABC üçgeninde
$A(5, -5)$
$B(-3, 2)$
$C(1, -6)$ ve $[AD]$
kenarortay olduğuna göre $|AD|$ nun kaç birim olduğunu bulunuz.

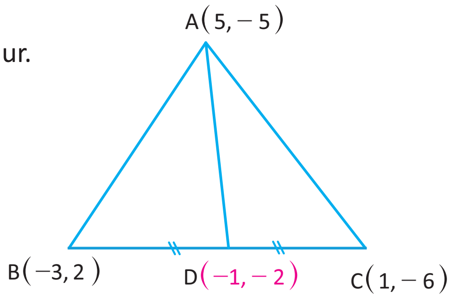
ÇÖZÜM

$[AD]$ kenarortay olduğundan $|BD| = |DC|$ ve D noktası $[BC]$nın orta noktasıdır. $D(x, y)$ olmak üzere

$$x = \frac{-3 + 1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y = \frac{2 + (-6)}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \text{ bulunur. Bu durumda } D(-1, -2) \text{ olur.}$$

$$|AD| = \sqrt{(5 - (-1))^2 + (-5 - (-2))^2}$$
$$= \sqrt{6^2 + (-3)^2}$$
$$= \sqrt{36 + 9}$$
$$= \sqrt{45}$$
$$= 3\sqrt{5} \text{ birim bulunur.}$$

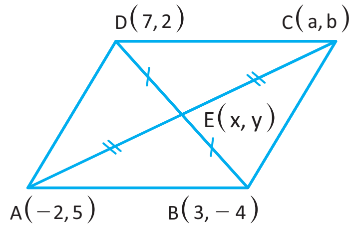


2. ÖRNEK

Analitik düzlemde köşelerinin koordinatları $A(-2,5)$, $B(3,-4)$, $C(a,b)$ ve $D(7,2)$ olan ABCD paralelkenarında $|AC|$ nun kaç birim olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Paralelkenarda köşegenler birbirini ortalar. $[AC]\cap[BD]=E(x,y)$ noktası $[AC]$ ve $[BD]$ köşegenlerinin orta noktası olarak alınırsa



$E\left(\frac{7+3}{2},\frac{2+(-4)}{2}\right)=E(5,-1)$ olur. Buradan

$5=\frac{-2+a}{2} \Rightarrow a=12$

$-1=\frac{5+b}{2} \Rightarrow b=-7$ ise $C(12,-7)$ olur.

$$|AC|=\sqrt{(12-(-2))^2+(-7-5)^2}$$
$$=\sqrt{14^2+(-12)^2}$$
$$=\sqrt{196+144}=\sqrt{340}=2\sqrt{85} \text{ birim bulunur.}$$

3. ÖRNEK

Analitik düzlemde $A(2a-3,3)$ ve $B(-5,3b-2)$ noktaları veriliyor. $[AB]$ nın orta noktası $C(-1,5)$ olduğuna göre $[AC]$ nın orta noktasının B noktasına olan uzaklığının kaç birim olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$C(-1,5)$ noktası $[AB]$ nın orta noktası olduğundan

$\frac{2a-3+(-5)}{2}=-1$ $\qquad$ $\frac{3b-2+3}{2}=5$

$2a-8=-2$ $\qquad$ $3b+1=10$

$2a=6$ $\qquad$ $3b=9$

$a=3$ $\qquad$ $b=3$ olur.

Bu durumda $A(2\cdot3-3,3)=A(3,3)$ ve $B(-5,3\cdot3-2)=B(-5,7)$ bulunur.

D noktası $[AC]$ nın orta noktası olarak seçilirse

$D\left(\frac{3+(-1)}{2},\frac{3+5}{2}\right)=D(1,4)$ olur.

Bu durumda $|BD|=\sqrt{(1-(-5))^2+(4-7)^2}=\sqrt{6^2+(-3)^2}=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$ birim bulunur.

Sıra Sizde

SORU

Analitik düzlemde $K(-4,2)$, $L(x,y)$ ve $M(1,-3)$ noktaları veriliyor.
M noktası $[KL]$ nın orta noktası olduğuna göre L noktasının orijine olan uzaklığının kaç birim olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Bir Doğru Parçasını Belli Bir Oranda İçten Bölen Noktanın Koordinatları

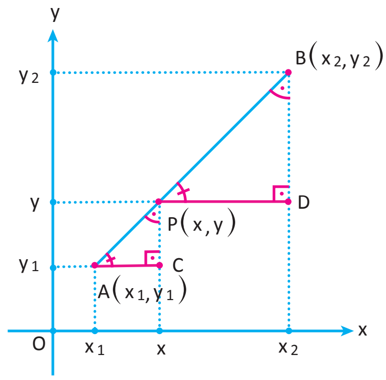
Grafik 2.1.6'da $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ olsun. $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere AB doğru parçasını k oranında içten bölen nokta $P(x, y)$ olarak seçilirse

$\overset{\frown}{ACP} \sim \overset{\frown}{PDB}$ (A.A.) olduğundan $\frac{|AC|}{|PD|} = \frac{|CP|}{|DB|} = \frac{|AP|}{|PB|} = k$ yazılır.

Bu durumda

$$\frac{|AC|}{|PD|} = \frac{|AP|}{|PB|} = k \Rightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x} = k \Rightarrow x - x_1 = k \cdot x_2 - k \cdot x$$
$$x + k \cdot x = x_1 + k \cdot x_2$$
$$x \cdot (1 + k) = x_1 + k \cdot x_2$$
$$x = \frac{x_1 + k \cdot x_2}{1 + k} \text{ ve}$$

$$\frac{|CP|}{|DB|} = \frac{|AP|}{|PB|} = k \Rightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y} = k \Rightarrow y - y_1 = k \cdot y_2 - k \cdot y$$
$$y + k \cdot y = y_1 + k \cdot y_2$$
$$y \cdot (1 + k) = y_1 + k \cdot y_2$$
$$y = \frac{y_1 + k \cdot y_2}{1 + k} \text{ olarak bulunur.}$$



Grafik 2.1.6

Buradan $P(x, y) = P\left(\frac{x_1 + k \cdot x_2}{1 + k}, \frac{y_1 + k \cdot y_2}{1 + k}\right)$ olur.

$k = 1$ alınırsa $P(x, y)$ noktası AB doğru parçasının orta noktası olur.

4. ÖRNEK

Analitik düzlemde $A(-6, 2)$ ve $B(4, -3)$ noktaları için $[AB]$ nı $\frac{|CA|}{|CB|} = \frac{2}{3}$ oranında içten bölen $C(x, y)$ noktasının koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

A noktasının koordinatları x_1, y_1 ve B noktasının koordinatları x_2, y_2 olarak alınırsa $k = \frac{2}{3}$ olduğundan

$$x = \frac{x_1 + k \cdot x_2}{1 + k} = \frac{-6 + \frac{2}{3} \cdot 4}{1 + \frac{2}{3}}$$
$$= \frac{-6 + \frac{8}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{-\frac{10}{3}}{\frac{5}{3}} = -\frac{10}{3} \cdot \frac{3}{5} = -2 \text{ ve}$$

$$y = \frac{y_1 + k \cdot y_2}{1 + k} = \frac{2 + \frac{2}{3} \cdot (-3)}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{2 - 2}{\frac{5}{3}}$$
$$= \frac{0}{\frac{5}{3}}$$
$$= 0 \text{ olur.}$$

Bu durumda C noktasının koordinatları $C(-2, 0)$ olur.

Bir Doğru Parçasını Belli Bir Oranda Dıştan Bölen Noktanın Koordinatları

Grafik 2.1.7'de $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ olsun. $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere AB doğru parçasını k oranında dıştan bölen nokta $C(x, y)$ olarak seçilirse

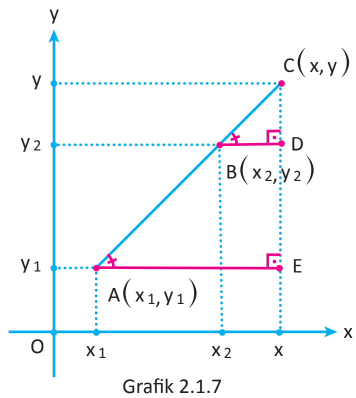
$\widehat{CAE} \sim \widehat{CBD}$ (A.A.) olduğundan $\frac{|CA|}{|CB|} = \frac{|AE|}{|BD|} = \frac{|CE|}{|CD|} = k$ yazılır.

Bu durumda

$$\frac{|AE|}{|BD|} = \frac{|CA|}{|CB|} = k \Rightarrow \frac{x - x_1}{x - x_2} = k \Rightarrow x - x_1 = k \cdot x - k \cdot x_2$$
$$x - k \cdot x = x_1 - k \cdot x_2$$
$$x \cdot (1 - k) = x_1 - k \cdot x_2$$
$$x = \frac{x_1 - k \cdot x_2}{1 - k} \text{ ve}$$

$$\frac{|CE|}{|CD|} = \frac{|CA|}{|CB|} = k \Rightarrow \frac{y - y_1}{y - y_2} = k \Rightarrow y - y_1 = k \cdot y - k \cdot y_2$$
$$y - k \cdot y = y_1 - k \cdot y_2$$
$$y \cdot (1 - k) = y_1 - k \cdot y_2$$
$$y = \frac{y_1 - k \cdot y_2}{1 - k} \text{ olarak bulunur.}$$

Buradan $C(x, y) = C\left(\frac{x_1 - k \cdot x_2}{1 - k}, \frac{y_1 - k \cdot y_2}{1 - k}\right)$ olur.



Grafik 2.1.7

5. ÖRNEK

Analitik düzlemde $A(2, -5)$ ve $B(-1, 3)$ noktaları veriliyor. A, B, P noktaları doğrusal ve $P \notin [AB]$ olmak üzere $\frac{|PB|}{|BA|} = \frac{3}{4}$ olduğuna göre $P(x, y)$ noktasının koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

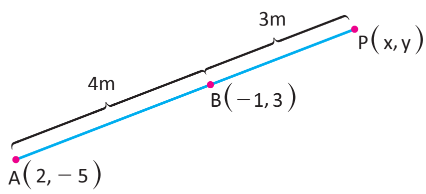
$P \notin [AB]$ olduğundan P noktası, AB doğru parçasını dıştan bölen noktadır.

A noktasının koordinatları $A(x_1, y_1)$; B noktasının koordinatları $B(x_2, y_2)$ olarak alınırsa $P(x, y)$ noktası AB doğru parçasını $k = \frac{3}{4}$ oranında dıştan böldüğünden

$\frac{|PB|}{|BA|} = \frac{3}{4}$ ise $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{7}{3} = k$ olur.

$$x = \frac{2 - \frac{7}{3} \cdot (-1)}{1 - \frac{7}{3}} = \frac{\frac{13}{3}}{-\frac{4}{3}} = -\frac{13}{4}$$

$$y = \frac{-5 - \frac{7}{3} \cdot 3}{1 - \frac{7}{3}} = \frac{-12}{-\frac{4}{3}} = 9$$



Bu durumda P noktasının koordinatları $P\left(-\frac{13}{4}, 9\right)$ olarak bulunur.

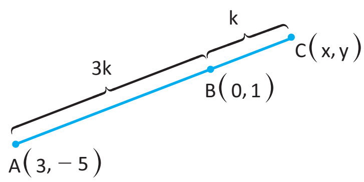
6. ÖRNEK

Analitik düzlemde $A(3,-5)$ ve $B(0,1)$ noktaları veriliyor. AB doğru parçasını $\frac{|CA|}{|CB|}=4$ oranında dıştan bölen $C(x,y)$ noktasının koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

I. Yol

A noktasının koordinatları $A(x_1,y_1)$ ve B noktasının koordinatları $B(x_2,y_2)$ olarak alınırsa $C(x,y)$ noktası AB doğru parçasını $k=4$ oranında dıştan böldüğünden



$$x=\frac{x_1-k\cdot x_2}{1-k}=\frac{3-4\cdot 0}{1-4}=\frac{3}{-3}=-1 \text{ ve}$$

$$y=\frac{y_1-k\cdot y_2}{1-k}=\frac{-5-4\cdot 1}{1-4}=\frac{-5-4}{-3}=\frac{-9}{-3}=3 \text{ olur.}$$

Bu durumda C noktasının koordinatları $C(-1,3)$ olarak bulunur.

II. Yol

Analitik düzlemde doğrusal noktalar arasındaki koordinat değişimleri bu noktalar arasındaki uzaklıkla doğru orantılı olarak artar veya azalır. C noktasının koordinatları orantı yoluyla bulunursa

$\frac{|CA|}{|CB|}=4$ ise $|BC|=k$ birim ve $|AB|=3k$ birim alınabilir.

Apsis Değişimi

$A(3,-5)$ noktasından $B(0,1)$ noktasına apsis 3k için 3 birim azaldığından $A(3,-5)$ noktasından $C(x,y)$ noktasına apsis 4k için 4 birim azalır. Bu durumda C noktasının apsisi $x=3-4=-1$ olur.

Ordinat Değişimi

$A(3,-5)$ noktasından $B(0,1)$ noktasına ordinat 3k için 6 birim arttığından, $A(3,-5)$ noktasından $C(x,y)$ noktasına ordinat 4k için 8 birim artar. Bu durumda C noktasının ordinatı $y=-5+8=3$ olur.

Bu durumda C noktasının koordinatları $C(-1,3)$ olarak bulunur.

Sıra Sizde

SORU

Analitik düzlemde uç noktaları $A(-2,1), B(-6,9)$ ve $P\in[AB]$ olmak üzere AB doğru parçasını $\frac{|AP|}{|PB|}=\frac{1}{3}$ oranında bölen P noktasının koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

SORU

Analitik düzlemde $A(6,-10)$ ve $B(4,2)$ noktaları veriliyor. AB doğru parçasını $\frac{|CA|}{|CB|}=2$ oranında dıştan bölen $C(x,y)$ noktasının koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

Bir Üçgenin Ağırlık Merkezinin Koordinatları

Analitik düzlemde köşelerinin koordinatları $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ve $C(x_3, y_3)$ olan ABC üçgeninin ağırlık merkezinin koordinatları

$G(x, y) = G\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ olur.

İspat

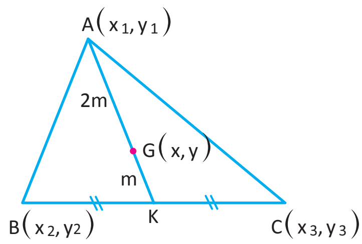
K noktası, BC kenarının orta noktası olarak alınırsa

$K\left(\dfrac{x_2 + x_3}{2}, \dfrac{y_2 + y_3}{2}\right)$ olur.

Üçgende ağırlık merkezi olan G noktası, $[AK]$ kenarortayını

$\dfrac{|AG|}{|GK|} = \dfrac{2m}{m} = k = 2$ oranında içten böler

(Şekil 2.1.1).



Şekil 2.1.1

$A(x_1, y_1)$ ve $K = \left(\dfrac{x_2 + x_3}{2}, \dfrac{y_2 + y_3}{2}\right)$ olmak üzere $G(x, y)$ noktası $[AK]$ nı $k = 2$ oranında içten böldüğünden koordinatları

$$x = \frac{x_1 + \cancel{2} \cdot \dfrac{x_2 + x_3}{\cancel{2}}}{1 + 2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \text{ ve}$$

$$y = \frac{y_1 + \cancel{2} \cdot \dfrac{y_2 + y_3}{\cancel{2}}}{1 + 2} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \text{ olarak bulunur.}$$

Bu durumda ABC üçgeninin ağırlık merkezinin koordinatları

$G\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ olur.

7. ÖRNEK

Analitik düzlemde köşelerinin koordinatları $A(-1, 3)$, $B(4, -2)$, $C(3, -4)$ olan ABC üçgeni veriliyor. ABC üçgeninin ağırlık merkezinin A köşesine olan uzaklığının kaç birim olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

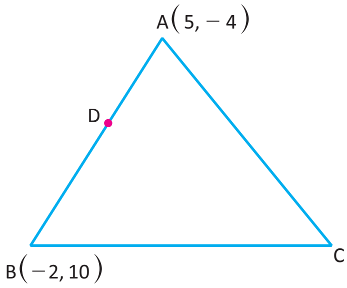
$A(-1, 3)$, $B(4, -2)$, $C(3, -4)$ noktaları için ABC üçgeninin ağırlık merkezinin koordinatları $G(x_0, y_0)$ olmak üzere

$x_0 = \dfrac{-1 + 4 + 3}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$ ve

$y_0 = \dfrac{3 + (-2) + (-4)}{3} = \dfrac{-3}{3} = -1$ olduğundan $G(2, -1)$ olarak bulunur. Buna göre G ağırlık merkezinin üçgenin A köşesine uzaklığı

$$\begin{aligned} |AG| &= \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(2 - (-1))^2 + (-1 - 3)^2} \\ &= \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} \\ &= 5 \text{ birimdir.} \end{aligned}$$

8. ÖRNEK



ABC üçgeninde

$A(5,-4)$, $B(-2,10)$ ve üçgenin ağırlık merkezi $G(4,-3)$ ve

$D\in[AB]$ olmak üzere

$\frac{|AD|}{|AB|}=\frac{3}{7}$ olduğuna göre $[DC]$ nın orta noktasının A noktasına olan uzaklığının kaç birim olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

D noktası, AB doğru parçasını $\frac{3}{7}$ oranında içten böler. Bu noktanın koordinatları

$\frac{|AD|}{|AB|}=\frac{3}{7}$ olduğundan $|AB|=7k$ birim ve $|AD|=3k$ birim alınırsa $|BD|=4k$ birim olur. D noktasının koordinatları orantı yoluyla bulunursa

$A(5,-4)$ noktasından $B(-2,10)$ noktasına apsis 7k için 7 birim azaldığından, $A(5,-4)$ noktasından $D(x,y)$ noktasına apsis 3k için 3 birim azalır. Bu durumda D noktasının apsisi $x=5-3=2$ olur.

$A(5,-4)$ noktasından $B(-2,10)$ noktasına ordinat 7k için 14 birim arttığından, $A(5,-4)$ noktasından $D(x,y)$ noktasına ordinat 3k için 6 birim artar. Bu durumda D noktasının ordinatı $y=-4+6=2$ olur.

Bu durumda D noktasının koordinatları $D(2,2)$ olarak bulunur

C köşesinin koordinatları $C(a,b)$ olarak seçilirse ABC üçgeninin ağırlık merkezi $G(4,-3)$ olduğundan

$$4=\frac{5+(-2)+a}{3}\Rightarrow 12=3+a\Rightarrow a=9 \text{ ve}$$

$$-3=\frac{-4+10+b}{3}\Rightarrow -9=6+b\Rightarrow b=-15 \text{ bulunur.}$$

Bu durumda $C(9,-15)$ olur.

DC doğru parçasının orta noktası $K(m,n)$ olarak seçilirse $K(m,n)=K\left(\frac{9+2}{2},\frac{-15+2}{2}\right)=K\left(\frac{11}{2},\frac{-13}{2}\right)$ olarak bulunur. Buna göre K noktasının A noktasına olan uzaklığı

$$|AK|=\sqrt{\left(\frac{11}{2}-5\right)^2+\left(\frac{-13}{2}-(-4)\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{26}{4}}=\frac{\sqrt{26}}{2} \text{ birimdir.}$$

Sıra Sizde

SORU

Analitik düzlemde köşelerinin koordinatları $A(1,-5)$, $B(a,b)$, $C(-3,7)$ olan ABC üçgeninin ağırlık merkezi $G(-1,2)$ olduğuna göre AC kenarına ait kenarortay uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

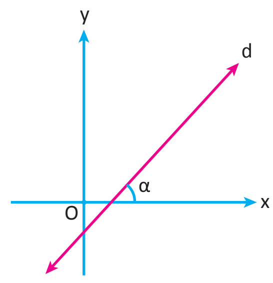
3. Analitik Düzlemde Doğrular

Bir Doğrunun Eğim Açısı ve Eğimi

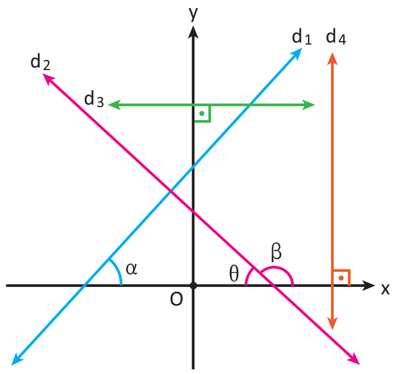
Tanım

Bir d doğrusunun x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açıya doğrunun **eğim açısı**, bu açının tanjantına da **doğrunun eğimi** denir.

Eğim genellikle m ile gösterilir. Bu durumda bir d doğrusunun x ekseninin pozitif yönüyle yaptığı açı α ise $m = \tan\alpha$ şeklinde yazılır (Grafik 2.1.8).



Grafik 2.1.8



Grafik 2.1.9

Grafik 2.1.9'da verilen doğruların eğimleri incelenmiştir. Buna göre

d_1 doğrusunun eğim açısı α, dar açı ise eğim pozitiftir.
Yani $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ise $m = \tan\alpha > 0$ olur.

d_2 doğrusunun eğim açısı β, geniş açı ise eğim negatiftir.
Yani $90^\circ < \beta < 180^\circ$ ise $m = \tan\beta < 0$ olur.
$\beta + \theta = 180^\circ \Rightarrow \tan\beta = -\tan\theta$ olur.

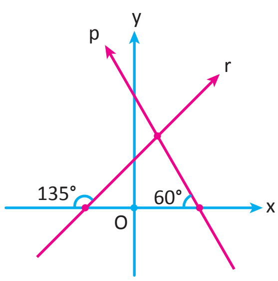
d_3 doğrusunun eğim açısı 0° ise $(d_3 \parallel Ox$ veya $d_3 \perp Oy)$ eğim sıfırdır. Yani $d_3 \perp Oy$ ise $\tan 0^\circ = 0$ olur.

d_4 doğrusunun eğim açısı 90° ise $(d_4 \perp Ox$ veya $d_4 \parallel Oy)$ eğim tanımsızdır. Yani $d_4 \parallel Oy$ ise $\tan 90^\circ$ tanımsızdır.

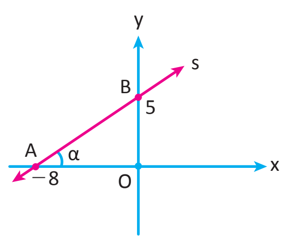
1. ÖRNEK

Aşağıda grafikleri verilen doğruların eğimlerini bulunuz.

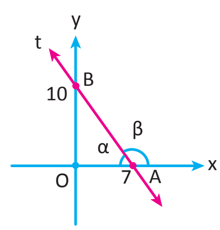
a)



b)



c)



ÇÖZÜM

a) r doğrusunun x ekseninin pozitif yönüyle yaptığı açı α olarak seçilirse
$\alpha = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ olur. Bu durumda $m_r = \tan 45^\circ = 1$ bulunur.
p doğrusunun x ekseninin pozitif yönüyle yaptığı açı β olarak seçilirse
$\beta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ olur. Bu durumda $m_p = \tan 120^\circ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$ bulunur.

b) AOB dik üçgeninde $m_s = \tan\alpha = \dfrac{|OB|}{|OA|} = \dfrac{5}{8}$ olur.

c) AOB dik üçgeninde $\tan\alpha = \dfrac{|OB|}{|OA|} = \dfrac{10}{7}$ olur. $\tan\alpha = -\tan\beta$ olduğundan $m_t = \tan\beta = -\dfrac{10}{7}$ olur.

İki Noktası Verilen Doğrunun Eğimi

Analitik düzlemde d doğrusu üzerindeki noktalardan herhangi ikisi seçilerek elde edilen eğim değişmez. Doğru üzerinde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları verilmiş olsun.

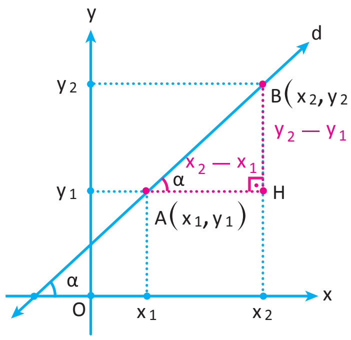
$|AH| = x_2 - x_1$ ve $|BH| = y_2 - y_1$ olur.

AHB dik üçgeninde

$\tan\alpha = \dfrac{|BH|}{|AH|} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ olur (Grafik 2.1.10).

d doğrusunun x ekseninin pozitif yönüyle yaptığı açı α olduğundan

d doğrusunun eğimi $m_d = \tan\alpha = \dfrac{|BH|}{|AH|} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ olarak bulunur.



Grafik 2.1.10

2. ÖRNEK

Analitik düzlemde $A(-5, 7)$ ve $B(6, -4)$ noktalarından geçen doğrunun eğim açısının kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ olarak seçilirse

$m_{AB} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{(-4) - 7}{6 - (-5)} = \dfrac{-4 - 7}{6 + 5} = -\dfrac{11}{11} = -1$ bulunur.

$m_{AB} = \tan\theta = -1$ olduğundan $\theta = 135^\circ$ bulunur.

3. ÖRNEK

Analitik düzlemde $A(3, -7), B(k, 2)$ ve $C(4, -3k)$ noktaları veriliyor. AB doğrusunun eğimi $m_{AB} = 3$ olduğuna göre AC doğrusunun eğimini bulunuz.

ÇÖZÜM

$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ olarak seçilirse $m_{AB} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{2 - (-7)}{k - 3} = \dfrac{9}{k - 3} = 3 \Rightarrow k = 6$ bulunur.

$k = 6$ için $C(4, -3k) = C(4, -18)$ olur.

Buna göre $A(x_1, y_1)$ ve $C(x_3, y_3)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi

$m_{AC} = \dfrac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \dfrac{-18 - (-7)}{4 - 3} = -11$ bulunur.

Sıra Sizde

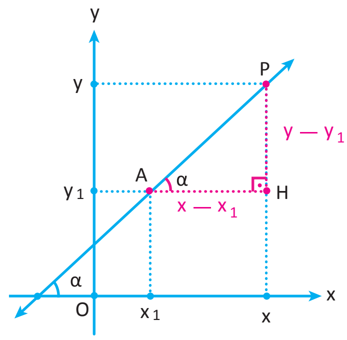
SORU

Analitik düzlemde $A(k, -4)$, $B(p, 10)$, $C(6, -8)$ noktaları doğrusal ve $2k + p = 5$ olduğuna göre k değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Doğru Denkleminin Yazılması

Eğimi ve Bir Noktası Verilen Doğrunun Denklemi



Grafik 2.1.11

Analitik düzlemde $A(x_1, y_1)$ noktasından geçen doğrunun eğimi m olarak verilmiş olsun. $(m \in \mathbb{R})$

Doğru üzerinde değişken $P(x, y)$ noktası alınırsa

$A(x_1, y_1)$ ve $P(x, y)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi

$m = \dfrac{y-y_1}{x-x_1}$ olduğundan ifade düzenlenirse

$y = m \cdot (x - x_1) + y_1$ (Grafik 2.1.11) bulunur.

Bu ifade, $A(x_1, y_1)$ noktasından geçen ve eğimi m olan doğrunun denklemi olur.

Bulunan denklem

$y = m \cdot (x - x_1) + y_1$

$\quad = mx + \underbrace{(-mx_1 + y_1)}_{n} \Rightarrow y = mx + n$ şeklinde de yazılabilir.

4. ÖRNEK

Analitik düzlemde $A(-4, 2)$ noktasından geçen ve eğimi 7 olan doğrunun denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

$A(-4, 2)$ noktasından geçen doğrunun herhangi bir noktası $P(x, y)$ olsun.

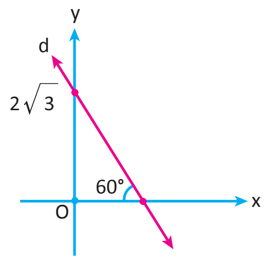
Doğrunun eğimi $m = 7$ olduğundan eğimi ve bir noktası verilen doğru denkleminden

$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$

$y - 2 = 7 \cdot (x - (-4))$

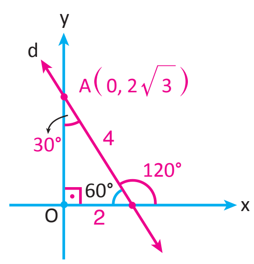
$y - 2 = 7 \cdot (x + 4) \Rightarrow y = 7x + 30$ bulunur.

5. ÖRNEK



Yandaki grafikte y eksenini $(0, 2\sqrt{3})$ noktasında kesen ve x ekseni ile negatif yönde 60° lik açı yapan d doğrusunun denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM



Grafiğe göre d doğrusunun eğim açısı 60° nin bütünleri olan 120° olduğundan

$m_d = \tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$ olur.

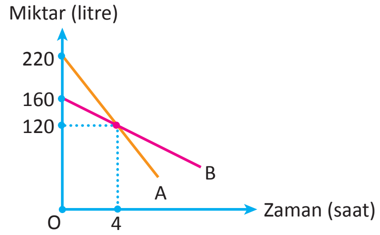
Buna göre $A(0, 2\sqrt{3})$ noktasından geçen ve eğimi $m_d = m = -\sqrt{3}$ olan doğrunun denklemi

$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$

$y - 2\sqrt{3} = -\sqrt{3} \cdot (x - 0)$

$\qquad y = -\sqrt{3} \cdot x + 2\sqrt{3}$ bulunur.

6. ÖRNEK



Yandaki grafikte A ve B araçlarının zamana göre yakıt miktarını gösteren doğrusal grafikler verilmiştir.

Bu grafiğe göre A aracının yakıtı bittiğinde B aracında kaç litre yakıt kalacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

A aracının zamana bağlı yakıt değişimini gösteren doğrunun denklemi d_A, eğimi m_A olsun.
d_A doğrusu $(0, 220)$ ve $(4, 120)$ noktalarından geçtiğinden eğimi

$m_A = \dfrac{120 - 220}{4 - 0} = \dfrac{-100}{4} = -25$ olur.

Bu durumda $(0, 220)$ noktasından geçen ve eğimi $m_A = -25$ olan doğrunun denklemi

$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$ eşitliği kullanılırsa
$y - 220 = -25 \cdot (x - 0)$
$d_A :\ y = -25x + 220$ elde edilir.

Benzer yolla B aracının zamana bağlı yakıt değişimini gösteren doğrunun denklemi d_B, eğimi m_B olsun.
d_B doğrusu $(0, 160)$ ve $(4, 120)$ noktalarından geçtiğinden eğimi

$m_B = \dfrac{120 - 160}{4 - 0} = \dfrac{-40}{4} = -10$ olur.

Bu durumda $(0, 160)$ noktasından geçen ve eğimi $m_B = -10$ olan doğrunun denklemi

$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$ eşitliği kullanılırsa
$y - 160 = -10 \cdot (x - 0)$
$d_B :\ y = -10x + 160$ denklemi elde edilir.

A aracının yakıtının bitiş süresini bulmak için $y = -25x + 220$ denkleminde $y = 0$ yazılmalıdır. Bu süre
$0 = -25x + 220 \Rightarrow 25x = 220$
$x = \dfrac{220}{25} = \dfrac{44}{5}$ sa. bulunur.

$x = \dfrac{44}{5}$ değeri $y = -10x + 160$ denkleminde yerine yazılırsa B aracında kalan yakıt miktarı

$y = -10 \cdot \dfrac{44}{5} + 160 = 72$ litre olarak bulunur.

Sıra Sizde

SORU

Analitik düzlemde $K(-8, -3)$ noktasından geçen ve x ekseniyle pozitif yönde 45° lik açı yapan doğrunun denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

İki Noktası Verilen Doğrunun Denklemi

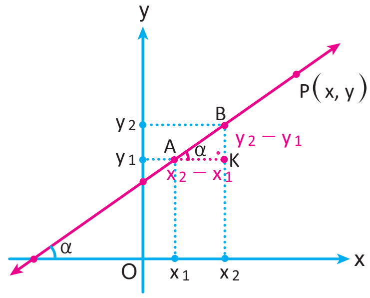
Analitik düzlemde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun üzerindeki değişken bir nokta $P(x, y)$ olsun.
A, B ve P noktalarından geçen doğru için

$m_{AB} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ve $m_{AP} = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$ ve eğimleri birbirine eşittir.

Bu durumda $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$ yazılır. Denklem düzenlenirse

$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi

$\dfrac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \dfrac{x - x_1}{x_1 - x_2}$ olarak bulunur (Grafik 2.1.12).



Grafik 2.1.12

7. ÖRNEK

Analitik düzlemde $A(-2, 3)$ ve $B(-5, -7)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

I. Yol

$A(x_1, y_1) = A(-2, 3)$ ve $B(x_2, y_2) = B(-5, -7)$ değerleri

$\dfrac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \dfrac{x - x_1}{x_1 - x_2}$ denkleminde yerine yazılırsa

$\dfrac{y - 3}{3 - (-7)} = \dfrac{x - (-2)}{-2 - (-5)} \Rightarrow \dfrac{y - 3}{10} = \dfrac{x + 2}{3}$ olduğundan

$3y - 10x - 29 = 0$ denklemi elde edilir.

II. Yol

Verilen iki nokta kullanılarak doğrunun eğimi bulunur. Bulunan eğim ve noktalardan herhangi biri kullanılarak doğrunun denklemi yazılır.

$$
\begin{aligned}
m_{AB} &= \frac{-7 - 3}{-5 - (-2)} \\
&= \frac{-10}{-3} \\
&= \frac{10}{3} \text{ olur.}
\end{aligned}
$$

Eğimi $m_{AB} = \dfrac{10}{3}$ olan ve $A(-2, 3)$ noktasından geçen doğrunun denklemi

$$
\begin{aligned}
y - y_1 = m \cdot (x - x_1) \Rightarrow y - 3 &= \frac{10}{3}(x - (-2)) \\
3y - 9 &= 10x + 20 \\
3y - 10x - 29 &= 0 \text{ olarak bulunur.}
\end{aligned}
$$

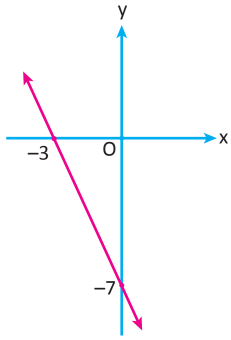
Benzer düşünceyle $B(-5, -7)$ kullanılarak

$$
\begin{aligned}
y - y_1 = m \cdot (x - x_1) \Rightarrow y - (-7) &= \frac{10}{3}(x - (-5)) \\
3y + 21 &= 10x + 50 \\
3y - 10x - 29 &= 0 \text{ denklemi bulunur.}
\end{aligned}
$$

8. ÖRNEK

Analitik düzlemde $A(-3,0)$ ve $B(0,-7)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM



$A(-3,0)$ noktası x ekseni, $B(0,-7)$ noktası y ekseni üzerindedir.
A ve B noktalarından geçen doğrunun eğimi $m_{AB}=\dfrac{-7-0}{0-(-3)}=-\dfrac{7}{3}$ olur.

Eğimi $m=-\dfrac{7}{3}$ olan ve $A(-3,0)$ noktasından geçen doğrunun denklemi $y-y_1=m\cdot(x-x_1)$ eşitliği kullanılarak

$$y-0=-\frac{7}{3}\cdot(x-(-3))\Rightarrow y=-\frac{7}{3}\cdot(x+3)$$

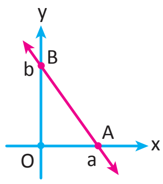
$3y+7x=-21$ bulunur.

$3y+7x=-21$ denkleminde bütün terimler -21 ile bölünürse

$$\frac{7x}{-21}+\frac{3y}{-21}=\frac{-21}{-21}\quad\Rightarrow\quad\frac{x}{-3}+\frac{y}{-7}=1$$ elde edilir.

Sonuç

Grafik 2.1.13'te $A(a,0)$ ve $B(0,b)$ noktasından geçen doğrunun denklemi $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ olur.



Grafik 2.1.13

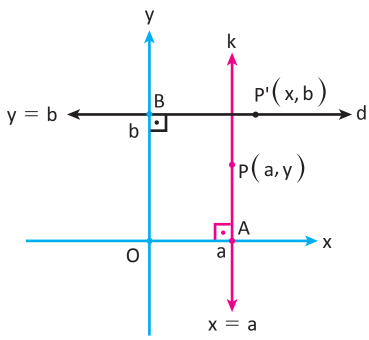
Eksenlere Paralel Doğruların Denklemi

k doğrusu, y eksenine paralel ve x eksenine $A(a,0)$ noktasında dik olsun. k doğrusu üzerindeki tüm noktaların apsisi a olduğundan denklemi $x=a$ olur.

Özel olarak $a=0$ alınırsa $x=0$ doğrusu y ekseni olur.
y eksenine paralel doğruların eğim açısı 90° olduğundan eğimleri tanımsızdır.

d doğrusu, x eksenine paralel ve y eksenine $B(0,b)$ noktasında dik olsun. d doğrusu üzerindeki tüm noktaların ordinatı b olduğundan denklemi $y=b$ olur.

Özel olarak $b=0$ alınırsa $y=0$ doğrusu x ekseni olur.
x eksenine paralel doğruların eğim açısı 0° olduğundan eğimleri sıfırdır (Grafik 2.1.14).



Grafik 2.1.14

9. ÖRNEK

Analitik düzlemde $A(7k+3,9)$ ve $B(k-15,-4)$ noktalarından geçen doğru, y eksenine paralel olduğuna göre k değerini bulunuz.

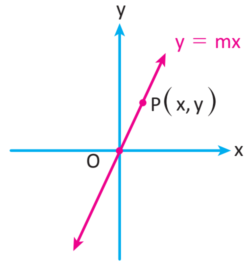
ÇÖZÜM

$A(7k+3,9)$ ve $B(k-15,-4)$ noktalarından geçen doğru y eksenine paralel ise noktaların apsis değerleri eşittir.
Bu durumda $7k+3=k-15$ yazılır. Buradan $k=-3$ bulunur.

Orijinden Geçen Doğruların Denklemi

$O(0,0)$ noktasından (orijinden) geçen doğrunun eğimi m olsun.
$P(x,y)$ noktası, doğru üzerindeki değişken nokta olarak seçilirse
$m_{OP} = m$ olur.
$\dfrac{y-0}{x-0} = m$ olduğundan $\dfrac{y}{x} = m$ ise $y = mx$ elde edilir.

O hâlde eğimi m olan ve orijinden geçen doğruların denklemi
$y = mx$ olur (Grafik 2.1.15).

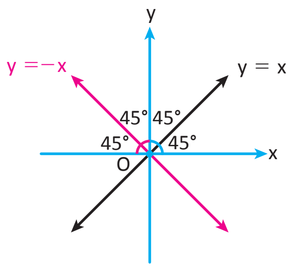


Grafik 2.1.15

Sonuç

Özel olarak $m = 1$ alınırsa $y = x$ doğrusu elde edilir.
Bu doğru 1. açıortay doğrusu olarak adlandırılır.

$m = -1$ alınırsa $y = -x$ doğrusu elde edilir.
Bu doğru 2. açıortay doğrusu olarak adlandırılır
(Grafik 2.1.16).



Grafik 2.1.16

10. ÖRNEK

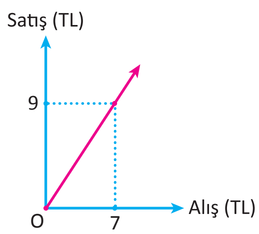
a) Eğimi $-\dfrac{4}{7}$ olan ve orijinden geçen doğrunun denklemini bulunuz.
b) Orijinden geçen ve x ekseniyle pozitif yönde 60° lik açı yapan doğrunun denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Eğimi m olan ve $O(0,0)$ noktasından geçen doğrunun denklemi $y = mx$ olduğundan
eğimi $-\dfrac{4}{7}$ olan ve orijinden geçen doğrunun denklemi $y = -\dfrac{4}{7}x$ olur.

b) $(0,0)$ noktasından geçen doğrunun eğim açısı 60° ise eğimi $m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ olur.
Buna göre doğrunun denklemi $y = \sqrt{3}\,x$ olur.

11. ÖRNEK



Yandaki doğrusal grafik bir ürünün alış ve satış fiyatları arasındaki bağıntıyı göstermektedir.
Buna göre 35 TL'ye alınan ürünün kaç TL'ye satılacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

Şekildeki doğrunun eğimi $m = \dfrac{9}{7}$ olur.
Doğru orijinden geçtiğinden denklemi $y = mx$ eşitliğinden $y = \dfrac{9}{7}x$ olur.
Ürünün alış fiyatı $x = 35$ TL ise satış fiyatı $y = \dfrac{9}{7} \cdot 35 = 45$ TL olarak bulunur.

Denklemi Bilinen Doğruların Eğimi

Tanım

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $b \neq 0$ olmak üzere $ax + by + c = 0$ denklemine **doğrunun kapalı denklemi** denir.

$ax + by + c = 0 \Rightarrow by = -ax - c$

$$y = -\frac{a}{b}x + \left(-\frac{c}{b}\right) \text{ olur.}$$

$-\frac{a}{b} = m$ ve $-\frac{c}{b} = n$ alınırsa $y = mx + n$ elde edilir.

Bu denkleme doğrunun **açık denklemi** denir. Bu durumda doğrunun eğimi m olur.

12. ÖRNEK

Analitik düzlemde aşağıda denklemleri verilen doğruların eğimlerini bulunuz.

a) $4x - 7y + 3 = 0$

b) $y = 8x + 12$

c) $y = 4$

ÇÖZÜM

a) $4x - 7y + 3 = 0$ denkleminde y yalnız bırakılırsa $7y = 4x + 3$ elde edilir.

Tüm terimler 7 ile bölünürse

$y = \frac{4}{7}x + \frac{3}{7}$ olur. Bu durumda doğrunun eğimi x in katsayısı olan $m = \frac{4}{7}$ olur.

b) $y = 8x + 12$ doğrusunun eğimi x in katsayısı olan $m = 8$ olur.

c) $y = 4$ doğrusu, x eksenine paralel bir doğrudur.

x eksenine paralel doğruların eğimi $m = 0$ olur.

Sıra Sizde

SORU

Analitik düzlemde aşağıda verilen doğruların eğimlerini bulunuz.

a) $-3y + 2x - 1 = 0$ b) $5y = 3x$ c) $y = -3x - 5$

ÇÖZÜM

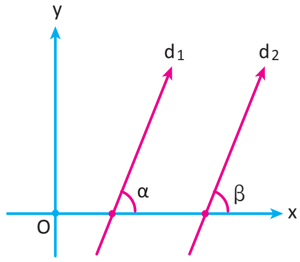
Birbirine Paralel ya da Dik Olan Doğruların Eğimleri Arasındaki Bağıntılar

d_1 ve d_2 doğruları birbirine paralel ise doğruların eğim açıları ve dolayısıyla eğimleri de eşit olur (Grafik 2.1.17).

Buna göre $d_1 \parallel d_2 \Rightarrow \alpha = \beta$ olur. Buradan

$\tan\alpha = \tan\beta$ ise $m_1 = m_2$ elde edilir.

Sonuç olarak $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$ olur.



Grafik 2.1.17

d_1 ve d_2 doğruları birbirine dik ve eğimleri sırasıyla m_1 ve m_2 olsun.

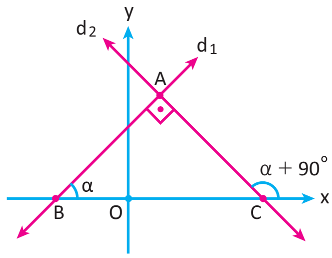
d_1 doğrusunun eğimi $m_1 = \tan\alpha$ olur (Grafik 2.1.18).

$d_1 \perp d_2$ olduğundan ABC üçgeninde C köşesindeki dış açının ölçüsü $\alpha + 90^\circ$ olur.

Bu açı d_2 doğrusunun eğim açısı olduğundan d_2 doğrusunun eğimi $m_2 = \tan(\alpha + 90^\circ) = -\cot\alpha = -\dfrac{1}{\tan\alpha}$ olur.

Bu durumda $m_1 \cdot m_2 = \tan\alpha \cdot \left(-\dfrac{1}{\tan\alpha}\right) = -1$ olur.

Sonuç olarak $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$ olur.



Şekil 2.1.18

13. ÖRNEK

Analitik düzlemde

$d_1: 3y - kx = 6$

$d_2: (k+3)y = -4x - 7$ ve

$d_3: 2kx - ny + 10 = 0$ doğru denklemleri veriliyor.

$d_1 \perp d_2$ ve $d_2 \parallel d_3$ olduğuna göre $k + n$ toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$d_1: 3y - kx = 6 \Rightarrow 3y = kx + 6$ ve $y = \dfrac{k}{3}x + 2$ olduğundan d_1 doğrusunun eğimi $m_1 = \dfrac{k}{3}$ olur.

$$d_2: (k+3)y = -4x - 7 \Rightarrow y = \frac{-4x-7}{k+3}$$
$$= \frac{-4}{k+3}x - \frac{7}{k+3} \text{ bulunur.}$$

Bu durumda d_2 doğrusunun eğimi $m_2 = -\dfrac{4}{k+3}$ olur.

$$d_3: 2kx - ny + 10 = 0 \Rightarrow ny = 2kx + 10$$
$$y = \frac{2k}{n}x + \frac{10}{n} \text{ bulunur.}$$

Bu durumda d_3 doğrusunun eğimi $m_3 = \dfrac{2k}{n}$ olur.

$d_1 \perp d_2 \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$ olur. Bu durumda $\dfrac{k}{3} \cdot \left(-\dfrac{4}{k+3}\right) = -1 \Rightarrow \dfrac{-4k}{3k+9} = -1$ ve $k = 9$ olur.

$d_2 \parallel d_3 \Rightarrow m_2 = m_3$ olur. Bu durumda $\dfrac{-4}{k+3} = \dfrac{2k}{n} \Rightarrow \dfrac{-4}{9+3} = \dfrac{2 \cdot 9}{n}$ ve $n = -54$ olur.

Bu durumda $k + n = 9 + (-54) = -45$ bulunur.

14. ÖRNEK

Analitik düzlemde $A(1,k)$ ve $B(4,2)$ noktalarından geçen doğru $C(-7,3)$ ve $D(3,5)$ noktalarından geçen doğruya dik olduğuna göre k değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$A(1,k)$ ve $B(4,2)$ noktalarından geçen doğru d_{AB}, eğimi m_1 ve

$C(-7,3)$ ve $D(3,5)$ noktalarından geçen doğru d_{CD}, eğimi m_2 olsun.

$d_{AB} \perp d_{CD}$ ise $m_1 \cdot m_2 = -1$ olur.

$m_1 = \frac{2-k}{4-1} = \frac{2-k}{3}$ ve $m_2 = \frac{5-3}{3-(-7)} = \frac{1}{5}$ olduğundan

$m_1 \cdot m_2 = \frac{2-k}{3} \cdot \frac{1}{5} = -1 \Rightarrow k = 17$ bulunur.

15. ÖRNEK

Analitik düzlemde $d_1: 2ax + 6y - 8 = 0$ ve $d_2: (4a-3)x + 4y - 7 = 0$ doğruları paralel olduğuna göre a değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

d_1 doğrusunun eğimi m_1 olsun. $d_1: 2ax + 6y - 8 = 0 \Rightarrow y = -\frac{2a}{6}x + \frac{8}{6}$ olduğundan $m_1 = -\frac{2a}{6} = -\frac{a}{3}$

d_2 doğrusunun eğimi m_2 olsun. $d_2: (4a-3)x + 4y - 7 = 0 \Rightarrow y = -\frac{(4a-3)}{4}x + \frac{7}{4}$ olduğundan

$m_2 = -\frac{(4a-3)}{4}$ olur. $d_1 \parallel d_2$ olduğundan eğimler birbirine eşittir.

$$m_1 = m_2 \Rightarrow -\frac{a}{3} = -\frac{(4a-3)}{4}$$

$$4a = 3 \cdot (4a-3)$$

$$8a = 9$$

$$a = \frac{9}{8} \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

SORU

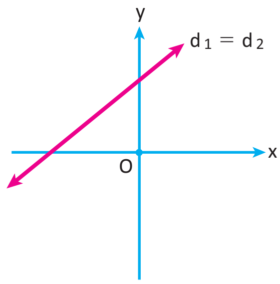
Analitik düzlemde $A(4,8)$ ve $B(-2,2)$ noktalarından geçen doğru $d: kx + 3y + 2 = 0$ doğrusuna paralel olduğuna göre k değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

İki Doğrunun Birbirine Göre Durumları

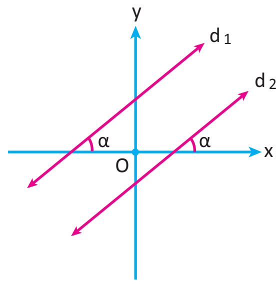
$d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ve $d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ doğruları verilmiş olsun. Bu durumda

1. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ise doğrular çakışıktır (Grafik 2.1.19).
   Bu durumda $d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ denklemi, $d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ denkleminin belli bir katı olduğundan doğruların bütün noktaları ortaktır. Dolayısıyla d_1 ve d_2 doğru denklemlerinin oluşturduğu denklem sisteminin sonsuz çözümü vardır.



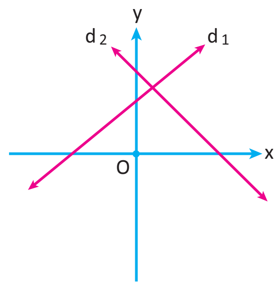
Grafik 2.1.19

2. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ise doğrular paraleldir (Grafik 2.1.20).
   Bu durumda $d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ve $d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ doğrularının eğimleri birbirine eşittir.
   Doğrular paralel olduğundan ortak noktaları yoktur.
   Bu durumda d_1 ve d_2 doğru denklemlerinin oluşturduğu denklem sisteminin
   $\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{array}\right\}$ çözüm kümesi boş küme olur.



Grafik 2.1.20

3. $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ise doğrular bir noktada kesişir (Grafik 2.1.21).
   $\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{array}\right\}$ sisteminin çözüm kümesi, d_1 ve d_2 doğrularının kesişme noktasıdır.



Grafik 2.1.21

16. ÖRNEK

$d_1: -6x + 9y - 36 = 0$
$d_2: -2x + 3y - 6 = 0$
$d_3: 7x + 5y - 35 = 0$ ve
$d_4: -2x + 3y - 12 = 0$ doğrularının analitik düzlemde birbirlerine göre durumlarını belirleyiniz.

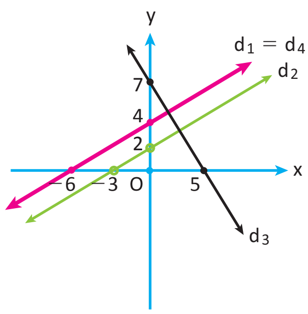
ÇÖZÜM

d_1 ve d_4 doğruları için $\frac{-6}{-2} = \frac{9}{3} = \frac{-36}{-12}$ olduğundan bu doğrular çakışık olur.

d_2 ve d_4 doğruları için $\frac{-2}{-2} = \frac{3}{3} \neq \frac{-6}{-12}$ olduğundan bu doğrular paralel olur.

d_2 ve d_3 doğruları için $\frac{-2}{7} \neq \frac{3}{5}$ olduğundan bu doğrular bir noktada kesişir.

Diğer doğruların birbirlerine göre konumlarını siz inceleyiniz.



17. ÖRNEK

Analitik düzlemde $d_1:(a-2)x+7y+a=0$ ve $d_2:3x+(a+2)y+5=0$ doğrularının ortak noktası bulunmadığına göre a değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

d_1 ve d_2 doğrularının ortak noktaları yoksa bu doğrular paralel olur. Bu durumda

$\frac{a-2}{3}=\frac{7}{a+2}\neq\frac{a}{5}$ olmalıdır.

$a^2-4=21$

$a^2=25$

$a=\mp5$ bulunur.

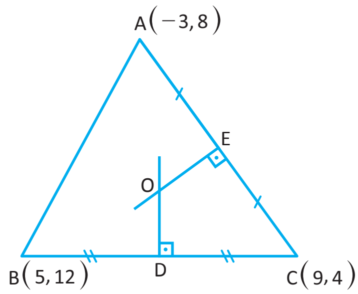
$a=5\Rightarrow\frac{7}{5+2}=\frac{5}{5}$ olduğundan $a\neq5$ olmalıdır.

$a=-5\Rightarrow\frac{7}{-5+2}\neq\frac{-5}{5}$ olduğundan $a=-5$ olur.

18. ÖRNEK

Analitik düzlemde köşelerinin koordinatları $A(-3,8)$, $B(5,12)$, $C(9,4)$ olan ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezinin koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM



Bir üçgenin kenar orta dikmelerinin kesim noktası, bu üçgenin çevrel çemberinin merkezidir. Bu nokta $O(x,y)$ olsun.

D noktası $[BC]$ nın orta noktası olmak üzere koordinatları

$D\left(\frac{5+9}{2},\frac{12+4}{2}\right)=D(7,8)$ olur.

E noktası $[AC]$ nın orta noktası olmak üzere koordinatları

$E\left(\frac{9-3}{2},\frac{8+4}{2}\right)=E(3,6)$ olur.

$m_{BC}=\frac{4-12}{9-5}=\frac{-8}{4}=-2$ olur. ve $m_{AC}=\frac{4-8}{9-(-3)}=\frac{-4}{12}=-\frac{1}{3}$ olur.

$[OD]\perp[BC]$ olduğundan $m_{BC}\cdot m_{OD}=-1$ olur. Buradan $-2\cdot m_{OD}=-1\Rightarrow m_{OD}=\frac{1}{2}$ olur.

Eğimi $m_{OD}=\frac{1}{2}$ olan ve $D(7,8)$ noktasından geçen d_{OD} doğrusunun denklemi

$y-8=\frac{1}{2}(x-7)\Rightarrow 2y-x-9=0$ olarak bulunur.

$[AC]\perp[OE]$ olduğundan $m_{AC}\cdot m_{OE}=-1$ olur. Buradan $-\frac{1}{3}\cdot m_{OE}=-1\Rightarrow m_{OE}=3$ olur.

Eğimi $m_{OE}=3$ olan ve $E(3,6)$ noktasından geçen d_{OE} doğrusunun denklemi

$y-6=3(x-3)\Rightarrow y-3x+3=0$ olarak bulunur.

$d_{OE}\cap d_{OD}$ çevrel çemberin merkezi olduğundan

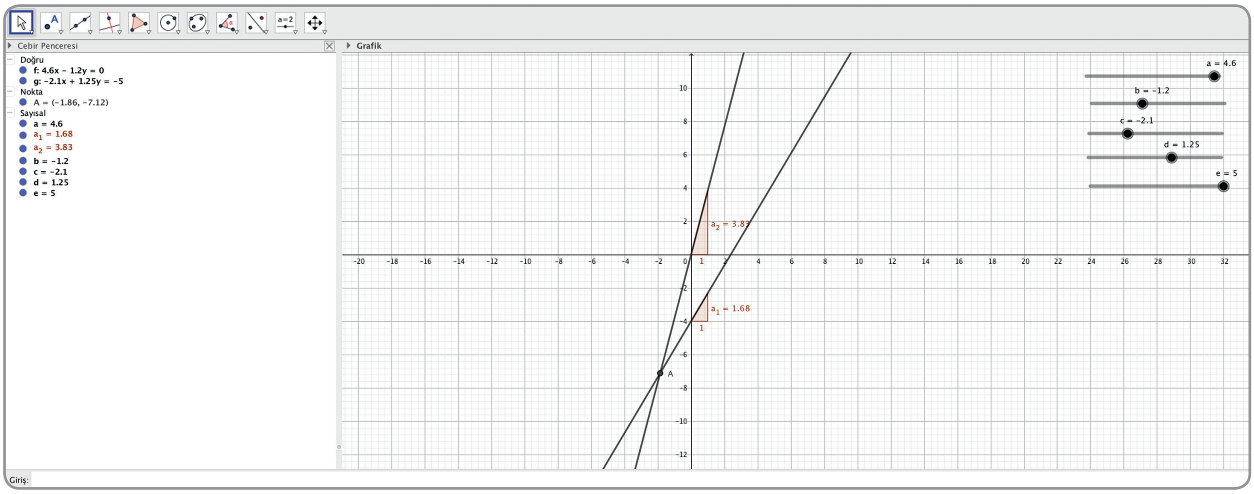
$\left.\begin{array}{l}2y-x-9=0\\ y-3x+3=0\end{array}\right\}$ doğruların kesim noktasını bulmak için denklem sistemi çözülürse

üçgenin çevrel çemberinin merkez koordinatları $O(x,y)=O(3,6)$ olarak bulunur.

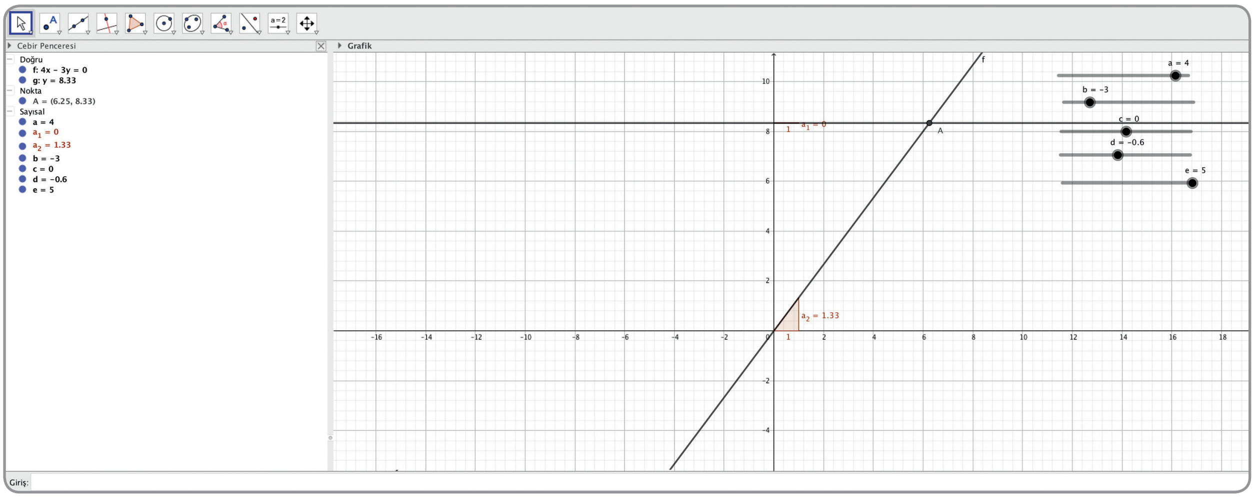
Teknoloji Uygulaması

Görsel 2.1.1 ve Görsel 2.1.2'de GeoGebra programı kullanılarak iki doğrunun birbirine göre durumları incelenmiştir.

Grafik Çizme	Programı çalıştırdığınızda **Grafik Çizme** kutucuğunu seçiniz.
a=2	**Sürgü** aracını seçiniz. a, b, c, d ve e isimli sürgüleri tanımlayınız.
Giriş:	**Giriş** kısmına a*x+b*y=0 ve c*x+d*y+e=0 yazdıktan sonra **Enter** tuşuna basınız.
a =	a sürgüsünün farklı değerleri için f doğrusundaki değişimleri gözlemleyiniz.
A	**Nokta** aracını seçiniz. f ve g doğrularının kesim noktalarını belirleyiniz.
	Eğim aracını seçiniz. f ve g noktalarını seçerek eğimlerini belirleyiniz.
	a, b, c, d ve e sürgülerindeki farklı değerler için doğru grafiklerindeki değişimleri inceleyiniz. Kesim noktasının koordinatları ve doğruların eğimlerindeki değişimlere dikkat ediniz.



Görsel 2.1.1



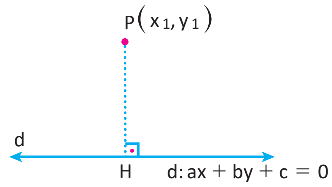
Görsel 2.1.2

4. Bir Noktanın Bir Doğruya Olan Uzaklığı

Bir $P(x_1, y_1)$ noktasının; denklemi $d: ax + by + c = 0$ doğrusuna olan uzaklığı, $P(x_1, y_1)$ noktasından doğruya indirilen $[PH]$ dikmesinin uzunluğuna eşittir (Grafik 2.1.22).

P ve H noktaları arasındaki uzaklık

$\ell = |PH| = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ olur.



Grafik 2.1.22

H noktası, $d: ax + by + c = 0$ ve $y - y_1 = \dfrac{b}{a}(x - x_1)$ doğrularının kesişme noktasıdır. Bu nokta

$$\left.\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ y - y_1 &= \frac{b}{a}(x - x_1) \end{aligned}\right\}$$ sisteminin çözümü ile bulunur.

Sonuç olarak P ve H noktaları arasındaki uzaklık

$\ell = |PH| = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ olarak bulunur.

1. ÖRNEK

Analitik düzlemde $A(-3, 5)$ noktasının $12x - 5y - 4 = 0$ doğrusuna olan uzaklığının kaç birim olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$12x - 5y - 4 = 0$ doğrusunda $a = 12$ ve $b = -5$ olduğundan

$A(-3, 5)$ noktasının $12x - 5y - 4 = 0$ doğrusuna olan uzaklığı

$$\begin{aligned} \ell = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} &= \frac{|12 \cdot (-3) - 5 \cdot 5 - 4|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} \\ &= \frac{|-65|}{13} \\ &= \frac{65}{13} \\ &= 5 \text{ birim olur.} \end{aligned}$$

Sıra Sizde

SORU

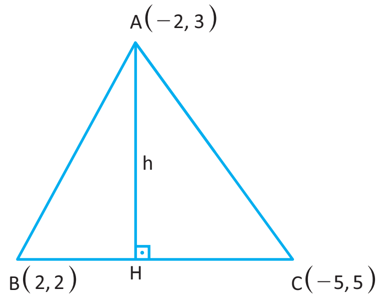
Analitik düzlemde $P(k, 3)$ noktasının $3x = 4y - 19$ doğrusuna olan uzaklığı 20 birim olduğuna göre k nin pozitif değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

2. ÖRNEK

Analitik düzlemde köşelerinin koordinatları $A(-2,3), B(2,2)$ ve $C(-5,5)$ olan ABC üçgeninin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



ABC üçgeninin alanını bulabilmek için üçgenin hernangi bir kenar uzunluğu ile bu kenara ait yüksekliğin bulunması gerekir.

$B(2,2)$ ve $C(-5,5)$ noktaları $\dfrac{y-y_1}{y_1-y_2}=\dfrac{x-x_1}{x_1-x_2}$ eşitliğinde yazılırsa

$$\frac{y-2}{2-5}=\frac{x-2}{2-(-5)}$$
$$\Rightarrow \frac{y-2}{-3}=\frac{x-2}{7}$$
$$\Rightarrow 7y-14=-3x+6$$
$$\Rightarrow 3x+7y-20=0 \text{ olur.}$$

$A(-2,3)$ noktasının $3x+7y-20=0$ doğrusuna olan uzaklığı, üçgenin $[BC]$ na olan yüksekliğidir.

Bu uzunluk $h=\dfrac{|3(-2)+7\cdot 3-20|}{\sqrt{3^2+7^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{58}}$ olur.

BC kenarının uzunluğu, $B(2,2)$ ve $C(-5,5)$ noktaları arasındaki uzaklık olduğundan bu değer

$$|BC|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$
$$=\sqrt{(2-(-5))^2+(2-5)^2}$$
$$=\sqrt{49+9}$$
$$=\sqrt{58} \text{ olur.}$$

Bu durumda ABC üçgeninin alanı

$A(\widehat{ABC})=\dfrac{1}{2}\cdot|BC|\cdot h=\dfrac{1}{2}\cdot\cancel{\sqrt{58}}\cdot\dfrac{5}{\cancel{\sqrt{58}}}=\dfrac{5}{2}$ birimkare bulunur.

Sıra Sizde

SORU

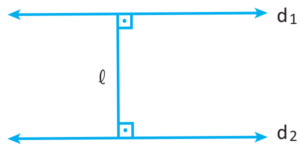
Analitik düzlemde $A(-2,4)$ noktası veriliyor. ABCD dikdörtgeninin B ve C köşeleri $5x-12y+19=0$ doğrusu üzerindedir. Çevre$(ABCD)=36$ birim olduğuna göre $A(ABCD)$ nın kaç birimkare olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Paralel İki Doğru Arasındaki Uzaklık

$d_1 \parallel d_2$ olmak üzere $d_1: ax+by+c_1=0$ ve $d_2: ax+by+c_2=0$ doğruları verilmiş olsun. Bu iki doğru arasındaki uzaklık

$\ell = \dfrac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ olur (Grafik 2.1.23).



Grafik 2.1.23

İspat

$d_1: ax+by+c_1=0$ doğrusu üzerinde bir (x_1, y_1) noktası alındığında bu noktanın $d_2: ax+by+c_2=0$ doğrusuna olan uzaklığı, d_1 doğrusunun d_2 doğrusuna olan uzaklığıdır.

(x_1, y_1) noktası d_1 doğrusu üzerinde olduğundan denklemi sağlar. Buradan

$ax_1+by_1+c_1=0 \Rightarrow ax_1+by_1=-c_1$ olur.

(x_1, y_1) noktasının d_2 doğrusuna olan uzaklığı

$$\ell = \frac{|ax_1+by_1+c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|-c_1+c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$= \frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ bulunur.}$$

3. ÖRNEK

Analitik düzlemde $4y-6x=17$ ve $2y-3x=15$ doğruları arasındaki uzaklığın kaç birim olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Doğrular paralel olduğundan iki denklemde de x ve y lerin katsayıları eşit olmalıdır. İkinci doğrunun terimleri 2 ile çarpılırsa iki doğruda değişkenlerin katsayıları eşitlenmiş olur.

$$4y-6x=17 \Rightarrow 4y-6x-17=0$$

$$2/\ 2y-3x-15=0 \Rightarrow 4y-6x-30=0$$

Bu durumda verilen doğrular arasındaki uzaklık

$$\ell = \frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|-17-(-30)|}{\sqrt{4^2+(-6)^2}} = \frac{|13|}{\sqrt{52}} = \frac{\sqrt{13}}{2} \text{ birim bulunur.}$$

4. ÖRNEK

Analitik düzlemde karşılıklı iki kenarı $3x-4y-23=0$ ve $3x-4y-8=0$ doğruları üzerinde bulunan karenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Karenin bir kenar uzunluğu, verilen doğrular arasındaki uzaklığa eşit olduğundan

$$\ell = \frac{|-23-(-8)|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$$

$$= \frac{|-23+8|}{\sqrt{25}} = \frac{|-15|}{5} = 3 \text{ birim olur.}$$

Bu durumda karenin alanı $\ell^2 = 3^2 = 9$ birimkare bulunur.

5. ÖRNEK

Bir araba kiralama firması belirli bir araç türü için aşağıdaki ücretlendirmeyi yapmaktadır.
Günlük 100 km ye kadar 200 TL, 100 km den sonraki her km için 40 kuruş ücret alınmaktadır.

Buna göre

a) Günübirlik araba kiralayan birinin gideceği yola karşılık ödeyeceği ücreti gösteren fonksiyon kuralı modelleyiniz ve grafiğini çiziniz.

b) Araba kiralama firmasındaki 10 adet arabanın yukarıdaki ücretlendirmelerle kiralandığı ve arabaların ortalama 500 km yol gittiği düşünülürse firmanın kazancını gösteren fonksiyonu modelleyiniz ve grafiğini çiziniz. Bu koşullarla firmanın bir aylık kazancının kaç TL olacağını bulunuz. (1 ay 30 gün alınacaktır.)

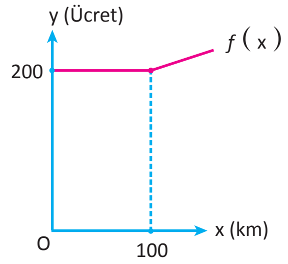
ÇÖZÜM

a) Bu araba kiralama firmasında ilk 100 km ye kadar günlük kiralama ücreti 200 TL ve sonrasındaki her 1 km için 40 kuruş $=0,4$ TL ücret alınacağından aşağıdaki parçalı fonksiyon kuralı elde edilir.

x, kiralanan arabanın gittiği yol olmak üzere parçalı fonksiyonun $x>100$ için kuralı bulunursa

$200+0,4\cdot(x-100)=200+\frac{2}{5}x-40=\frac{2}{5}x+160$ olur. Buradan

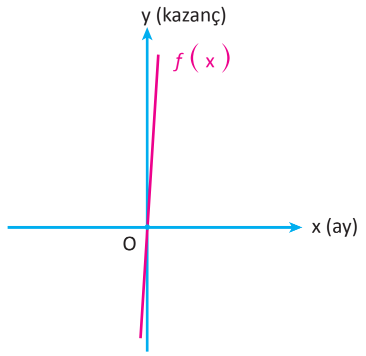
$f(x)=\begin{cases}200, & x\leq 100 \text{ ise}\\ \frac{2}{5}x+160, & x>100 \text{ ise}\end{cases}$ bulunur. Grafik aşağıda verilmiştir.



b) Araba kiralama firmasında 10 adet aynı ücretlendirmeyle kiralanan araba olduğundan ve bu arabalar günlük ortalama 500 km yol gittiğinden firmanın günlük kazancı bulunursa

$f(500)=\frac{2}{5}\cdot 500+160=200+160=360$ TL bir araçtan elde edilen günlük kazançtır.

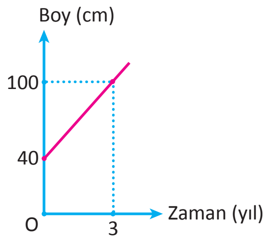
Buradan $10\cdot 360=3600$ TL firmanın günlük kazancı olur. Bu kazancı gösteren fonksiyon x, gün sayısı olmak üzere $f(x)=3600x$ olur. Grafik aşağıda verilmiştir.



Firmanın bu koşullarda aylık kazancı $f(30)=3600\cdot 30=108\,000$ TL olur.

ALIŞTIRMALAR

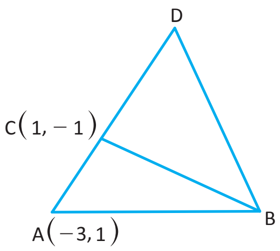
1. Analitik düzlemde $A(m-3, 5)$ ve $B(-2, 3m)$ noktalarının orijine olan uzaklıkları eşit olduğuna göre m nin alabileceği değerlerin çarpımını bulunuz.

2. 

Yandaki grafik bir ceviz fidanının dikildikten sonra yıllara göre boyundaki değişimi göstermektedir.

Buna göre dikildikten kaç yıl sonra ceviz fidanının boyunun 280 cm olacağını bulunuz.

3. Analitik düzlemde A, C, D noktaları doğrusaldır.



$\dfrac{|DC|}{|DA|} = \dfrac{3}{5}$ ve DCB üçgeninin ağırlık merkezi $G(2, -1)$ olduğuna göre

$[DB]$ nın orta noktasının A köşesine olan uzaklığının kaç birim olduğunu bulunuz.

4. Analitik düzlemde $A(-10, 3)$ ve $B(-7, -5)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

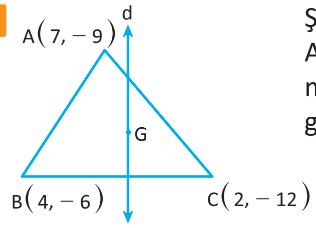
5. Analitik düzlemde

$d_1: 4y - 2kx = 16$

$d_2: (4 + k)y - 4x = -8$

$d_3: 3kx - 2ny + 13 = 0$ doğruları veriliyor.

$d_1 \perp d_2$ ve $d_2 \parallel d_3$ olduğuna göre $k \cdot n$ değerini bulunuz.

6. 

Şekilde G noktası ABC üçgeninin ağırlık merkezi olduğuna göre

$d \perp [BC]$ koşulunu sağlayan d doğrusunun denklemini bulunuz.

7. Analitik düzlemde $A(-7, -10)$ noktasının, denklemi $3x - 4y + 21 = 0$ olan doğruya uzaklığının kaç birim olduğunu bulunuz.

8. Analitik düzlemde köşeleri $A(-7, 2)$, $B(2, 8)$ ve $C(5, -6)$ noktaları olan ABC üçgeninde $[AC]$ na ait yüksekliğin kaç birim olduğunu bulunuz.

9. Analitik düzlemde $y = -x + 4$ doğrusu ile x ekseni üzerinde kesişen ve $4x + 2y - 3 = 0$ doğrusuna paralel olan doğrunun denklemini bulunuz.

10. Analitik düzlemde denklemi $x - y - 3 = 0$ olan doğrunun $A(7, -4)$ noktasına en yakın olan noktasının apsisini bulunuz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A) Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerlere uygun sözcük ya da değerleri yazınız.

1. $K(-2,0)$ ve $M(0,-4)$ noktaları arasındaki uzaklık .... birimdir.

2. $A(3,-2)$ ve $B(-5,-8)$ olduğuna göre $[AB]$ nın orta noktasının koordinatları .... olur.

3. $A(3,-5)$ ve $B(2,1)$ noktaları veriliyor. $[AB]$ nı $\frac{|CA|}{|CB|}=4$ oranında dıştan bölen noktanın koordinatları ....olur.

4. $A(-2,6)$ ve $B(2,-6)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi .... olur.

5. $A(m^4\cdot n^3, m-n^5)$ noktası 2. bölgede olduğuna göre $B(n^5\cdot m^2, 3n^2)$ noktası .... bölgededir.

B) Aşağıda numaralar ile verilen ifadeleri, harf ile verilen ifadelerle eşleştiriniz.

6.

$x-3y+7=0$ doğrusunun eğimi	1.	a)	$\frac{4}{5}$
$2x+19=0$ doğrusunun eğimi	2.	b)	0
$5y-4x+13=0$ doğrusunun eğimi	3.	c)	-2
$2x+y-8=0$ doğrusunun eğimi	4.	ç)	$\frac{1}{3}$
$y+4=0$ doğrusunun eğimi	5.	d)	tanımsız

C) Aşağıdaki soruların cevaplarını boş bırakılan yerlere yazınız.

7. Analitik düzlemde $4y-2x+9=0$ doğrusunun orijine <u>en yakın</u> noktasının apsisini bulunuz.

8. Analitik düzlemde $A(-5,8), B(1,-2), C\in[AB]$ ve $2\cdot|AC|=3\cdot|BC|$ olduğuna göre C noktasının koordinatlarını bulunuz.

9. Analitik düzlemde $K(4,-3)$ noktasına $2y-3x-8=0$ doğrusu üzerindeki noktalardan <u>en yakın</u> olanının kordinatlarını bulunuz.

10. Analitik düzlemde $-3x+2y-6=0$ ve $-5x+6y-30=0$ doğruları ve x ekseni tarafından sınırlanan alanın kaç birimkare olduğunu bulunuz.

Ç) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruları okuyunuz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

11. Analitik düzlemde $M(3, b+2)$ ve $N(2a-b, -4)$ noktaları eksenler üzerinde olduğuna göre $K(b, -a)$ noktasının orijine olan uzaklığı kaç birimdir?

A) $\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) 3 D) $3\sqrt{5}$ E) 4

12. Analitik düzlemde $A(2, 3a), B(5, 1), C(a, 4)$ noktaları veriliyor.
$|AB| = 3 \cdot |BC|$ olduğuna göre a kaçtır?

A) $\frac{74}{21}$ B) $\frac{82}{21}$ C) $\frac{18}{7}$ D) $-\frac{18}{7}$ E) $-\frac{82}{21}$

13. Analitik düzlemde $A(2, -3)$, $B(1, -1)$ noktaları veriliyor.
$B \in [AC]$ ve $3 \cdot |CA| = 4 \cdot |CB|$ olduğuna göre C noktasının koordinatları toplamı kaçtır?

A) -3 B) -2 C) 2 D) 3 E) 5

14. Analitik düzlemde $K(-4, -5)$ ve $L(3, 2)$ noktalarından geçen doğrunun eğim açısının ölçüsü kaç derecedir?

A) 0 B) 30 C) 45 D) 60 E) 90

15. Analitik düzlemde $A(2n, n-3)$, $B(-4, 7)$, $C(1, 9)$ noktaları doğrusaldır.
Buna göre n değeri kaçtır?

A) 1 B) $\frac{17}{2}$ C) 33 D) 58 E) 64

16. Analitik düzlemde $A(-7,11)$ noktasından geçen ve $2x+4y-9=0$ doğrusuna paralel olan doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2x+4y-5=0$
B) $2x+4y+13=0$
C) $2x+4y-1=0$
D) $2x+4y+20=0$
E) $2x+4y-30=0$

17. Analitik düzlemde

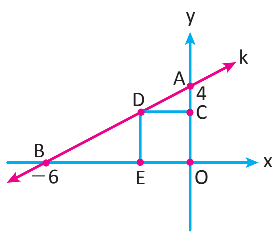
$(k-3)x+8y+2k=0$

$9x+(k+3)y+18=0$

doğruları kesişmediğine göre k nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?

A) 9 B) 6 C) 0 D) -6 E) -9

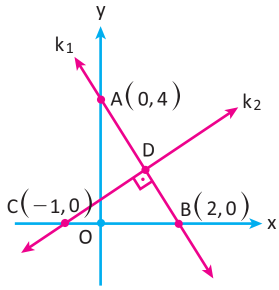
18. Aşağıda k doğrusunun eksenleri kestiği noktalar



$A(0,4)$, $B(-6,0)$ ve OCDE bir kare olduğuna göre E noktasının apsisi kaçtır?

A) $-\frac{2}{3}$ B) $-\frac{5}{4}$ C) $-\frac{12}{7}$ D) $-\frac{12}{5}$ E) $-\frac{8}{3}$

19. Aşağıda k_1 ve k_2 doğruları D noktasında dik kesişmektedir.



$A(0,4)$
$B(2,0)$ ve
$C(-1,0)$
noktaları verildiğine göre k_2 doğrusunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x+2y+1=0$
B) $2y-x+1=0$
C) $x-2y+1=0$
D) $2x-y+1=0$
E) $2y+x-1=0$

20. ABCD dikdörtgeninde AD kenarı $4x-3y=8$ ve BC kenarı $6y-8x+n=0$ doğrusu üzerindedir.

$|AD|=7$ birim ve Çevre $(ABCD)=24$ birim olduğuna göre n nin alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

A) 26 B) 28 C) 30 D) 32 E) 34

D) 21-23. soruları aşağıda verilen ortak metne göre cevaplandırınız.

Bir yüzme havuzu, müşterileri için iki farklı ödeme seçeneği sunmaktadır.

- A seçeneğinde müşteri yıllık kayıt yaptırır ve yıllık üyelik aidatı 200 TL öder. Bundan sonra havuzu kullandığı gün başına 15 TL ücret öder.
- B seçeneğinde yıllık üyelik aidatı alınmaz. Havuz, kullanılan gün başına 25 TL dir.

Buna göre

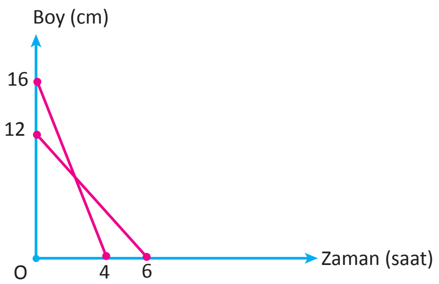
21. A ve B seçeneklerini gösteren denklemleri bulunuz ve grafiklerini analitik düzlemde çiziniz.

22. Havuz, kaç gün kullanıldığında iki seçeneğin ödeme miktarı birbirine eşit olur?

23. Havuza yılda 20 günden daha az gidecek kişi hangi seçeneği seçmelidir?

ÇÖZÜM

E) 24 ve 25. soruları aşağıda verilen ortak grafiğe ve metne göre cevaplandırınız.



Yanda kaliteleri ve boyları farklı iki mumun birlikte yakıldıktan sonra zamana bağlı boylarının değişimini gösteren grafik verilmiştir.

Buna göre

24. Birlikte yakıldıktan kaç saat sonra iki mumun boyları eşit olur?

25. Birlikte yakıldıktan kaç saat sonra boyları oranı $\frac{1}{2}$ olur?

26. Boyu uzun olan mum yakıldıktan 15 dakika sonra diğer mum yakılırsa birlikte kaç saat yandıklarında boyları oranı $\frac{5}{7}$ olur?

ÇÖZÜM

SAYILAR VE CEBİR

11.3. FONKSİYONLARDA UYGULAMALAR

Neler Öğreneceksiniz?

11.3.1. FONKSİYONLARLA İLGİLİ UYGULAMALAR
Fonksiyonun Grafik, Tablo Gösterimi ve Uygulamaları

11.3.2. İKİNCİ DERECEDEN FONKSİYONLAR VE GRAFİKLERİ
1. İkinci Dereceden Bir Değişkenli Fonksiyonlar
2. İkinci Dereceden Fonksiyon Uygulamaları

11.3.3. FONKSİYONLARIN DÖNÜŞÜMLERİ
Fonksiyon Grafikleri ve Simetri Dönüşümleri

Fonksiyon Uygulamalarının Kullanım Alanları

- Birbirleriyle ilişkili değişkenler arasındaki modellemelerin (gelir gider dengesi, ekonomik veriler ve ekonominin büyüme oranı vb.) yorumlanmasında kullanılır.
- Kurulan modellemeler sayesinde fiziki olarak ölçülemeyecek ya da hesaplanamayacak değerlerin kolaylıkla hesaplanmasında kullanılır.
- Tüneller, mimari eserler, tarihi köprüler ile teknoloji kullanılarak yapılan asma köprüler gibi pek çok yapının yapımında paraboller kullanılır.

Hazırlık Çalışmaları

1. Yandaki görselde bulunan dağların göl üzerindeki yansımasının gün içerisinde nasıl değişebileceğini düşününüz.

2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun eğrisinin eksenler boyunca (negatif veya pozitif yönde) kaydırılması hâlinde aşağıdaki ifadelerin doğruluğunu düşününüz.
   a) Fonksiyonun kuralı değişir.
   b) Fonksiyonun grafiğinin şekli değişmez.

3. $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ ikinci dereceden denklemin çözümünde sıklıkla kullandığınız yöntemlerden iki tanesini yazınız.

   ....

   ....

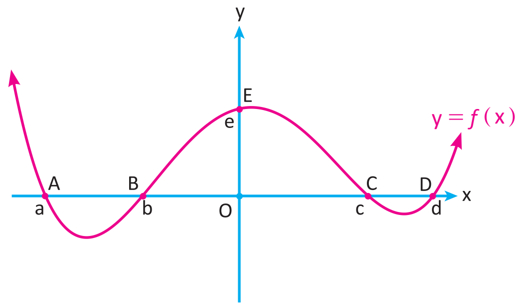
4. Kökleri $x_1 = 2$ ve $x_2 = -3$ olan ikinci dereceden denklemi yazınız.

11.3.1. FONKSİYONLARLA İLGİLİ UYGULAMALAR

Fonksiyonun Grafik, Tablo Gösterimi ve Uygulamaları

Fonksiyon Grafiğinin Eksenleri Kestiği Noktalar

Analitik düzlemde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği Grafik 3.1.1'de verilmiştir.



Grafik 3.1.1

Grafik 3.1.1'de f nin grafiği x eksenini $A(a,0), B(b,0), C(c,0), D(d,0)$ noktalarında, y eksenini ise $E(0,e)$ noktasında keser.

Bir f fonksiyonunun x eksenini kestiği noktaları bulunurken $y=0$ için $f(x)=0$ denkleminin (varsa) kökleri araştırılır.

Bir f fonksiyonunda grafiğin y eksenini kestiği nokta $x=0$ için $y=f(0)$ denklemini sağlayan y değeridir.

Bir f fonksiyonunun grafiği, tanımlı olduğu aralıkta eksenleri kesmeyebilir.

Eğer $y=0$ için $f(x)=0$ denkleminin gerçek kökü varsa fonksiyon, x eksenini denklemin kök sayısına eşit noktada keser.

Fonksiyonun Pozitif veya Negatif Değerler Aldığı Aralıklar

Grafik 3.1.1'de f fonksiyonu $-\infty < x < a$, $b < x < c$ ve $d < x < \infty$ aralıklarındaki her x değeri için pozitif değerler almaktadır.
f fonksiyonunun pozitif olduğu aralıklarda, fonksiyonun grafiği x ekseninin üstündedir.
$a < x < b$ ve $c < x < d$ aralıklarında ise f fonksiyonu her x değeri için negatif değerler almaktadır.
f fonksiyonunun negatif olduğu aralıklarda, fonksiyonun grafiği x ekseninin altındadır.

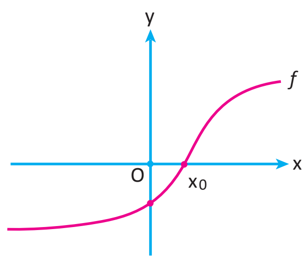
Sonuç

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $y=f(x)$ fonksiyonu verilmiş olsun. $A\subseteq\mathbb{R}$ olmak üzere $\forall x\in A$ için $f(x)>0$ oluyorsa f fonksiyonu $A\subseteq\mathbb{R}$ de pozitif değerler alır.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $y=f(x)$ fonksiyonu verilmiş olsun. $B\subseteq\mathbb{R}$ olmak üzere $\forall x\in B$ için $f(x)<0$ oluyorsa f fonksiyonu $B\subseteq\mathbb{R}$ de negatif değerler alır.

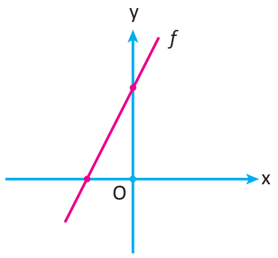
$\forall x\in(-\infty,x_0)$ için $f(x)<0$ olduğundan $(-\infty,x_0)$ nda f fonksiyonu negatif değerli fonksiyondur.

$\forall x\in(x_0,\infty)$ için $f(x)>0$ olduğundan (x_0,∞) nda f fonksiyonu pozitif değerli fonksiyondur (Grafik 3.1.2).



Grafik 3.1.2

1. ÖRNEK



Yanda $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+4$ doğrusal fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre

a) *f* fonksiyonun eksenleri kestiği noktaları bulunuz.
b) *f* fonksiyonunun pozitif ve negatif değerler aldığı aralıkları bulunuz.

ÇÖZÜM

a) *f* fonksiyonunun eksenleri kestiği noktaları bulmak için

$y=f(x)=2x+4$ fonksiyonunda $x=0$ alınırsa $y=f(0)=2\cdot 0+4\Rightarrow y=4$ bulunur. Bu durumda fonksiyonun grafiği y eksenini $(0,4)$ noktasında keser.

$y=f(x)=2x+4$ fonksiyonunda $y=0$ alınırsa $2x+4=0\Rightarrow 2x=-4\Rightarrow x=-2$ bulunur.

Bu durumda fonksiyonun grafiği x eksenini $(-2,0)$ noktasında keser.

b) Fonksiyonun eksenleri kestiği noktalarla birlikte grafik incelenirse

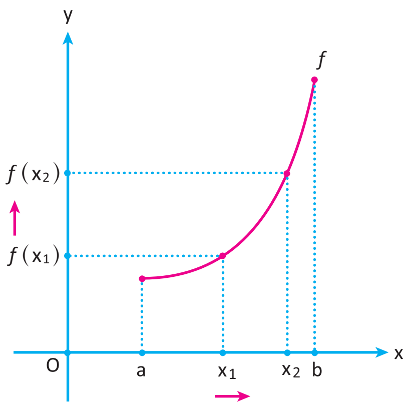
$-\infty < x < -2$ aralığında fonksiyonun negatif değerler aldığı ve bu aralıkta fonksiyonun grafiği x ekseninin altında olduğu görülür.

$-2 < x < \infty$ aralığında ise fonksiyonun pozitif değerler aldığı ve bu aralıkta da fonksiyonun grafiği nin

x ekseninin üstünde olduğu görülür.

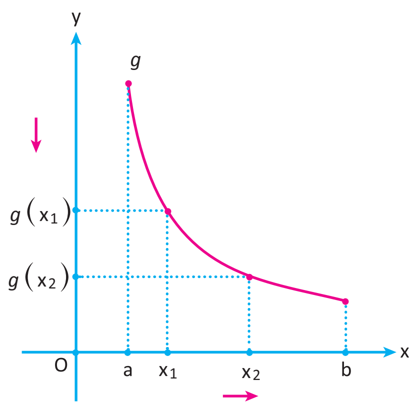
Artan ve Azalan Fonksiyonlar

Aşağıda analitik düzlemde $A\subseteq\mathbb{R}$ olmak üzere $f:A\to\mathbb{R}$, $y=f(x)$ ve $g:A\to\mathbb{R}$, $y=g(x)$ fonksiyonlarının grafiği verilmiştir.



$f:A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Grafik 3.1.3



$g:A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Grafik 3.1.4

Grafik 3.1.3'te $[a,b]$ nda verilen f fonksiyonunda x değerleri artarken y değerleri de artmıştır. Diğer bir ifadeyle $[a,b]$ nda $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ olur. Bu durumda *f* fonksiyonunun $[a,b]$ ndaki değerleri sürekli olarak artmaktadır.

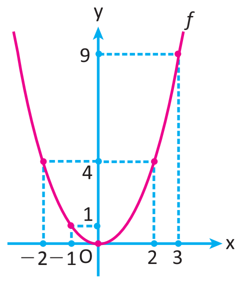
Grafik 3.1.4'te $[a,b]$ nda verilen g fonksiyonunda ise x değerleri artarken y değerleri azalmıştır. Diğer bir ifadeyle $[a,b]$ nda $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) > f(x_2)$ olur. Bu durumda *f* fonksiyonun $[a,b]$ ndaki değerleri sürekli olarak azalmıştır.

Tanım

$A \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $f: A \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ ve B, A nın herhangi bir alt aralığı olsun.
$\forall x_1, x_2 \in B$ için $x_1 < x_2$ olduğunda $f(x_1) < f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonuna B aralığında **artan fonksiyon** denir.

$\forall x_1, x_2 \in B$ için $x_1 < x_2$ olduğunda $f(x_1) > f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonuna B aralığında **azalan fonksiyon** denir.

2. ÖRNEK



Yanda $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre f fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x) = x^2$ fonksiyonunda $x_1 = -2$ ve $x_2 = -1$ için $f(-2) = (-2)^2 = 4$ ve $f(-1) = (-1)^2 = 1$ olduğundan $-2 < -1$ iken $f(-2) > f(-1)$ olur.

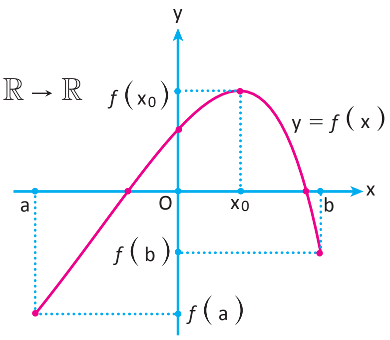
$\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) > f(x_2)$ olduğundan f fonksiyonu $(-\infty, 0]$ da azalan fonksiyon olur.

$f(x) = x^2$ fonksiyonunda $x_1 = 2$ ve $x_2 = 3$ için $f(2) = 2^2 = 4$ ve $f(3) = 3^2 = 9$ olduğundan $2 < 3$ iken $f(2) < f(3)$ olur.

$\forall x_1, x_2 \in [0, \infty)$ için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ olduğundan f fonksiyonu $[0, \infty)$ da artan fonksiyon olur.

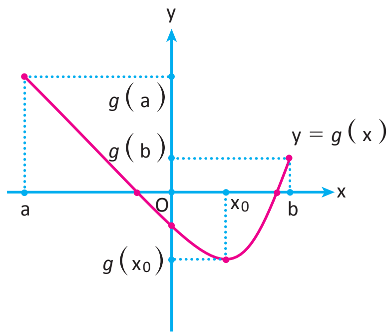
Bir Fonksiyonun Maksimum ve Minimum Değeri

$f: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Grafik 3.1.5

$g: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Grafik 3.1.6

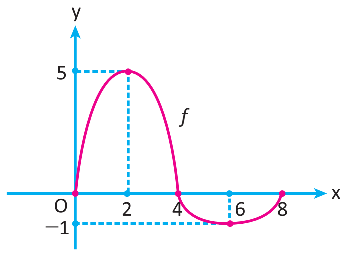
Grafik 3.1.5'te verilen f fonksiyonunun grafiğinde $[a, x_0]$ ndaki x değerleri artarken $f(x)$ değerleri de sürekli olarak arttığından x_0 noktasının solunda f artan fonksiyondur. $[x_0, b]$ nda x değerleri artarken $f(x)$ değerleri sürekli olarak azaldığından x_0 noktasının sağında f azalan fonksiyondur.
Bu durumda $f(x_0)$ değeri fonksiyonun $[a, b]$ ndaki maksimum değeri olur.

Grafik 3.1.6'da verilen g fonksiyonunun grafiğinde $[a, x_0]$ nda x değerleri artarken $g(x)$ değerleri sürekli olarak azaldığından x_0 noktasının solunda g azalan fonksiyondur. $[x_0, b]$ nda x değerleri artarken $g(x)$ değerleri sürekli olarak arttığından x_0 noktasının sağında g artan fonksiyondur.
Bu durumda $g(x_0)$ değeri, fonksiyonun $[a, b]$ ndaki minimum değeri olur.

Tanım

f fonksiyonunda $f(x)$ görüntülerinin en büyüğüne f fonksiyonun maksimum değeri, bu değeri aldığı noktaya ise **maksimum noktası** denir.
f fonksiyonunda $f(x)$ görüntülerinin en küçüğüne f fonksiyonun minimum değeri, bu değeri aldığı noktaya ise **minimum noktası** denir.

3. ÖRNEK

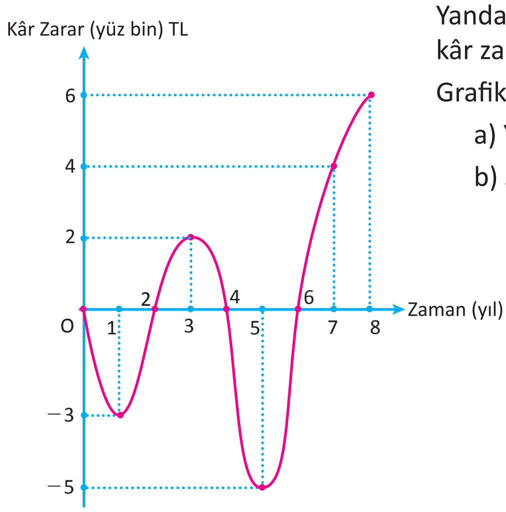


Yanda $f:[0,8]\to\mathbb{R}$, $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre fonksiyonun maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

f fonksiyonu $(0,6)$ nda $x\le 2$ için artan, $x\ge 2$ için azalan fonksiyondur. Bu durumda fonksiyonun $(0,6)$ aralığındaki en büyük değeri $f(2)=5$ olduğundan fonksiyonun maksimum değeri 5 olur.
f fonksiyonu $(4,8)$ nda $x\le 6$ için azalan, $x\ge 6$ için artan fonksiyondur. Bu durumda fonksiyonun $(4,8)$ aralığındaki en küçük değeri $f(6)=-1$ olduğundan fonksiyonun minimum değeri -1 olur.

4. ÖRNEK



Yandaki grafik 2008 yılında kurulan bir yemek şirketinin ilk sekiz yıldaki kâr zarar durumunu göstermektedir.

Grafikte verilen bilgilere göre

a) Yemek şirketinin hangi yıllar arasında zarar ettiğini bulunuz.
b) Şirketin kâr ve zararının en fazla olduğu yılları bulunuz.

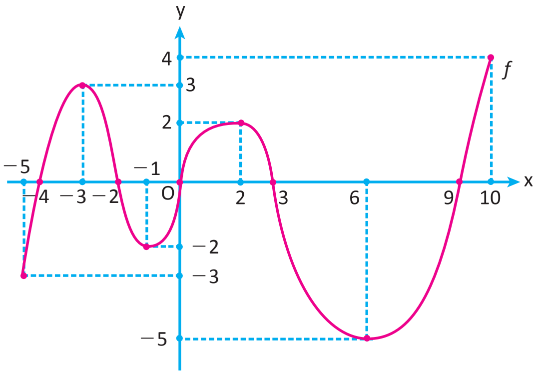
ÇÖZÜM

a) Grafiğe göre yemek şirketi $(2008, 2010)$ ve $(2012, 2014)$ aralıklarında negatif değerler aldığından bu aralıklarda zarar etmiştir. Diğer bir ifadeyle bu yemek şirketi, 2008-2010 ve 2012-2014 yılları arasında zarar etmiştir.

b) Yemek şirketi, $(2008, 2010)$ aralığında yani 2008 yılı sonunda yılda 300 bin TL, $(2012, 2014)$ aralığında yani 2012 yılı sonunda yılda 500 bin TL zarar etmiştir. Buna göre yemek şirketi 2012 yılı sonunda en büyük zararını etmiştir.

Yemek şirketi $(2010, 2012)$ aralığında yani 2010 yılı sonunda yılda 200 bin TL, $(2014, 2016)$ aralığında yani 2016 yılı sonunda yılda 600 bin TL kâr etmiştir. Buna göre yemek şirketi 2016 yılı sonunda en büyük kârını elde etmiştir.

5. ÖRNEK



Yanda $[-5,10]$ nda tanımlı f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.
Grafiğe göre fonksiyonun

a) Eksenleri kestiği noktaları bulunuz.
b) Pozitif ve negatif değer aldığı aralıkları bulunuz.
c) Artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.
ç) Maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Grafiğe göre f fonksiyonu, x eksenini $(-4,0),(-2,0),(0,0),(3,0)$ ve $(9,0)$ noktalarında; y eksenini ise $(0,0)$ noktasında kesmiştir.

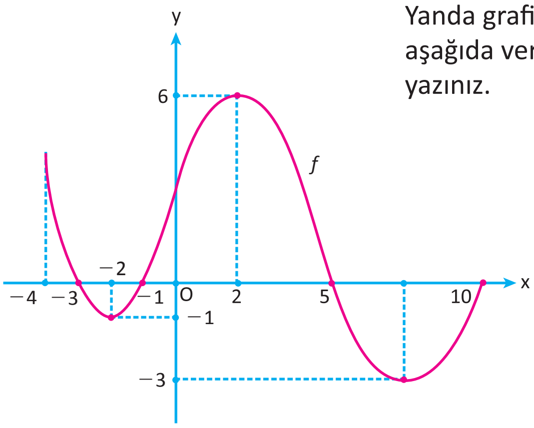
b) Grafiğe göre f fonksiyonu $(-4,-2),(0,3),(9,10]$ aralıklarında pozitif değerler almıştır. $[-5,-4),(-2,0),(3,9)$ aralıklarında ise negatif değerler almıştır.

c) Grafiğe göre $[-5,-3],[-1,2]$ ve $[6,10]$ aralıklarında x değerleri artarken fonksiyon değerleri de artmıştır.
Bu durumda $[-5,-3],[-1,2]$ ve $[6,10]$ aralıklarında fonksiyon artandır.
$[-3,-1]$ ve $[2,6]$ aralıklarında ise x değerleri artarken fonksiyon değerleri azaldığından fonksiyon bu aralıklarda azalan olur.

ç) Grafiğe göre $x=10$ için fonksiyon en büyük değerini almıştır.
Bu yüzden $(10,4)$ noktası fonksiyonun maksimum noktası, $f(10)=4$ değeri de fonksiyonun maksimum değeridir.
Benzer şekilde $x=6$ için fonksiyon en küçük değerini almıştır. Bu durumda ise $(6,-5)$ noktası fonksiyonun minimum noktası, $f(6)=-5$ değeri de fonksiyonun minimum değeridir.

Sıra Sizde

SORU



Yanda grafiği verilen $f:[-4,10]\rightarrow[-3,6]$ fonksiyonuna göre aşağıda verilen cümlelerin başına doğru ise "D", yanlış ise "Y" yazınız.

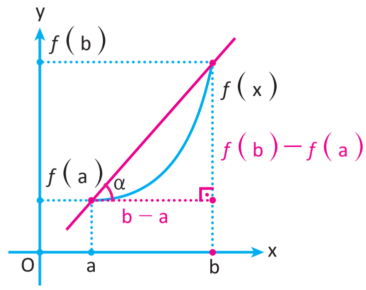
1. f fonksiyonu $(-1,5)$ nda pozitiftir.
2. f fonksiyonu $(-4,-1)$ nda pozitiftir.
3. f fonksiyonunun negatif olduğu en geniş küme $(-3,-1)\cup(5,10)$ olur.
4. f fonksiyonunun en büyük ve en küçük değerlerinin toplamı -3 tür.

Bir Fonksiyonun Ortalama Değişim Hızı

Tanım

$y = f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ ndaki ortalama değişim hızı, y değerlerindeki değişim miktarının x değerlerindeki değişim miktarına oranıdır.

Bu durumda fonksiyonun ortalama değişim hızı, $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarından geçen doğrunun (kesen doğrusu) eğimi olur (Grafik 3.1.7).



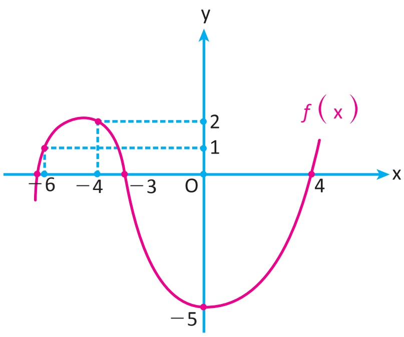
Grafik 3.1.7

Buna göre $y = f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ ndaki ortalama değişim hızı

$\tan\alpha = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ olur. Bu orana fonksiyonun **ortalama değişim hızı** denir.

Ortalama değişim hızının işareti, değişimin yönünü gösterir. Ortalama değişim hızı pozitif ise değişim artma yönünde, negatif ise değişim azalma yönünde demektir.

6. ÖRNEK



Grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun aşağıda verilen aralıklardaki ortalama değişim hızlarını bulunuz.

a) $[-6, -3]$
b) $[0, 4]$

ÇÖZÜM

a) Fonksiyonun $[-6, -3]$ ndaki ortalama değişim hızı fonksiyonun grafiğinden $f(-3) = 0$ ve $f(-6) = 1$ değerleri bulunursa

$$\frac{f(-3) - f(-6)}{-3 - (-6)} = \frac{0 - 1}{-3 + 6}$$
$$= -\frac{1}{3} \text{ olur.}$$

Burada x değerleri 3 birim arttığında y değerleri 1 birim azalmıştır.

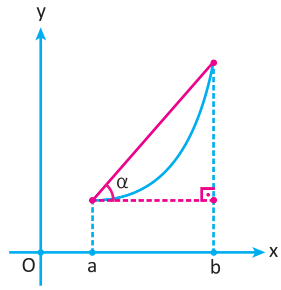
b) Fonksiyonun $[0, 4]$ ndaki ortalama değişim hızı $f(0) = -5$ ve $f(4) = 0$ olmak üzere

$$\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{0 - (-5)}{4}$$
$$= \frac{5}{4} \text{ bulunur.}$$

Burada x değerleri 4 birim arttığında y değerleri 5 birim artmıştır.

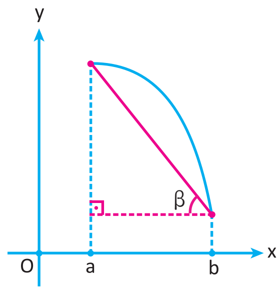
Sonuç

Grafik 3.1.8'de verilen f fonksiyonunda $[a,b]$ nda fonksiyonun ortalama değişim hızı pozitif ($\tan\alpha > 0$) olduğundan fonksiyon bu aralıkta artandır.



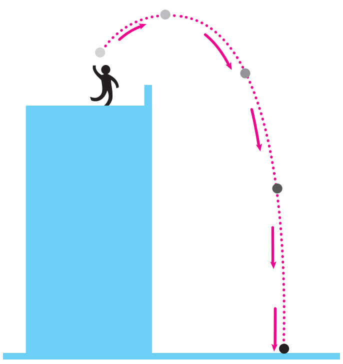
Grafik 3.1.8

Grafik 3.1.9'da verilen f fonksiyonunda ise $[a,b]$ nda fonksiyonun ortalama değişim hızı negatif ($\tan(\pi-\beta) < 0$) olduğundan fonksiyon bu aralıkta azalandır.



Grafik 3.1.9

7. ÖRNEK



Yandaki görselde bir cisim belli bir yükseklikten yukarı doğru atılıyor. t saniye sonra cismin yerden yüksekliğini veren denklem

$h(t) = 10 + 2t - \frac{t^2}{5}$ oluyor.

Buna göre cismin $t = 1$. saniye ve $t = 3$. saniyeler arasındaki ortalama değişim hızının kaç m/sn. olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$h(t) = 10 + 2t - \frac{t^2}{5}$ fonksiyonunda

$t = 1$ için $h(1) = 10 + 2 \cdot 1 - \frac{1^2}{5} = 12 - \frac{1}{5} = \frac{59}{5}$ m ve

$t = 3$ için $h(3) = 10 + 2 \cdot 3 - \frac{3^2}{5} = 16 - \frac{9}{5} = \frac{71}{5}$ m bulunur.

Buna göre cismin $[1,3]$ ndaki ortalama değişim hızı

$$\frac{h(3)-h(1)}{3-1} = \frac{\frac{71}{5} - \frac{59}{5}}{2} = \frac{\frac{12}{5}}{2} = \frac{12}{10} = 1{,}2 \text{ m/sn.}$$ olarak bulunur.

8. ÖRNEK

Aşağıda A ve B illerinin farklı yıllara ait yıllık toplam tahıl üretimini ton cinsinden veren f_A ve f_B fonksiyonlarının değerler tablosu verilmiştir. (x yıl, f_A ve f_B üretim)

x	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
f_A	845	968	1237	1479	1503	1552	1404	1657
f_B	1205	1105	1306	1251	1374	1470	1349	1436

Buna göre

a) A ve B illerinin 2010-2017 yılları arasında tahıl üretimindeki ortalama değişim hızlarını bulunuz ve sonuçları karşılaştırınız.

b) A ve B illerinin 2015-2016 yılları arasında tahıl üretiminin ortalama değişim hızlarını bulunuz ve sonuçları karşılaştırınız.

ÇÖZÜM

a) A ili için 2010-2017 yılları arasındaki ortalama değişim hızı

$$\frac{f_A(2017)-f_A(2010)}{2017-2010}=\frac{1657-845}{7}$$
$$=\frac{812}{7}$$
$$=116 \text{ ton/yıl bulunur.}$$

B ili için 2010-2017 yılları arasındaki ortalama değişim hızı

$$\frac{f_B(2017)-f_B(2010)}{2017-2010}=\frac{1436-1205}{7}$$
$$=\frac{231}{7}$$
$$=33 \text{ ton/yıl bulunur.}$$

Bu sonuçlara göre 7 yıllık bir periyotta A ilinin tahıl üretim miktarının yıllık ortalama değişim hızı B ilinden daha fazladır.

b) A ili için 2015-2016 yılları arasındaki ortalama değişim hızı

$$\frac{f_A(2016)-f_A(2015)}{2016-2015}=\frac{1404-1552}{1}$$
$$=-148 \text{ ton/yıl bulunur.}$$

B ili için 2015-2016 yılları arasındaki ortalama değişim hızı

$$\frac{f_B(2016)-f_B(2015)}{2016-2015}=\frac{1349-1470}{1}$$
$$=-121 \text{ ton/yıl bulunur.}$$

Bu iki sonuç karşılaştırıldığında 2015-2016 yılları arasındaki ortalama üretim miktarı yıllık değişim hızının B ilinde A iline göre yüksek olduğu ancak bu oranın negatif yönde olduğu görülmektedir.

Tahıl üretim miktarındaki değişim hızının farklı periyotlarda farklı olması, tahıl üretiminin yıla göre değişiminin doğrusal bir modele uygun olmadığını gösterir. Doğrusal modellerde değişim hızı daima sabit kalır.

9. ÖRNEK

$f(x) = 3x + 4$ fonksiyonu ile $g(x) = 2x^2 + 1$ fonksiyonunun $[-3, 3]$ ve $[3, 6]$ ndaki ortalama değişim hızlarını karşılaştırınız.

ÇÖZÜM

$f(x) = 3x + 4$ fonksiyonunun $[-3, 3]$ nda ortalama değişim hızı

$f(-3) = 3 \cdot (-3) + 4 = -5$

$f(3) = 3 \cdot 3 + 4 = 13$ olduğundan

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(3) - f(-3)}{3 - (-3)} = \frac{13 - (-5)}{3 + 3} = \frac{18}{6} = 3 \text{ bulunur.}$$

$f(x) = 3x + 4$ fonksiyonunun $[3, 6]$ nda ortalama değişim hızı

$f(3) = 3 \cdot 3 + 4 = 13$

$f(6) = 3 \cdot 6 + 4 = 22$ olduğundan

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(6) - f(3)}{6 - 3} = \frac{22 - 13}{3} = \frac{9}{3} = 3 \text{ bulunur.}$$

Böylece ortalama değişim hızı $y = mx + n$ fonksiyonun eğimine yani m ye eşit olur.

$g(x) = 2x^2 + 1$ fonksiyonunun $[-3, 3]$ nda ortalama değişim hızı

$g(-3) = 2 \cdot (-3)^2 + 1 = 19$

$g(3) = 2 \cdot 3^2 + 1 = 19$ olduğundan

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{g(3) - g(-3)}{3 - (-3)} = \frac{19 - 19}{3 + 3} = \frac{0}{6} = 0 \text{ bulunur.}$$

$g(x) = 2x^2 + 1$ fonksiyonunun $[3, 6]$ nda değişim hızı

$g(3) = 2(3)^2 + 1 = 19$

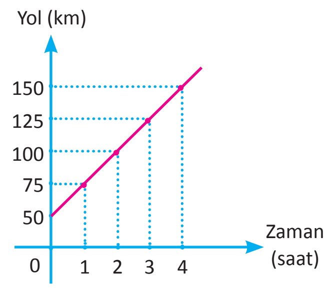
$g(6) = 2(6)^2 + 1 = 73$ olduğundan

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{g(6) - g(3)}{6 - 3} = \frac{73 - 19}{3} = \frac{54}{3} = 18 \text{ bulunur.}$$

$g(x) = 2x^2 + 1$ fonksiyonu doğrusal olmayan ikinci dereceden bir fonksiyondur. Doğrusal olmayan fonksiyonların ortalama değişim hızı doğrusal fonksiyonlar gibi sabit olmayıp farklı aralıklar için farklı değerler alabilirler.

10. ÖRNEK

Yandaki grafik bir aracın zamana bağlı olarak aldığı yolu göstermektedir. Buna göre 1 ve 4. saatler arası ortalama değişim hızını bulunuz.



ÇÖZÜM

Grafikten yararlanarak $f(1) = 75$ ve $f(4) = 150$ dir. Böylece 1 ve 4. saatler arası ortalama değişim oranını

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{150 - 75}{3} = \frac{75}{3} = 25 \text{ km/sa. bulunur.}$$

Ayrıca grafikte verilen doğrunun eğiminin de 25 olduğu görülür.

11. ÖRNEK

Aşağıdaki tablo Türkiye'de farklı yıllara ait farklı yerlerdeki yıllık toplam elektrik tüketim miktarını gigawatt (gw) cinsinden göstermektedir.

Yıl (x)	Toplam (gw)	Mesken (%)	Ticaret (%)	Resmi Daire (%)	Sanayi (%)	Aydınlatma (%)	Diğer (%)
2009	156 894	25,0	15,9	4,5	44,9	2,5	7,2
2010	172 051	24,1	16,1	4,1	46,1	2,2	7,4
2011	186 100	23,8	16,4	3,9	47,3	2,1	6,5
2012	194 923	23,3	16,3	4,5	47,4	2,0	6,5
2013	198 045	22,7	18,9	4,1	47,1	1,9	5,3
2014	207 375	22,3	19,2	3,9	47,2	1,9	5,5
2015	217 312	22,0	19,1	3,7	47,6	1,9	5,7
Bilgi: $1\,\text{gw} = 10^9\,\text{w} = 10^6\,\text{kw}$ tır.							
Kaynak: TEDAŞ, Türkiye Elektrik Dağıtım ve Tüketim İstatistikleri (1) Tarım, hayvancılık, balıkçılık, içme ve kullanma suyu pompaj tesisleri, kamuya ait hizmetler vb. tüketimleri içerir. Tablodaki rakamlar, yuvarlamadan dolayı toplamı vermeyebilir.							

Tabloya göre

a) 2009-2013 ve 2011-2015 yılları arasındaki dönemler için toplam elektrik tüketiminin ortalama değişim hızını bulunuz ve bu değerleri karşılaştırınız.

b) 2009-2013 ve 2011-2015 yılları arasındaki dönemler için meskenlerdeki elektrik tüketiminin ortalama değişim hızını bulunuz ve bu değerleri karşılaştırınız.

(Hesap makinesi kullanabilirsiniz.)

ÇÖZÜM

a) 2009-2013 yılları arasında toplam elektrik tüketim miktarındaki ortalama değişim hızı

$$\frac{f(2013)-f(2009)}{2013-2009}=\frac{198\,045-156\,894}{4}=\frac{41\,151}{4}=10\,287{,}75\,\text{gw} \text{ bulunur.}$$

2011-2015 yılları arasında toplam elektrik tüketim miktarındaki ortalama değişim hızı

$$\frac{f(2015)-f(2011)}{2015-2011}=\frac{217\,312-186\,100}{4}=\frac{31\,212}{4}=7803\,\text{gw} \text{ bulunur.}$$

Bu iki dönem karşılaştırıldığında toplam elektrik tüketim miktarı (sonuçlar pozitif çıktığı için) her iki dönemde de artmıştır. Ancak 2009-2013 yılları arasındaki toplam elektrik tüketiminin artma hızı, 2011-2015 yılları arasındaki toplam elektrik tüketimin artma hızından daha yüksektir.

b) 2009-2013 yılları arasında, meskenlerdeki elektrik tüketim miktarındaki ortalama değişim hızı

$$\frac{f(2013)-f(2009)}{2013-2009}=\frac{44\,956{,}215-39\,223{,}5}{4}=\frac{5732{,}715}{4}=1433{,}178\,\text{gw} \text{ bulunur.}$$

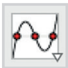
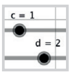
2011-2015 yılları arasında, meskenlerdeki elektrik tüketim miktarındaki ortalama değişim hızı

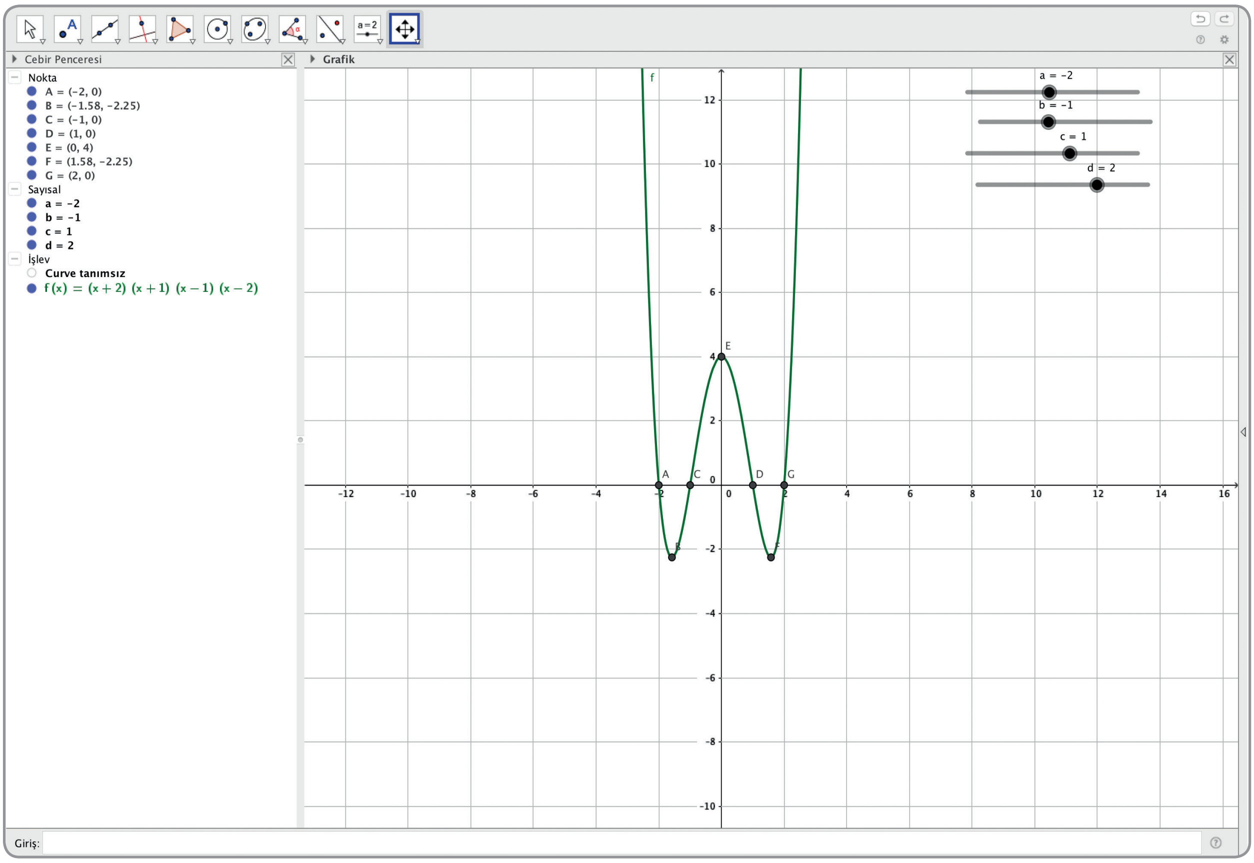
$$\frac{f(2015)-f(2011)}{2015-2011}=\frac{47\,808{,}64-44\,291{,}8}{4}=\frac{3516{,}84}{4}=879{,}21\,\text{gw} \text{ bulunur.}$$

Bu iki dönem karşılaştırıldığında meskenlerdeki elektrik tüketim miktarı (sonuçlar pozitif çıktığı için) her iki dönemde de artmıştır. 2009-2013 yılları arasında meskenlerdeki elektrik tüketiminin artma hızı, 2011-2015 yılları arasında meskenlerdeki elektrik tüketiminin artma hızından daha yüksektir.

Teknoloji Uygulaması

Görsel 3.1.1'de GeoGebra programı kullanılarak bir fonksiyonun grafiğinin x eksenini kestiği noktalar, maksimum ve minimum değerleri incelenmiştir.

Grafik Çizme	Programı çalıştırdığınızda **Grafik Çizme** kutucuğunu seçiniz.
	**Sürgü** aracını seçiniz. Açılan pencerede a isimli bir sürgü oluşturup minimum değeri -5, maksimum değeri 5 ve artış miktarını 1 olarak tanımlayınız. Benzer şekilde b, c ve d isimli sürgüleri tanımlayınız.
Giriş:	**Giriş** kısmına *f* (x) = (x - a) (x - b) (x - c) (x - d) yazıp **Enter** tuşuna basınız.
	**Kökler** aracını seçiniz. *f* (x) fonksiyonunun köklerini belirleyiniz.
	**Uç Nokta** aracını seçiniz. *f* (x) fonksiyonunun uç noktalarını belirleyiniz.
	Oluşturduğunuz sürgülerdeki noktaları sağa ve sola hareket ettirerek fonksiyon grafiğindeki değişimleri inceleyiniz.



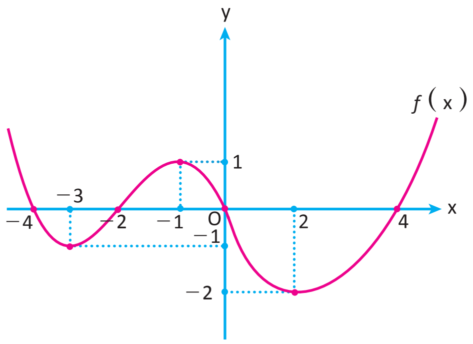
Görsel 3.1.1

GeoGebra uygulamasını yaptığınızda $f(x) = 0$ denkleminin köklerinin b, c ve d sürgülerine bağlı olduğuna ve fonksiyonun grafiğinin x eksenini kestiği noktaların her birinin kök olduğuna dikkat ediniz.

GeoGebra uygulamasında a, b, c ve d sürgülerindeki değişimlere göre fonksiyonun x eksenini kestiği noktalara, pozitif negatif değerler aldığı aralıklara, maksimum ve minimum değer aldığı noktalara dikkat ediniz.

ALIŞTIRMALAR-1

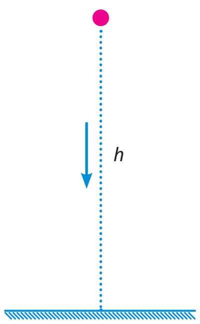
1. Aşağıda $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Grafiğe göre $f(x)$ fonksiyonunun

a) Eksenleri kestiği noktaları
b) Pozitif ve negatif olduğu aralıkları
c) Artan ve azalan olduğu aralıkları
ç) $[-4,4]$ nda maksimum ve minimum değerleri bulunuz.

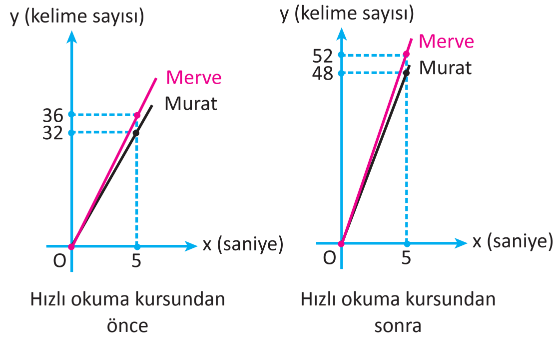
2.



405 m yükseklikten serbest bırakılan bir cismin 3 ve 5. saniyeler arasındaki ortalama değişim hızının kaç $m/sn.$ olduğunu bulunuz.

(saniye cinsinden geçen t süresine bağlı, cismin yerden yüksekliği metre cinsinden $h(t)=405-\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2,\ g=10\,m/sn.)$

3. Aşağıdaki doğrusal grafiklerde Murat ile Merve'nin hızlı okuma kursuna gitmeden önce ve gittikten sonra olmak üzere saniye cinsinden geçen süreye bağlı olarak okunan kelime sayısı gösterilmektedir.



Grafiklere göre $[0,10]$ nda

a) Murat ve Merve'nin her iki durumdaki okuduğu kelime sayısının (geçen zamana göre) ortalama değişim hızlarını bulunuz.

b) Kurstan sonra Merve'nin okuduğu kelime sayısının (geçen zamana göre) ortalama değişim hızının Murat'ın okuduğu kelime sayısının (geçen zamana göre) ortalama değişim hızına oranını bulunuz.

4. Aşağıdaki tabloda f doğrusal fonksiyonunun aldığı bazı değerler gösterilmiştir.

x	0	3	6	9	12
$f(x)$	7	13	19	25	31

Bu fonksiyon için aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

a) f fonksiyonu $[0,9]$ nda artandır.
b) f fonksiyonun kuralı $f(x)=2x+7$ olur.
c) $[9,12]$ nda f fonksiyonunun ortalama değişim hızı 3 olur.
ç) f fonksiyonu y eksenini $(0,7)$ noktasında keser.

11.3.2. İKİNCİ DERECEDEN FONKSİYONLAR VE GRAFİKLERİ

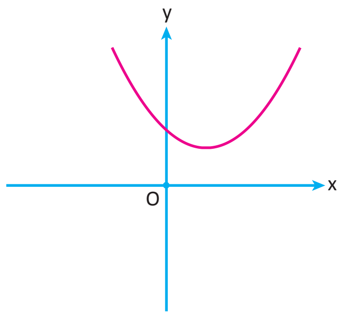
1. İkinci Dereceden Bir Değişkenli Fonksiyonlar

Tanım

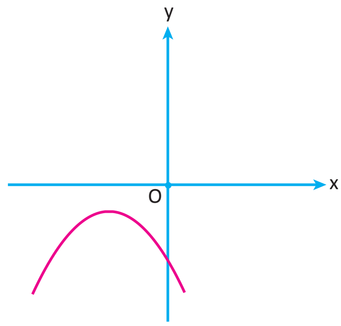
$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c$ şeklinde tanımlanan fonksiyona **ikinci dereceden bir değişkenli fonksiyon** denir.
Bu tür fonksiyonların grafiklerine **parabol** adı verilir.

$f_1(x) = x^2$
$f_2(x) = -3x^2$
$f_3(x) = x^2 + 3$
$f_4(x) = x^2 - 2x$
$f_5(x) = 4x^2 - x + 2$ fonksiyonları, ikinci dereceden bir değişkenli fonksiyon örnekleridir. Bu fonksiyonların grafikleri birer paraboldür.

Aşağıda Grafik 3.2.1 ve Grafik 3.2.2'de verilen eğri grafikleri birer paraboldür.



Grafik 3.2.1



Grafik 3.2.2

1. ÖRNEK

$f(x) = -x^2 + 3x - 5$ fonksiyonu verilmiş olsun. Buna göre

a) f fonksiyonunun $x = -1$ için aldığı değeri bulunuz.
b) $A(-2, k)$ noktası, fonksiyonun grafiği üzerinde olduğuna göre k değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Fonksiyonun kuralında x yerine -1 yazılırsa

$$f(x) = -x^2 + 3x - 5$$
$$f(-1) = -(-1)^2 + 3 \cdot (-1) - 5$$
$$= -1 - 3 - 5$$
$= -9$ bulunur.

b) $A(-2, k)$ noktası, fonksiyonun grafiği üzerinde olduğundan fonksiyonun kuralını sağlar. Buradan

$$f(x) = -x^2 + 3x - 5$$
$$k = -(-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 5$$
$$= -4 - 6 - 5$$
$= -15$ bulunur.

İkinci Dereceden Bir Değişkenli Fonksiyonlarda Grafik Çizimi

$f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ kuralını sağlayan (x, y) sıralı ikililerinin analitik düzlemde gösterilmesiyle fonksiyonun grafiği çizilir.

2. ÖRNEK

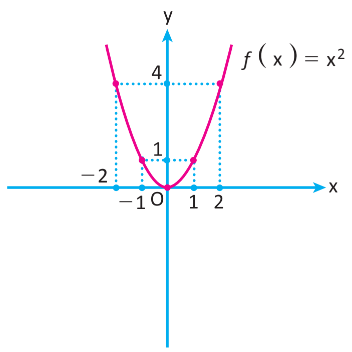
$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ ve $g(x) = -x^2$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

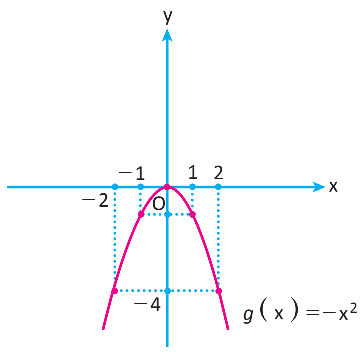
ÇÖZÜM

$f(x) = x^2$ ve $g(x) = -x^2$ fonksiyonlarının bazı x değerleri için aldığı değerler hesaplanıp bulunan noktalar işaretlenerek grafik çizilebilir.

x	$-\infty$ ...	-2	-1	0	1	2	... ∞
$f(x) = x^2$	$+\infty$ ...	4	1	0	1	4	... $+\infty$

x	$-\infty$ ...	-2	-1	0	1	2	... ∞
$g(x) = -x^2$	$-\infty$ ...	-4	-1	0	-1	-4	... $-\infty$





Grafikler incelendiğinde

$f(x) = x^2$ fonksiyonunda x^2 li terimin katsayısı $a = 1 > 0$ olur.

Parabolün kolları yukarı doğrudur. Fonksiyon $x = 0$ için en küçük değerini almıştır.

$g(x) = -x^2$ fonksiyonunda x^2 li terimin katsayısı $a = -1 < 0$ olur.

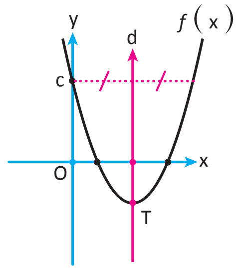
Parabolün kolları aşağı doğrudur. Fonksiyon $x = 0$ için en büyük değerini almıştır.

Sonuç

$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunda $a > 0$ ise parabolün kolları yukarı doğru, $a < 0$ ise parabolün kolları aşağı doğru olur.

Tanım

$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun azalan durumdan artan duruma geçip en küçük değerini aldığı noktaya veya artan durumdan azalan duruma geçip en büyük değerini aldığı noktaya parabolün **tepe noktası** denir. Tepe noktası genellikle $T(r, k)$ ile gösterilir (Grafik 3.2.3, 3.2.4).

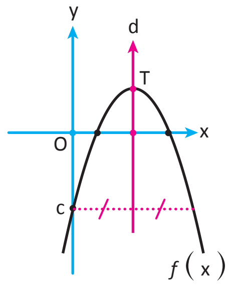


Grafik 3.2.3

$T(r, k)$ tepe noktasının apsisinden y eksenine paralel doğru ($x = r$ doğrusu) çizilirse parabol bu doğruya göre simetrik olur.

Bu doğruya **simetri ekseni** denir.

Simetri ekseninin parabolün kollarına olan uzaklığı eşittir (Grafik 3.2.3, 3.2.4).



Grafik 3.2.4

$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiğinin (parabolün) çiziminde aşağıdaki değerlerin bulunması, grafik çiziminde kolaylık sağlar.

1. Parabol kollarının yönünün belirlenmesi

   $a > 0$ ise parabolün kolları yukarı, $a < 0$ ise parabolün kolları aşağı doğrudur.

2. Parabolün eksenleri kestiği noktaların bulunması

   a) $y = 0$ için parabolün x eksenini kestiği noktalar (varsa) bulunur. Bu noktalar $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri olur. Kökler x_1 ve x_2 ise parabolün x eksenini kestiği noktalar $(x_1, 0)$ ve $(x_2, 0)$ olarak bulunur.

   b) $x = 0$ için parabolün y eksenini kestiği nokta bulunur. Bu nokta $f(0) = c$ olduğundan parabolün y eksenini kestiği nokta $(0, c)$ olur.

3. Tepe noktasının bulunması

   $x = r$ doğrusu parabolün simetri ekseni olduğundan $x = r$ noktası, x_1 ve x_2 noktalarının orta noktasıdır. Bu durumda

   $r = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{-\frac{b}{a}}{2} = -\dfrac{b}{2a}$ olur. $x = r = -\dfrac{b}{2a}$ değeri, fonksiyonda yerine yazılırsa parabolün tepe noktasının ordinatı (k) bulunur.

$$k = f(r) = a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \cancel{a} \cdot \frac{b^2}{4a^{\cancel{2}}} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$= \frac{b^2}{4a} - \underset{(2)}{\frac{b^2}{2a}} + \underset{(4a)}{\frac{c}{1}}$$

$$= \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}$$

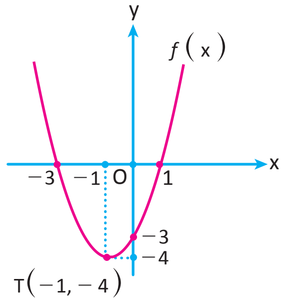
$$= \frac{4ac - b^2}{4a} \text{ olur.}$$

$$T(r, k) = T(r, f(r)) = T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) \text{ olur.}$$

3. ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+2x-3$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM



$f(x)=x^2+2x-3$ fonksiyonunda $a=1, b=2$ ve $c=-3$ olur.
Buna göre

1. $a=1>0$ olduğundan parabolün kollarının yönü yukarı doğrudur.
2. Parabolün eksenleri kestiği noktalar
   $x=0$ için $y=f(0)=0^2+2\cdot0-3=-3$ olduğundan parabol y eksenini $(0,-3)$ noktasında keser.

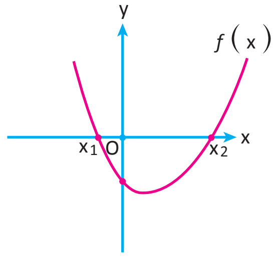
   $y=0$ için $x^2+2x-3=0 \Rightarrow (x+3)\cdot(x-1)=0$ olur.
   $x_1=-3$ veya $x_2=1$ olur. Bu durumda parabolün x eksenini kestiği noktalar $(-3,0)$ ve $(1,0)$ olarak bulunur.
3. Parabolün tepe noktası
   $r=-\dfrac{b}{2a} \Rightarrow r=-\dfrac{2}{2\cdot1}=-1$ ve $k=f(-1)=(-1)^2+2\cdot(-1)-3=-4$ olduğundan parabolün tepe noktası $T(-1,-4)$ olur.
   Bulunan değerler analitik düzlemde işaretlenerek grafik çizilmiştir. İnceleyiniz.

Hatırlatma

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c$ parabolün x eksenini kestiği noktaları bulmak için $y=0$ için $ax^2+bx+c=0$ denkleminin (varsa) kökleri bulunur.

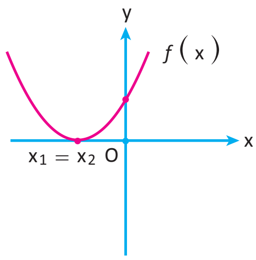
$\Delta=b^2-4ac>0$ ise denklemin farklı iki gerçek kökü vardır.

Bu kökler $x_{1,2}=\dfrac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}$ ile hesaplanır.
Bu durumda parabol, x eksenini farklı iki noktada keser. Bu noktalar $(x_1,0)$ ve $(x_2,0)$ olur (Grafik 3.2.5).



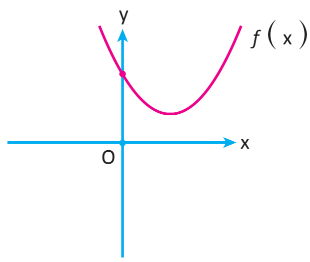
Grafik 3.2.5

$\Delta=b^2-4ac=0$ ise denklemin eşit (çakışık) iki kökü vardır.
Bu kökler $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$ olduğundan parabol, x eksenine teğettir. Bu nokta aynı zamanda parabolün tepe noktasıdır (Grafik 3.2.6).



Grafik 3.2.6

$\Delta=b^2-4ac<0$ ise denklemin gerçek kökü olmadığından parabol x eksenini kesmez (Grafik 3.2.7).



Grafik 3.2.7

Bu grafikler $a>0$ için çizilmiştir. $a<0$ içinde incelenebilir.

4. ÖRNEK

$y = -x^2 + 6x - m + 3$ parabolü x eksenini farklı iki noktada kestiğine göre m nin alabileceği en büyük iki tam sayının toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

Parabol x eksenini iki farklı noktada kestiğine göre $\Delta > 0$ olmalıdır.

$$b^2 - 4ac > 0$$
$$6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-m + 3) > 0$$
$$36 - 4m + 12 > 0$$
$$4m < 48$$
$$m < 12 \text{ olur.}$$

Buradan m nin alabileceği en büyük iki tam sayı toplamı $10 + 11 = 21$ bulunur.

5. ÖRNEK

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (n + 2) \cdot x^2 - 2nx + 1$ parabolü, x eksenine teğet olduğuna göre n nin alabileceği değerleri bulunuz.

ÇÖZÜM

Parabol x eksenine teğet ise $\Delta = 0$ olmalıdır.

$\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ise

$$(-2n)^2 - 4 \cdot (n + 2) \cdot 1 = 0$$
$$4n^2 - 4n - 8 = 0$$
$$n^2 - n - 2 = 0 \text{ olur.}$$

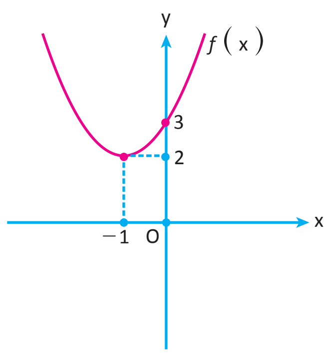
$(n - 2) \cdot (n + 1) = 0$ olduğundan $n_1 = 2$ veya $n_2 = -1$ bulunur.

6. ÖRNEK

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x + 3$ parabolünün grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

1. $a = 1 > 0$ olduğundan parabolün kollarının yönü yukarı doğrudur.
2. Parabolün eksenleri kestiği noktalar
   $x = 0$ için $y = f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 + 3 = 3$ olduğundan parabol, y eksenini $(0, 3)$ noktasında keser.
   $y = 0$ için
   $$x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8 < 0$$ olduğundan parabol x eksenini kesmez.



3. $r = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow r = -\dfrac{2}{2 \cdot 1} = -1$ ve $k = f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 3 = 2$ olduğundan parabolün tepe noktası $T(-1, 2)$ olur.
   Bulunan değerler yandaki analitik düzlemde işaretlenerek grafik çizilmiştir. İnceleyiniz.

7. ÖRNEK

$f(x) = mx^2 - (2m-3)x - 5m$ parabolü, $(-1, -5)$ noktasından geçtiğine göre parabolün tepe noktasının koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

Parabol $(-1, -5)$ noktasından geçtiğinden bu nokta parabol denklemini sağlar. Bu durumda $x = -1,\ y = -5$ değerleri $y = mx^2 - (2m-3)x - 5m$ denkleminde yazılırsa

$-5 = m \cdot (-1)^2 - (2m-3) \cdot (-1) - 5m$

$-5 = m + 2m - 3 - 5m$

$-5 = -2m - 3$

$-2 = -2m$

$m = 1$ bulunur.

Bu durumda $f(x) = 1 \cdot x^2 - (2 \cdot 1 - 3)x - 5 \cdot 1$

$f(x) = x^2 + x - 5$ olur.

$r = -\frac{b}{2a} \Rightarrow r = -\frac{1}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2}$ ve

$k = f(r) \Rightarrow k = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 5$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 5 = -\frac{21}{4}$ olur.

Bu durumda parabolün tepe noktası $T\left(-\frac{1}{2}, -\frac{21}{4}\right)$ olarak bulunur.

8. ÖRNEK

$y = (m+1)x^2 - (m^2-1)x + 4$ parabolünün simetri ekseni $x = 3$ doğrusu olduğuna göre m değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Parabolün simetri ekseni $x = r = -\frac{b}{2a}$ olur. Bu durumda

$3 = -\frac{-(m^2-1)}{2(m+1)} \Rightarrow 3 = -\frac{-(m-1) \cdot \cancel{(m+1)}}{2\cancel{(m+1)}}$ ($m + 1 \neq 0$ olacağından sadeleştirilebilir.)

$3 = \frac{m-1}{2}$

$6 = m - 1 \Rightarrow m = 7$ bulunur.

9. ÖRNEK

$y = -3x^2 - 6x + 3m$ parabolünün alabileceği en büyük değer 12 olduğuna göre m değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Fonksiyonun alabileceği en büyük veya en küçük değer $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolünün $T(r, k)$ tepe noktasının ordinatıdır. Bundan dolayı $k = 12$ olur.

$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \cdot (-3)} = -1$ bulunur. $k = f(r)$ olduğundan

$12 = -3 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 3m$

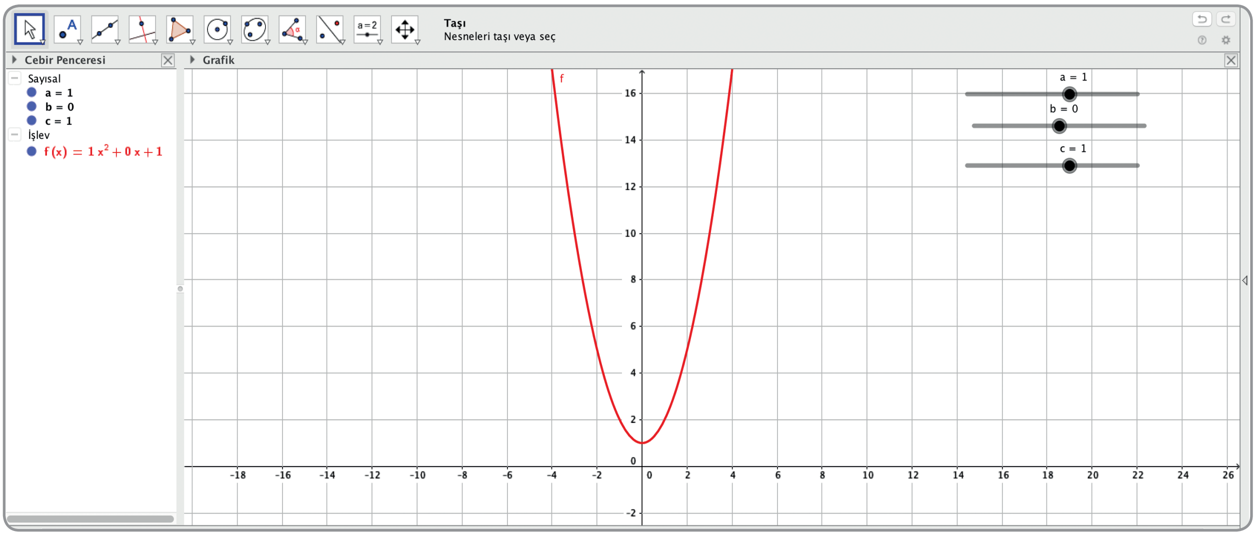
$= -3 + 6 + 3m \Rightarrow 12 = 3 + 3m$

$9 = 3m \Rightarrow m = 3$ olarak bulunur.

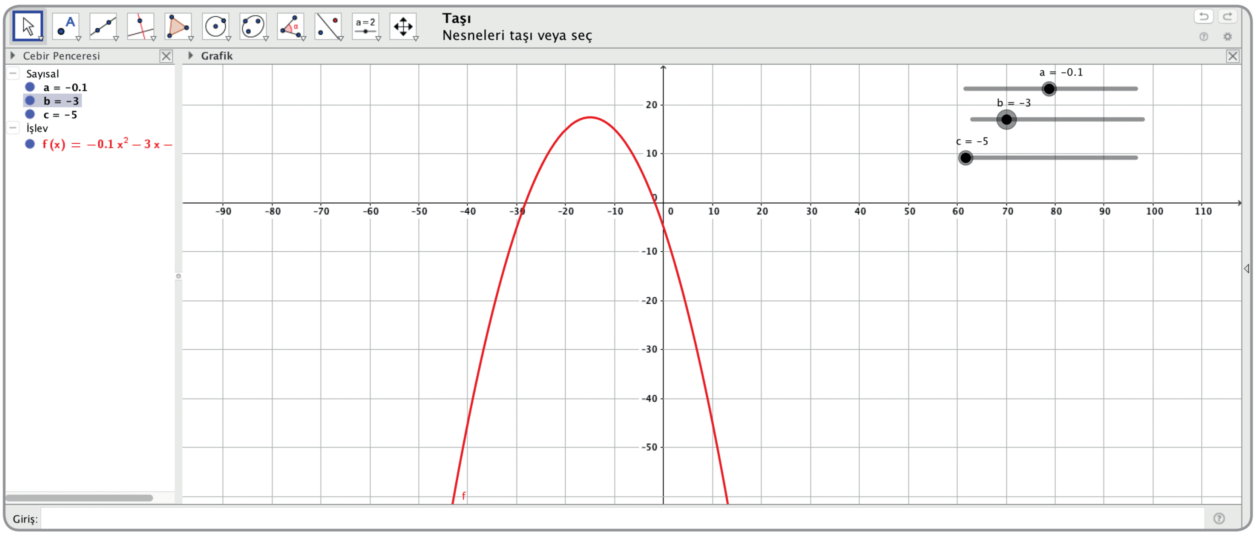
Teknoloji Uygulaması

Görsel 3.2.1 ve Görsel 3.2.2'de GeoGebra programı kullanılarak parabolün katsayıları arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Grafik Çizme	Programı çalıştırdığınızda **Grafik Çizme** kutucuğunu seçiniz.
a=2	**Sürgü** aracını seçiniz. Açılan pencerede a isimli bir sürgü oluşturup minimum değeri -5, maksimum değeri 5 ve artış miktarını 0.1 olarak tanımlayınız. Benzer şekilde b ve c isimli sürgülerin artış miktarlarını 1 olarak tanımlayınız.
Giriş:	**Giriş** kısmına *f*(x)=a*x*x+b*x+c yazıp **Enter** tuşuna basınız.
a = -2 b =	Oluşturduğunuz sürgülerdeki noktaları sağa ve sola hareket ettirerek fonksiyon grafiğindeki değişimleri inceleyiniz.



Görsel 3.2.1



Görsel 3.2.2

GeoGebra uygulamasını yaptığınızda $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunda $|a|$ büyüdükçe parabolün kollarının açıklığının azaldığına, $|a|$ küçüldükçe parabolün kollarının açıklığının arttığına; $a > 0$ olduğunda parabolün kollarının yukarı, $a < 0$ olduğunda parabolün kollarının aşağı doğru olduğuna; c değerinin ise parabolün y eksenini kestiği noktayı belirlediğine dikkat ediniz.

Grafiği Verilen İkinci Dereceden Fonksiyonu Yazma

1. Biri Tepe Noktası Olmak Üzere İki Noktası Bilinen İkinci Dereceden Fonksiyonu Yazma

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere tepe noktası $T(r, k)$ olan ve $A(x_0, y_0)$ noktasından geçen parabolün denklemi

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ifadesi tam kare ifadeye dönüştürülürse

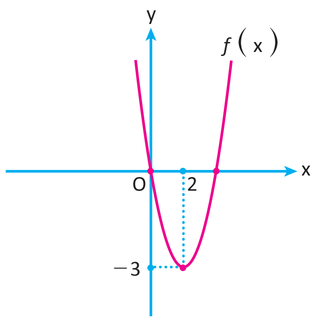
$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a \cdot \left(x^2 + \frac{bx}{a}\right) + c \\ &= a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= a \cdot \left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

$r = -\dfrac{b}{2a}$ ve $k = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ alınırsa $f(x) = a \cdot (x - r)^2 + k$ elde edilir.

$A(x_0, y_0)$ noktası, parabolün denkleminde yerine yazılarak a değeri bulunur.

- $k = 0$ olması durumunda parabolün tepe noktası $T(r, 0)$ şeklinde olur. Bu durumda parabolün tepe noktası x ekseni üzerinde, denklemi ise
  $f(x) = a \cdot (x - r)^2$ şeklinde olur.
- $r = 0$ olması durumunda parabolün tepe noktası $T(0, k)$ şeklinde olur. Bu durumda parabolün tepe noktası y ekseni üzerinde, denklemi ise
  $f(x) = ax^2 + k$ şeklinde olur.

10. ÖRNEK



Şekilde grafiği verilen tepe noktası $T(2, -3)$ olan ve orijinden geçen $y = f(x)$ parabolünün denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

$T(2, -3)$ noktası tepe noktası bilinen $f(x) = a \cdot (x - r)^2 + k$ parabol denkleminde yerine yazılırsa

$f(x) = a \cdot (x - 2)^2 - 3$ bulunur.

Parabol $(0, 0)$ noktasından geçtiğinden parabol denklemini sağlar. Bu durumda

$$0 = a \cdot (0 - 2)^2 - 3 \Rightarrow 0 = 4a - 3$$
$$4a = 3$$
$$a = \frac{3}{4} \text{ bulunur.}$$

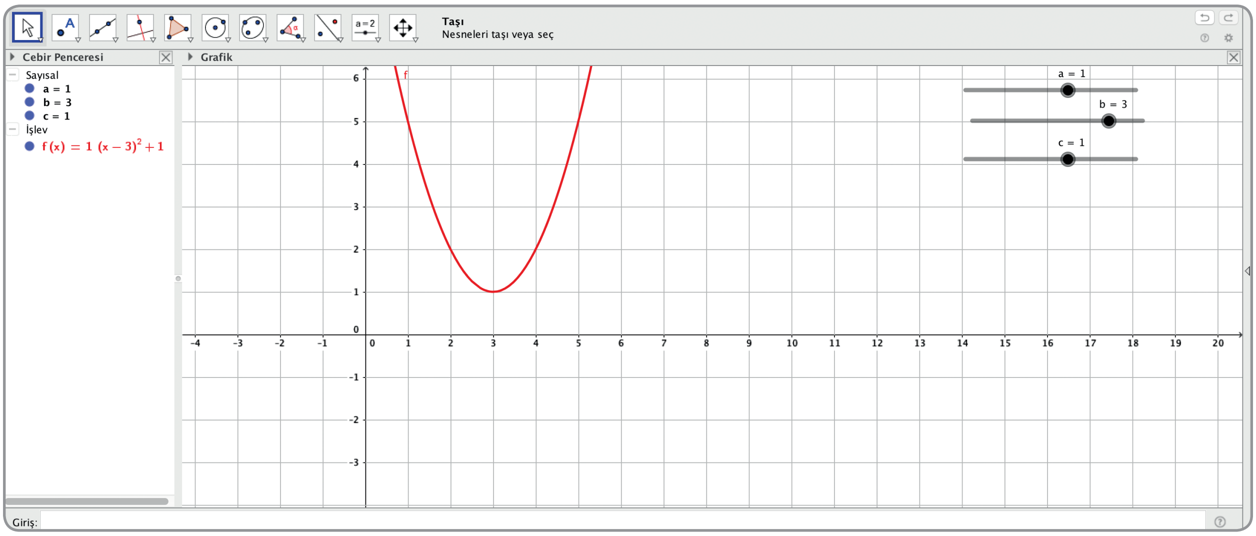
$a = \dfrac{3}{4}$ değeri yerine yazılırsa parabolün denklemi

$f(x) = \dfrac{3}{4} \cdot (x - 2)^2 - 3$ olarak bulunur.

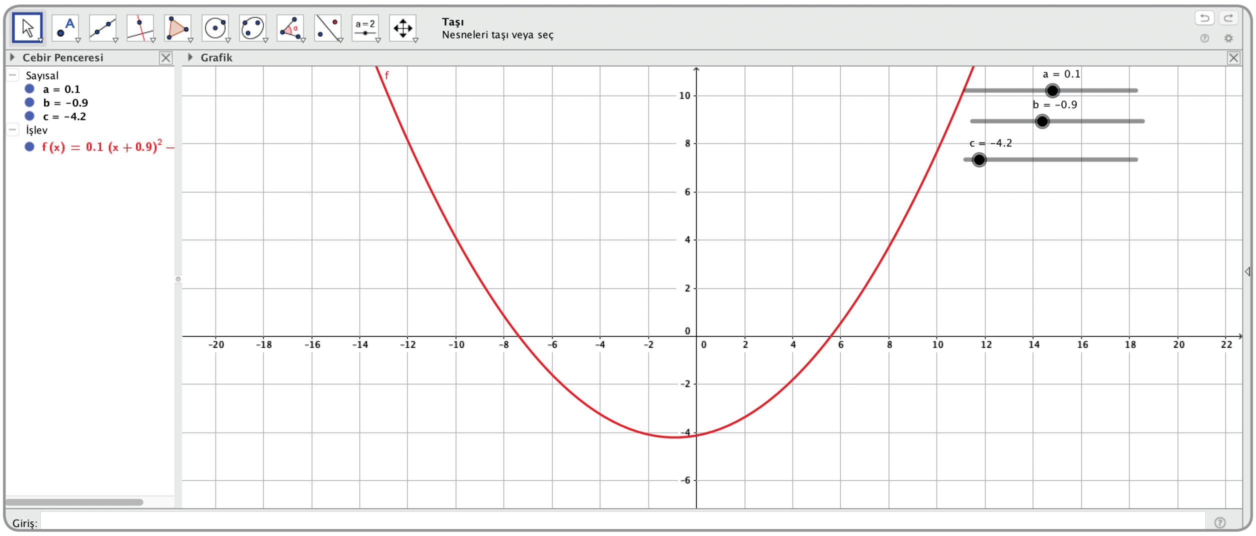
Teknoloji Uygulaması

Görsel 3.2.3 ve Görsel 3.2.4'te GeoGebra programı kullanılarak parabolün katsayıları arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Grafik Çizme	Programı çalıştırdığınızda **Grafik Çizme** kutucuğunu seçiniz.
a=2	**Sürgü** aracını seçiniz. Açılan pencerede a isimli bir sürgü oluşturup minimum değeri -5, maksimum değeri 5 ve artış miktarını 0.1 olarak tanımlayınız. Benzer şekilde b ve c isimli sürgülerin artış miktarlarını 1 olarak tanımlayınız.
Giriş:	**Giriş** kısmına f(x)=a*(x-b)*(x-b)+c yazdıktan sonra **Enter** tuşuna basınız.
a = -2 b =	Oluşturduğunuz sürgülerdeki noktaları sağa ve sola hareket ettirerek fonksiyon grafiğindeki değişimleri inceleyiniz.



Görsel 3.2.3



Görsel 3.2.4

GeoGebra uygulamasını yaptığınızda $f(x)=a\cdot(x-b)^2+c$ fonksiyonu için a değerinin parabolün kollarının açıklığını ve yönünü, b değerinin tepe noktasının apsisini, c değerinin tepe noktasının ordinatını belirlediğine dikkat ediniz.

11. ÖRNEK

Tepe noktasının koordinatları $T(-1,2)$ olan ve $A(-4,-7)$ noktasından geçen $y=f(x)$ parabolünün denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

Tepe noktası bilinen parabolün denklemi $f(x)=a\cdot(x-r)^2+k$ olduğundan
$T(-1,2)$ noktası denklemde yerine yazılırsa

$f(x)=a\cdot(x-(-1))^2+2$
$\quad\; =a\cdot(x+1)^2+2$ bulunur.

$(-4,-7)$ noktası parabol üzerinde olduğundan parabol denklemini sağlar.

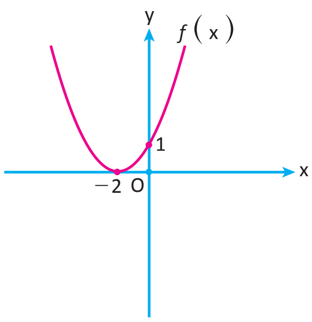
$f(x)=y=a\cdot(x+1)^2+2$
$-7=a\cdot(-4+1)^2+2$
$-7=9a+2$
$-9=9a$
$a=-1$ bulunur.

Bu durumda parabolün denklemi

$f(x)=-1\cdot(x+1)^2+2$
$\quad\; =-(x+1)^2+2$ olarak bulunur.

Sıra Sizde

SORU



Şekilde grafiği verilen tepe noktası $(-2,0)$ olan ve $(0,1)$ noktasından geçen $y=f(x)$ parabolünün denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

2. Biri y Ekseni Üzerinde Olmak Üzere Üç Noktası Verilen Parabolün Denklemini Yazma

a) Parabolün geçtiği üç nokta $A(0, y_0), B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$ şeklinde verildiğinde bu noktalar parabolün denkleminde yerine yazılır.

Öncelikle $A(0, y_0)$ noktası, $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabol denkleminde yazılırsa $c = y_0$ bulunur.

$c = y_0$ değeri ve $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$ noktaları $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabol denkleminde yazılırsa

$\left.\begin{aligned} ax_1^2 + bx_1 + y_0 = y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + y_0 = y_2 \end{aligned}\right\}$ denklem sistemi elde edilir. Denklem sistemi çözülerek a ve b değerleri

bulunur. Bulunan a, b ve c değerleri yerine yazılarak parabol denklemi elde edilir.

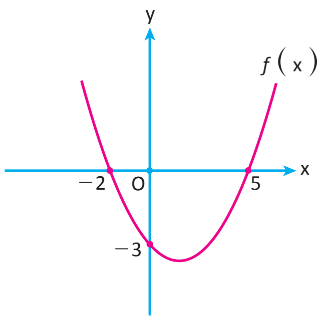
b) Parabolün geçtiği üç nokta $A(0, y_0), B(x_1, 0), C(x_2, 0)$ şeklinde verilirse aşağıdaki işlemler yapılır.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolü, x eksenini $B(x_1, 0), C(x_2, 0)$ noktalarında kestiğinden $\Delta > 0$ olur.
Bu durumda parabolün denklemi
$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ şeklinde yazılabilir.

$A(0, y_0)$ noktası, $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ denkleminde yazılırsa a değeri bulunur.

Bulunan a değeri yerine yazılırak parabol denklemi elde edilir.

12. ÖRNEK



Grafikte verilen $y = f(x)$ parabolünün denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

Parabolün x eksenini kestiği noktalar $(-2, 0)$ ve $(5, 0)$ olduğundan parabolün denklemi

$$f(x) = a \cdot (x - (-2)) \cdot (x - 5)$$
$$= a \cdot (x + 2) \cdot (x - 5) \text{ olur.}$$

$(0, -3)$ noktası parabol üzerinde olduğundan parabol denklemini sağlar.

Buradan

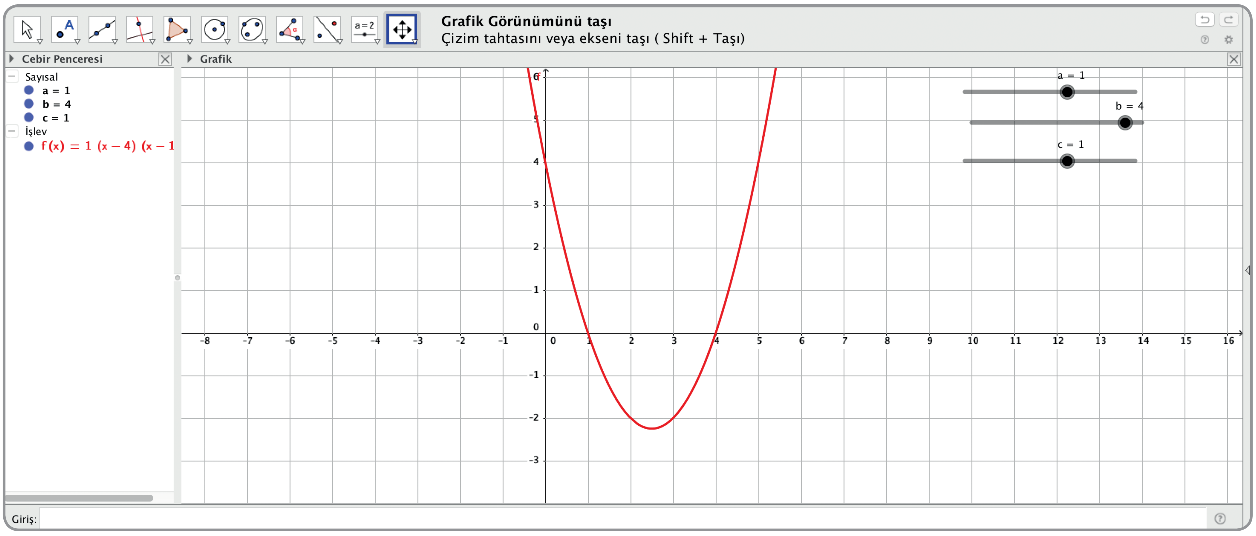
$$f(0) = a \cdot (0 + 2) \cdot (0 - 5)$$
$$-3 = a \cdot 2 \cdot (-5)$$
$$-3 = -10a$$
$$a = \frac{3}{10} \text{ bulunur.}$$

Bu durumda parabolün denklemi $f(x) = \frac{3}{10} \cdot (x + 2) \cdot (x - 5)$ olur.

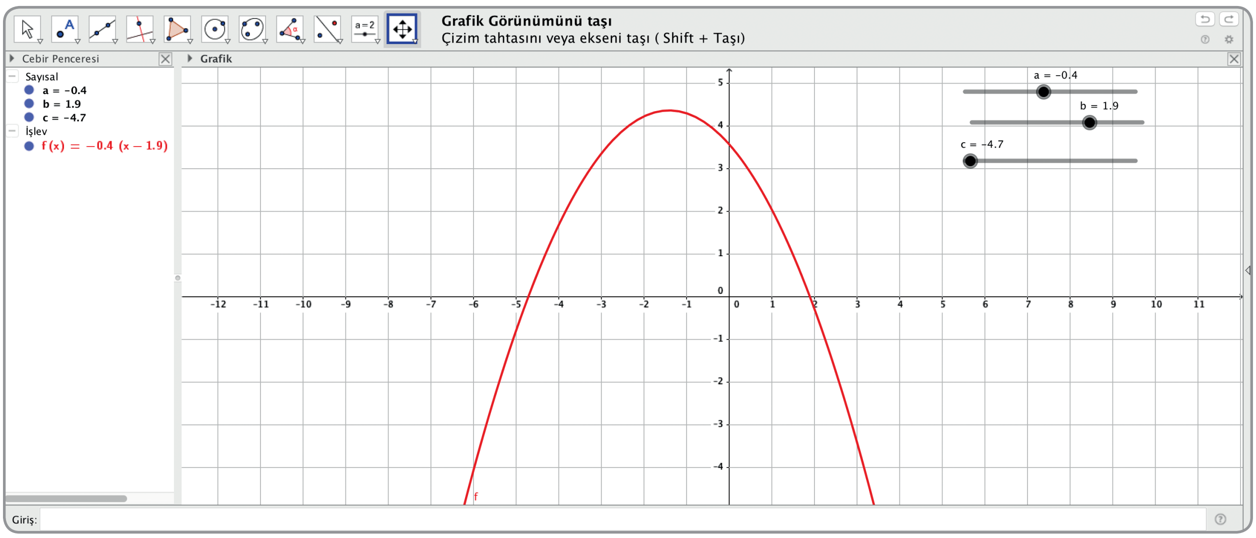
Teknoloji Uygulaması

Görsel 3.2.5 ve Görsel 3.2.6'da GeoGebra programı kullanılarak parabolün katsayıları arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Grafik Çizme	Programı çalıştırdığınızda **Grafik Çizme** kutucuğunu seçiniz.
a=2	**Sürgü** aracını seçiniz. Açılan pencerede a isimli bir sürgü oluşturup minimum değeri -5, maksimum değeri 5 ve artış miktarını 0.1 olarak tanımlayınız. Benzer şekilde b ve c isimli sürgülerin artış miktarlarını 1 olarak tanımlayınız.
Giriş:	**Giriş** kısmına *f* (x)=a*(x-b)*(x-c) yazdıktan sonra **Enter** tuşuna basınız.
a = −2 b =	Oluşturduğunuz sürgülerdeki noktaları sağa ve sola hareket ettirerek fonksiyon grafiğindeki değişimleri inceleyiniz.



Görsel 3.2.5



Görsel 3.2.6

GeoGebra uygulamasını yaptığınızda $f(x) = a \cdot (x - b) \cdot (x - c)$ parabolü için b ve c değerlerinin x eksenini kesen noktaların apsisleri olduğuna dikkat ediniz.

13. ÖRNEK

Grafiği $(0,5),(-1,3)$ ve $(1,9)$ noktalarından geçen ikinci dereceden fonksiyonun kuralını bulunuz.

ÇÖZÜM

$(0,5)$ noktası parabol üzerinde olduğundan $f(x)=ax^2+bx+c$ denklemini sağlar.
Buradan $5=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c \Rightarrow c=5$ bulunur.
Bu durumda parabol denklemi
$f(x)=ax^2+bx+5$ olur.

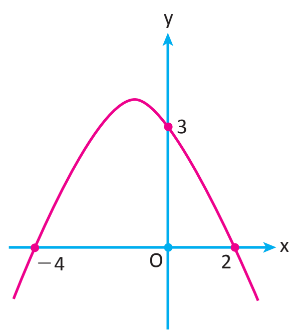
$(-1,3)\in f$ için $3=a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+5 \Rightarrow$ $a-b=-2$ **(1)**
$(1,9)\in f$ için $9=a\cdot 1^2+b\cdot 1+5 \Rightarrow$ $a+b=4$ **(2)** denklemleri elde edilir.

Denklem sistemi yok etme yöntemi ile çözülürse

$$\begin{array}{rl} & a-b=-2 \\ + & a+b=4 \\ \hline & 2a=2 \Rightarrow a=1 \text{ ve } b=3 \text{ olur.} \end{array}$$

Bulunan değerler yerine yazılırsa $f(x)=x^2+3x+5$ olarak bulunur.

14. ÖRNEK



Grafikte verilen $y=f(x)$ parabolünün denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

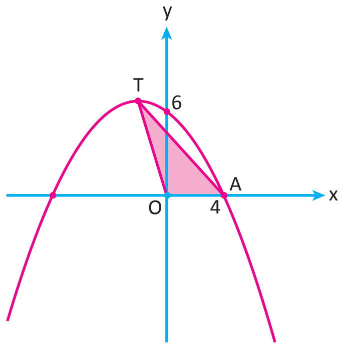
Grafikte $y=f(x)$ parabolü, x eksenini $(-4,0)$ ve $(2,0)$ noktalarında kesmektedir.
Bu durumda parabolün denklemi
$y=f(x)=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$ şeklindedir.

$(-4,0)$ ve $(2,0)$ noktaları denklemde yerlerine yazılırsa
$y=f(x)=a\cdot(x-2)\cdot(x-(-4))$
$=a\cdot(x-2)\cdot(x+4)$ olur.

Parabol, y eksenini $(0,3)$ noktasında kestiğinden bu noktanın koordinat değerleri $y=a\cdot(x-2)\cdot(x+4)$ denkleminde yerine yazılırsa
$3=a\cdot(0-2)\cdot(0+4)$
$3=-8a \Rightarrow a=-\frac{3}{8}$ bulunur.

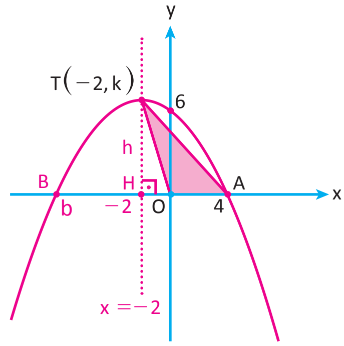
Bu durumda grafiği verilen parabolün denklemi $y=f(x)=-\frac{3}{8}\cdot(x-2)\cdot(x+4)$ olarak bulunur.

15. ÖRNEK



Şekilde grafiği verilen x eksenini $A(4,0)$ noktasında y eksenini $(0,6)$ noktasında kesen parabolün tepe noktası T ve simetri ekseni $x=-2$ doğrusu olduğuna göre $A(\widehat{TOA})$ nın kaç birimkare olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Parabolün simetri ekseni $x=-2$ ise
$H(-2,0)$ ile $A(4,0)$ noktası arasındaki uzaklık 6 birimdir.
Bu durumda $H(-2,0)$ ve $B(b,0)$ noktaları arasındaki uzaklık 6 birim olacağından B noktasının apsisi $b=-8$ olur.

Bu durumda x eksenini $B(-8,0)$ ve $A(4,0)$ noktalarında kesen parabolün denklemi

$$y=f(x)=a\cdot(x-(-8))\cdot(x-4)$$
$$=a\cdot(x+8)\cdot(x-4) \text{ olur.}$$

$(0,6)$ noktası, parabol üzerinde olduğundan parabol denklemini sağlar. Buradan

$6=a\cdot(0+8)\cdot(0-4)$ ve $6=-32a \Rightarrow a=-\frac{6}{32}=-\frac{3}{16}$ bulunur.

Bu durumda parabolün denklemi

$f(x)=-\frac{3}{16}\cdot(x+8)\cdot(x-4)$ şeklinde bulunur.

TOA üçgeninin yüksekliği $f(x)=-\frac{3}{16}\cdot(x+8)\cdot(x-4)$ parabolünün tepe noktasının ordinatı olduğundan $|TH|=h=k$ olmak üzere

$$h=k=f(-2)=-\frac{3}{16}\cdot(-2+8)\cdot(-2-4)$$
$$=-\frac{3}{16}\cdot 6\cdot(-6)$$
$$h=\frac{27}{4} \text{ olur.}$$

Bu durumda TOA üçgeninin alanı

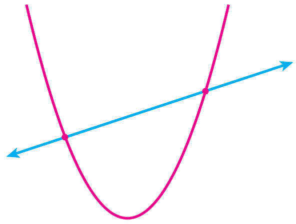
$$A(\widehat{TOA})=\frac{|OA|\cdot h}{2}=\frac{4\cdot\frac{27}{4}}{2}$$
$$=\frac{27}{2} \text{ birimkare olur.}$$

Bir Doğru ile Bir Parabolün Birbirine Göre Durumu

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolü ve $m, n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $y = mx + n$ doğrusu verilmiş olsun.

Bu durumda doğru ile parabolün birbirine göre konumlarını belirlemek için

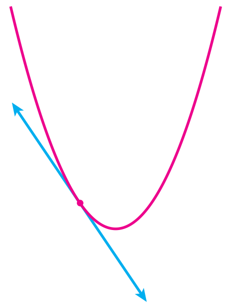
$$\left.\begin{array}{l} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + n \end{array}\right\} \text{denklemlerinin ortak çözümü yapılmalıdır.}$$


Grafik 3.2.8

Her iki denklem y ye eşit olduğundan birbirlerine eşitlenirse $mx + n = ax^2 + bx + c \Rightarrow ax^2 + (b - m)x + (c - n) = 0$ denklemi elde edilir.

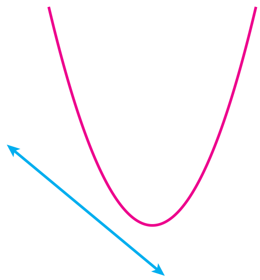
Bu denklemin diskriminantı $\Delta = (b - m)^2 - 4 \cdot a \cdot (c - n)$ olmak üzere

a) $\Delta > 0$ ise denklemin farklı iki gerçek kökü vardır. Başka bir ifadeyle doğru, parabolü iki farklı noktada keser. Bu kökler parabol ile doğrunun kesişme noktalarının apsisleridir.
Apsisler denklemlerden birinde yerine yazılarak ordinat değerleri dolayısıyla kesişme noktaları bulunur (Grafik 3.2.8).


Grafik 3.2.9

b) $\Delta = 0$ ise denklemin eşit (çakışık) iki gerçek kökü vardır. Başka bir ifadeyle doğru ile parabolün ortak bir noktası vardır. Bu durumda doğru parabole teğet olur. Denklemin kökü, teğet noktasının apsisini verir. Apsis, denklemlerden birinde yerine yazılarak ordinat değeri dolayısıyla kesişme noktası bulunur (Grafik 3.2.9).

c) $\Delta < 0$ ise denklemin gerçek kökü yoktur. Başka bir ifadeyle doğru ile parabol kesişmez (Grafik 3.2.10).


Grafik 3.2.10

16. ÖRNEK

$f(x) = 3x^2 - 2x - 8$ parabolü ile $y = 2x + 7$ doğrusunun birbirlerine göre durumunu inceleyiniz.

ÇÖZÜM

Parabol ile doğru denklemlerinin oluşturduğu denklem sistemi

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x^2 - 2x - 8 \\ y = 2x + 7 \end{array}\right\} \text{olur. Her iki denklem de y ye eşit olduğundan bu iki denklemin ortak çözümü yapılırsa}$$

$3x^2 - 2x - 8 = 2x + 7 \Rightarrow 3x^2 - 4x - 15 = 0$ denklemi elde edilir.

$\Delta = b^2 - 4ac$ değeri hesaplanırsa $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-15) = 16 + 180 = 196$ bulunur.

$\Delta = 196 > 0$ olduğundan $y = 2x + 7$ doğrusu ile $f(x) = 3x^2 - 2x - 8$ parabolü iki farklı noktada kesişir.

Kesişme noktalarının apsisleri $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4 + \sqrt{196}}{2 \cdot 3} = \dfrac{4 + 14}{6} = \dfrac{18}{6} = 3$ ve

$x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4 - \sqrt{196}}{2 \cdot 3} = \dfrac{4 - 14}{6} = -\dfrac{10}{6} = -\dfrac{5}{3}$ bulunur.

Kesişme noktalarının koordinatları

$x_1 = 3$ için $y_1 = 2 \cdot 3 + 7 = 6 + 7 = 13 \Rightarrow K_1(3, 13)$ ve

$x_2 = -\dfrac{5}{3}$ için $y_2 = 2 \cdot \left(-\dfrac{5}{3}\right) + 7 = -\dfrac{10}{3} + 7 = \dfrac{11}{3} \Rightarrow K_2\left(-\dfrac{5}{3}, \dfrac{11}{3}\right)$ olarak bulunur.

17. ÖRNEK

$y = 3x - 4$ doğrusu $y = 2x^2 - x + m$ parabolüne teğet olduğuna göre m değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Bu iki denklemin ortak çözümünü bulmak için denklemler eşitlenirse
$3x - 4 = 2x^2 - x + m \Rightarrow 2x^2 - 4x + (m+4) = 0$ bulunur.
Doğru, parabole teğet olduğundan ortak çözümden elde edilen denklemde $\Delta = 0$ olur. Buradan
$\Delta = b^2 - 4ac$
$0 = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (m+4)$
$0 = 16 - 8m - 32$
$0 = -8m - 16 \Rightarrow 8m = -16 \Rightarrow m = -2$ bulunur.

18. ÖRNEK

$y = 2x^2 - 4x + 3$ parabolü ile $y = 3x - 2$ doğrusunun kesişme noktaları M ve N olduğuna göre $[MN]$ nın orta noktasının parabolün tepe noktasına olan uzaklığının kaç birim olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Bu iki denklemin ortak çözümünü bulmak için denklemler eşitlenirse
$2x^2 - 4x + 3 = 3x - 2 \Rightarrow 2x^2 - 7x + 5 = 0$ bulunur.
$2x^2 - 7x + 5 = 0 \Rightarrow (2x-5)\cdot(x-1) = 0$

$2x - 5 = 0$ veya $x - 1 = 0$

$x_1 = \frac{5}{2}$ veya $x_2 = 1$ bulunur.

$x_1 = \frac{5}{2}$ değeri $y = 3x - 2$ denkleminde yerine yazılırsa $y_1 = 3 \cdot \frac{5}{2} - 2 = \frac{15}{2} - 2 = \frac{11}{2} \Rightarrow M\left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right)$

$x_2 = 1$ değeri $y = 3x - 2$ denkleminde yerine yazılırsa $y_2 = 3 \cdot 1 - 2 = 3 - 2 = 1 \Rightarrow N(1,1)$ bulunur.

$[MN]$ nın orta noktası K olmak üzere koordinatları $K\left(\frac{\frac{5}{2}+1}{2}, \frac{\frac{11}{2}+1}{2}\right) = K\left(\frac{7}{4}, \frac{13}{4}\right)$ olarak bulunur.

$y = 2x^2 - 4x + 3$ parabolünün tepe noktasının apsisi $r = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 2} = 1$ ve ordinatı

$k = f(r) = f(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 2 - 4 + 3 = 1$ olduğundan tepe noktası $T(r,k) = T(1,1)$ bulunur.

Bu durumda $T(1,1)$ noktasının $K\left(\frac{7}{4}, \frac{13}{4}\right)$ noktasına olan uzaklığı iki nokta arası uzaklıktan

$$|TK| = \sqrt{\left(\frac{7}{4} - 1\right)^2 + \left(\frac{13}{4} - 1\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{81}{16}}$$

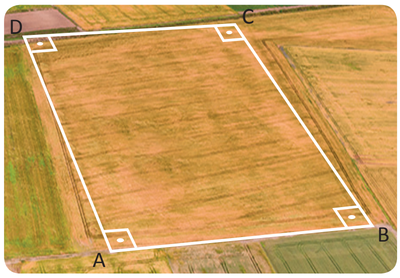
$$= \frac{\sqrt{90}}{4} = \frac{3\sqrt{10}}{4}$$ birim bulunur.

2. İkinci Dereceden Fonksiyon Uygulamaları

1. ÖRNEK

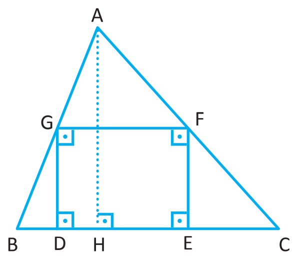
Çevresi 180 m olan dikdörtgen şeklindeki bir tarlanın alanının en fazla kaç m^2 olabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM



Dikdörtgen şeklindeki tarlanın uzun kenarı x, kısa kenarı y olsun.
Bu tarlanın çevresi
$Ç(ABCD) = 2\cdot(x+y) = 180$ olmak üzere
$x + y = 90$
$y = 90 - x$ olur.
Bu durumda dikdörtgenin alan fonksiyonu
$f(x) = x\cdot(90-x) = -x^2 + 90x$ olur.
f fonksiyonunun en büyük değeri tepe noktasının ordinatıdır.
Bu değeri bulmak için önce apsis bulunursa $r = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{90}{2\cdot(-1)} = 45$ olur.Buradan ordinat değeri
$k = f(r) = f(45) = -45^2 + 90\cdot 45 = -2025 + 4050 = 2025$ olur.
Bu durumda dikdörtgen şeklindeki tarlanın alanının en büyük değeri 2025 m^2 olarak bulunur.

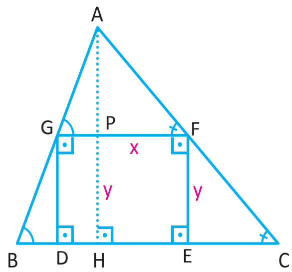
2. ÖRNEK



Tamamen organik tarım yapan bir çiftçi şekildeki gibi ABC üçgeni şeklindeki tarlasının içerisine maksimum alanlı DEFG dikdörtgeni şeklinde bir bahçe yapacaktır. $[AH] \perp [BC], |BC| = 24$ m ve $|AH| = 16$ m dir.

Bahçe toprağının verimini arttırmak için m^2 ye 3 kg doğal gübre atıldığına göre bahçenin tamamına kaç kg doğal gübre gerektiğini bulunuz.

ÇÖZÜM

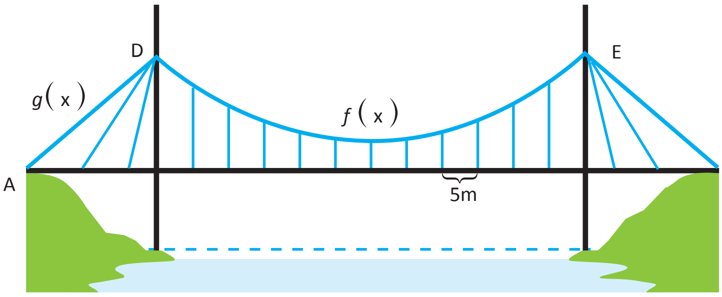


Şekilde $|GF| = x$, $|EF| = y$ alınırsa $A(DEFG) = x\cdot y$ olur.
$\widehat{AGF} \sim \widehat{ABC}$ (A.A.) benzerliği vardır. Benzerlik oranları yazılırsa
$\dfrac{|AG|}{|AB|} = \dfrac{|GF|}{|BC|} = \dfrac{|AF|}{|AC|}$ olur. Benzer üçgenlerin yüksekliklerinin oranı da benzerlik oranına eşit olacağından
$\dfrac{|GF|}{|BC|} = \dfrac{|AP|}{|AH|} \Rightarrow \dfrac{x}{24} = \dfrac{16-y}{16} \Rightarrow 16x = 384 - 24y \Rightarrow 2x = 48 - 3y$
$y = 16 - \dfrac{2}{3}x$ olur.

Buradan $A(DEFG) = x\cdot y = x\cdot\left(16 - \dfrac{2}{3}x\right) = -\dfrac{2}{3}x^2 + 16x$ bulunur
A(DEFG) fonksiyonunun en büyük değeri, tepe noktasının ordinatıdır.
$r = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{16}{2\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)} = 12$ için $k = f(12) = -\dfrac{2}{3}\cdot 12^2 + 16\cdot 12 = 96$ bulunur.
Buna göre $A(DEFG) = 96\ m^2$ olur. m^2 ye 3 kg doğal gübre atıldığına göre
bahçenin tamamına $96\cdot 3 = 288$ kg doğal gübre gerekir.

3. ÖRNEK

Şekilde verilen simetrik asma köprünün parabolik ana taşıyıcı çelik halatının köprünün iki ayağı arasında kalan kısmı (D ve E noktaları arasında kalan eğri) $f(x)=\frac{1}{10}\cdot(x-30)^2+5$ ile modellenmektedir. Şekilde gösterilen A noktası ile köprünün ayağına bağlı olan doğrusal halatın denklemi $g(x)=5x+c$, $(c\in\mathbb{R})$ dir. Köprü ayağının halatın üstünde kalan kısmı 3 m ve köprü ayağının köprünün altında kalan kısmı 15 m dir.



Köprü, ana taşıyıcı parabolik halata her birinin arası 5 m olan 11 çelik tel ile bağlıdır. Buna göre

a) Köprünün ayak yüksekliğinin kaç metre olduğunu bulunuz.

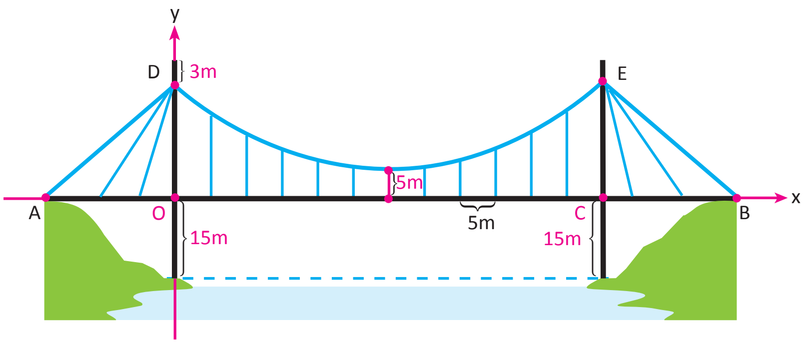
b) Çelik tellerden en kısa olanın uzunluğunun kaç metre olduğunu bulunuz.

c) Köprünün uzunluğunun ($|AB|$) kaç metre olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Köprü, ana taşıyıcı çelik halata beşer metre ara ile 11 çelik tel ile bağlı olduğundan 12 aralık vardır. Bu durumda $|OC|=12\cdot5=60\,\text{m}$ olur. Köprü, şekildeki gibi koordinat sistemi üzerine yerleştirilirse ayakların köprüyü kestiği noktalar $(0,0)$ ve $(60,0)$ olur.

$x=0$ için $y=f(0)=\frac{1}{10}\cdot(0-30)^2+5=95$ olduğundan parabol $(0,95)$ noktasında y eksenini keser yani $|OD|=95\,\text{m}$ olur. Bu durumda köprünün ayak uzunluğu $95+15+3=113\,\text{m}$ bulunur.



b) En kısa çelik tel, $[OC]$ nın orta noktasından geçen teldir.
Bu telin uzunluğu, parabolün tepe noktasının ordinatına eşittir.

$T(r,k)$ olmak üzere $|OC|=60\,\text{m}$ olduğundan

$r=\frac{60}{2}=30$ bulunur. Buradan

$k=\frac{1}{10}\cdot(30-30)^2+5=5$ olur. Bu durumda en kısa çelik telin uzunluğu 5 m olarak bulunur.

c) Parabol ve doğru $(0,95)$ noktasında kesiştiğinden $(0,95)$ noktası doğru denklemini sağlar.
Buradan

$y=5x+c$

$95=5\cdot0+c\Rightarrow c=95$

$y=5x+95$ bulunur.

$|OA|$ nu bulmak için $g(x)$ doğrusunun x eksenini kestiği nokta bulunmalıdır. Bu nokta

$y=0$ için $0=5x+95$

$5x=-95\Rightarrow x=-19$ olur.

O hâlde $|OA|=|-19|=19$ m bulunur. Köprü simetrik olduğundan köprünün uzunluğu

$|AB|=19+60+19=98\,\text{m}$ bulunur.

ALIŞTIRMALAR-2

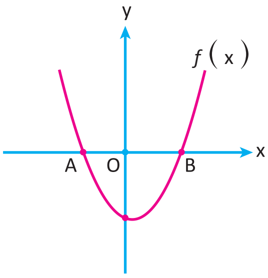
1. Aşağıdaki fonksiyonların eksenleri kestiği noktaları, simetri eksenlerini ve tepe noktalarının koordinatlarını bulunuz.

a) $f(x) = 5x^2 - 10x - 15$

b) $f(x) = -2x^2 - 8x - 8$

c) $f(x) = x^2 - x - 6$

2. $f(x) = x^2 - 2x + m$ fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir.



$4 \cdot |AO| = 3 \cdot |OB|$ olduğuna göre

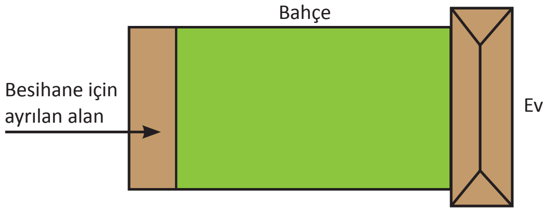
a) m değerini bulunuz.

b) Parabolün eksenleri kestiği noktaları bulunuz.

c) $f(x)$ fonksiyonunun alabileceği en küçük değeri bulunuz.

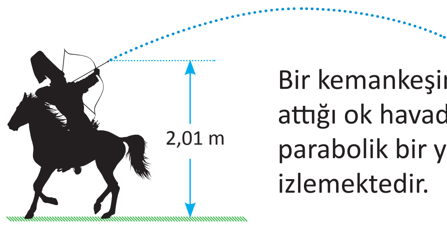
3. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = mx^2 - (2m - 3)x + m + 1$ fonksiyonun grafiği, x eksenini iki farklı noktada kestiğine göre m nin alabileceği en büyük tam sayı değerini bulunuz.

4. Tevfik Bey; evinin önündeki 6 dönümlük tarlasının bir kısmına görselde verildiği gibi dikdörtgen biçiminde bir bahçe, geriye kalan kısmına ise daha sonra yerli hayvan sayısını arttırmak için besihane inşa edecektir.



Bahçenin alanı en fazla olacak şekilde elindeki 200 m çiti, evin önü hariç bahçenin üç tarafında kullanan Tevfik Bey'in besihane için kaç m^2 yeri kalmıştır?

5.



Bir kemankeşin attığı ok havada parabolik bir yörünge izlemektedir.

Okun ucunun yerden yüksekliği 2,01 m ve okun yörüngesi

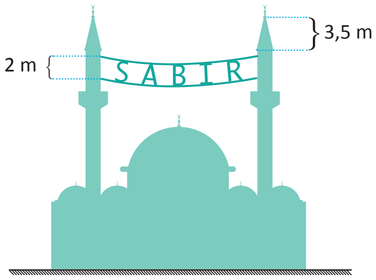
$$f(x) = -\frac{1}{100} \cdot (x^2 - 200x - 201)$$

fonksiyonu ile modellenebildiğine göre

a) Okun en fazla kaç metre yüksekliğe çıktığını bulunuz.

b) Okun gidebileceği en uzun mesafenin kaç metre olduğunu bulunuz.

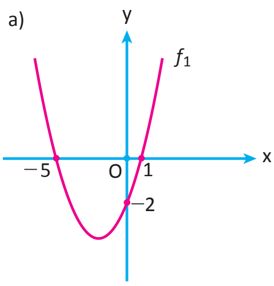
6.

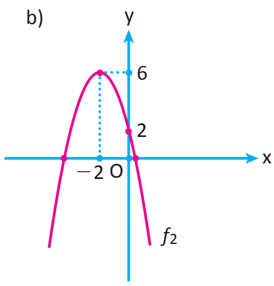


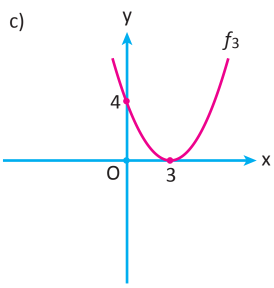
Şekildeki camiye eni 2 m olan parabol şeklinde bir mahya asılacaktır. Mahyanın alt eğrisi $f(x)=\frac{1}{500}(x-50)^2+60$ fonksiyonu ile modelleniyor.

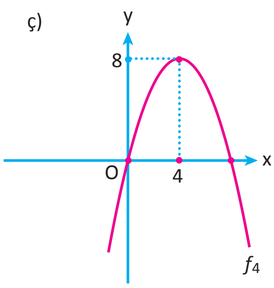
Minarenin külah boyu 3,5 m ise minare aleminin yerden yüksekliğinin kaç m olduğunu bulunuz.

7. Aşağıda grafikleri verilen fonksiyonların denklemlerini yazınız.

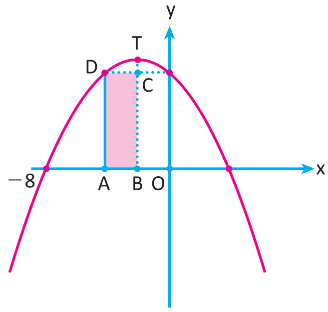
a)


b)


c)


ç)


8.



Şekildeki $(-8, 0)$ ve D noktalarından geçen parabolün tepe noktası $T(-3, 15)$ dir. A ve B noktaları x ekseni üzerinde olmak üzere koordinat sisteminin 2. bölgesinde yer alan ABCD dikdörtgeninin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

9. $y = 3x + m - 1$ doğrusu ile

$f(x) = -x^2 + (m + 8)x - 6$

parabolü kesişmediğine göre m nin alabileceği tam sayı değerlerinin toplamını bulunuz.

11.3.3. FONKSİYONLARIN DÖNÜŞÜMLERİ

Fonksiyon Grafikleri ve Simetri Dönüşümleri

Tek ve Çift Fonksiyonların Grafikleri

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ y=f(x)$ fonksiyonu verilmiş olsun.

$\forall x\in\mathbb{R}$ için $f(-x)=f(x)$ ise f çift fonksiyondur. Çift fonksiyonların grafiği, y eksenine göre simetriktir.

$\forall x\in\mathbb{R}$ için $f(-x)=-f(x)$ ise f fonksiyonu tek fonksiyondur. Tek fonksiyonların grafiği orijine göre simetriktir.

1. ÖRNEK

$f:[-6,n]\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+(m-3)x+4$ fonksiyonu, y eksenine göre simetrik olduğuna göre m değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

f fonksiyonu, y eksenine göre simetrik ise çift fonksiyondur. Bu durumda $\forall x\in[-6,n]$ için $f(-x)=f(x)$ veya f fonksiyonunun tek dereceli terimlerinin katsayıları sıfırdır.

I. yol

$f(-x)=f(x)$ tir. Bu durumda

$$f(-x)=(-x)^2+(m-3)\cdot(-x)+4$$
$$=x^2+(3-m)x+4 \text{ olur.}$$

$$x^2+(3-m)x+4=x^2+(m-3)x+4\Rightarrow 3-m=m-3$$
$$2m=6\Rightarrow m=3 \text{ olur.}$$

II. yol:

f fonksiyonu, çift fonksiyon olduğundan tek dereceli terimlerin katsayıları sıfır olmalıdır.

Bu durumda $m-3=0\Rightarrow m=3$ bulunur.

2. ÖRNEK

$f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ y=f(x)$ ve $g(x)=2x+4\cdot f(x)$ fonksiyonları veriliyor. f fonksiyonu orijine göre simetrik ve $f(-3)=-5$ olduğuna göre $g(3)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$g(3)=2\cdot3+4\cdot f(3)=6+4\cdot f(3)$ olur.

f fonksiyonu orijine göre simetrik olduğundan tek fonksiyondur. Bu durumda $f(-x)=-f(x)$ ve $f(-3)=-f(3)$ olur.

Buradan $f(3)=-f(-3)=-(-5)=5$ bulunur.

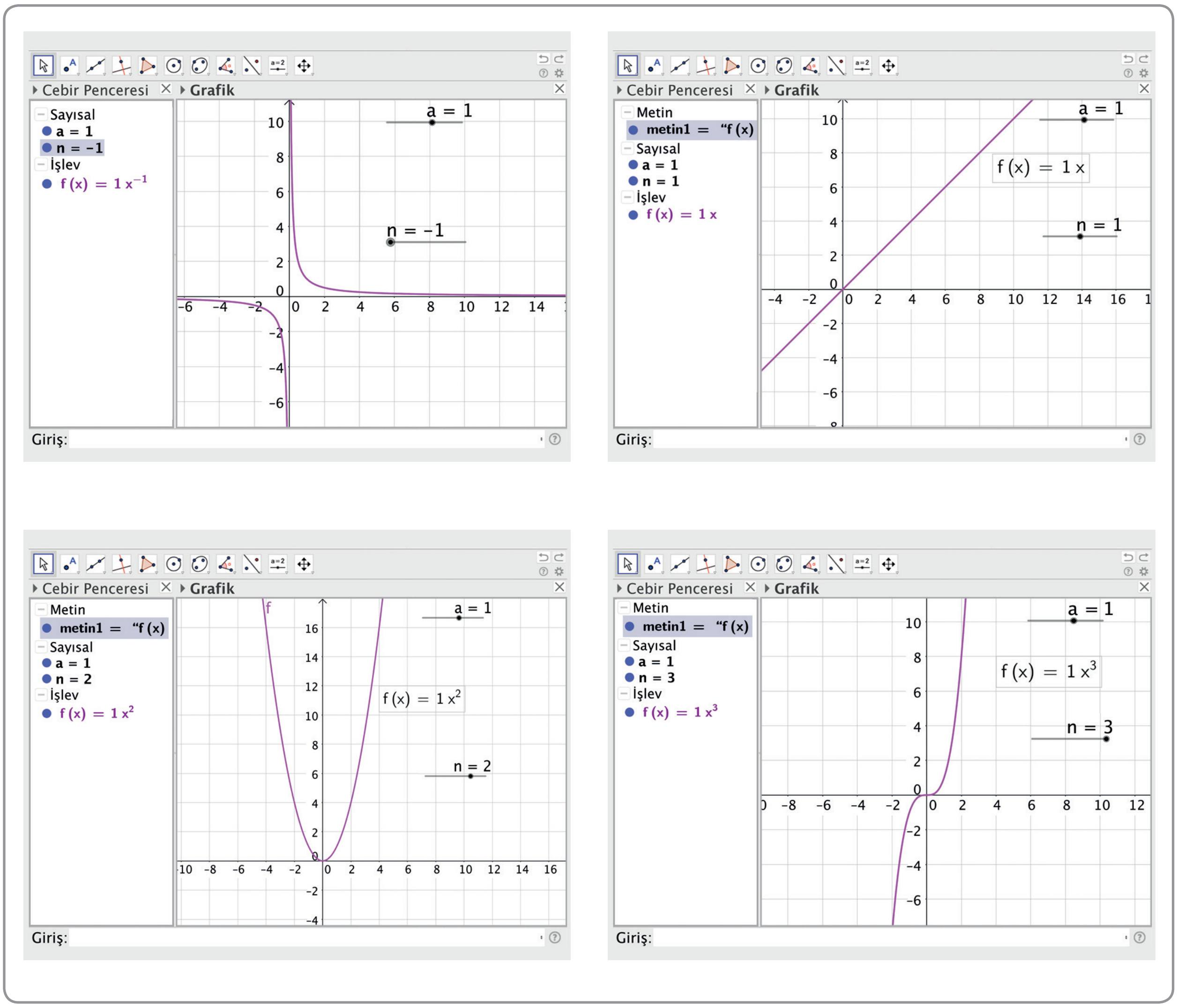
$g(3)=6+4\cdot f(3)$ olduğundan

$g(3)=6+4\cdot5=6+20=26$ olur.

Teknoloji Uygulaması

Aşağıda GeoGebra programı ile $f(x)=ax^n,(n\in\{-1,1,2,3\})$ fonksiyonunun grafikleri çizilmiştir. İnceleyiniz (Görsel 3.3.1).

a=2	Sürgü aracını seçiniz. Açılan pencerede a isimli bir sürgü tanımlayınız.
a=2	Sürgü aracını seçiniz. Açılan pencerede n isimli bir sürgü oluşturup minimum değeri -1, maksimum değeri 3 ve artış miktarını 1 olarak tanımlayınız.
Giriş:	Giriş kısmına $f(x)=ax$^n yazıp **Enter** tuşuna basınız.
a = 1	a ve n sürgülerinin değerleri için fonksiyon grafiğindeki değişimi inceleyiniz.



Görsel 3.3.1

GeoGebra uygulamasını yaptığınızda n sürgüsündeki değerler için fonksiyonun tek olma durumunda orijine, çift olma durumunda y eksenine göre simetrik olduğuna dikkat ediniz. a sürügüsündeki farklı değerler için fonksiyonun grafiğindeki hareketleri inceleyiniz.

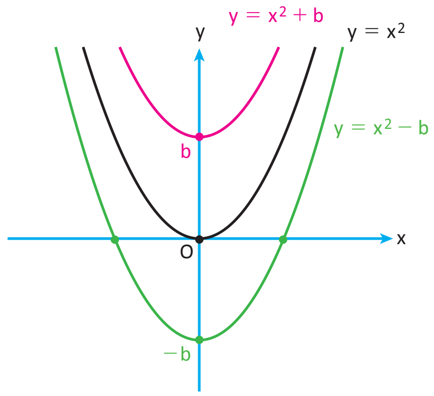
Öteleme Dönüşümleri

a) y = f (x)+b Dönüşümü

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilsin.

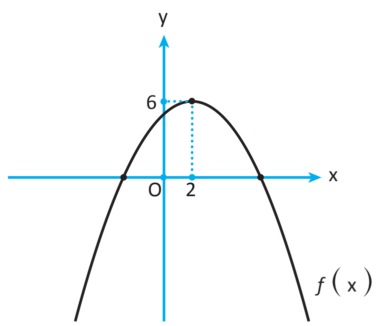
- $b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $y = f(x) + b$ fonksiyonunun grafiği, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin y ekseni boyunca pozitif yönde b birim ötelenmesiyle elde edilen grafiktir.
  Bu durumda $A(x, y)$ noktasının y ekseni boyunca pozitif yönde b birim ötelenmiş şekli $A'(x, y + b)$ noktası olur. Şekilde özel olarak $y = x^2$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir (Grafik 3.3.1).

- $b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $y = f(x) - b$ fonksiyonunun grafiği, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin y ekseni boyunca negatif yönde b birim ötelenmesiyle elde edilen grafiktir.
  Bu durumda $A(x, y)$ noktasının y ekseni boyunca negatif yönde b birim ötelenmiş şekli $A''(x, y - b)$ noktası olur. Şekilde özel olarak $y = x^2$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir (Grafik 3.3.1).



Grafik 3.3.1

3. ÖRNEK



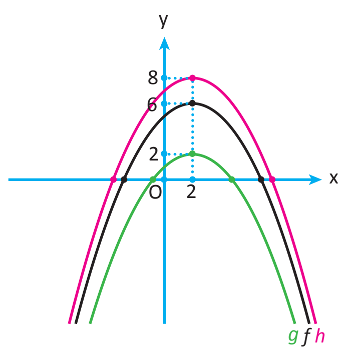
Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre $g(x) = f(x) - 4$ ve $h(x) = f(x) + 2$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

ÇÖZÜM

$g(x) = f(x) - 4$ fonksiyonunun grafiği, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin y ekseni boyunca negatif yönde 4 birim ötelenmesiyle oluşan grafiktir. f fonksiyonunun grafiği üzerindeki (x, y) şeklindeki noktalar, $(x, y - 4)$ şeklindeki noktalara ötelenirse $g(x) = f(x) - 4$ fonksiyonunun grafiği elde edilmiş olur.

$h(x) = f(x) + 2$ fonksiyonunun grafiği, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin y ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim ötelenmesiyle oluşan grafiktir. f fonksiyonunun grafiği üzerindeki (x, y) şeklindeki noktalar, $(x, y + 2)$ şeklindeki noktalara ötelenirse $h(x) = f(x) + 2$ fonksiyonunun grafiği elde edilmiş olur.

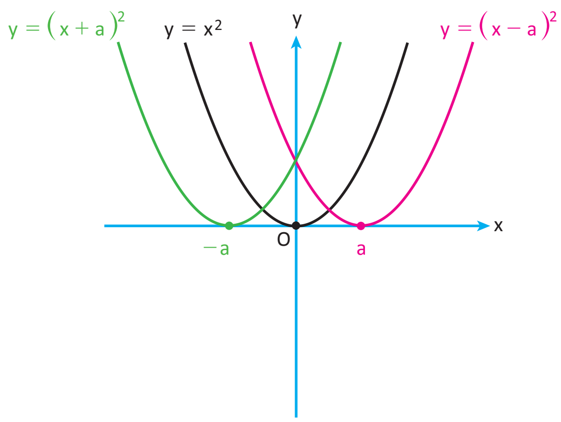


b) y = f (x-a) Dönüşümü

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilsin.

- $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $y = f(x-a)$ fonksiyonunun grafiği, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin x ekseni boyunca pozitif yönde a birim ötelenmesiyle elde edilen grafiktir.
  Bu durumda $A(x, y)$ noktasının x ekseni boyunca pozitif yönde a birim ötelenmiş şekli $A'(x+a, y)$ noktası olur. Şekilde özel olarak $y = x^2$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir (Grafik 3.3.2).

- $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $y = f(x+a)$ fonksiyonunun grafiği, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin x ekseni boyunca negatif yönde a birim ötelenmesiyle elde edilen grafiktir.
  Bu durumda $A(x, y)$ noktasının x ekseni boyunca negatif yönde a birim ötelenmiş şekli $A''(x-a, y)$ noktası olur. Şekilde özel olarak $y = x^2$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir (Grafik 3.3.2).



Grafik 3.3.2

4. ÖRNEK

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x) = x^3$ fonksiyonu için $y = f(x-1)$ ve $y = f(x+3)$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

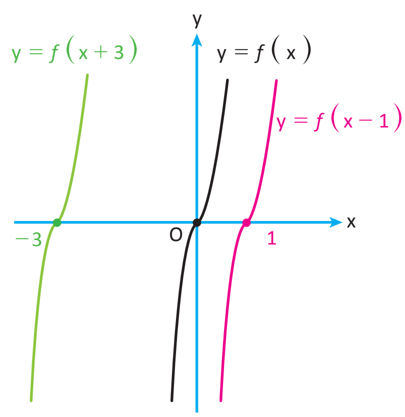
ÇÖZÜM

$y = f(x-1)$ fonksiyonunun grafiği, $y = f(x) = x^3$ fonksiyonunun grafiğinin x ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim ötelenmesiyle oluşan grafiktir.

Sonuç olarak f fonksiyonunun grafiği üzerindeki (x, y) şeklindeki noktalar, $(x+1, y)$ şeklindeki noktalara ötelenirse $y = f(x-1)$ fonksiyonunun grafiği elde edilmiş olur.

$y = f(x+3)$ fonksiyonunun grafiği, $y = f(x) = x^3$ fonksiyonunun grafiğinin x ekseni boyunca negatif yönde 3 birim ötelenmesiyle oluşan grafiktir.

Sonuç olarak f fonksiyonunun grafiği üzerindeki (x, y) şeklindeki noktalar, $(x-3, y)$ şeklindeki noktalara ötelenirse $y = f(x+3)$ fonksiyonunun grafiği elde edilmiş olur.

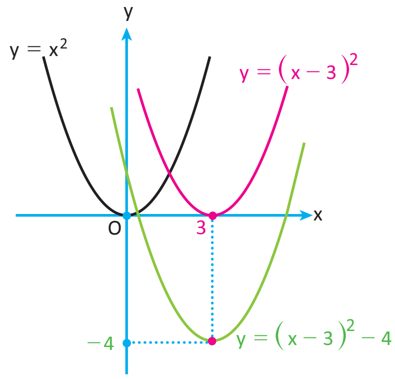


5. ÖRNEK

$f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak $y = (x-3)^2 - 4$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

$y = (x-3)^2 - 4$ fonksiyonun grafiğini çizmek için;



1. Adım

$y = (x-3)^2 - 4$ fonksiyonunda $x - a$ ifadesi $(a = 3)$ bulunduğundan $y = f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiği x ekseni boyunca pozitif yönde 3 birim ötelenerek $y = (x-3)^2$ fonksiyonunun grafiği çizilmiş olur.

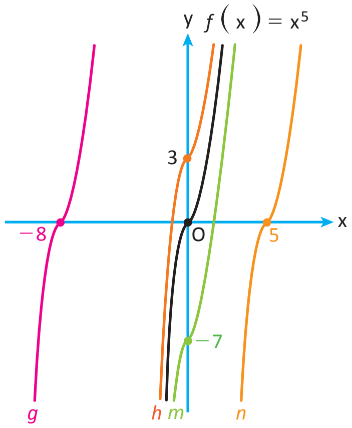
2. Adım

$y = (x-3)^2$ parabolünün grafiği, y ekseni boyunca negatif yönde 4 birim ötelenerek $y = (x-3)^2 - 4$ fonksiyonun grafiği çizilmiş olur.

Yapılan işlemleri takip ederek grafiği inceleyiniz.

Sıra Sizde

SORU



Yanda $f(x) = x^5$ fonksiyonunun grafiği ötelenerek *g, h, m* ve *n* fonksiyonlarının grafikleri çizilmiştir.

$f(x) = x^5$ fonksiyonunun grafiğinin ötelenmesiyle elde edilen grafiklere karşı gelen *g, h, m* ve *n* fonksiyonlarının kurallarını yazınız

ÇÖZÜM

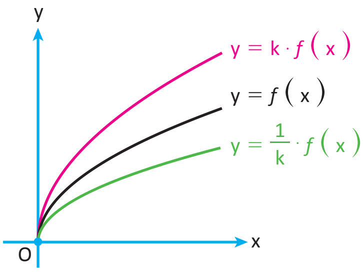
c) $y = k \cdot f(x)$ ve $y = f(kx)$ Dönüşümü

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilsin. $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $|k| > 1$ olmak üzere

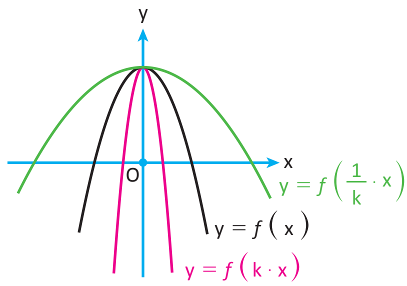
- $y = k \cdot f(x)$ fonksiyonunun grafiği, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin k katı kadar dikey yönde (y ekseni boyunca) genişlemesiyle oluşan grafiktir.
- $y = \frac{1}{k} \cdot f(x)$ fonksiyonunun grafiği, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin k katı kadar dikey yönde (y ekseni boyunca) daralmasıyla oluşan grafiktir.

  Bu durumda $y = f(x)$ fonksiyonu üzerindeki $A(x, y)$ şeklindeki noktalar, $A'(x, ky)$ şeklindeki noktalara dönüştürülerek $y = k \cdot f(x)$ fonksiyonu üzerindeki noktalar elde edilir (Grafik 3.3.3).
- $y = f(k \cdot x)$ fonksiyonunun grafiği, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin k katı kadar yatay yönde (x ekseni boyunca) daralmasıyla oluşan grafiktir.
- $y = f\left(\frac{1}{k} \cdot x\right)$ fonksiyonunun grafiği, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin k katı kadar yatay yönde (x ekseni boyunca) genişlemesiyle oluşan grafiktir.

  Bu durumda $y = f(x)$ fonksiyonu üzerindeki $A(x, y)$ şeklindeki noktalar, $A'(kx, f(kx))$ şeklindeki noktalara dönüştürülerek $y = f(kx)$ fonksiyonu üzerindeki noktalar elde edilir (Grafik 3.3.4).



Grafik 3.3.3



Grafik 3.3.4

6. ÖRNEK

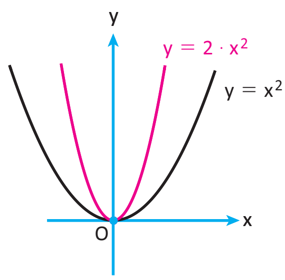
$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a) $g(x) = 2 \cdot f(x)$

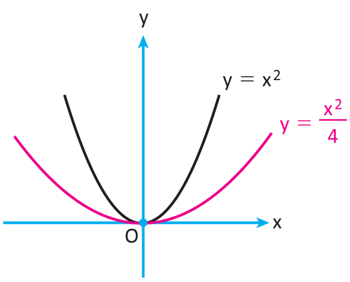
b) $h(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$

ÇÖZÜM

a) $y = f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiği üzerindeki (x, y) şeklindeki noktaların ordinatı 2 katı kadar dikey yönde genişletilir. $(x, 2y)$ şeklindeki noktalar işaretlenir. Böylece $g(x) = 2 \cdot f(x) = 2x^2$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.



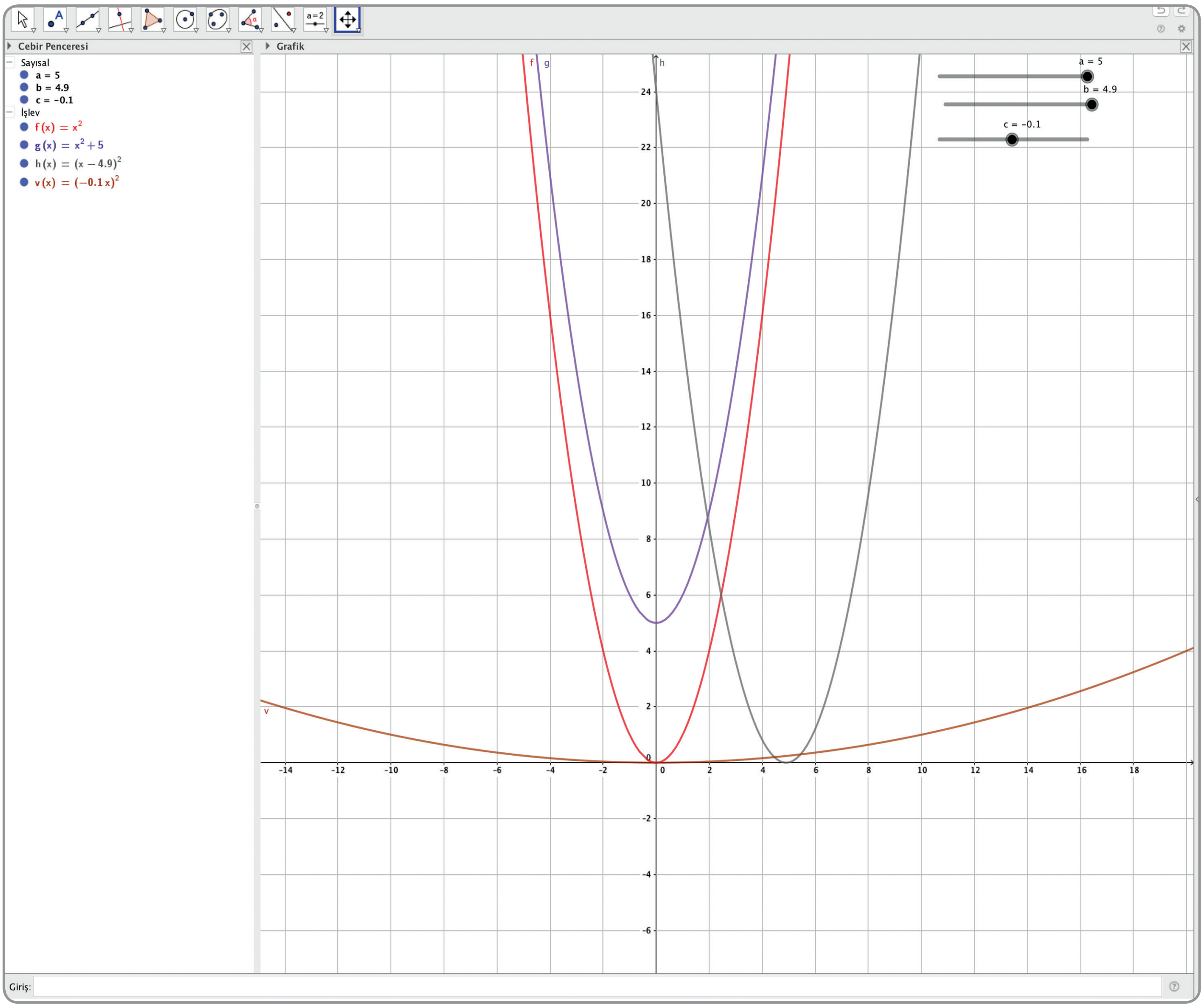
b) $y = f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiği çizildikten sonra bu grafiğin 2 katı kadar yatay yönde genişlemesiyle $h(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4}$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.



Teknoloji Uygulaması

Görsel 3.3.2'de GeoGebra programı kullanılarak bir fonksiyonun dönüşümleri incelenmiştir.

Grafik Çizme	Programı çalıştırdığınızda **Grafik Çizme** kutucuğunu seçiniz.
a=2	**Sürgü** aracını seçiniz. Açılan pencerede a isimli bir sürgü oluşturup minimum değeri -5, maksimum değeri 5 ve artış miktarını 0.1 olarak tanımlayınız. Benzer şekilde b, ve c isimli sürgüleri tanımlayınız.
Giriş:	**Giriş** kısmına x^2 yazıp **Enter** tuşuna basınız. Benzer şekilde x^2+a, (x-b)^2, ve (cx)^2 fonksiyonlarının grafiklerini çizdiriniz.
a = -2 b =	Oluşturduğunuz sürgülerdeki noktaları sağa ve sola hareket ettirerek fonksiyon grafiğindeki değişimleri inceleyiniz.



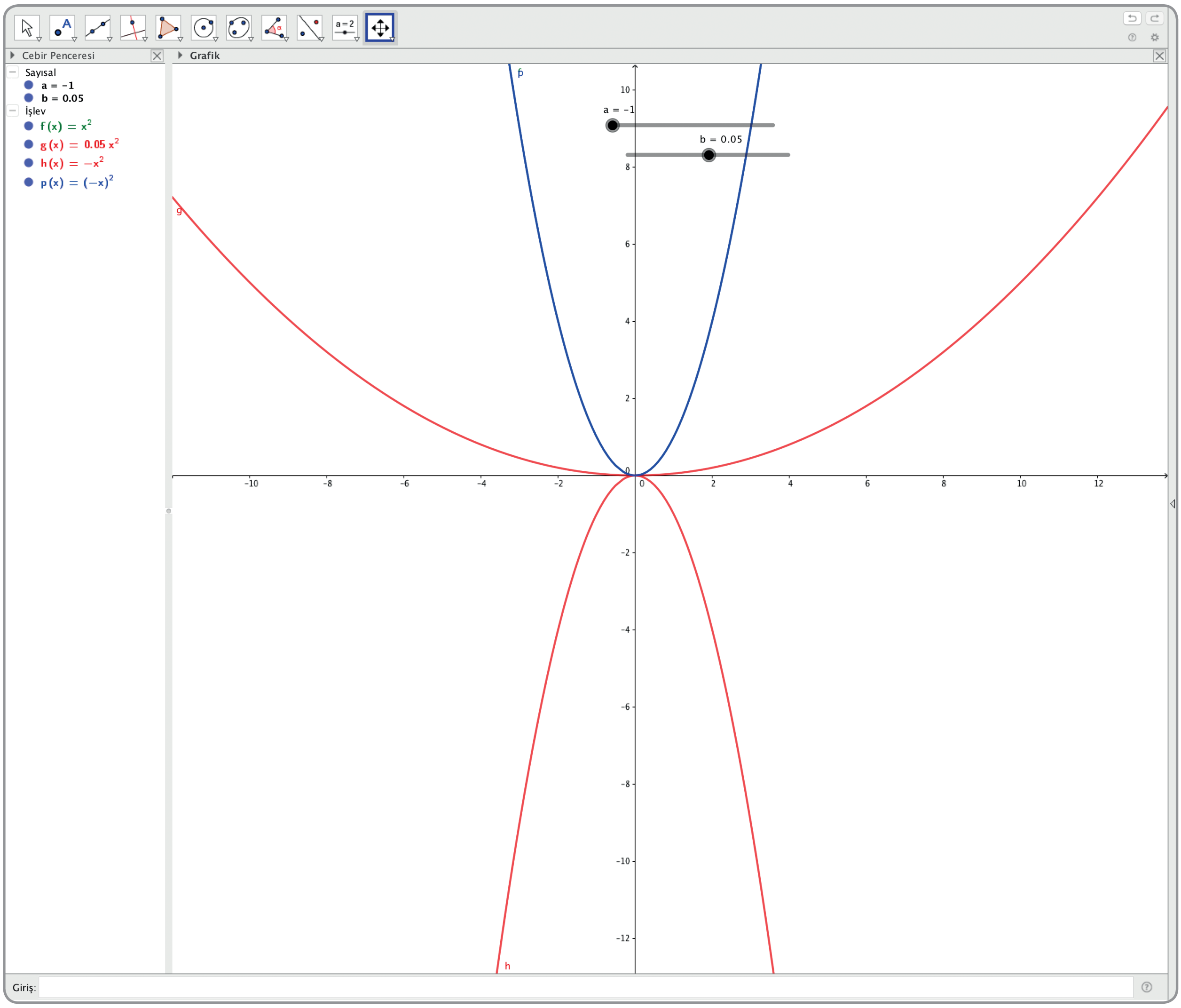
Görsel 3.3.2

GeoGebra uygulamasını yaptığınızda a sürgüsündeki değişim $f(x)$ fonksiyonundan $f(x)+a$ dönüşümü, b sürgüsündeki değişim $f(x-b)$ dönüşümü, c sürgüsündeki değişim $f(cx)$ dönüşümünü gösterdiğine dikkat ediniz.

Teknoloji Uygulaması

Görsel 3.3.3'de GeoGebra programı kullanılarak bir fonksiyonun dönüşümleri incelenmiştir.

Grafik Çizme	Programı çalıştırdığınızda **Grafik Çizme** kutucuğunu seçiniz.
a=2	**Sürgü** aracını seçiniz. Açılan pencerede a isimli bir sürgü oluşturup minimum değeri -1, maksimum değeri 1 ve artış miktarını 2 olarak tanımlayınız. Sürgü aracı yardımıyla b isimli sürgüyü minimum değeri -5, maksimum değeri 5 ve artış miktarını 0.1 olarak tanımlayınız.
Giriş:	**Giriş** kısmına x^2 yazıp **Enter** tuşuna basınız. Benzer şekilde b*(x^2), a*x^2 ve (a*x)^2 fonksiyonlarının grafiklerini çizdiriniz.
İşlev $f(x) = x^2$ $g(x) = 0.05\,x^2$	Ekranın sol tarafındaki **Cebir Penceresi** bölümünden fonksiyonların kenarlarındaki mavi kutucuklardan ilgili fonksiyonun grafiğinin görünürlüğünü değiştirebilirsiniz.
a = -2 b =	Oluşturduğunuz sürgülerdeki noktaları sağa ve sola hareket ettirerek fonksiyon grafiğindeki değişimleri inceleyiniz.



Görsel 3.3.3

GeoGebra uygulamasını yaptığınızda sürgülerdeki değişimlerin fonksiyonlarda karşılık geldiği dönüşümlere dikkat ediniz.

ç) $y = -f(x)$ ve $y = f(-x)$ Dönüşümü

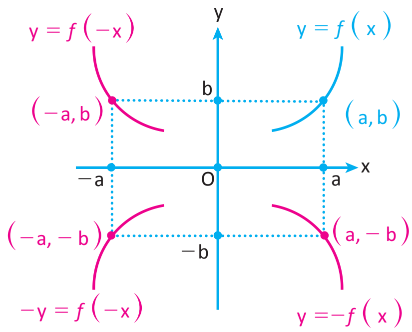
$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilsin.

- Analitik düzlemde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin y eksenine göre simetriği alınarak $y = f(-x)$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.

  Bu durumda $y = f(x)$ fonksiyonu üzerindeki $A(x, y)$ şeklindeki noktalar, $A'(-x, y)$ şeklindeki noktalara dönüştürülerek $y = f(-x)$ fonksiyonu üzerindeki noktalar elde edilir.

- Analitik düzlemde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin x eksenine göre simetriği alınarak $y = -f(x)$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.

  Bu durumda $y = f(x)$ fonksiyonu üzerindeki $A(x, y)$ şeklindeki noktalar, $A''(x, -y)$ şeklindeki noktalara dönüştürülerek $y = -f(x)$ fonksiyonu üzerindeki noktalar elde edilir (Grafik 3.3.5).



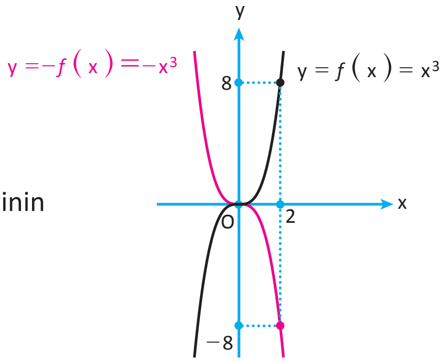
Grafik 3.3.5

7. ÖRNEK

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x) = x^3$ fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak $y = -f(x)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

$y = f(x) = x^3$ fonksiyonunun grafiğinin x eksenine göre simetriğinin alınmasıyla $y = -f(x) = -x^3$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.



Sıra Sizde

SORU

$y = f(x) = (x+2)^2$ fonksiyonu x ekseninin pozitif yönünde 2 birim, y ekseninin pozitif yönünde 5 birim ötelenerek $y = g(x)$ fonksiyonu elde ediliyor.

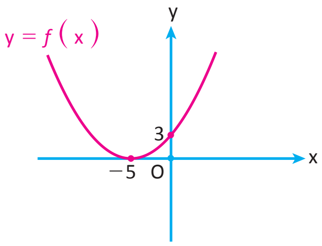
Buna göre

a) $y = -g(x)$ fonksiyonunu yazınız.

b) $y = -g(x)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

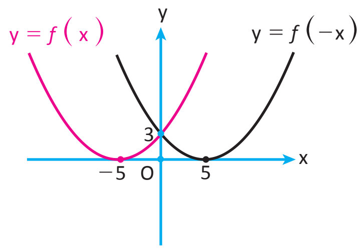
8. ÖRNEK



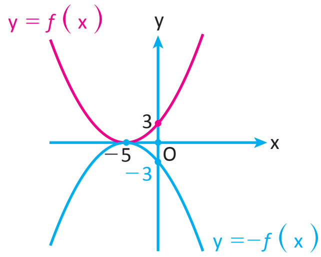
Şekilde grafiği verilen $y=f(x)$ fonksiyonunun $y=f(-x)$ ve $y=-f(x)$ dönüşümlerinin grafiklerini çiziniz.

ÇÖZÜM

$y=f(-x)$ dönüşümünün grafiği, $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin y eksenine göre simetriğidir. Elde edilen grafik yandaki gibidir.



$y=-f(x)$ dönüşümünün grafiği, $y=f(x)$ fonksiyonun grafiğinin x eksenine göre simetriğidir. Elde edilen grafik yandaki gibidir.



d) $y=|f(x)|$ Fonksiyonlarının Grafiği

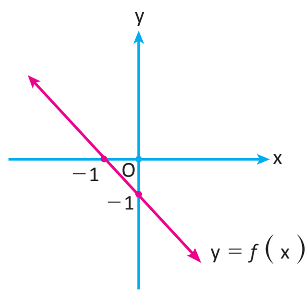
Tanım

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $y=f(x)$ fonksiyonu verilsin.

$$y=|f(x)|=\begin{cases} f(x), & f(x)\geq 0 \text{ ise} \\ -f(x), & f(x)<0 \text{ ise} \end{cases}$$

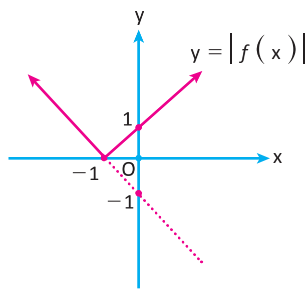
şeklinde tanımlanan fonksiyona f fonksiyonunun **mutlak değer fonksiyonu** denir.

$y=f(x)$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere $y=|f(x)|$ fonksiyonun grafikleri yanda verilmiştir ($y=f(x)$ in grafiği Grafik 3.3.6).



Grafik 3.3.6

$y=f(x)$ fonksiyonunun x ekseninin altında kalan kısımlarının x eksenine göre yansıması alınarak $y=|f(x)|$ fonksiyonunun grafiği elde edilmiştir ($y=|f(x)|$ Grafik 3.3.7).



Grafik 3.3.7

9. ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\ y=f(x)=x^2-4$ fonksiyonu için $y=|f(x)|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

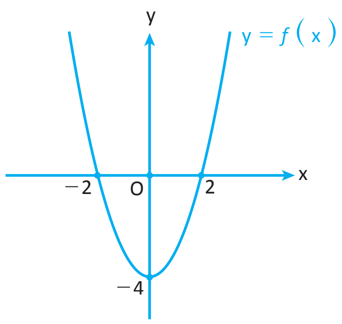
Mutlak değer fonksiyonunun tanımına göre
$f(x)$ fonksiyonunun pozitif değerli olduğu yerde $|f(x)|$ fonksiyonunun grafiği, $f(x)$ fonksiyon grafiği ile aynıdır. $f(x)$ fonksiyonunun negatif değerli olduğu yerde $|f(x)|$ fonksiyonunun grafiği, $f(x)$ fonksiyon grafiğinin x eksenine göre yansımasıdır.
Bu durumda $|f(x)|$ fonksiyonunun grafiği iki adımda çizilir.

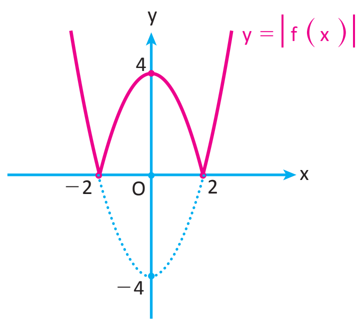
1. Adım

$y=f(x)=x^2-4$ fonksiyonunun grafiği çizilir.

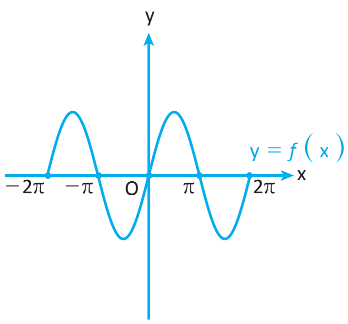
2. Adım

x ekseninin üst kısmında kalan eğri aynen alınır. x ekseninin altında kalan kısmın x eksenine göre yansıması alınırsa $y=|f(x)|=|x^2-4|$ fonksiyonunun grafiği çizilmiş olur.





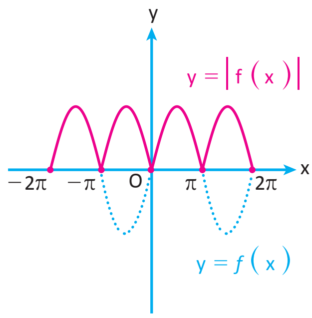
10. ÖRNEK



Yanda $[-2\pi, 2\pi]$ aralığında $y=f(x)=\sin x$ fonksiyonun grafiği verilmiştir.
Buna göre $y=|f(x)|$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

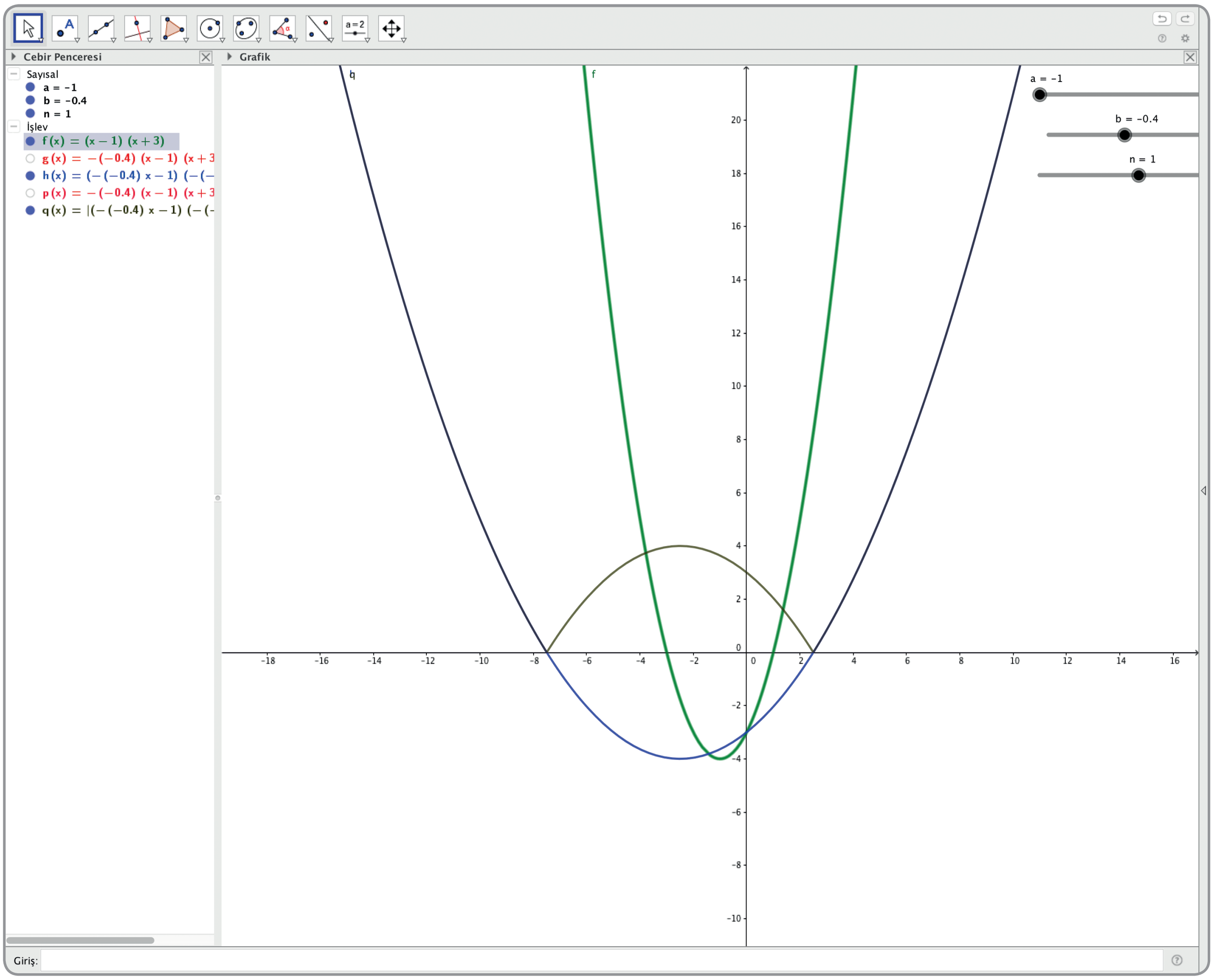
Verilen grafiğin x ekseninin altında kalan kısmının x eksenine göre yansıması alınırsa $y=|f(x)|=|\sin x|$ fonksiyonunun grafiği çizilmiş olur.



Teknoloji Uygulaması

Görsel 3.3.4'de GeoGebra programı kullanılarak bir fonksiyonun dönüşümleri incelenmiştir.

Grafik Çizme	Programı çalıştırdığınızda **Grafik Çizme** kutucuğunu seçiniz.
a = 2	**Sürgü** aracını seçiniz. Açılan pencerede a isimli bir sürgü oluşturup minimum değeri -1, maksimum değeri 1 ve artış miktarını 2 olarak tanımlayınız. Sürgü aracı yardımıyla b isimli sürgüyü minimum değeri -5, maksimum değeri 5 ve artış miktarını 0.1 olarak tanımlayınız. n isimli sürgüyü minimum değeri -5, maksimum değeri 5 ve artış miktarını 1 olarak tanımlayınız.
Giriş:	**Giriş** kısmına (x - 1)*(x + 3)^n yazıp **Enter** tuşuna basınız. Benzer şekilde a*b*f ve mutlak değer fonksiyonunun grafiği için de abs(f(a*b*x)) grafiklerini çizdiriniz.
İşlev f(x) = (x − 1) (x g(x) = −(−0.4)	Ekranın sol tarafındaki **Cebir Penceresi** bölümünden fonksiyonların kenarlarındaki mavi kutucuklardan ilgili fonksiyonun grafiğinin görünürlüğünü değiştirebilirsiniz.
a = -2 b =	Oluşturduğunuz sürgülerdeki noktaları sağa ve sola hareket ettirerek fonksiyon grafiğindeki değişimleri inceleyiniz.



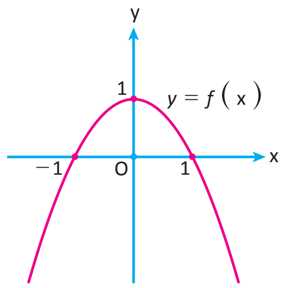
Görsel 3.3.4

GeoGebra uygulamasını yaptığınızda sürgülerdeki değişimlerin fonksiyonlarda karşılık geldiği dönüşümlere dikkat ediniz.

ALIŞTIRMALAR-3

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, y=f(x)=x^2$ grafiğinin x ekseninin negatif yönünde 2 birim, y ekseninin pozitif yönünde 7 birim ötelenmesiyle oluşan fonksiyonun kuralını yazınız.

2.



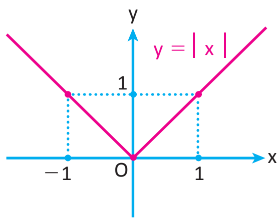
Yandaki şekilde $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre

a) $y=-f(x)$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.

b) $y=-f(x+1)+4$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

c) $y=-f(-x)+1$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.

3.



Yandaki şekilde $y=|x|$ fonksiyonun grafiği verilmiştir.

Buna göre $y=-f(3x)+2$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.

4. Aşağıdaki fonksiyonların y eksenine veya başlangıç noktasına(orijine) göre simetrik olup olmadığını bulunuz.

a) $f_1(x)=5x^4+3x^2-9$

b) $f_2(x)=6x^2+4$

c) $f_3(x)=x^5+7x^3-x$

ç) $f_4(x)=2x^3+11x$

5. $f, g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ fonksiyonları için f fonksiyonu y eksenine göre simetrik olduğuna göre $g(x)=-x^3\cdot f(x)$ fonksiyonunun orijine göre simetrik olduğunu gösteriniz.

6. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği orijine göre simetriktir.

$g(x)=(x+2)^2\cdot f(x+4)+2x-8$

fonksiyonu için $g(-6)=28$ olduğuna göre $f(2)$ değerini bulunuz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A) Aşağıdaki 1-5. sorularda cümlelerde boş bırakılan yerlere uygun sözcük ya da değerleri yazınız.

1. $y = f(x) = ax^2, (a \neq 0)$ parabolünün tepe noktası .... olur.
2. $y = f(x)$ ile $y = -f(x)$ fonksiyonları .... göre simetriktir.
3. $y = f(x)$ ile $y = f(-x)$ fonksiyonları .... göre simetriktir.
4. $f(-x) = f(x)$ ise $y = f(x)$ .... fonksiyondur.
5. $f(x) = ax^2$ fonksiyonunda $|a|$ küçüldükçe parabolün kolları ....

B) Aşağıda numaralar ile verilen ifadeleri, harf ile verilen ifadelerle eşleştiriniz.

6.

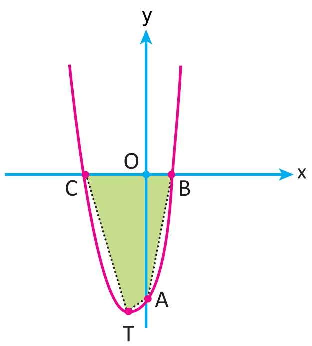
$f_1(x) = 7x^6 + 3x^2 - 5$ fonksiyonu	1.
$f_2(x) = 4 \cdot (x+2) \cdot (x-6)$ fonksiyonunun tepe noktası	2.
$f_3(x) = -2 \cdot (x-4)^2 + 8$ fonksiyonunun tepe noktası	3.
$f_4(x) = x^5 - 7x^3$ fonksiyonu	4.

a)	$(4, 8)$
b)	Tek Fonksiyon
c)	Çift Fonksiyon
ç)	$(2, -64)$
d)	$(4, -16)$
e)	$(-4, -8)$

C) Aşağıdaki 7-10. soruların çözümlerini yapınız.

7. $y = (m+3)x + m - 2$ doğrusu $y = x^2 + (2m+1)x + 2m - 1$ parabolüne teğet olduğuna göre m nin alabileceği değerler toplamını bulunuz.

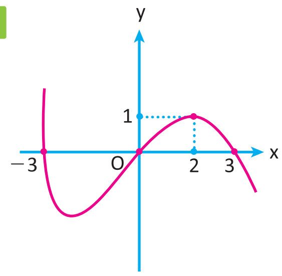
8.



Tepe noktası $T(-4, -32)$ olan ve y eksenini $(0, -24)$ noktasında kesen $y = f(x)$ parabolünün grafiği şekilde verilmiştir.

Buna göre TABC dörtgeninin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

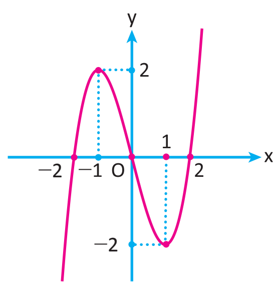
9.



Şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre $y = -f(x)$ fonksiyonunun grafiğini soruda verilen grafiğin üzerinde çiziniz.

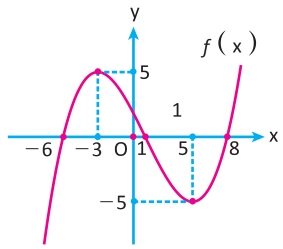
10.



Şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre $y = 3 \cdot f(x)$ fonksiyonunun grafiğini soruda verilen grafiğin üzerinde çiziniz.

Ç) Aşağıdaki 11-26. çoktan seçmeli soruları okuyunuz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

11. 

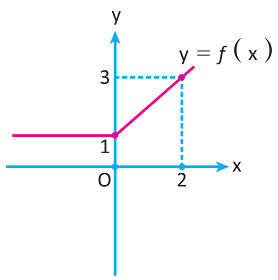
Şekilde $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre $y = -f(x)$ fonksiyonu aşağıdaki aralıklardan hangisinde artandır?

A) $(-\infty, -3)$ B) $(1, 5)$ C) $(5, \infty)$
D) $(-6, -3)$ E) $(6, 9)$

12. $f(x) = ax^2 + a^3 - 106$ fonksiyonunun $[-2, 3]$ aralığındaki ortalama değişim hızı -5 birim olduğuna göre a değeri aşağıdakilerden hangisidir?

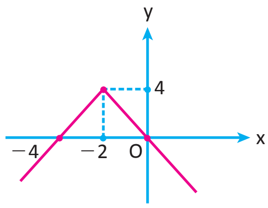
A) -9 B) -7 C) -5
D) 0 E) 5

13. 

Şekilde $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre $f(x) + m$ fonksiyonunun pozitif olduğu en geniş aralık $(5, \infty)$ olduğuna göre m değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) -7 B) -6 C) -5
D) -4 E) -3

14. 

Şekilde $y = f(x+2)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre $f(0) + f(2)$ toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) -4 B) -2 C) 0
D) 2 E) 4

15. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)$ fonksiyonu y eksenine göre simetriktir ve $f(3) = 6$ veriliyor.
$g(x) = 4 \cdot f(-x) + 3 \cdot x^2$ olduğuna göre $g(3)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 22 B) 25 C) 27
D) 51 E) 64

16. $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y = g(x)$ tek fonksiyon ve $g(-7) = 5$ tir.
$f(x \cdot g(-x)) = x^2 + 5 \cdot g(x) + 8$ olduğuna göre $f(35)$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 30 B) 32 C) 34
D) 36 E) 38

17. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)$ fonksiyonu y eksenine göre simetrik olduğuna göre aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi ne y eksenine ne de orijine göre simetrik olmayan fonksiyondur.

A) $g_1(x) = x^3 \cdot f(x) + 2x$
B) $g_2(x) = x^4 + f(x)$
C) $g_3(x) = x^5 + f(x)$
D) $g_4(x) = 2x^2 + f(x)$
E) $g_5(x) = x^3 + x \cdot f(x)$

18. $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun grafiği verilmiş olsun.
Bu durumda $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2$ fonksiyonunun grafiğini çizmek için aşağıdaki işlemlerden hangisi yapılmalıdır?

A) Grafik x ekseninin pozitif yönünde $\frac{\pi}{3}$ birim, y ekseninin pozitif yönünde 2 birim ötelenmelidir.
B) Grafik x ekseninin negatif yönünde $\frac{\pi}{3}$ birim, y ekseninin pozitif yönünde 2 birim ötelenmelidir.
C) Grafik x ekseninin pozitif yönünde $\frac{\pi}{3}$ birim, y ekseninin negatif yönünde 2 birim ötelenmelidir.
D) Grafik x ekseninin negatif yönünde $\frac{\pi}{3}$ birim, y ekseninin negatif yönünde 2 birim ötelenmelidir.
E) Grafik y ekseninin negatif yönünde $\frac{\pi}{3}$ birim, x ekseninin pozitif yönünde 2 birim ötelenmelidir.

19. $f(x) = x^2 - 3x + m - 2$ parabolü x eksenini kesmediğine göre m nin alabileceği <u>en küçük</u> tam sayı değeri kaçtır?

A) -3 B) -2 C) 0 D) 5 E) 7

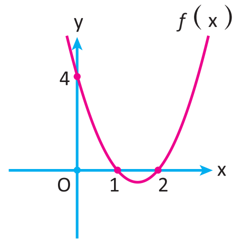
20. $f(x) = (2 - m)x^2 - (3m - 1)x + m + 1$ fonksiyonunun grafiği x eksenine teğet olduğuna göre m nin alabileceği değerler çarpımı kaçtır?

A) $-\frac{10}{13}$ B) $-\frac{7}{13}$ C) $\frac{7}{10}$ D) $\frac{7}{13}$ E) $\frac{10}{13}$

21. $f(x) = (m + 1)x^2 - x - 9$ parabolün grafiği x eksenini iki farklı noktada kestiğine göre m nin alabileceği <u>en büyük</u> pozitif tam sayı değeri kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

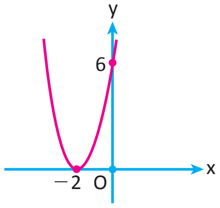
22.



Yanda grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3x^2 - 7x + 4$
B) $x^2 - 5x + 4$
C) $4x^2 - 8x + 4$
D) $5x^2 - 9x + 4$
E) $2x^2 - 6x + 4$

23. Aşağıda grafiği verilen tepe noktası $(-2,0)$ olan ve $(0,6)$ noktasından geçen fonksiyonun kuralı aşağıdakilerden hangisidir?



A) $y=\frac{3}{2}(x-2)^2$

B) $y=\frac{3}{2}(x+2)^2$

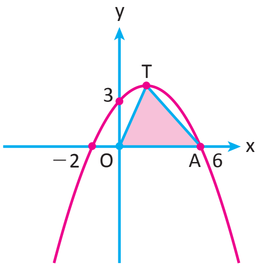
C) $y=\frac{2}{3}(x+2)^2$

D) $y=\frac{1}{3}(x+2)^2$

E) $y=3(x+2)^2$

24. Aşağıda x eksenini $A(6,0)$ ve $(-2,0)$ noktasında, y eksenini $(0,3)$ noktasında kesen ve tepe noktası T olan parabolün grafiği verilmiştir.

Buna göre $A(\widehat{TOA})$ kaç birimkaredir?



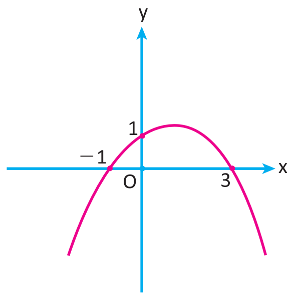
A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 18

25. $y=(2m-1)x^2+2(m+1)x+3$ parabolü ile $y=(m-3)x-2$ doğrusunun kesişme noktaları K ve M noktalarıdır.

$[KM]$ nın orta noktasının apsisi -3 olduğuna göre parabolün tepe noktasının doğruya olan uzaklığı kaç birimdir?

A) $2\sqrt{5}$ B) $3\sqrt{5}$ C) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ D) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ E) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

26. Şekilde x eksenini -1 ve 3, y eksenini 1 noktasında kesen parabol $(8,k)$ noktasından geçtiğine göre k değeri kaçtır?



A) -15 B) -13 C) -12 D) -11 E) -10

D) 27-29. soruları aşağıda verilen ortak metne göre cevaplandırınız.

Bir otomobil fabrikasının günlük üretim miktarı x adet, satıştan elde edilen kâr miktarı y (milyon TL) olmak üzere aralarındaki ilişki

$y=-\frac{3}{2000}(x^2-1600x+480\,000)$ fonksiyonu ile modelleniyor.

Buna göre

27. Bu fabrikanın en fazla kâr elde edebilmesi için günlük kaç otomobil üretmesi gerektiğini bulunuz.

28. Bu fabrikanın ayda en fazla kaç TL kâr elde edebileceğini bulunuz (1 ay 30 gün alınacaktır).

29. Bu fabrikanın zarar etmemesi için günlük en az kaç otomobil üretmesi gerektiğini bulunuz.

30. Bu fabrikanın niçin belli bir üretimden sonra kâra geçtiğini ve belli bir üretimden sonra kârın azaldığını veya zarara geçtiğini yorumlayınız.

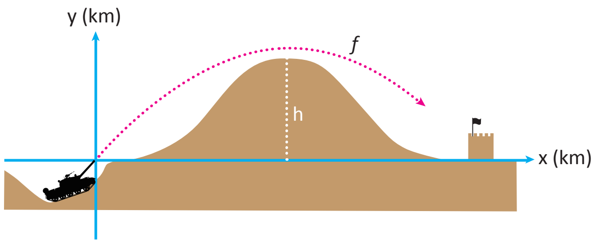
ÇÖZÜM

E) 30 ve 31. soruları aşağıda verilen ortak şekle ve metne göre cevaplandırınız.

Şekildeki tankın attığı top mermisi parabol şeklinde bir yay çizerek hedefe ilerliyor.

Top mermisinin yatay mesafede aldığı yol x (km), düşey mesafede aldığı yol y (km) olmak üzere bu parabolün denklemi

$y=f(x)=-\frac{x^2}{450}+\frac{2x}{15}$ şeklinde modelleniyor.



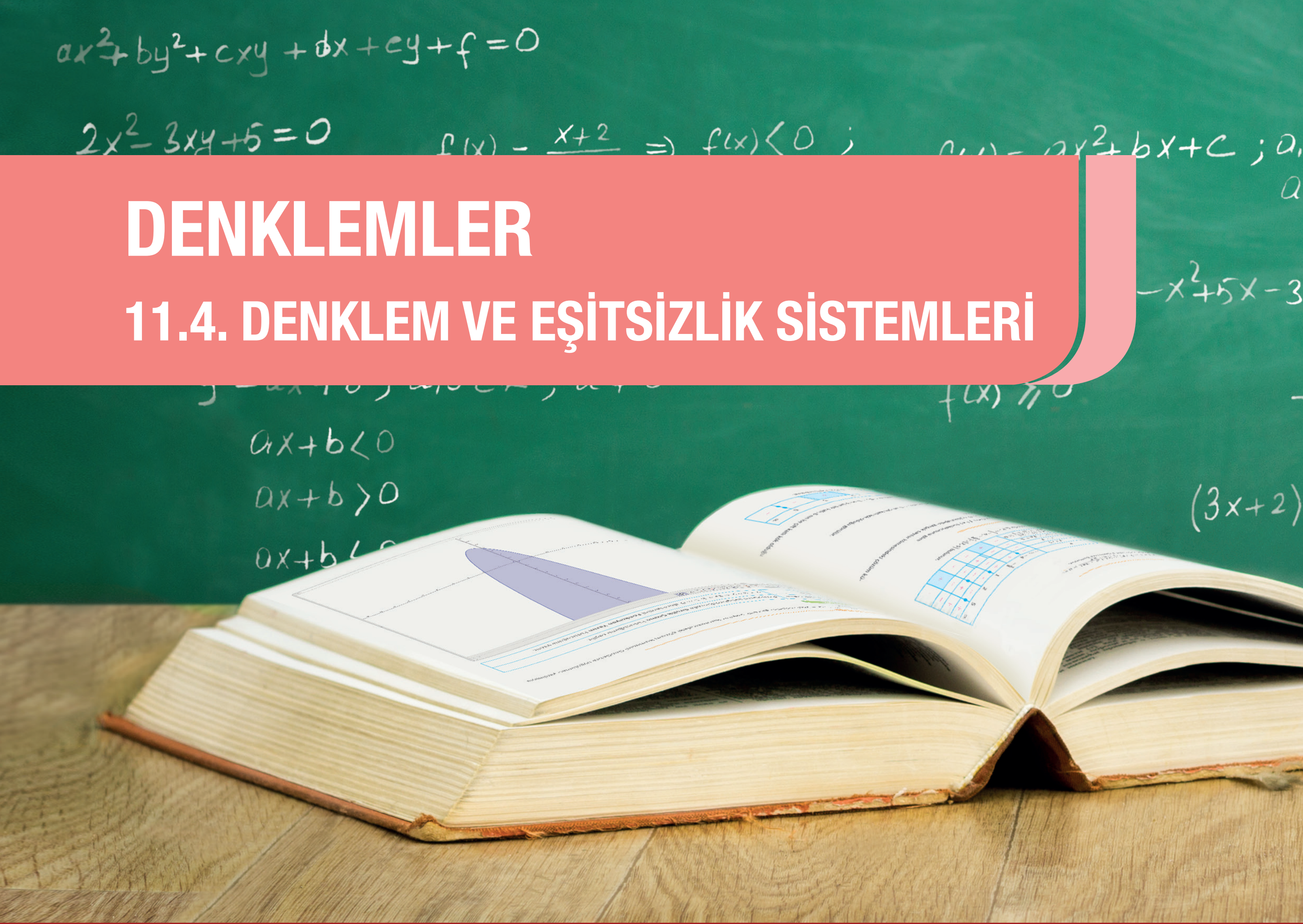
30. Tankın attığı top mermisi kaç km uzağa düşer?

31. Top mermisinin hedefi vurulabilmesi için <u>en çok</u> kaç metre yüksekliğindeki bir tepeyi aşması gerektiğini bulunuz.

ÇÖZÜM

DENKLEMLER

11.4. DENKLEM VE EŞİTSİZLİK SİSTEMLERİ



Neler Öğreneceksiniz?

11.4.1. İKİNCİ DERECEDEN İKİ BİLİNMEYENLİ DENKLEM SİSTEMLERİ

İkinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem Sistemleri

11.4.2. İKİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ EŞİTSİZLİKLER VE EŞİTSİZLİK SİSTEMLERİ

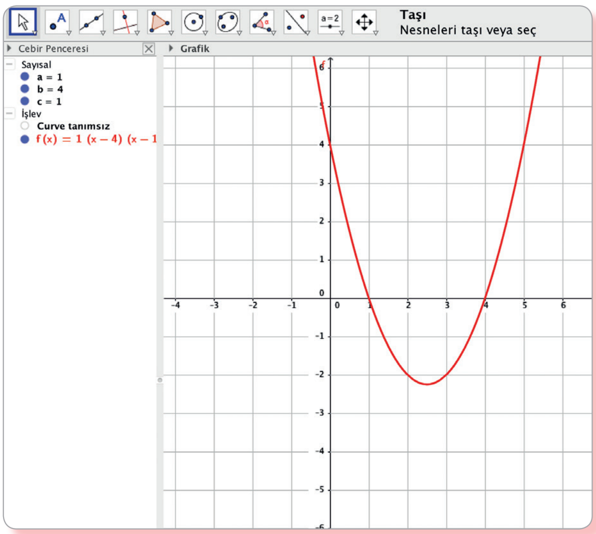
1. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler
2. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlik Sistemleri

Denklem Ve Eşitsizlik Sistemlerinin Kullanım Alanları

- Denklem ve eşitsizlik sistemleri, günlük hayatta karşılaşılan birçok problemin çözümünde kullanılır.
- Matematik, mühendislik ve ekonomi alanlarına ait problemlerin çözümü, verilerin analizi ve yorumlamasında kullanılır.
- Tek yönlü trafik akışını modellerken, iş ekonomisi analizlerinde, bir ürünün miktarını ve fiyatını veren iki değişken arasındaki ilişkiyi gösterirken kullanılır.
- Mekanik fizik problemleri ile hız, zaman, yörünge problemlerinin çözümünde kullanılır.

Hazırlık Çalışmaları

1. Birinci dereceden fonksiyonun grafiği çizilirken hangi işlemleri yaparsınız? Grafik çizildiğinde fonksiyonun hangi aralıklarda pozitif, hangi aralıklarda negatif değerler aldığını düşününüz.
2. $3x^2 - 2x - 8 = 0$ ikinci dereceden denkleminin çözüm kümesini bulunuz.
3. İkinci dereceden denklemlerde kökler toplamı ve kökler çarpımını nasıl hesaplarsınız?
4. İkinci dereceden fonksiyonun grafiği çizilirken hangi işlemleri yaparsınız?
5. Yandaki grafiği inceleyerek ikinci dereceden fonksiyonun hangi aralıklarda pozitif, hangi aralıklarda negatif değerler aldığını ve bu aralıkların ikinci dereceden denklemin diskriminant durumlarına göre nasıl değiştiğini düşününüz.



11.4.1. İKİNCİ DERECEDEN İKİ BİLİNMEYENLİ DENKLEM SİSTEMLERİ

İkinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem Sistemleri

Tanım

$a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ ve a, b, c sayılarından en az biri "0" dan farklı olmak üzere x ve y bilinmeyenlerini içeren $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ biçimindeki denklemlere **ikinci dereceden iki bilinmeyenli denklem** denir.

En az bir tanesi ikinci dereceden iki bilinmeyenli denklem olan iki ya da daha fazla denklemden oluşan sisteme **ikinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi** denir.

İkinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemleri çözülürken yerine koyma, yok etme gibi yöntemler kullanılır.

Verilen denklemlerin analitik düzlemdeki (varsa) kesişme noktaları bu denklem sisteminin çözüm kümesinin elemanlarını verir.

1. ÖRNEK

$$x^2 + x \cdot y + y^2 + x - 6 = 0$$
$$x - y = 2$$

denklem sisteminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x - y = 2 \Rightarrow y = x - 2$ olur. Bulunan y değeri, diğer denklemde yerine yazılırsa

$$x^2 + x \cdot (x - 2) + (x - 2)^2 + x - 6 = 0$$
$$x^2 + x^2 - 2x + x^2 - 4x + 4 + x - 6 = 0$$

$3x^2 - 5x - 2 = 0$ elde edilir.

Denklem çarpanlarına ayrılırsa

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$

$(3x + 1) \cdot (x - 2) = 0$ olur. Buradan

$3x + 1 = 0$ veya $x - 2 = 0$

$3x = -1$ veya $x_2 = 2$

$x_1 = -\frac{1}{3}$ veya $x_2 = 2$ bulunur.

Bulunan değerler sistemin herhangi bir denkleminde yerine yazılırsa

$x_1 = -\frac{1}{3}$ için $y_1 = -\frac{1}{3} - 2 = -\frac{7}{3}$ ve

$x_2 = 2$ için $y_2 = 2 - 2 = 0$ elde edilir.

Buna göre sistemin çözüm kümesi

$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} = \left\{\left(-\frac{1}{3}, -\frac{7}{3}\right), (2, 0)\right\}$ bulunur.

2. ÖRNEK

$$x^2+y^2-4x+3=0$$
$$y^2+x-1=0$$

denklem sisteminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen iki denklemin ortak çözümü yapılırsa

$$\begin{array}{rl} & x^2+y^2-4x+3=0 \\ - & \underline{\quad y^2+x-1=0} \end{array}$$

$x^2-5x+4=0$ elde edilir. Denklem çarpanlarına ayrılırsa

$$x^2-5x+4=0$$
$$(x-1)\cdot(x-4)=0$$

$x-1=0$ veya $x-4=0$

$x_1=1$ veya $x_2=4$ olur.

Bulunan değerler sistemin herhangi bir denkleminde yerine yazılırsa

$x_1=1$ için $y^2+1-1=0$

$$y^2=0$$
$$y=0$$

$x_2=4$ için $y^2+4-1=0$

$$y^2+3=0$$
$$y^2=-3 \text{ olur.}$$

Buradan $y\notin\mathbb{R}$ olur. Buna göre sistemin çözüm kümesi $\{(x_1,y_1)\}=\{(1,0)\}$ bulunur.

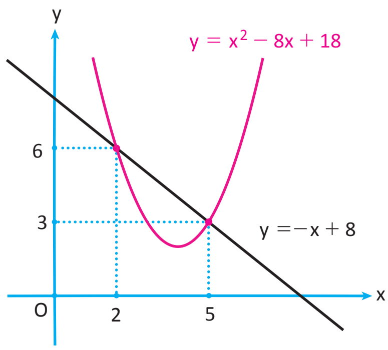
3. ÖRNEK

$$y-x^2+8x-18=0$$
$$x+y-8=0$$

denklem sisteminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini grafik yardımıyla bulunuz.

ÇÖZÜM

$y=x^2-8x+18$ ve $y=-x+8$ fonksiyonlarının grafikleri önceki ünitelerdeki bilgilerle yandaki gibi çizilmiştir. Buradan kesişme noktaları $(5,3)$ ve $(2,6)$ olduğu için denklem sisteminin çözüm kümesi $\{(5,3),(2,6)\}$ bulunur.

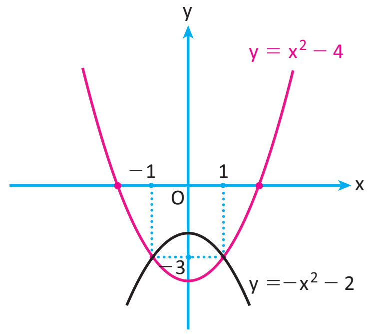


4. ÖRNEK

$y - x^2 + 4 = 0$

$y + x^2 + 2 = 0$

denklem sisteminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini grafik yardımıyla bulunuz.



ÇÖZÜM

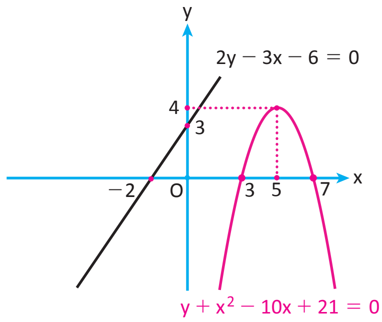
$y = x^2 - 4$ ve $y = -x^2 - 2$ fonksiyonlarının grafikleri önceki ünite bilgileriyle yandaki gibi çizilmiştir. Buradan kesişme noktaları $(-1, -3)$ ve $(1, -3)$ olduğu için denklem sisteminin çözüm kümesi $\{(-1, -3), (1, -3)\}$ bulunur.

5. ÖRNEK

$y + x^2 - 10x + 21 = 0$

$2y - 3x - 6 = 0$

denklem sisteminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini grafik yardımıyla bulunuz.



ÇÖZÜM

$y = -x^2 + 10x - 21$ ve $y = \frac{3}{2}x + 3$ fonksiyonlarının grafikleri önceki ünitelerdeki bilgilerle yandaki gibi çizilmiştir. Grafiklerin kesim noktası olmadığı için denklem sisteminin çözüm kümesi $\emptyset$ olur.

6. ÖRNEK

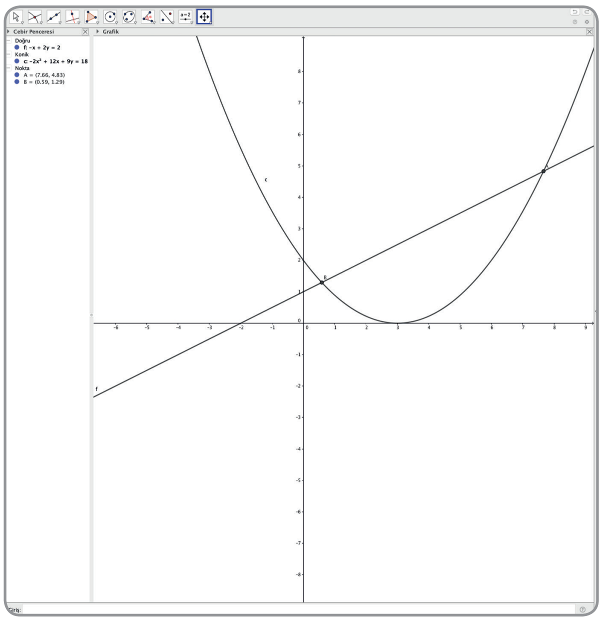
$9y - 2x^2 + 12x - 18 = 0$

$2y - x - 2 = 0$

denklem sisteminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini GeoGebra programı yardımıyla bulunuz.

ÇÖZÜM

Grafik Çizme	Programı çalıştırınız. **Grafik Çizme** kutucuğunu seçiniz.
Giriş:	9y − 2x ^ 2 + 12x − 18 = 0 denklemini **Giriş** kutucuğuna yazınız ve **Enter** tuşuna basınız.
Giriş:	$2y - x - 2 = 0$ denklemini **Giriş** kutucuğuna yazınız ve **Enter** tuşuna basınız.
	Kesiştir aracını seçiniz. Çizilen doğru ve parabolün kesim noktalarını belirleyiniz.



Grafik incelendiğinde doğru ile parabolün $A(7.66, 4.83)$ ve $B(0.59, 1.29)$ noktalarında kesiştikleri görülür.

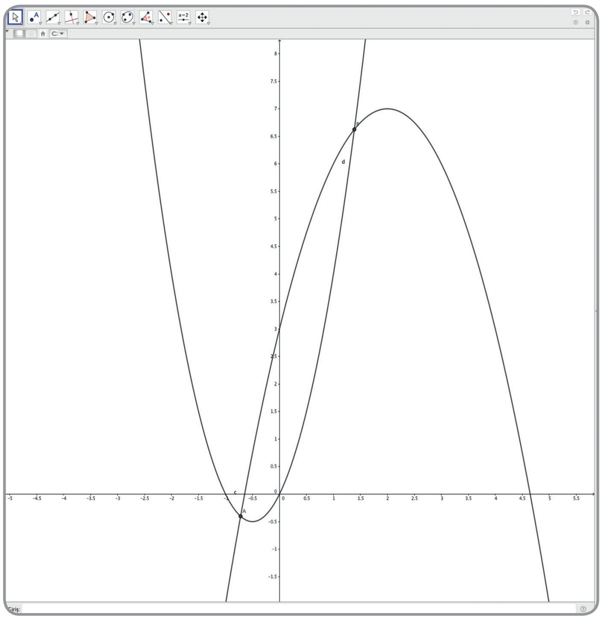
7. ÖRNEK

$y + x^2 - 4x - 3 = 0$
$y - 2x^2 - 2x = 0$
denklem sisteminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini GeoGebra programı yardımıyla bulunuz.

ÇÖZÜM

Grafik Çizme	Programı çalıştırınız. **Grafik Çizme** kutucuğunu seçiniz.
Giriş:	$y + x \wedge 2 - 4x - 3 = 0$ denklemini **Giriş** kutucuğuna yazınız ve **Enter** tuşuna basınız.
Giriş:	$y - 2x \wedge 2 - 2x = 0$ denklemini **Giriş** kutucuğuna yazınız ve **Enter** tuşuna basınız.
	**Kesiştir** aracını seçiniz. Çizilen doğru ve parabolün kesim noktalarını belirleyiniz.

Grafik incelendiğinde iki parabolün $A(-0.72, -0.4)$ ve $B(1.39, 6.62)$ noktalarında kesiştikleri görülür.



ALIŞTIRMALAR-1

1. $x^2 - x \cdot y + y^2 + 2x - 7 = 0$
$x - y = 1$
denklem sisteminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

2. $x^2 + y^2 + 4x - 4 = 0$
$y^2 - 2x + 3 = 0$
denklem sisteminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

3. $x^2 + y^2 + x - y + 3 = 0$
$x^2 - y^2 + 3x + y - 1 = 0$
denklem sisteminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

4. $y - 2x^2 - 8x - 6 = 0$
$y - 4x^2 + 7x - 10 = 0$
denklem sisteminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini GeoGebra programı yardımıyla bulunuz.

5. $9y - 2x^2 + 12x - 18 = 0$
$2y - x - 2 = 0$
denklem sisteminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini GeoGebra programı yardımıyla bulunuz.

6. $y = x^2 - x + 4$
$y = -x + 4$
denklem sisteminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini GeoGebra programı yardımıyla bulunuz.

11.4.2. İKİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ EŞİTSİZLİKLER VE EŞİTSİZLİK SİSTEMLERİ

1. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

$a, b, \in \mathbb{R}, a \neq 0$ ve x bilinmeyen olmak üzere $f(x) = ax + b$ olsun.

$f(x) > 0,\ f(x) \geq 0,\ f(x) < 0,\ f(x) \leq 0$ biçimindeki açık önermelerin her birine birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik, eşitsizliği sağlayan x gerçek sayılarının kümesine eşitsizliğin çözüm kümesi denildiğini 9. sınıfta öğrenmiştiniz.

f (x) = a x + b Fonksiyonun İşaretinin İncelenmesi

$a > 0$ için $f(x) = ax + b > 0$
$$ax > -b$$
$$x > -\frac{b}{a}$$

$f(x) = ax + b < 0$
$$ax < -b$$
$$x < -\frac{b}{a}$$ olur.

Buna göre işaret tablosu aşağıdaki gibi olur.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	∞
$y = ax + b$	$-$	0	$+$

$a < 0$ için $f(x) = ax + b < 0$
$$ax < -b$$
$$x > -\frac{b}{a}$$
$$x > -\frac{b}{a}$$

$f(x) = ax + b > 0$
$$ax > -b$$
$$x < -\frac{b}{a}$$ olur.

Buna göre işaret tablosu aşağıdaki gibi olur.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	∞
$y = ax + b$	$+$	0	$-$

Bulunan tablolar tek tablo olarak birleştirilirse

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	∞
$y = ax + b$	a nın işareti ile zıt	0	a nın işareti ile aynı

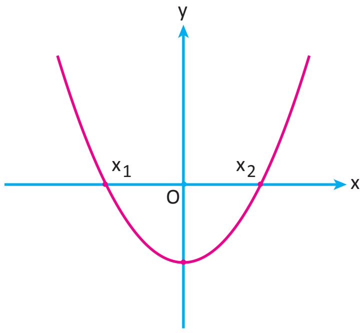
Tanım

$a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ ve x bilinmeyen olmak üzere $f(x) = ax^2 + bx + c$ olsun.

$f(x) > 0,\ f(x) \geq 0,\ f(x) < 0,\ f(x) \leq 0$ biçimindeki açık önermelerinin her birine **ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik** denir. Eşitsizliği sağlayan x gerçek sayılarının kümesine **eşitsizliğin çözüm kümesi** denir.

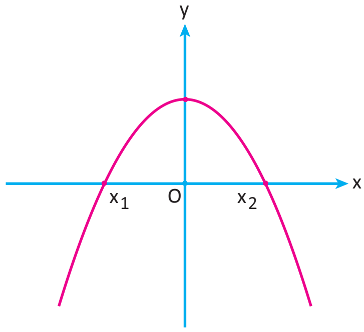
$f(x) = ax^2 + bx + c$ Fonksiyonunun İşaret İncelemesi

1. $\Delta > 0$ ise denklemin $x_1 < x_2$ gibi iki farklı gerçek kökü vardır.
   Bu durumda aşağıdaki Grafik 4.2.1 ve Grafik 4.2.2 incelenirse
   $a > 0$ için $x < x_1$ ve $x > x_2$ iken $f(x) > 0$ ve $x_1 < x < x_2$ iken $f(x) < 0$,
   $a < 0$ için $x < x_1$ ve $x > x_2$ iken $f(x) < 0$ ve $x_1 < x < x_2$ iken $f(x) > 0$ olur.



$a > 0$

Grafik 4.2.1



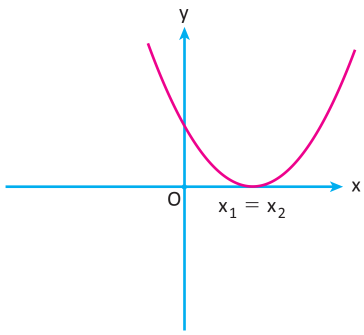
$a < 0$

Grafik 4.2.2

Buna göre aşağıdaki tablo elde edilir.

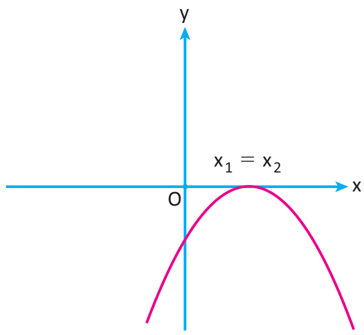
x	$-\infty$	x_1		x_2		∞
$y = ax^2 + bx + c$	a nın işareti ile aynı	0	a nın işareti ile zıt	0	a nın işareti ile aynı	

2. $\Delta = 0$ ise denklemin birbirine eşit iki gerçek kökü vardır.
   Bu durumda aşağıdaki Grafik 4.2.3 ve Grafik 4.2.4 incelenirse
   $a > 0$ için $x < x_1$ ve $x > x_2$ iken $f(x) > 0$,
   $a < 0$ için $x < x_1$ ve $x > x_2$ iken $f(x) < 0$ olur.



$a > 0$

Grafik 4.2.3



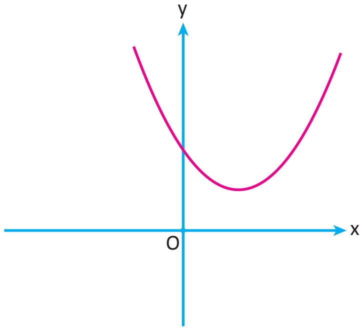
$a < 0$

Grafik 4.2.4

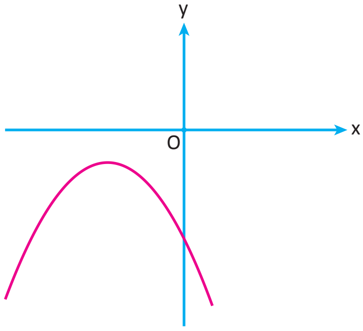
Buna göre aşağıdaki tablo elde edilir.

x	$-\infty$	$x_1 = x_2$		∞
$y = ax^2 + bx + c$	a nın işareti ile aynı	0 0	a nın işareti ile aynı	

3. $\Delta < 0$ ise denklemin gerçek kökü yoktur yani grafik x eksenini kesmez.
Bu durumda aşağıdaki Grafik 4.2.5 ve Grafik 4.2.6 incelenirse
$a > 0$ için $f(x) > 0$, $a < 0$ için $f(x) < 0$ olur.



$a > 0$
Grafik 4.2.5



$a < 0$
Grafik 4.2.6

Buna göre aşağıdaki tablo elde edilir.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ ∞
$y = ax^2 + bx + c$	a nın işareti ile aynı

İşaret tablosu yapılırken eşitsizlikte bulunan bütün çarpanların (pay ve paydadaki) kökleri bulunur. Bulunan kökler, işaret tablosunda küçükten büyüğe doğru sıralanır.

	Sembol
Tek katlı kök	
Çift katlı kök	
Paydayı tanımsız yapan değerler	$\|\|$
Eşitsizlikte $\leq$ veya $\geq$ olduğu durumlar	

Fonksiyonun işareti en büyük kökün sağından başlanarak yazılır. İşaret, her çarpandaki başkatsayı işaretlerinin çarpılması ile bulunur. İşaretler sola doğru gidildikçe tek katlı köklerde değişir, çift katlı köklerde ise aynı kalır.

1. ÖRNEK

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x) = -3x + 6$ veriliyor. f fonksiyonunun işaret incelemesini yapınız.

ÇÖZÜM

$-3x + 6 = 0$ denkleminin kökü bulunur ve işaret tablosu çizilirse
$-3x + 6 = 0 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$ bulunur.

x	$-\infty$	2	∞
$y = -3x + 6$	+		−

Tabloya göre $x > 2$ iken $y = f(x) = -3x + 6 < 0$, $x = 2$ iken $y = f(x) = -3x + 6 = 0$ ve $x < 2$ iken $y = f(x) = -3x + 6 > 0$ bulunur.

2. ÖRNEK

$2x^2+5x+3 \geq 0$ eşitsizliğinin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$2x^2+5x+3=0$ denkleminin köklerini bulmak için denklem çarpanlarına ayrılırsa
$(2x+3)\cdot(x+1)=0$ olur. Bu ifadenin 0 olması için çarpanlarından en az biri 0 olmalıdır. Buradan
$2x+3=0$ veya $x+1=0$
$x_1=-\frac{3}{2}$ $x_2=-1$ bulunur. Bulunan değerlere göre aşağıdaki tablo elde edilir.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		-1		∞
$2x^2+5x+3 \geq 0$	$+$		$-$		$+$	

Tabloda eşitsizliğin 0 veya 0 dan büyük olduğu bölgeler boyandı. Buna göre çözüm kümesi
$\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup[-1,\infty)$ bulunur.

3. ÖRNEK

$-3x^2+2x-4<0$ eşitsizliğinin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$-3x^2+2x-4=0$ denkleminin köklerinin varlığı diskriminant yardımıyla incelenirse

$\Delta=b^2-4ac$
$=2^2-4\cdot(-3)\cdot(-4)$
$=4-48$
$=-44<0$ elde edilir. Bu durumda denklemin gerçek kökü olmadığından ve $a=-3<0$ olduğundan
$-3x^2+2x-4$ ifadesi, bütün x değerleri için negatif değerler alır. Bu durum, aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

x	$-\infty$	∞
$-3x^2+2x-4<0$	$- - - - - - - - - - - - - - - -$	

O hâlde çözüm kümesi $\mathbb{R}$ bulunur.

Sıra Sizde

SORU

$-2x^2-7x+9>0$ eşitsizliğinin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

4. ÖRNEK

$x^2 - 4x + 7 < 0$ eşitsizliğinin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2 - 4x + 7 = 0$ denkleminin çözüm kümesi diskriminant yardımıyla bulunursa

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7$

$= 16 - 28$

$= -12 < 0$ bulunur.

Bu durumda denklemin gerçek kökü olmadığından ve $a = 1 > 0$ olduğundan $x^2 - 4x + 7$ ifadesi, bütün x değerleri için pozitif değerler alır.

Bu durum aşağıdaki tablo ile gösterilir.

x	$-\infty$ ∞
$x^2 - 4x + 7 < 0$	+ + + + + + + + + + + + + + +

O hâlde çözüm kümesi $\emptyset$ bulunur.

5. ÖRNEK

$2x^2 + 4x + 2 > 0$ eşitsizliğinin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$2x^2 + 4x + 2 = 0$ denkleminin çözüm kümesi diskriminant yardımıyla bulunursa

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2$

$= 16 - 16$

$= 0$ bulunur.

Bu durumda $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-4}{4} = -1$ çift katlı kök olur.

Buradan $a = 2 > 0$ olduğundan aşağıdaki tablo elde edilir.

x	$-\infty$	-1	∞
$2x^2 + 4x + 2 > 0$	+	0	+

O hâlde çözüm kümesi $\mathbb{R} - \{-1\}$ bulunur.

6. ÖRNEK

$(2x-9)\cdot(x^2+4x+3)>0$ eşitsizliğinin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(2x-9)\cdot(x^2+4x+3)=0$ denklemi çarpanlarına ayrılırsa

$(2x-9)\cdot(x+3)\cdot(x+1)=0$ olur. Buradan

$2x-9=0$ veya $x+3=0$ veya $x+1=0$

$x=\frac{9}{2}$ veya $x=-3$ veya $x=-1$ bulunur.

Bulunan değerlere göre aşağıdaki tablo elde edilir.

x	$-\infty$		-3		-1		$\frac{9}{2}$		∞
$2x-9$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2+4x+3		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$(2x-9)\cdot(x^2+4x+3)>0$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

O hâlde çözüm kümesi $(-3,-1)\cup\left(\frac{9}{2},\infty\right)$ bulunur.

7. ÖRNEK

$\frac{3}{x+1}\leq\frac{2}{x-3}$ eşitsizliğinin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Eşitsizliğin çözülebilmesi için eşitsizliğin bir tarafı mutlaka "0" olmalıdır. Buradan

$$\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x-3}\leq 0$$

$$\frac{3\cdot(x-3)-2\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(x-3)}\leq 0$$

$$\frac{3x-9-2x-2}{(x+1)\cdot(x-3)}\leq 0$$

$\frac{x-11}{(x+1)\cdot(x-3)}\leq 0$ elde edilir. Bu eşitsizliğin her çarpanının kökleri bulunursa

$x-11=0\Rightarrow x=11$

$x+1=0\Rightarrow x=-1$

$x-3=0\Rightarrow x=3$ bulunur. Bulunan kökler küçükten büyüğe tabloda sıralanır ve en sağdaki işaret tespit edilir. Bu değerlere göre aşağıdaki tablo elde edilir.

x	$-\infty$		-1		3		11		∞
$\frac{x-11}{(x+1)\cdot(x-3)}\leq 0$		$-$		$+$		$-$		$+$	

$$\frac{\overbrace{x-11}^{(+)}}{\underbrace{(x+1)}_{(+)}\cdot\underbrace{(x-3)}_{(+)}}=(+)$$

O hâlde çözüm kümesi $(-\infty,-1)\cup(3,11]$ bulunur.

8. ÖRNEK

$\dfrac{3x^2+2x-1}{4x^2+13x+3} \le 0$ eşitsizliğinin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$3x^2+2x-1=0$ ve $4x^2+13x+3=0$ denklemlerinin kökleri bulunursa

$$3x^2+2x-1=0 \qquad\qquad 4x^2+13x+3=0$$
$$(x+1)\cdot(3x-1)=0 \qquad\qquad (x+3)\cdot(4x+1)=0$$
$$x+1=0 \text{ veya } 3x-1=0 \qquad\qquad x+3=0 \text{ veya } 4x+1=0$$
$$x=-1 \text{ veya } x=\frac{1}{3} \qquad\qquad x=-3 \text{ veya } x=-\frac{1}{4} \text{ bulunur.}$$

Bulunan değerlere göre aşağıdaki tablo elde edilir.

x	$-\infty$ $\quad$ -3	-1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	∞
$3x^2+2x-1$	+	+	−	−	+
$4x^2+13x+3$	+	−	−	+	+
$\dfrac{3x^2+2x-1}{4x^2+13x+3} \le 0$	+	−	+	−	+

O hâlde çözüm kümesi $=(-3,-1]\cup\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right]$ bulunur.

9. ÖRNEK

$f(x)=\dfrac{(-x^2-9)\cdot(x^2+3x)}{(-3-x)^3} \ge 0$ eşitsizliğinin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$-x^2-9=0, x^2+3x=0$ ve $(-3-x)^3=0$ denklemlerinin (varsa) kökleri bulunursa

$-x^2-9=0$ denkleminin gerçek kökü olmadığından $-x^2-9=-\underbrace{(x^2+9)}_{+}<0$ olur.

$x^2+3x=x\cdot(x+3)=0 \Rightarrow x=0$ veya $x=-3$ olur.

$(-3-x)^3=0$

$-3-x=0$

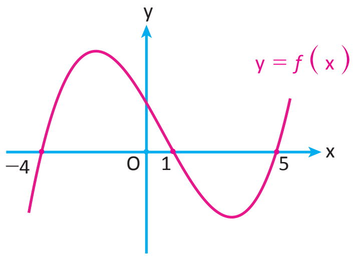
$x=-3$ olur.

Bulunan değerlere göre aşağıdaki tablo elde edilir.

x	$-\infty$ $\quad$ -3	0	∞
$f(x)\ge 0$	−	−	+

O hâlde çözüm kümesi $[0,\infty)$ bulunur.

10. ÖRNEK



$\dfrac{f(x)\cdot(x-2)}{-3x^2+2x+1} \geq 0$ eşitsizliğinin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen eşitsizlikteki her bir çarpanının kökleri bulunursa

$f(x)$ fonksiyonunun kökleri -4, 1 ve 5 tir.

$x-2=0 \Rightarrow x=2$ olur.

$$-3x^2+2x+1=0$$

$$(3x+1)\cdot(-x+1)=0$$

$3x+1=0$ veya $-x+1=0$

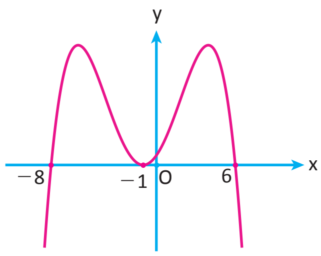
$3x=-1$ veya $x=1$

$x=-\frac{1}{3}$ olur.

x	$-\infty$ $\quad -4$	$-\frac{1}{3}$	1	2	5	∞
$f(x)$	−	+	+	−	−	+
$x-2$	−	−	−	−	+	+
$-3x^2+2x+1$	−	−	+	−	−	−
$\dfrac{f(x)\cdot(x-2)}{-3x^2+2x+1} \geq 0$	−	+	−	−	+	−

Bulunan değerlere göre yukarıdaki tablo elde edilir. O hâlde çözüm kümesi $\left[-4, -\frac{1}{3}\right) \cup [2, 5]$ bulunur.

11. ÖRNEK



Yanda grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonuna göre

$\dfrac{f(x)\cdot(x-6)}{2x^2-4x-6} \geq 0$ eşitsizliğinin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen ifadenin kökleri bulunursa

$f(x)$ fonksiyonunun köklerinden -8 ve 6 nın tek katlı, -1 in çift katlı kök olduğu görülür.

$x-6=0 \Rightarrow x=6$ olur.

$$2x^2-4x-6=0$$

$$2\cdot(x+1)\cdot(x-3)=0$$

$x+1=0$ veya $x-3=0$

$x=-1$ veya $x=3$ olur. Son durumda köklerden -8, -1 ve 3 ün tek katlı, 6 nın ise çift katlı kök olduğu görülür. Bulunan değerlere göre aşağıdaki tablo elde edilir.

x	$-\infty$ $\quad -8$	-1	3	6	∞
$\dfrac{f(x)\cdot(x-6)}{2x^2-4x-6} \geq 0$	+	−	+	−	−

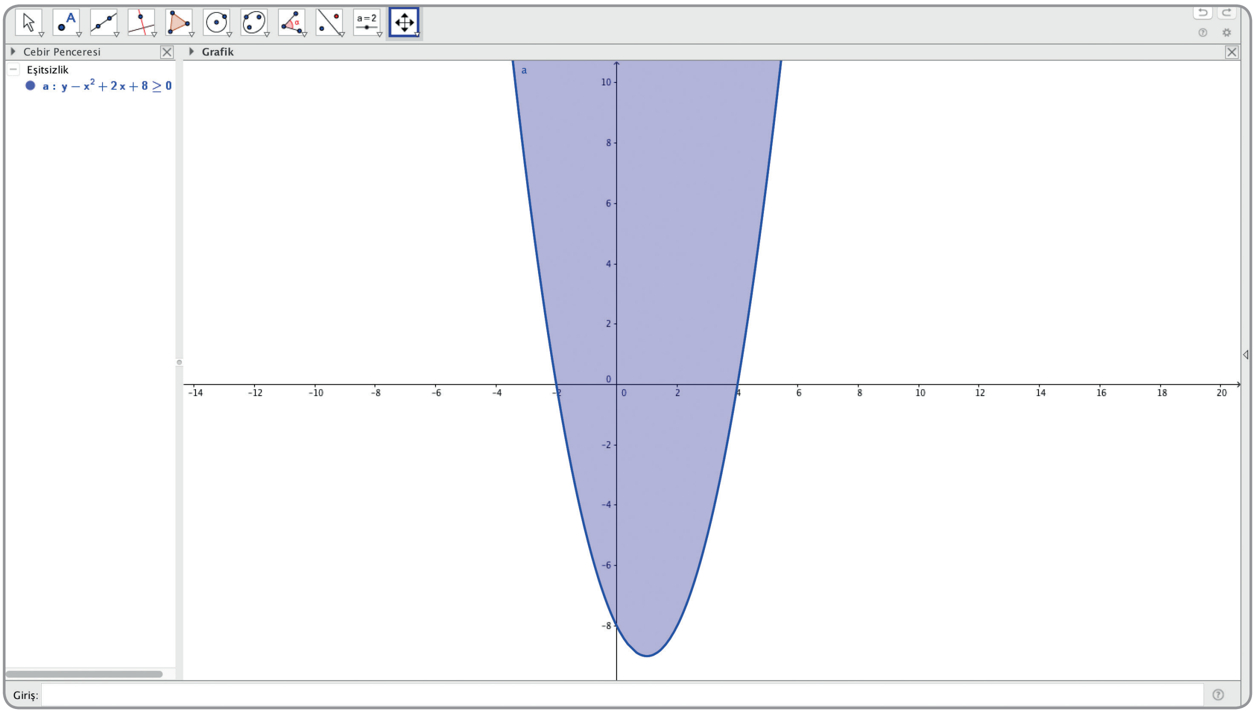
O hâlde çözüm kümesi $(-\infty, -8] \cup (-1, 3) \cup \{6\}$ bulunur.

12. ÖRNEK

$x^2 - 2x - 8 \geq 0$ eşitsizliğinin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini GeoGebra uygulaması yardımıyla bulunuz.

ÇÖZÜM

Grafik Çizme	Program çalıştırılır. **Grafik Çizme** kutucuğu seçilir.
Giriş:	y − x ^ 2 + 2x + 8 >= 0 denklemi **Giriş** kutucuğuna yazılarak enter tuşuna basılır.



Grafiğin hangi tarafının taranacağı tespit edilirken grafik orijinden geçmiyorsa orijine göre inceleme yapılır. Orijin eşitsizliği sağlıyorsa eşitsizliğin grafiğinde orijinin olduğu taraf taranır, sağlamıyorsa diğer taraf taranır. Grafik orijinden geçiyorsa grafiğin altından ve üstünden bir nokta seçilir. Bu nokta eşitsizliği sağlıyorsa noktanın olduğu taraf taranır, sağlamıyorsa diğer taraf taranır.

Sıra Sizde

SORU

$-8x^2 + 14x - 5 \leq 0$ eşitsizliğinin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini GeoGebra programı yardımıyla bulunuz.

ÇÖZÜM

2. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlik Sistemleri

Tanım

Birden fazla eşitsizliğin oluşturduğu sisteme **eşitsizlik sistemi** denir.

Sistemdeki eşitsizliklerden en az biri ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik ise bu sisteme **ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik sistemi** denir.

Eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi, eşitsizliklerin hepsini sağlayan ortak noktalardan oluşan kümedir yani bu küme, tüm eşitsizliklerin çözüm kümelerinin kesişimidir.

1. ÖRNEK

$x+5\le 0$

$x^2-5x+4>0$ eşitsizlik sisteminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x+5=0$ ve $x^2-5x+4=0$ denklemlerinin kökleri bulunursa

$x+5=0 \Rightarrow x=-5$ ve $x^2-5x+4=0$

$(x-4)\cdot(x-1)=0$

$x-4=0$ veya $x-1=0$

$x=4$ veya $x=1$ bulunur. Bulunan değerlere göre aşağıdaki tablo elde edilir.

x	$-\infty$		-5		1		4		∞
$x+5\le 0$		−	●	+		+		+	
$x^2-5x+4>0$		+		+	○	−	○	+	
Ortak Çözüm Kümesi			●						

O hâlde çözüm kümesi $(-\infty,-5]$ bulunur.

2. ÖRNEK

$-x^2+4x-3\le 0$

$x^2+3x-4>0$ eşitsizlik sisteminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$-x^2+4x-3=0$ ve $x^2+3x-4=0$ denklemleri çarpanlarına ayrılarak kökleri bulunursa

$-x^2+4x-3=0$

$(-x+1)\cdot(x-3)=0$

$-x+1=0$ veya $x-3=0$

$x=1$ veya $x=3$

$x^2+3x-4=0$

$(x+4)\cdot(x-1)=0$

$x+4=0$ veya $x-1=0$

$x=-4$ veya $x=1$ bulunur.

Bulunan değerlere göre aşağıdaki tablo elde edilir.

x	$-\infty$		-4		1		3		∞
$-x^2+4x-3\le 0$		−		−	●	+	●	−	
$x^2+3x-4>0$		+	○	−	○	+		+	
Ortak Çözüm Kümesi			○				●		

O hâlde çözüm kümesi $(-\infty,-4)\cup[3,\infty)$ bulunur.

3. ÖRNEK

$\left(x^2-6x,-x^2+x+12\right)$ noktası, analitik düzlemin 2. bölgesinde bulunduğuna göre x in alabileceği tam sayı değerleri toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$\left(x^2-6x,-x^2+x+12\right)$ noktası, analitik düzlemin 2. bölgesinde bulunduğundan $x^2-6x<0$ ve $-x^2+x+12>0$ olur. Buradan $x^2-6x=0$ ve $-x^2+x+12=0$ denklemlerinin kökleri bulunursa

$$x\cdot(x-6)=0 \text{ ve } (-x+4)\cdot(x+3)=0$$

$$x=0 \text{ veya } x-6=0 \text{ ve } -x+4=0 \text{ veya } x+3=0$$

$$x=0 \text{ veya } x=6 \text{ ve } x=4 \text{ veya } x=-3 \text{ bulunur.}$$

Bulunan değerlere göre aşağıdaki tablo elde edilir.

x	$-\infty$		-3		0		4		6		∞
$x^2-6x<0$		+		+	0	−		−	0	+	
$-x^2+x+12>0$		−	0	+		+	0	−		−	
Ortak Çözüm Kümesi					0		0				

O hâlde çözüm kümesi $(0,4)$ bulunur. Bu durumda x in alabileceği tam sayı değerleri toplamı $1+2+3=6$ olarak bulunur.

4. ÖRNEK

$f(x)=(4-m)x^2+(1-m)x+m+4$ fonksiyonunun grafiği x eksenini x_1 ve x_2 noktalarında kesmektedir.

$x_1\cdot x_2<0$
$f(0)\cdot f(1)<0$ sistemini sağlayan m gerçek sayılarını bulunuz.

ÇÖZÜM

$ax^2+bx+c=0$ ikinci dereceden denkleminde kökler çarpımı $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ olduğundan

$x_1\cdot x_2=\frac{m+4}{4-m}<0$ olur. Eşitsizliğin çarpanlarını 0 yapan değerler bulunursa

$m+4=0,\ 4-m=0 \Rightarrow m=-4$ veya $m=4$ olur.

$f(0)\cdot f(1)<0$ olduğundan

$(m+4)\cdot(4-m+1-m+4+m)<0$

$(m+4)\cdot(9-m)<0$ olur. $(m+4)\cdot(9-m)=0$ denkleminin kökleri bulunursa

$m+4=0,\ 9-m=0 \Rightarrow m=-4$ veya $m=9$ olur. Bulunan değerlere göre aşağıdaki tablo elde edilir.

m	$-\infty$		-4		4		9		∞
$\frac{m+4}{4-m}<0$		−	0	+	0	−		−	
$(m+4)\cdot(9-m)<0$		−	0	+		+	0	−	
Ortak Çözüm Kümesi			0				0		

O hâlde çözüm kümesi $(-\infty,-4)\cup(9,\infty)$ bulunur.

5. ÖRNEK

$f(x) = (m-2)x^2 + (2-m)x + m + 3$ ikinci dereceden fonksiyonu için

$\Delta > 0$

$(m-2) \cdot f(1) < 0$ olduğuna göre m nin alabileceği değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

$\Delta > 0$ olduğundan

$\Delta = b^2 - 4ac = (2-m)^2 - 4 \cdot (m-2) \cdot (m+3) > 0$

$4 - 4m + m^2 - 4m^2 - 4m + 24 > 0$

$-3m^2 - 8m + 28 > 0$ olur.

$-3m^2 - 8m + 28 = 0$ denkleminin kökleri bulunursa

$-3m^2 - 8m + 28 = 0$

$(-3m - 14) \cdot (m-2) = 0$

$-3m - 14 = 0$ veya $m - 2 = 0$

$3m = -14$ veya $m = 2$

$m = -\frac{14}{3}$ veya $m = 2$ olur.

$a \cdot f(1) < 0$ olduğundan $a \cdot f(1) = (m-2) \cdot (m - 2 + 2 - m + m + 3) < 0$

$(m-2) \cdot (m+3) < 0$ olur.

$(m-2) \cdot (m+3) = 0$ denkleminin kökleri bulunursa

$(m-2) \cdot (m+3) = 0$

$m - 2 = 0$ veya $m + 3 = 0$

$m = 2$ veya $m = -3$ olur. Bulunan değerlere göre aşağıdaki tablo elde edilir.

m	$-\infty$	$-\frac{14}{3}$	-3	2	∞
$-3m^2 - 8m + 28 > 0$	$-$	$+$	$+$	$-$	
$(m-2) \cdot (m+3) < 0$	$+$	$+$	$-$	$+$	
Ortak Çözüm Kümesi					

O hâlde çözüm kümesi $(-3, 2)$ bulunur.

Sıra Sizde

SORU

$f(x) = (m-2)x^2 + 5x + 1$ ikinci dereceden fonksiyonunun grafiğinde tepe noktası 4. bölgede olduğuna göre m nin alabileceği değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

6. ÖRNEK

$f(x) = (m+2)x^2 + (5-m)x + m - 3$ fonksiyonunun grafiği x eksenini $(x_1, 0)$ ve $(x_2, 0)$ noktalarında kesmektedir.

$x_1 \cdot x_2 < 0$

$x_1 + x_2 \leq 0$ olduğuna göre m nin alabileceği değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

$x_1 \cdot x_2 < 0$ olduğundan $(m+2)x^2 + (5-m)x + m - 3 = 0$ denkleminin kökler çarpımı negatiftir. Buradan $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m-3}{m+2} < 0$ olur. Eşitsizliğin çarpanlarını 0 yapan değerler bulunursa

$m - 3 = 0,\ m + 2 = 0 \Rightarrow m = 3$ veya $m = -2$ olur.

$ax^2 + bx + c = 0$ ikinci dereceden denkleminde kökler toplamı $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ olduğundan

$x_1 + x_2 = -\frac{5-m}{m+2} \leq 0$ olur. Eşitsizliğin çarpanlarını 0 yapan değerler bulunursa

$5 - m = 0,\ m + 2 = 0 \Rightarrow m = 5$ veya $m = -2$ olur.

Bulunan değerlere göre aşağıdaki tablo elde edilir.

m	$-\infty$ … -2	-2 … 3	3 … 5	5 … ∞
$\frac{m-3}{m+2} < 0$	+	−	+	+
$-\frac{5-m}{m+2} \leq 0$	+	−	−	+
Ortak Çözüm Kümesi				

O hâlde $m \in (-2, 3)$ bulunur.

7. ÖRNEK

f, ikinci dereceden fonksiyon olmak üzere

$f(x) < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $(-5, 4)$ dır. Buna göre

$f(x-3) \cdot (x^2 - 16) < 0$

$x \geq 0$ eşitsizlik sistemini sağlayan x tam sayılarının toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x-3)$ fonksiyonu $f(x)$ fonksiyonunun 3 birim sağa ötelenmiş hâlidir. Buradan $f(x) < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $(-5, 4)$ olduğundan $f(x-3) < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $(-2, 7)$ olur.

$x^2 - 16 = 0 \Rightarrow (x+4) \cdot (x-4) = 0$

$x + 4 = 0$ veya $x - 4 = 0$

$x = -4$ veya $x = 4$ olur. Bulunan değerlere göre aşağıdaki tablo elde edilir.

x	$-\infty$ … -4	-4 … -2	-2 … 0	0 … 4	4 … 7	7 … ∞
$f(x-3) \cdot (x^2 - 16) < 0$	+	−	+	+	−	+
$x \geq 0$	−	−	−	+	+	+
Ortak Çözüm Kümesi						

O hâlde çözüm kümesi $(4, 7)$ bulunur. Buna göre eşitsizlik sistemini sağlayan tam sayıların toplamı $5 + 6 = 11$ olarak bulunur.

8. ÖRNEK

$y = f(x) = (m-1)x^2 + (m-1)x + m + 1$ fonksiyonu ikinci dereceden fonksiyon ve $\forall x \in \mathbb{R}$ için daima negatif değer alıyorsa m nin değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

$y = ax^2 + bx + c$ denklemi $\forall x \in \mathbb{R}$ için $y < 0 \Leftrightarrow a < 0$ ve $\Delta < 0$ olmalıdır. Buna göre

$m - 1 < 0$,

$\Delta = b^2 - 4ac = (m-1)^2 - 4 \cdot (m-1) \cdot (m+1) < 0$

$m^2 - 2m + 1 - 4m^2 + 4 < 0$

$-3m^2 - 2m + 5 < 0$ olmalıdır. $-3m^2 - 2m + 5 = 0$ denkleminin kökleri bulunursa

$-3m^2 - 2m + 5 = 0$

$(3m+5) \cdot (-m+1) = 0$

$3m + 5 = 0$ veya $-m + 1 = 0$

$3m = -5$ veya $m = 1$

$m = -\frac{5}{3}$ olur. Bulunan değerlere göre aşağıdaki tablo elde edilir.

m	$-\infty$	$-\frac{5}{3}$	1 ∞
$m - 1 < 0$	$-$	$-$	$+$
$-3m^2 - 2m + 5 < 0$	$-$	$+$	$-$
Ortak Çözüm Kümesi			

O hâlde çözüm kümesi $\left(-\infty, -\frac{5}{3}\right)$ bulunur.

Sıra Sizde

SORU

$y = f(x) = (m-3)x^2 + 2\sqrt{7}x + m + 3$ fonksiyonu, $\forall x \in \mathbb{R}$ için daima pozitif değer alıyorsa m nin değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

9. ÖRNEK

$-5 < \dfrac{x^2+6}{x} \leq 7$ eşitsizlik sisteminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Eşitsizliğin sol tarafı ile sağ tarafı ayrı ayrı incelenir. Buradan

$-5 < \dfrac{x^2+6}{x}$ ve $\dfrac{x^2+6}{x} \leq 7$ şeklinde iki eşitsizlik olur. Bu iki eşitsizliğin çözümü aşağıdaki gibidir

$\dfrac{x^2+6}{x} + 5 > 0$ $\dfrac{x^2+6}{x} - 7 \leq 0$

$\dfrac{x^2+5x+6}{x} > 0$ $\dfrac{x^2-7x+6}{x} \leq 0$

$\dfrac{(x+3)\cdot(x+2)}{x} > 0$ $\dfrac{(x-6)\cdot(x-1)}{x} \leq 0$ olur.

Eşitsizliğin çarpanlarını 0 yapan değerler bulunursa $\dfrac{(x+3)\cdot(x+2)}{x} > 0$ eşitsizliği için

$x+3=0$ veya $x+2=0$ veya $x=0$ olur.

$x=-3$ veya $x=-2$

$\dfrac{(x-6)\cdot(x-1)}{x} \leq 0$ için

$x-6=0$ veya $x-1=0$ veya $x=0$ olur.

$x=6$ veya $x=1$

Bulunan değerlere göre aşağıdaki tablo elde edilir.

x	$-\infty$	-3	-2	0	1	6	∞
$\dfrac{(x+3)\cdot(x+2)}{x} > 0$	−	+	−	+	+	+	
$\dfrac{(x-6)\cdot(x-1)}{x} \leq 0$	−	−	−	+	−	+	
Ortak Çözüm Kümesi							

O hâlde çözüm kümesi $[-3,-2] \cup [1,6]$ bulunur.

Sıra Sizde

SORU

$0 \leq \dfrac{x^2-4}{x} \leq 3$ eşitsizlik sisteminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

10. ÖRNEK

Evine yerli üretim halı almak isteyen biri yaptığı araştırmalar sonucunda aşağıdaki bilgilere ulaşmıştır. Halıdaki kalite; halıda 10 cm enine giren çözgü teliyle 10 cm boyuna giren ilme sayısıdır. 10 cm deki çözgü teli sayısı ile 10 cm deki ilme sıra sayısının çarpımı $1\ dm^2$ deki toplam ilmeyi (düğümü) verir. $1\ dm^2$ deki ilme sayısı o halının kalitesini gösterir.

Halılar kalitesine göre tablodaki gibi sıralanır.

Halının Kalitesi	$1\ dm^2$ deki Toplam İlme Sayısı
Ekstra ekstra ince	2401-10 000
Ekstra ince	1851-2400
İnce	1401-1850
Orta	701-1400
Kaba	201-700

a) Bu kişi, salonuna $(300 \times 450)\ cm^2$ ebatlarında ekstra ekstra ince kalitede bir halı alacak olursa bu halının ilme sayısının hangi aralıkta olacağını bulunuz.

b) Bu kişi, toplam ilme sayısı $544\,875$, ebatları $(150 \times 250)\ cm^2$ olan bir halı alırsa bu halının hangi kalitede olacağını bulunuz.

c) Saatte ortalama 400 ilme atabilen bir dokumacının, ekstra ince kalitede $(200 \times 300)\ cm^2$ bir halıyı günde 8 saat çalışarak yaklaşık kaç günde bitirebileceğini bulunuz.

İşlemlerde hesap makinesi kullanabilirsiniz.

ÇÖZÜM

a) Bu kişi salonuna $300 \times 450 = 135\,000\ cm^2 = 1350\ dm^2$ ekstra ekstra ince kalitede bir halı alacaktır. Buna göre ekstra ekstra ince kalitede bir halıda $1\ dm^2$ deki toplam ilme sayısı x alınırsa $2401 \le x \le 10\,000$ olduğundan $(300 \times 450)\ cm^2$ ebatlarındaki halının toplam ilme sayısı
$2401 \le x \le 10\,000$

$1350 \cdot 2401 \le 1350x \le 1350 \cdot 10\,000$
$3\,241\,350 \le 1350x \le 13\,500\,000$ bulunur.

b) $150 \times 250 = 37\,500\ cm^2 = 375\ dm^2$ halı almıştır. Buna göre bu halıda $1\ dm^2$ deki toplam ilme sayısı $544\,875 \div 375 = 1453$ olur.
O hâlde $1401 < 1453 < 1850$ olduğundan halı ince kalitededir.

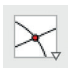
c) Ekstra ince kalite halıda $1\ dm^2$ deki toplam ilme sayısı x alınırsa $1851 \le x \le 2400$ olur.
Dokumacı $200 \times 300 = 60\,000\ cm^2 = 600\ dm^2$ halı dokuyacaktır. Buradan dokumacının atacağı ilme sayısı
$1851 \le x \le 2400$

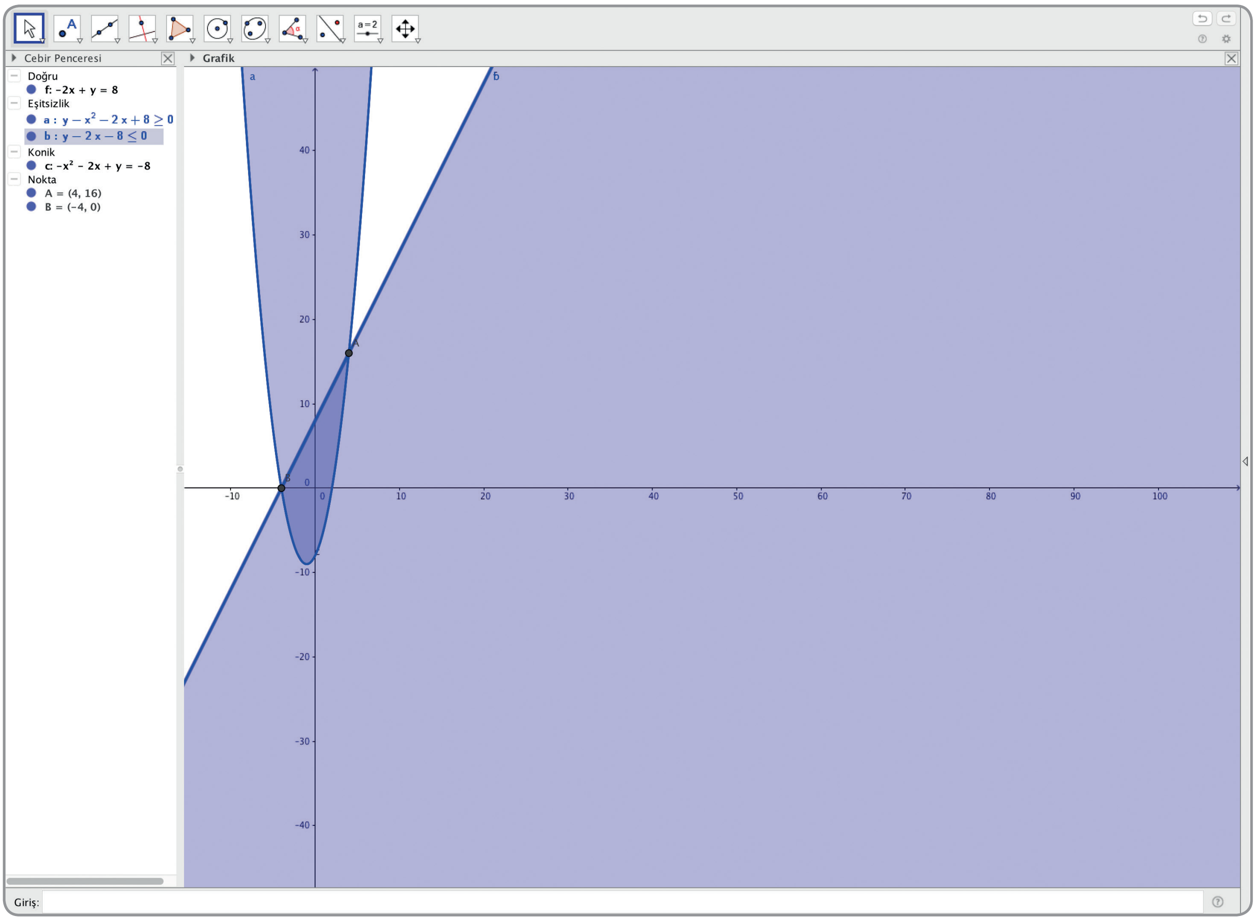
$600 \cdot 1851 \le 600x \le 600 \cdot 2400$
$1\,110\,600 \le 600x \le 1\,440\,000$ olur.
Dokumacı günde 8 saat çalıştığından $8 \cdot 400 = 3200$ ilme atıyor.
Buna göre işi bitirme süresi t alınırsa
$$\frac{1\,110\,600}{3200} \le t \le \frac{1\,440\,000}{3200}$$
$347{,}06 \le t \le 450$ bulunur.
O hâlde dokumacı bu halıyı 348 ile 450 gün arasında bitirir.

11. ÖRNEK

$x^2 + 2x - 8 \geq 0$
$\quad 2x + 8 \leq 0$
eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini GeoGebra programı yardımıyla bulunuz.

ÇÖZÜM

Grafik Çizme	Programı çalıştırınız. **Grafik Çizme** kutucuğunu seçiniz.
Giriş:	$y - x$ ^ $2 - 2x + 8 = 0$ denklemini **Giriş** kutucuğuna yazınız ve **Enter** tuşuna basınız.
Giriş:	$y - 2x - 8 = 0$ denklemini **Giriş** kutucuğuna yazınız ve **Enter** tuşuna basınız.
	**Kesiştir** aracını seçiniz. Çizilen doğru ve parabolün kesim noktalarını belirleyiniz.
Giriş:	$y - x$ ^ $2 - 2x + 8$ >= 0 denklemini **Giriş** kutucuğuna yazınız ve **Enter** tuşuna basınız.
Giriş:	$y - 2x - 8$ <= 0 denklemini **Giriş** kutucuğuna yazınız ve **Enter** tuşuna basınız.



Grafik incelendiğinde doğru ile parabolün $A(4, 16)$ ve $B(-4, 0)$ noktalarında kesiştikleri ve eşitsizlik sisteminin çözüm kümesinin $[-4, 4]$ olduğu görülür.

ALIŞTIRMALAR-2

1. Karesinin 42 eksiği kendisinden küçük olan kaç tane tam sayı olduğunu bulunuz.

2. $x^2 - 16 \leq 0$ eşitsizliğini sağlayan doğal sayıların toplamını bulunuz.

3. $\dfrac{3x^2 + 2x + 4}{-9 - x^2} \geq 0$ eşitsizliğinin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

4. $\dfrac{(x+1)\cdot(x-5)}{x^2 - 4x - 5} \geq 0$ eşitsizliğinin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

5. $\dfrac{6}{x} > \dfrac{x}{3}$ eşitsizliğinde x in alabileceği <u>en büyük</u> tam sayı değerini bulunuz.

6. $\dfrac{(2x-8)\cdot(1-x)}{x^2 - x - 6} \leq 0$ eşitsizliğinin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

7. $x^2 - (m-5)x + 3m = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.
$\dfrac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} < 0$ olduğuna göre m nin alabileceği değer aralığını bulunuz.

8.
$$x^2 + 4x - 5 \leq 0$$
$$-x^2 + 5x - 4 \geq 0$$
eşitsizlik sisteminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

9. Karesi 4 ten küçük, 3 katının 4 fazlası 1 den büyük olan sayıların değer aralığını bulunuz.

10. $-4 < \dfrac{x^2 - 12}{x} < 1$ eşitsizlik sisteminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

11.
$$(x-3)\cdot(5x+10) \geq 0$$
$$2x - 6 \leq 0$$
eşitsizlik sisteminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

12.
$$x^2 - x - 6 \geq 0$$
$$3x + 9 \leq 0$$
eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini analitik düzlemde gösteriniz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A) Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerlere uygun sözcük ya da değerleri yazınız.

1. Çözüm kümelerinin kesiştiği yer ortak olan birden fazla eşitsizlikten oluşan sisteme .... denir.

2. $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonu, x in tüm değerleri için pozitif ise a ...... ve Δ ......olur.

3. $y = \sqrt{f(x)}$ in tanımlı olması için .... olmalıdır.

4. Bir doğru ile bir parabolün ortak çözümünde $\Delta = 0$ ise doğru ile parabol .... olur.

5. Polinom bölmesi biçiminde eşitsizliklerde .... değerler çözüm kümesine alınmaz.

B) Aşağıda numaralar ile verilen denklemleri, harf ile verilen çözüm kümeleriyle eşleştiriniz.

6.

$x^2 - 6x + 8 \leq 0$	1.	a)	$[2, 4]$
$x^2 + x + 4 > 0$	2.	b)	$\mathbb{R}$
$-2x^2 + 3x - 1 < 0$	3.	c)	$\left\{-\frac{2}{3}, 2\right\}$
$x^2 + 3x + 8 < 0$	4.	ç)	$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1, \infty)$
		d)	$\emptyset$

C) Aşağıdaki soruların cevaplarını boş bırakılan yerlere yazınız.

7. $(3x - 1) \cdot (3x^2 + 8x - 3) = 0$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

8.
$$x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$$
$$x - y + 1 = 0$$
denklem sisteminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

9. $\dfrac{(3x - 9) \cdot (x - 2)}{x^2 - 2x - 8} \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

10.
$$x^2 + x - 2 \geq 0$$
$$2x - 4 \leq 0$$
eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

Ç) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruları cevaplayınız ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

11. $\dfrac{(x^2+4x+4)\cdot(x+3)}{x^2+5x+6}=0$

denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-3,-2\}$ B) $\{-3\}$ C) $\{-2\}$

D) $\emptyset$ E) $\{-3,-2,3\}$

12. $\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{x+9}{x^2+3x+2}=0$

denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-3,3\}$ B) $\{-1,3\}$ C) $\{-2,-1\}$

D) $\emptyset$ E) $\{3\}$

13. $(x-2)^2+4x-4=0$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-4,-2\}$ B) $\{2,4\}$ C) $\{0\}$

D) $\emptyset$ E) $\mathbb{R}$

14. $(x-5)\cdot(x^2-10x+25)=0$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-5\}$ B) $\{5\}$ C) $\{0\}$

D) $\emptyset$ E) $\mathbb{R}$

15. $x^2-x\cdot y+2x-8=0$

$x-y=2$

denklem sisteminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{(1,-1)\}$

B) $\{(2,0)\}$

C) $\{(4,2)\}$

D) $\{(2,0),(4,2)\}$

E) $\{(1,-1),(2,0)\}$

16. $x^2+y^2+2x-2y+5=0$

$x^2-y^2-2x+2y-7=0$

denklem sisteminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\emptyset$

B) $\{(-1,4),(1,-2)\}$

C) $\{(-1,-2),(-1,4)\}$

D) $\{(1,-2),(1,4)\}$

E) $\{(1,-2),(-1,-2)\}$

D) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruları cevaplayınız ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

17. Karesinin 40 eksiği kendisinin 3 katından küçük olan kaç tane tam sayı vardır?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

18. $x^5 - 4x^3 \leq 0$ eşitsizliğini sağlayan doğal sayıların toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) 1 C) 3 D) 6 E) 10

19. $\frac{7}{x} > \frac{x}{4}$ eşitsizliğinde x in alabileceği <u>en büyük</u> tam sayı değeri kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 3 D) 5 E) 6

20. $\frac{2x^2 + 5x + 3}{-x^2 - 2x - 5} \geq 0$

eşitsizliğinin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\left[-\frac{3}{2}, -1\right]$ B) $(-\infty, -1)$ C) $(-3, 2)$ D) $(-3, \infty)$ E) $\mathbb{R}$

21. $x^2 - (m-3)x + 2m = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$\frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} < 0$ olduğuna göre m nin alabileceği tam sayı değerleri toplamı kaçtır?

A) 1 B) 3 C) 6 D) 10 E) 15

22. $f(x) = (m+1)x^2 - mx + m - 1$

fonksiyonunun grafiği, x eksenini iki farklı noktada kesiyor ise m nin alabileceği tam sayı değerleri toplamı kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

23. $-1 < \frac{x^2 - 6}{x} < 5$ eşitsizlik sisteminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-1, 2)$

B) $(-\infty, -3)$

C) $(-3, -1) \cup (2, 6)$

D) $(6, \infty)$

E) $(-3, 2) \cup (6, \infty)$

24. $(x+2) \cdot (2x-6) \geq 0$

$2x - 8 \leq 0$

eşitsizlik sisteminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, 4)$

B) $(-\infty, -2] \cup [3, 4]$

C) $(-\infty, -2] \cup [4, \infty)$

D) $(3, \infty)$

E) $(-2, 4)$

E) 25-27. soruları aşağıda verilen ortak metne göre cevaplandırınız.

t suyun kaynama sıcaklığı (°C) ve h deniz seviyesinden olan yükseklik (m) olmak üzere h nin t cinsinden denklemi $h(t)=1000(100-t)+580(100-t)^2$, $95 \le t \le 100$ ile verilmektedir. Buna göre

25. Hangi yükseklik (m) aralığında suyun 96 °C ile 97 °C arasında kaynadığını bulunuz.

26. Ağrı Dağı zirvesinin deniz seviyesinden yüksekliği yaklaşık 5140 m olduğuna göre zirvede suyun kaynama sıcaklığını (°C) GeoGebra programını kullanarak bulunuz.

27. Yüksekliğinin 1580 m ile 4320 m arasında olduğu bilinen bir dağda suyun kaynama sıcaklığının (°C) hangi aralıklarda olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

F) 28-30. soruları aşağıda verilen ortak metne göre cevaplandırınız.

Bir şirket kurulduktan 10 yıl sonra zarar etmesi sebebiyle kapatılmıştır. Bu şirketin aylık kazancını (TL) gösteren denklem $k(t)=-\frac{10^6}{192}\cdot(t^2-120t+1296)$ bağıntısıyla modellenmiştir. Buna göre

28. Bu şirketin kurulduktan kaç ay sonra kâra geçtiğini bulunuz.

29. Şirketin en büyük kazancının kaç lira olduğunu bulunuz.

30. Şirketin kapanıncaya kadar kaç ay zarar ettiğini bulunuz.

ÇÖZÜM

GEOMETRİ

11.5. ÇEMBER VE DAİRE

Neler Öğreneceksiniz?

11.5.1. ÇEMBERİN TEMEL ELEMANLARI
1. Çemberde Kiriş, Kesen, Teğet ve Yay Kavramları
2. Çemberde Kirişin Özellikleri

11.5.2. ÇEMBERDE AÇILAR
Çemberde Açı Çeşitleri

11.5.3. ÇEMBERDE TEĞET
Çemberde Teğetin Özellikleri

11.5.4. DAİRENİN ÇEVRESİ VE ALANI
Dairede Çevre ve Alan

Çember ve Dairenin Kullanım Alanları

- Matematik, geometri, astronomi, fizik, inşaat ve makina mühendisliğinde kullanılır.
- İstatistikte verilerin yorumlanmasında daire grafikleri de sıklıkla kullanılır.
- Geleneksel mimaride ve süsleme sanatlarında çember ve daire şekilleri kullanılır.
- Kullanımda kolaylık sağlaması nedeniyle pek çok araç ve gerecin tasarımı daire veya çember şeklindedir.

Hazırlık Çalışmaları

1. Bir üçgenin iç açıortaylarının kesişme noktası ile kenar orta dikmelerinin kesişme noktası hangi geometrik şekil ile ilgilidir?

2. Günlük hayatta araba ve diğer farklı araç gereçlerde kullanılan çember şeklindeki tekerlekler, çokgen şeklinde olsaydı ne tür sorunlar olabilirdi? Düşünüp arkadaşlarınızla tartışınız.

3. Daire düzeni şeklinde düzenlenen toplantılar ile T düzeni, konferans düzeni, sınıf düzeni, dikdörtgen veya kare düzeni şeklinde düzenlenen toplantıların olumlu ve olumsuz yönlerini tartışınız.

4. Cadde ve sokaklardaki rögar kapaklarını, evinizde kullandığınız eşyaları kısacası çevrenizde çember ve daire şeklinde olan nesne, cisim gözlemlerinizi arkadaşlarınızla paylaşınız. Bu şekilde kullanılma gerekçelerinin neler olabileceğini düşününüz.

11.5.1. ÇEMBERİN TEMEL ELEMANLARI

1. Çemberde Kiriş, Kesen, Teğet ve Yay Kavramları

Günlük hayatta çember veya daire şeklinde pek çok araç gereç kullanılır. Tepsi, madenî para, tekerlek gibi yuvarlak nesnelerin ağırlık merkezleri daha kolay bulunabildiğinden dengelemek istenilen birçok nesneye yuvarlak şekil verilmiştir. Tekerleğe (Görsel 5.1.1) yuvarlak şekil verilmesinin sebebi ise tekerleğin etrafındaki diğer nesnelere değen yüzeylerinin çok az olmasıdır. Bu sayede sürtünme azalmış ve nesnelerin kolay hareket ettirilebilmesi sağlanmıştır.

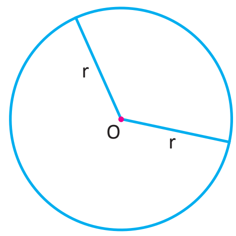
Görsel 5.1.1: Tekerlek

Tanım

Düzlemde sabit bir noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktalar kümesine **çember** denir.

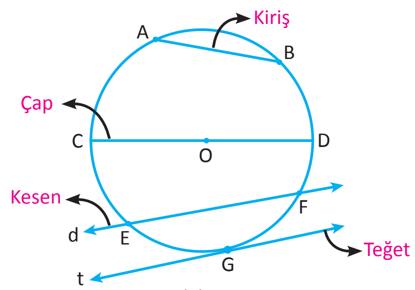
Sabit noktaya **çemberin merkezi** denir ve O ile gösterilebilir.

Eşit uzaklığa ise **çemberin yarıçapı** denir ve **r** ile gösterilir (Şekil 5.1.1).



Şekil 5.1.1

Çemberin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasına **kiriş** denir.
Merkezden geçen kirişe **çap** denir. En uzun kiriş çaptır.
Çap R ile gösterilir (Şekil 5.1.2).



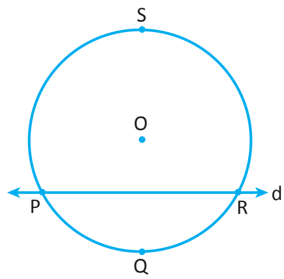
Şekil 5.1.2

Çemberin farklı iki noktasından geçen doğruya **kesen** denir.
Çemberle kesişim kümesi bir nokta olan doğruya **teğet** denir.

Çember üzerinde alınan farklı iki nokta arasındaki çember parçasına **yay** denir.

Çember üzerinde P, Q, R ve S noktaları verilmiş olsun. Bu durumda $\overset{\frown}{PSR}$ büyük yay ve $\overset{\frown}{PQR}$ küçük yay olmak üzere d doğrusu çemberi iki yaya ayırır.

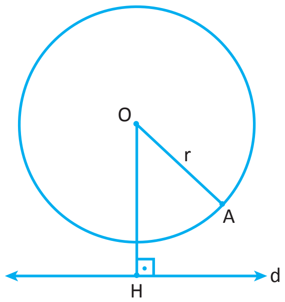
$\overset{\frown}{PR}$ ifadesinden anlaşılması gereken çember üzerindeki küçük yaydır (Şekil 5.1.3).



Şekil 5.1.3

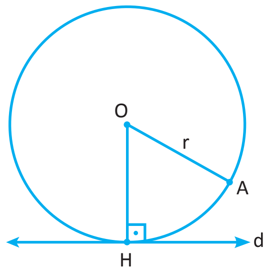
Çember ile Doğrunun Birbirine Göre Durumları

Aynı düzlemde bulunan Ç çemberi ve bir d doğrusu verilsin. $[OH] \perp d$ olmak üzere çemberin merkezinin d doğrusuna olan uzaklığı $|OH| = k$ olsun. d doğrusunun çemberin merkezine olan uzaklığına göre üç farklı durum olabilir.



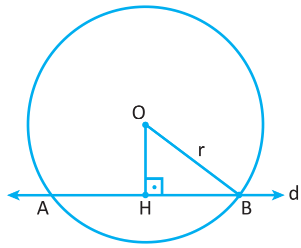
$k > r$

Şekil 5.1.4



$k = r$

Şekil 5.1.5



$k < r$

Şekil 5.1.6

Şekil 5.1.4'te d doğrusunun çemberin merkezine olan uzaklığı, çemberin yarıçapından büyüktür. Bu durumda doğru, çemberi kesmez. $Ç \cap d = \emptyset$ olduğundan $k > r$ olur.

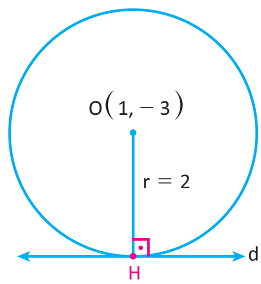
Şekil 5.1.5'te d doğrusunun çemberin merkezine olan uzaklığı, çemberin yarıçapına eşittir. Bu durumda doğru, çembere teğet olur. $Ç \cap d = \{H\}$ olduğundan $k = r$ olur.

Şekil 5.1.6'da d doğrusunun çemberin merkezine olan uzaklığı, çemberin yarıçapından küçüktür. Bu durumda doğru, çemberi iki noktada keser. $Ç \cap d = \{A, B\}$ olduğundan $k < r$ olur.

1. ÖRNEK

Merkez koordinatları $O(1, -3)$ ve yarıçapı $r = 2$ cm olan çember ile denklemi $2x - y + k = 0$ olan doğru, teğet olduğuna göre k nin alabileceği değerler toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM



$2x - y + k = 0$

Çember ile doğru yalnız bir noktada kesiştiğinden doğru, çembere teğet olur. Bu durumda doğrunun çember merkezine olan uzaklığı, çemberin yarıçapına eşittir. Buradan

$$|OH| = r = \frac{|2 \cdot 1 - (-3) + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$$

$$2 = \frac{|2 + 3 + k|}{\sqrt{4 + 1}}$$

$$|k + 5| = 2\sqrt{5} \Rightarrow k + 5 = 2\sqrt{5} \text{ veya } k + 5 = -2\sqrt{5} \text{ olur.}$$

Bu durumda

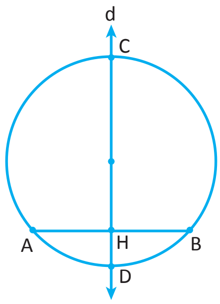
$k_1 = 2\sqrt{5} - 5$ veya $k_2 = -2\sqrt{5} - 5$ bulunur.

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= 2\sqrt{5} - 5 + (-2\sqrt{5} - 5) \\ &= \cancel{2\sqrt{5}} - 5 - \cancel{2\sqrt{5}} - 5 \\ &= -10 \text{ olur.} \end{aligned}$$

2. Çemberde Kirişin Özellikleri

Özellik

1. Bir çemberde kirişin orta dikmesi merkezden geçer (Şekil 5.1.7).

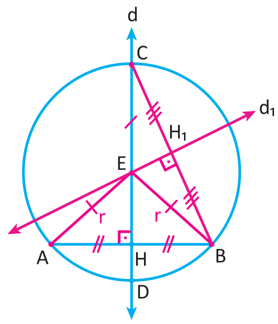


Şekil 5.1.7

İspat

Çemberde $[BC]$ kirişi ve bu kirişin orta dikmesi $[BC] \cap d_1 = \{H_1\}$ olacak şekilde d_1 çizilmiş olsun. $d \cap d_1 = \{E\}$ alınır ve $[AE], [BE]$ çizilirse ABE üçgeninde $[EH]$, BCE üçgeninde $[EH_1]$ sırasıyla $[AB]$ ve $[BC]$ kenarlarına ait hem kenarortay hem de yükseklik olur. Buradan EAB ve EBC üçgenlerinin ikizkenar üçgen olduğu sonucu elde edilir (Şekil 5.1.8).

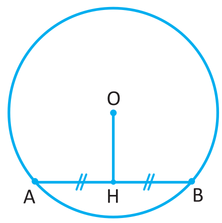
Bu durumda ise $\widehat{EAB}$ de $|EA| = |EB|$ ve $\widehat{EBC}$ de $|EC| = |EB|$ dolayısıyla $|EA| = |EB| = |EC|$ olduğundan E noktası çemberin merkezi olur.



Şekil 5.1.8

Özellik

2. Bir çemberde kirişin orta noktasını çemberin merkezine birleştiren doğru, kirişe diktir.
O merkezli çemberde çizilen $[AB]$ kirişinin orta noktası H ise $[OH] \perp [AB]$ olur (Şekil 5.1.9).

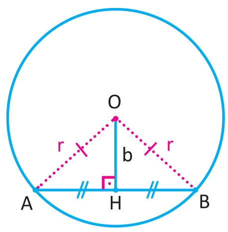


Şekil 5.1.9

İspat

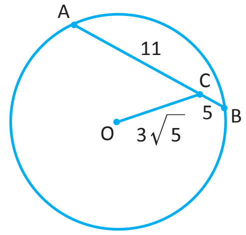
O merkezli çemberde $|OA| = |OB| = r$ olduğundan OAB üçgeni ikizkenar üçgen olur. OAB ikizkenar üçgeninde $[OH]$, $[AB]$ kirişini iki eş parçaya böldüğünden kenarortay olur. İkizkenar üçgende tabana ait kenarortay, hem açıortay hem de yüksekliktir.
Buradan $[OH] \perp [AB]$ elde edilir (Şekil 5.1.10).

Bu özellikten çemberin merkezinden kirişe indirilen dikme, kirişi ortalar sonucu çıkar.



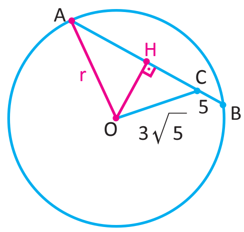
Şekil 5.1.10

1. ÖRNEK



Şekildeki O merkezli çemberde [AB] kiriş
$|AC| = 11$ cm
$|CB| = 5$ cm
$|OC| = 3\sqrt{5}$ cm olduğuna göre
çemberin çapının kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Merkezden kirişe çizilen dikme kirişi ortalar. Yani
$[OH] \perp [AB] \Rightarrow |AH| = |BH|$ olur. Bu durumda
$|AH| = |BH| = \dfrac{|AB|}{2} = \dfrac{16}{2} = 8$ cm olur. Buradan
$|HC| = |HB| - |CB| = 8 - 5 = 3$ cm bulunur.
OHC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

$$|OC|^2 = |OH|^2 + |HC|^2$$

$$(3\sqrt{5})^2 = |OH|^2 + 3^2 \Rightarrow |OH|^2 = 45 - 9 = 36 \Rightarrow |OH| = 6 \text{ cm olur.}$$

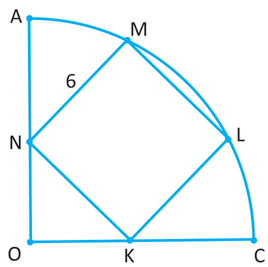
Çemberde [OA] sı çizilirse AHD dik üçgen olur. AHD dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

$$|OA|^2 = |OH|^2 + |AH|^2 \Rightarrow r^2 = 6^2 + 8^2$$

$$r^2 = 36 + 64 \Rightarrow r^2 = 100$$

$$r = 10 \text{ cm olur. } R = 2 \cdot 10 = 20 \text{ cm bulunur.}$$

2. ÖRNEK

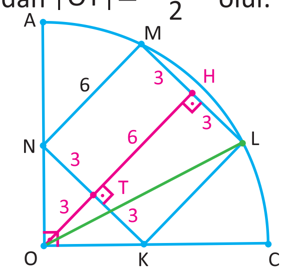


Yandaki şekilde O merkezli çeyrek çemberde KLMN bir karedir.
$|MN| = 6$ cm olduğuna göre çemberin yarıçapının kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

O merkezli çeyrek çemberde [ML] kiriştir. Çemberin merkezinden [ML] kirişine dik olarak çizilen doğru parçasının dikme ayağı H olsun.
$|MH| = |HL| = \dfrac{|ML|}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$ cm olur. [OH] ile [NK] nın kesim noktası T olsun. KLMN bir kare olduğundan $[ML] \parallel [NK]$ $|NT| = |TK| = 3$ cm olur.

Yandaki şekilde KON dik üçgeninde [OT] hipotenüse ait kenarortay olduğundan $|OT| = \dfrac{|NK|}{2}$ olur.
Buradan $|OT| = \dfrac{6}{2} = 3$ cm bulunur.



Bu durumda $|OH| = |OT| + |TH| \Rightarrow |OH| = 3 + 6 = 9$ cm olur.

OHL dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

$$|OL|^2 = |OH|^2 + |HL|^2 \Rightarrow |OL|^2 = 9^2 + 3^2 = 81 + 9 = 90$$

$$|OL| = r = 3\sqrt{10} \text{ cm olur.}$$

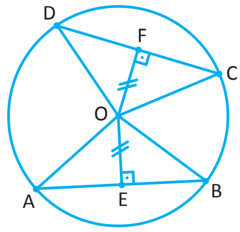
Özellik

3. Bir çemberde eşit uzunluktaki kirişlerin çemberin merkezine olan uzaklıkları eşittir.

İspat

O merkezli çemberde $|AB| = |DC|$ olsun.
$|OD| = |OC| = |OA| = |OB| = r$ olduğundan
OAB ve ODC üçgenleri K.K.K. eşlik teoremine göre eş olurlar.

Buradan eş üçgenlerde, eş kenarlara ait yükseklikler de eş olduğundan $|OE| = |OF|$ olur (Şekil 5.1.11).

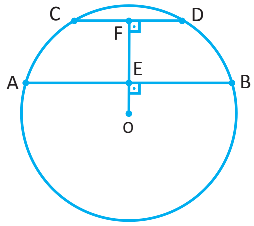


Şekil 5.1.11

Özellik

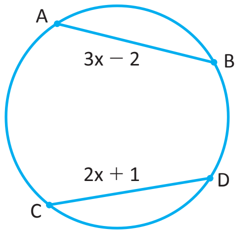
4. Bir çemberdeki farklı iki kirişten merkeze yakın olan daha uzundur (Şekil 5.1.12).

$|OE| < |OF| \Leftrightarrow |AB| > |DC|$ olur.



Şekil 5.1.12

3. ÖRNEK



Şekildeki yarıçapı $r = 8$ cm olan çemberde
$|AB| = (3x - 2)$ cm
$|CD| = (2x + 1)$ cm ve
$[AB]$ kirişinin çemberin merkezine olan uzaklığı, $[CD]$ kirişinin merkeze olan uzaklığından daha kısa olduğuna göre $|CD|$ nun değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

$[AB]$ kirişi, $[CD]$ kirişine göre çemberin merkezine daha yakın ise $|AB| > |CD|$ olur. Buradan

$|AB| > |CD| \Rightarrow 3x - 2 > 2x + 1$
$3x - 2x > 1 + 2$
$x > 3$ olur. **(1)**

Çemberde en uzun kiriş çap olduğundan $|AB| \leq 2r$ olur.

Buradan $|AB| \leq 2r \Rightarrow 3x - 2 \leq 2 \cdot 8$
$3x - 2 \leq 16$
$3x \leq 16 + 2$
$3x \leq 18$
$x \leq 6$ olur. **(2)**

(1) ve **(2)** den $3 < x \leq 6$ yazılabilir.
Buradan $3 < x \leq 6 \Rightarrow 2 \cdot 3 < 2x \leq 2 \cdot 6$
$6 < 2x \leq 12$
$6 + 1 < 2x + 1 \leq 12 + 1$
$7 < |CD| \leq 13$ bulunur.

ALIŞTIRMALAR-1

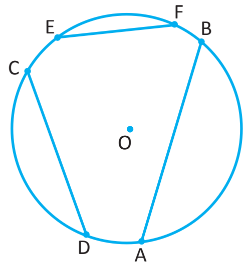
1. Aşağıda merkezleri ve yarıçapları verilen çemberlerin $5x - 12y + 11 = 0$ doğrusuna göre konumlarını inceleyiniz.

a) Merkezi $M_1(-2, -1)$ yarıçapı $r_1 = 3$ cm

b) Merkezi $M_2(4, 1)$ yarıçapı $r_2 = 1$ cm

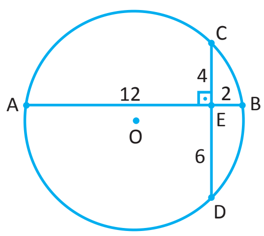
c) Merkezi $M_3(3, 0)$ yarıçapı $r_3 = 2$ cm

2. Şekildeki O merkezli çemberin çapı 30 cm dir.



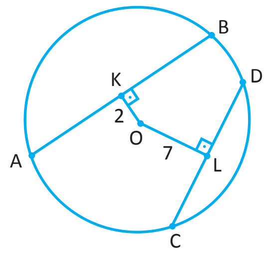
$[AB]$, $[CD]$ ve $[EF]$ kirişlerinin çemberin merkezine olan uzaklıkları sırasıyla 5, 9 ve 12 cm olduğuna göre bu üç kirişin uzunlukları toplamının kaç cm olduğunu bulunuz.

3. Şekildeki O merkezli çemberde
$[AB] \perp [CD]$ ve $[AB] \cap [CD] = \{E\}$ ise



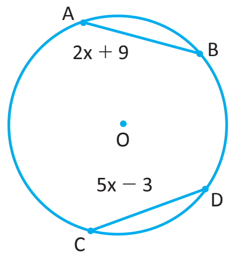
$|AE| = 12$ cm, $|EB| = 2$ cm
$|ED| = 6$ cm ve $|CE| = 4$ cm olduğuna göre çemberin çapının kaç cm olduğunu bulunuz.

4. Şekildeki O merkezli çemberde $[AB]$ ve $[CD]$ kirişleri verilsin.



$2 \cdot |AB| = 3 \cdot |CD|$
$|OK| = 2$ cm ve
$|OL| = 7$ cm
olduğuna göre çemberin yarıçapının kaç cm olduğunu bulunuz.

5. Yarıçapı 16 cm olan şekildeki O merkezli çemberde

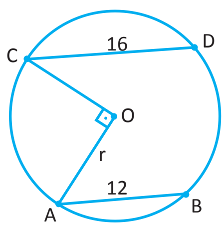


$|AB| = (2x + 9)$ cm,
$|CD| = (5x - 3)$ cm
olduğuna göre

a) $[AB]$ ve $[CD]$ kirişlerinin çemberin merkezine uzaklıklarının eşit olması durumunda $[CD]$ kirişinin uzunluğunu bulunuz.

b) $[CD]$ kirişinin, çemberin merkezine $[AB]$ kirişinden daha yakın olması durumunda x in alabileceği tam sayı değerlerinin toplamını bulunuz.

6.



Şekildeki O merkezli çemberde,
$[AB] \parallel [CD]$
$[AO] \perp [CO]$
$|AB| = 12$ cm ve
$|CD| = 16$ cm
olduğuna göre çemberin çapını bulunuz.

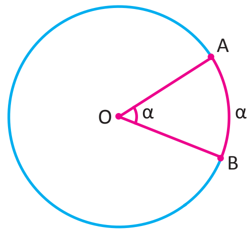
11.5.2. ÇEMBERDE AÇILAR

Çemberde Açı Çeşitleri

Çember üzerinde tanımlanan açı çeşitleri merkez açı, çevre açı, teğet-kiriş açı, iç ve dış açıdır. Bu açıların tanımları, açılar ile gördükleri yayların ölçüleri bakımından ilişkisi aşağıda incelenmiştir.

Tanım

Köşesi çemberin merkezinde olan açıya bu çemberin bir **merkez açısı** denir.
Merkez açının ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsüne eşittir (Şekil 5.2.1).

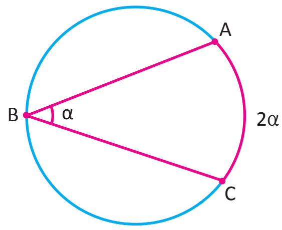


$$m(\widehat{AOB}) = m(\overset{\frown}{AB}) = \alpha$$

Şekil 5.2.1

Köşesi çember üzerinde bulunan ve kolları çemberi iki farklı noktada kesen açıya bu çemberin bir **çevre açısı** denir.

Çevre açının ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşittir (Şekil 5.2.2).

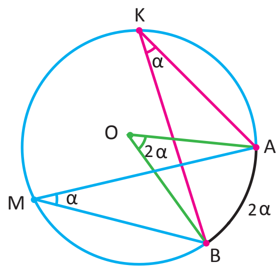


$$m(\widehat{ABC}) = \alpha \Leftrightarrow m(\overset{\frown}{AC}) = 2\alpha$$

Şekil 5.2.2

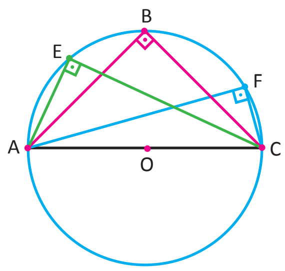
Sonuç

1. Aynı yayı gören çevre açıların ölçüleri eşittir ve aynı yayı gören merkez açının ölçüsü çevre açısının ölçüsünün iki katına eşittir (Şekil 5.2.3).



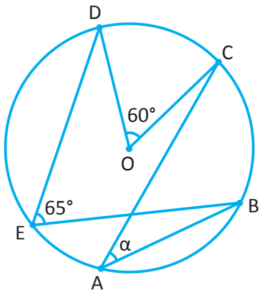
Şekil 5.2.3

2. Çapı gören çevre açının ölçüsü 90° dir (Şekil 5.2.4).



Şekil 5.2.4

1. ÖRNEK



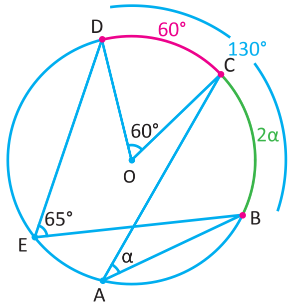
Şekildeki O merkezli çemberde $[AB]$, $[AC]$, $[EB]$ ve $[ED]$ birer kiriştir.

$m(\widehat{DOC}) = 60^\circ$

$m(\widehat{DEB}) = 65^\circ$ olduğuna göre

$m(\widehat{CAB}) = \alpha$ değerini derece cinsinden bulunuz.

ÇÖZÜM



Merkez açının ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsüne eşit olduğundan
$m(\widehat{DOC}) = 60^\circ \Rightarrow m(\overset{\frown}{DC}) = 60^\circ$ olur.

Çevre açının ölçüsü gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşit olduğundan $m(\widehat{DEB}) = 65^\circ \Rightarrow m(\overset{\frown}{DB}) = 2 \cdot 65^\circ = 130^\circ$ ve
$m(\widehat{CAB}) = \alpha \Rightarrow m(\overset{\frown}{CB}) = 2\alpha$ olur. Buradan

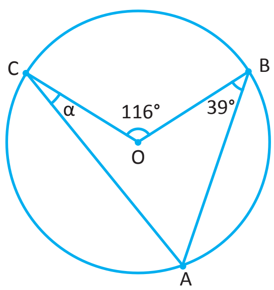
$m(\overset{\frown}{DB}) = m(\overset{\frown}{DC}) + m(\overset{\frown}{CB})$

$130^\circ = 60^\circ + 2\alpha$

$2\alpha = 130^\circ - 60^\circ = 70^\circ \Rightarrow \alpha = 35^\circ$ elde edilir.

Bu durumda $m(\widehat{CAB}) = \alpha = 35^\circ$ bulunur.

2. ÖRNEK



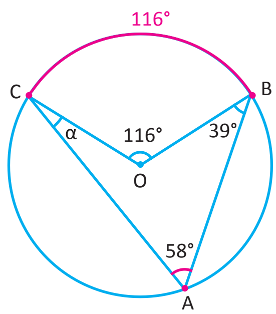
Şekildeki O merkezli çemberde $[AB]$ ve $[AC]$ birer kiriş olmak üzere

$m(\widehat{COB}) = 116^\circ$

$m(\widehat{ABO}) = 39^\circ$ dir.

Buna göre $m(\widehat{OCA}) = \alpha$ değerini derece cinsinden bulunuz.

ÇÖZÜM



$\widehat{COB}$ merkez açısı ve $\widehat{CAB}$ çevre açısı aynı yayı görmektedir. Aynı yayı gören merkez açının ölçüsü, çevre açının ölçüsünün iki katına eşit olduğundan

$m(\widehat{CAB}) = \dfrac{m(\widehat{COB})}{2} = \dfrac{116^\circ}{2} = 58^\circ$ olur.

ABOC içbükey dörtgeninde $116^\circ = \alpha + 58^\circ + 39^\circ$

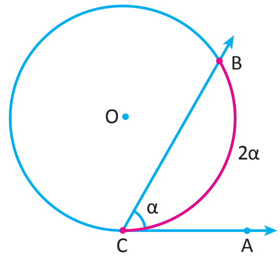
$116^\circ = \alpha + 97^\circ$

$m(\widehat{OCA}) = \alpha = 116^\circ - 97^\circ = 19^\circ$ bulunur.

Tanım

Köşesi çember üzerinde bulunan ve bir teğet ile bir kirişin oluşturduğu açıya **teğet-kiriş açı** denir.

Teğet-kiriş açının ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşittir (Şekil 5.2.5).

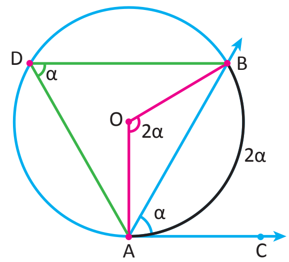


$m(\widehat{ACB}) = \alpha \Leftrightarrow m(\widehat{BC}) = 2\alpha$

Şekil 5.2.5

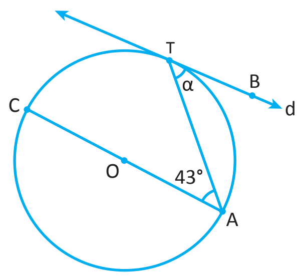
Sonuç

1. Aynı yayı gören çevre açının ölçüsü, teğet-kiriş açının ölçüsüne eşittir (Şekil 5.2.6).
2. Aynı yayı gören teğet-kiriş açının ölçüsü, merkez açının ölçüsünün yarısına eşittir (Şekil 5.2.6).



Şekil 5.2.6

3. ÖRNEK



Şekildeki d doğrusu, O merkezli çembere T noktasında teğettir.

$m(\widehat{CAT}) = 43^\circ$ dir.

Buna göre $m(\widehat{ATB}) = \alpha$ değerini derece cinsinden bulunuz.

ÇÖZÜM

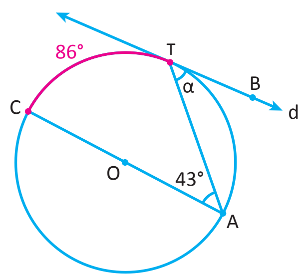
Çevre açının ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsünün yarısıdır. Bu durumda

$m(\widehat{CAT}) = 43^\circ \Rightarrow m(\widehat{CT}) = 86^\circ$ dir.

$[CA]$ çap olduğundan çemberi 180° lik iki eş yaya ayırır.

$m(\widehat{CT}) + m(\widehat{TA}) = 180^\circ$

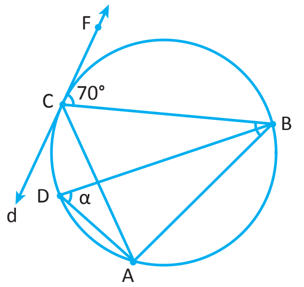
$m(\widehat{TA}) = 180^\circ - 86^\circ = 94^\circ$ elde edilir.



Teğet-kiriş açının ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsünün yarısı olduğundan

$$m(\widehat{ATB}) = \alpha = \frac{94^\circ}{2} = 47^\circ$$ bulunur.

4. ÖRNEK

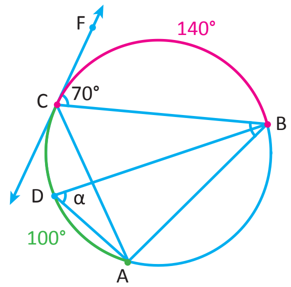


Şekildeki d doğrusu, C noktasında çembere teğettir.
$[AB],[AC],[AD],[BC]$ ve $[BD]$ çembere ait kirişler ve
$m(\widehat{FCB}) = 70^\circ$
$m(\widehat{CBA}) = 50^\circ$ dir.
Buna göre $m(\widehat{BDA}) = \alpha$ değerini derece cinsinden bulunuz.

ÇÖZÜM

Teğet-kiriş açının ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsünün yarısıdır.
Bu durumda $m(\widehat{BCF}) = 70^\circ \Rightarrow m(\widehat{BC}) = 2 \cdot 70^\circ = 140^\circ$ bulunur.

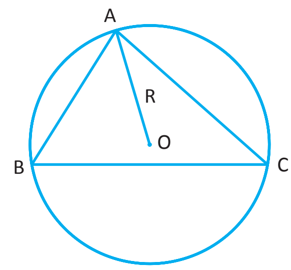
Çevre açının ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsünün yarısı olduğundan
$m(\widehat{CBA}) = 50^\circ \Rightarrow m(\widehat{AC}) = 100^\circ$ ve $m(\widehat{BDA}) = \alpha \Rightarrow m(\widehat{AB}) = 2\alpha$
bulunur. Bu durumda
$m(\widehat{AB}) = 360^\circ - (140^\circ + 100^\circ)$
$2\alpha = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ$ elde edilir.
Bu durumda $m(\widehat{BDA}) = \alpha = 60^\circ$ bulunur.



Sinüs Teoremi

Bir üçgende her kenarın uzunluğu karşısındaki açının sinüs değeri ile doğru orantılıdır. Bu oranın değeri, o üçgenin çevrel çemberinin çapına eşittir. Şekil 5.2.7'de R çevrel çemberin yarıçapı ve ABC üçgeninin kenar uzunlukları a, b, c olmak üzere

$\dfrac{a}{\sin \widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R$ olur.



Şekil 5.2.7

İspat

Şekil 5.2.8'de ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı R olmak üzere çevrel çemberin çapı $|AD| = 2R$ olur.
Çemberde aynı yayı gören çevre açıların ölçüleri eşit olduğundan $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ADC})$ olur.
$[AD]$ çapını gören $\overset{\frown}{ACD}$ nın ölçüsü 90° olduğundan $\overset{\frown}{ACD}$ dik üçgendir. $\overset{\frown}{ACD}$ nde

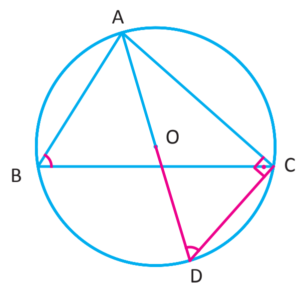
$\sin \widehat{D} = \dfrac{|AC|}{|AD|} = \dfrac{|AC|}{2R} \Rightarrow \sin \widehat{D} = \dfrac{b}{2R}$ bulunur.

$\sin \widehat{D} = \sin \widehat{B}$ olduğundan

$\sin \widehat{B} = \dfrac{b}{2R} \Rightarrow 2R = \dfrac{b}{\sin \widehat{B}}$ elde edilir. Benzer şekilde

$\sin \widehat{C}$ için $2R = \dfrac{c}{\sin \widehat{C}}$ ve $\sin \widehat{A}$ için $2R = \dfrac{a}{\sin \widehat{A}}$ bulunur.

Buna göre $2R = \dfrac{a}{\sin \widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin \widehat{C}}$ eşitliği elde edilir.



Şekil 5.2.8

5. ÖRNEK

Bir $\overset{\frown}{ABC}$ nde $m(\widehat{A}) = 30^\circ$, $m(\widehat{C}) = 15^\circ$ ve $|BC| = 12$ cm ise,

a) $\overset{\frown}{ABC}$ nin çevrel çemberinin yarıçapını cm cinsinden bulunuz.

b) $|AC|$ nu cm cinsinden bulunuz.

ÇÖZÜM

ABC üçgeninde $m(\widehat{B}) = 180^\circ - (30^\circ + 15^\circ) = 135^\circ$ bulunur.

Sinüs teoreminden

a) $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = 2R$

$\dfrac{12}{\sin 30^\circ} = \dfrac{b}{\sin 135^\circ} = 2R$

$\dfrac{12}{\frac{1}{2}} = 2R$

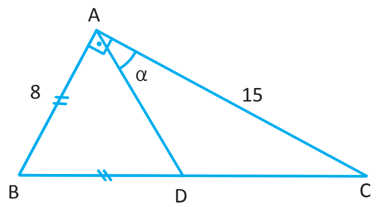
$R = 12$ olur.

b) $\dfrac{|AC|}{\sin 135^\circ} = \dfrac{12}{\sin 30^\circ}$

$\dfrac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{12}{\frac{1}{2}} \Rightarrow b = 12 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 = 12\sqrt{2}$ ise

$|AC| = 12\sqrt{2}$ elde edilir.

6. ÖRNEK



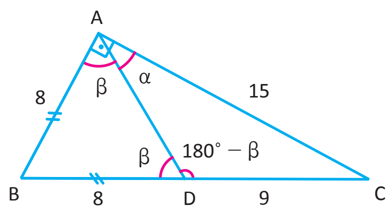
Şekildeki $\overset{\frown}{ABC}$ nde $m(\overset{\frown}{BAC}) = 90^\circ$, $|AC| = 15$ cm,

$|AB| = 8$ cm, $|AB| = |BD|$ ve $m(\overset{\frown}{CAD}) = \alpha$ olmak üzere

a) $\sin\alpha$ değeri kaçtır?

b) $\overset{\frown}{ADB}$ nin çevrel çemberinin çapı kaç cm dir? Bulunuz.

ÇÖZÜM



a) ABC üçgeni özel dik üçgen (8-15-17) olduğundan

$|BC| = 17$ cm olur. $|AB| = |BD| = 8$ cm ise

$|CD| = 17 - 8 = 9$ cm bulunur. $m(\overset{\frown}{DAB}) = \beta$ olmak üzere ADB ikizkenar üçgen olduğundan $m(\overset{\frown}{BAD}) = m(\overset{\frown}{ADB}) = \beta$ olur.

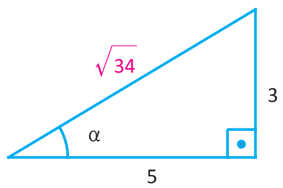
Buradan

$m(\overset{\frown}{ADC}) = 180^\circ - \beta$ dır. $\overset{\frown}{ADC}$ nde Sinüs teoreminden

$\dfrac{9}{\sin\alpha} = \dfrac{15}{\sin(180^\circ - \beta)} \Rightarrow \dfrac{3}{\sin\alpha} = \dfrac{5}{\sin\beta}$ olur. $\alpha + \beta = 90^\circ$

olduğundan

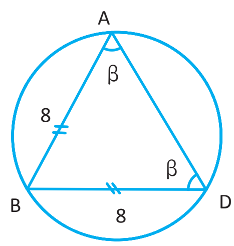
$\dfrac{3}{\sin\alpha} = \dfrac{5}{\cos\alpha} \Rightarrow \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{3}{5}$ olur.



Dik üçgen üzerinde $\tan\alpha$ değerleri yazılırsa Pisagor teoreminden

$y^2 = 5^2 + 3^2 = 25 + 9 \Rightarrow y = \sqrt{34}$ olur.

Buradan $\sin\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{34}}$ bulunur.



b) Çevrel çemberinin çapı

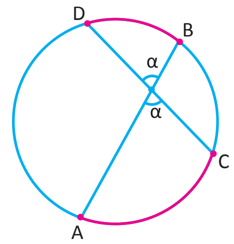
$2R = \dfrac{8}{\sin\beta} = \dfrac{8}{\cos\alpha} = \dfrac{8}{\frac{5}{\sqrt{34}}} = \dfrac{8\sqrt{34}}{5}$ bulunur.

Tanım

Köşe noktası çemberin iç bölgesinde bulunan kesişen iki kirişin oluşturduğu açılardan her birine **iç açı** denir.

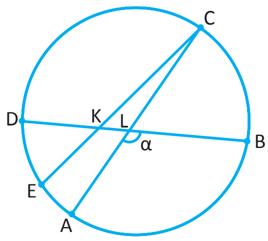
Çemberde bir iç açının ölçüsü, gördüğü yayların ölçüleri toplamının yarısıdır (Şekil 5.2.9).

$$\alpha = \frac{m(\overset{\frown}{AC}) + m(\overset{\frown}{BD})}{2}$$



Şekil 5.2.9

7. ÖRNEK



Şekildeki çemberde $[AC]$ çaptır.

$[AC] \cap [DB] = \{L\}, [EC] \cap [DB] = \{K\}$

$m(\overset{\frown}{DKE}) = 50^\circ, m(\overset{\frown}{ECA}) = x - 15^\circ, m(\overset{\frown}{ED}) = x + 5^\circ$

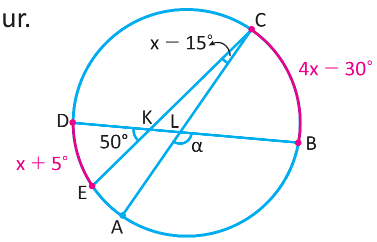
$m(\overset{\frown}{BC}) = 4x - 30^\circ$ veriliyor.

Buna göre $m(\widehat{ALB}) = \alpha$ nın kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$m(\widehat{DKE}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{ED}) + m(\overset{\frown}{BC})}{2} \Rightarrow 50^\circ = \dfrac{x + 5^\circ + 4x - 30^\circ}{2}$

$50^\circ = \dfrac{5x - 25^\circ}{2} \Rightarrow 5x - 25^\circ = 100^\circ \Rightarrow 5x = 100^\circ + 25^\circ = 125^\circ \Rightarrow x = 25^\circ$ olur.



Buradan $m(\overset{\frown}{ED}) = 25^\circ + 5^\circ = 30^\circ$, $m(\overset{\frown}{BC}) = 4 \cdot 25^\circ - 30^\circ = 70^\circ$

ve $m(\overset{\frown}{EA}) = 2 \cdot (25^\circ - 15^\circ) = 20^\circ$ olur.

$[AC]$ çap, $m(\overset{\frown}{ABC}) = 180^\circ$ ve $m(\overset{\frown}{ADC}) = 180^\circ$ olduğundan

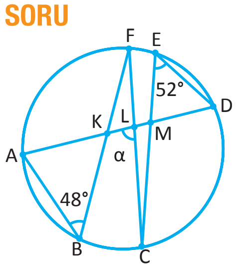
$m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{ABC}) - m(\overset{\frown}{BC}) = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$ ve

$m(\overset{\frown}{DC}) = m(\overset{\frown}{ADC}) - [m(\overset{\frown}{DE}) + m(\overset{\frown}{EA})] = 180^\circ - (30^\circ + 20^\circ) = 130^\circ$ elde edilir.

O hâlde $m(\widehat{ALB}) = \alpha = \dfrac{m(\overset{\frown}{AB}) + m(\overset{\frown}{DC})}{2} = \dfrac{110^\circ + 130^\circ}{2} = \dfrac{240^\circ}{2} = 120^\circ$ bulunur.

Sıra Sizde

SORU



Şekildeki çemberde $[AB], [BF], [CE], [ED]$ kirişler ve $[AD] \cap [FC] = \{L\}$

$m(\widehat{ABF}) = 48^\circ$

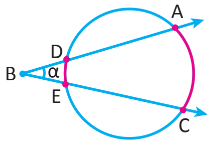
$m(\widehat{DEC}) = 52^\circ$ veriliyor.

Buna göre $m(\widehat{ALC}) = \alpha$ değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

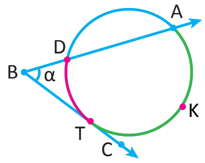
Tanım

Köşesi çemberin dış bölgesinde bulunan ve kolları çemberi en az bir noktada kesen açıya **dış açı** denir.
Bir dış açının ölçüsü, gördüğü yayların ölçüleri farkının mutlak değerinin yarısıdır.
Şekil 5.2.10, 5.2.11 ve 5.2.12'yi inceleyiniz.



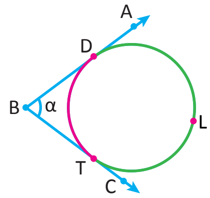
$$\alpha = \frac{\left|m(\overset{\frown}{AC}) - m(\overset{\frown}{DE})\right|}{2}$$

Şekil 5.2.10



$$\alpha = \frac{\left|m(\overset{\frown}{DT}) - m(\overset{\frown}{AKT})\right|}{2}$$

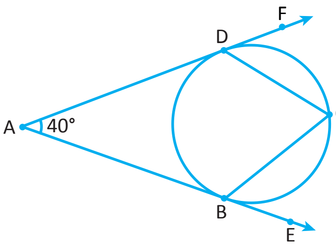
Şekil 5.2.11



$$\alpha = \frac{\left|m(\overset{\frown}{DT}) - m(\overset{\frown}{DLT})\right|}{2}$$

Şekil 5.2.12

8. ÖRNEK



$[AD$ ve $[AB$, O merkezli çembere sırasıyla D ve B noktalarında teğet $|BC| = |DC|$ ve

$m(\widehat{DAB}) = 40°$ olduğuna göre $m(\widehat{DCB}) - m(\widehat{CBE})$ değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$m(\widehat{DAB}) = 40°$ olduğundan

$40° = \dfrac{\left|m(\overset{\frown}{BCD}) - m(\overset{\frown}{BD})\right|}{2} \Rightarrow \left|m(\overset{\frown}{BCD}) - m(\overset{\frown}{BD})\right| = 80°$ olur.

$m(\overset{\frown}{BCD}) > m(\overset{\frown}{BD}) \Rightarrow m(\overset{\frown}{BCD}) - m(\overset{\frown}{BD}) = 80°$ ve

$m(\overset{\frown}{BCD}) + m(\overset{\frown}{BD}) = 360°$ olduğundan

$$\begin{array}{rl} & m(\overset{\frown}{BCD}) + m(\overset{\frown}{BD}) = 360° \\ + & m(\overset{\frown}{BCD}) - m(\overset{\frown}{BD}) = 80° \\ \hline \end{array}$$

$2 \cdot m(\overset{\frown}{BCD}) = 440° \Rightarrow m(\overset{\frown}{BCD}) = 220°$ ve $m(\overset{\frown}{BD}) = 140°$ ve $m(\widehat{DCB}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BD})}{2} = \dfrac{140°}{2} = 70°$ bulunur.

$|BC| = |DC|$ olduğundan

$m(\overset{\frown}{BC}) = m(\overset{\frown}{CD}) = \dfrac{220°}{2} = 110°$ ve

$$\begin{aligned} m(\widehat{CBE}) = m(\widehat{FDC}) &= \frac{m(\overset{\frown}{BC})}{2} \\ &= \frac{110°}{2} \\ &= 55° \end{aligned}$$

O hâlde $m(\widehat{DCB}) - m(\widehat{CBE}) = 70° - 55° = 15°$ bulunur.

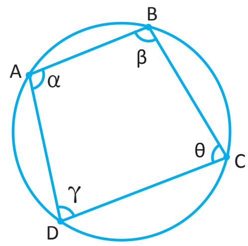
Kirişler Dörtgeni

Tanım

Köşeleri aynı çember üzerinde olan dörtgene **kirişler dörtgeni** denir.

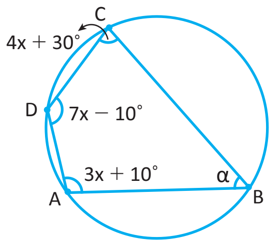
Kirişler dörtgeninde karşılıklı açılar bütünlerdir (Şekil 5.2.13).

$\alpha + \theta = \beta + \gamma = 180^\circ$



Şekil 5.2.13

9. ÖRNEK



Şekildeki ABCD kirişler dörtgeninde

$m(\widehat{A}) = 3x + 10^\circ$

$m(\widehat{C}) = 4x + 30^\circ$

$m(\widehat{D}) = 7x - 10^\circ$ olduğuna göre

$m(\widehat{B}) = \alpha$ değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

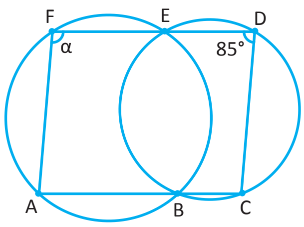
Kirişler dörtgeninde karşılıklı açılar bütünler olduğundan

$$m(\widehat{A}) + m(\widehat{C}) = 3x + 10^\circ + 4x + 30^\circ = 180^\circ$$
$$7x + 40^\circ = 180^\circ$$
$$7x = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ \Rightarrow x = 20^\circ \text{ olur. Buradan}$$

$m(\widehat{D}) = 7 \cdot 20^\circ - 10^\circ = 140^\circ - 10^\circ = 130^\circ$ elde edilir. Bu durumda

$m(\widehat{B}) = \alpha = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$ bulunur.

10. ÖRNEK

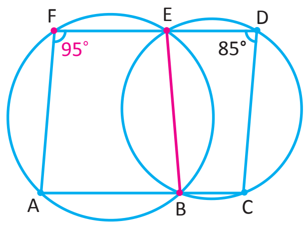


Şekildeki F, E, D ile A, B, C noktaları doğrusal ve çemberler B, E noktalarında kesişmektedir.

$m(\overset{\frown}{EDC}) = 85^\circ$ olduğuna göre

$m(\overset{\frown}{EFA}) = \alpha$ değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



E ve B noktaları birleştirildiğinde ABEF ve BCDE kirişler dörtgenleri elde edilir. Kirişler dörtgeninde karşılıklı açılar bütünlerdir.

BCDE kirişler dörtgeninde $m(\widehat{D}) + m(\widehat{B}) = 180^\circ$ olduğundan

$85^\circ + m(\widehat{B}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{B}) = 180^\circ - 85^\circ = 95^\circ$ olur.

$\overset{\frown}{EBC}$ ve $\overset{\frown}{ABE}$ komşu bütünler olduğundan $m(\overset{\frown}{ABE}) = 85^\circ$ olur.

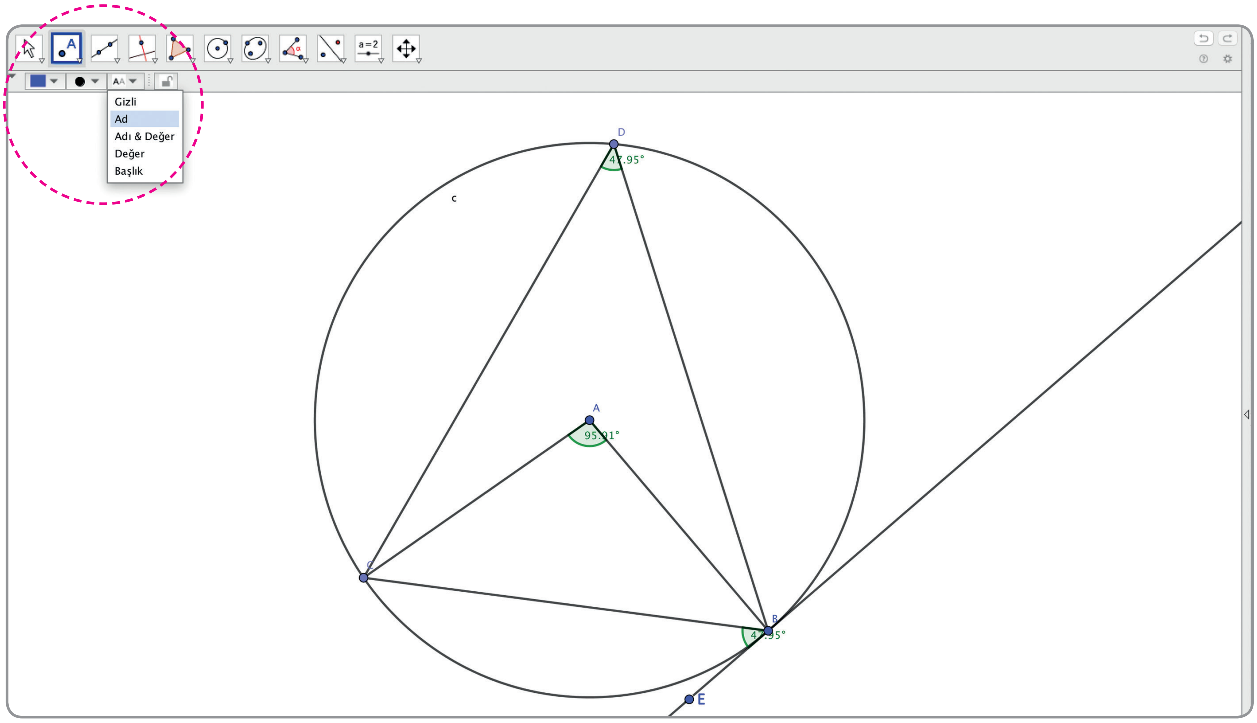
ABEF kirişler dörtgeninde

$m(\overset{\frown}{ABE}) = 85^\circ \Rightarrow m(\widehat{F}) = \alpha = 180^\circ - 85^\circ = 95^\circ$ bulunur.

Teknoloji Uygulaması

Görsel 5.2.1'de GeoGebra programı kullanılarak bir çemberin merkez, çevre ve teğet-kiriş açılarının ölçüleri arasındaki ilişki incelenmiştir.

Geometri	Programı çalıştırdığınızda **Geometri** kutucuğunu seçiniz.
	Nokta isimlerinin ekranda görünür olması için Görsel 5.2.1'deki işaretlenen kısımdan "Ad" seçeneğini aktifleştiriniz.
	Nokta aracını seçiniz. A ve B noktalarını belirleyiniz
	Merkez ve Bir Noktadan Geçen Çember aracını seçiniz. Çemberin merkezini A ve geçtiği noktayı B olarak seçiniz.
	Doğru Parçası aracını seçiniz. A ve B noktalarını birleştiriniz.
	Dik Doğru aracını seçiniz. AB doğru parçasını ve B noktasını seçiniz.
	Nokta aracını seçiniz. Çember üzerinde C ve D noktalarını belirleyiniz. Oluşturduğunuz teğet doğrusunda bir E noktası belirleyiniz.
	Doğru Parçası aracını seçiniz. AC, BC, BD ve CD doğru parçalarını oluşturunuz.
	Açı aracını seçiniz. Sırasıyla BAC, BDC ve EBC açılarınım ölçülerini belirleyiniz.
	Taşı aracını seçiniz. A, B, C ve D noktalarının yerlerini değiştirerek çemberde ve oluşan açılardaki değişimleri inceleyiniz.

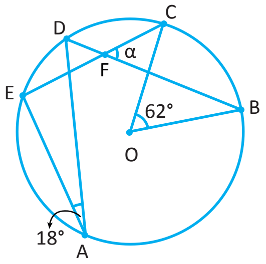


Görsel 5.2.1

GeoGebra uygulamasını yaptığınızda aynı yayı gören teğet-kiriş açı ve çevre açıların ölçülerinin eşit olduğuna ve bu yayı gören merkez açının ölçüsünün yarısına eşit olduğuna dikkat ediniz.

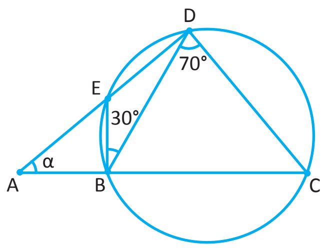
ALIŞTIRMALAR-2

1. Şekildeki O merkezli çemberde $[EC]$ ve $[DB]$ kiriş



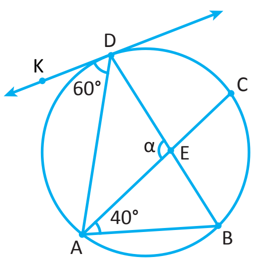
$m(\overset{\frown}{COB}) = 62^\circ$
$m(\overset{\frown}{EAD}) = 18^\circ$
olduğuna göre
$m(\overset{\frown}{CFB}) = \alpha$ nın kaç derece olduğunu bulunuz.

2. Şekildeki çemberde $[EB] \perp [AC]$ ve A, E, D ve A, B, C noktaları doğrusaldır.



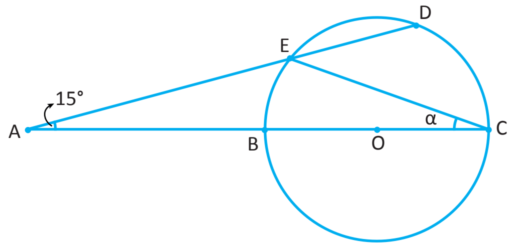
$m(\overset{\frown}{EBD}) = 30^\circ$ ve
$m(\overset{\frown}{BDC}) = 70^\circ$
olduğuna göre
$m(\overset{\frown}{DAC}) = \alpha$ nın kaç derece olduğunu bulunuz.

3. KD doğrusu çembere D noktasında teğettir.



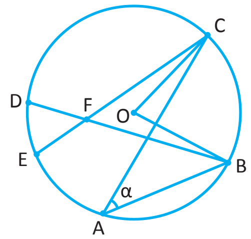
$[AC] \cap [BD] = \{E\}$
$m(\overset{\frown}{EAB}) = 40^\circ$,
$m(\overset{\frown}{KDA}) = 60^\circ$
olduğuna göre
$m(\overset{\frown}{AED}) = \alpha$ nın kaç derece olduğunu bulunuz.

4.



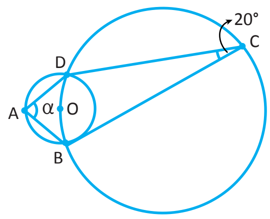
Yukarıdaki O merkezli Ç çemberinde
$[AD] \cap Ç = \{E, D\}$, $[AC] \cap Ç = \{B, C\}$
$m(\overset{\frown}{EAB}) = 15^\circ$, $m(\overset{\frown}{ED}) = m(\overset{\frown}{DC})$ olduğuna göre $m(\overset{\frown}{ECO}) = \alpha$ nın kaç derece olduğunu bulunuz.

5.



Yukarıdaki O merkezli çemberde $[AC]$, $[BD]$ ve $[EC]$ kiriş ve
$m(\overset{\frown}{BC}) = 5 \cdot m(\overset{\frown}{DE})$,
$m(\overset{\frown}{EFB}) = 3 \cdot m(\overset{\frown}{CFB})$ olduğuna göre
$m(\overset{\frown}{BAC})$ nün kaç derece olduğunu bulunuz.

6. Şekildeki O merkezli küçük çember büyük çember ile B ve D noktalarında kesişmektedir.



$m(\overset{\frown}{DCB}) = 20^\circ$
olduğuna göre
$m(\overset{\frown}{BAD}) = \alpha$ nın kaç derece olduğunu bulunuz.

11.5.3. ÇEMBERDE TEĞET

Çemberde Teğetin Özellikleri

Özellik

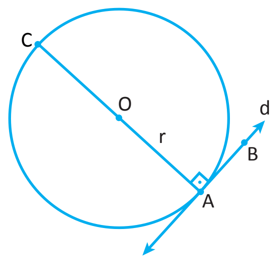
1. Bir çembere herhangi bir noktasından çizilen teğet, değme noktasında yarıçapa diktir.

İspat

Şekil 5.3.1'de d doğrusu O merkezli çembere A noktasında teğet olsun. Teğetin değme noktasından geçen $[AC]$ çapı çizilirse çember iki eş parçaya bölünür.

Bu durumda $m(\overset{\frown}{AC}) = 180^\circ$ olur. $\widehat{CAB}$ teğet-kiriş açı olduğundan

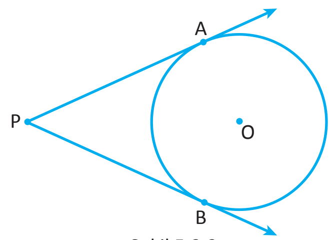
$m(\widehat{CAB}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{AC})}{2} = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ bulunur.



Şekil 5.3.1

Tanım

Çembere, dışındaki bir noktadan iki teğet çizilebilir (Şekil 5.3.2).
Bu teğetlerin çembere değme noktaları A ve B ise $[PA]$ ve $[PB]$ na **teğet parçası** denir.



Şekil 5.3.2

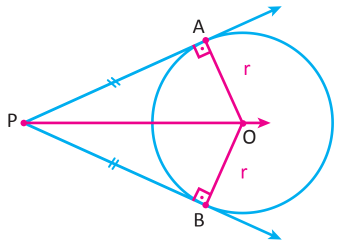
Özellik

2. Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları birbirine eşittir.

İspat

O merkezli çembere, dışındaki P noktasından A ve B noktalarında teğet olan $[PA$ ve $[PB$ çizilmiş olsun. Çember üzerindeki değme noktalarından çemberin merkezine $[OA]$ ve $[OB]$ çizilirse bu doğru parçaları yarıçap olduğundan $|OA| = |OB| = r$ olur.

$[OP]$ çizilirse $[OA] \perp [PA$ ve $[OB] \perp [PB$ olduğundan OAP ve OBP üçgenleri dik üçgen olur.



Şekil 5.3.3

OAP dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa $|OP|^2 = |AP|^2 + |OA|^2$ **(1)**

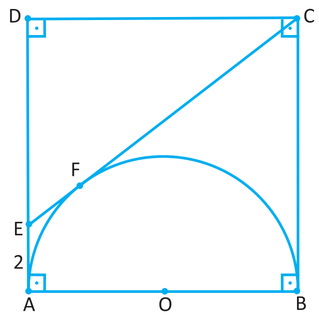
OBP dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa $|OP|^2 = |BP|^2 + |OB|^2$ olur. **(2)**

(1) ve **(2)** eşitliklerinden $|AP|^2 + |OA|^2 = |BP|^2 + |OB|^2$ elde edilir.

$|AP|^2 + r^2 = |BP|^2 + r^2 \Rightarrow |AP|^2 = |BP|^2$

Buradan $|AP| = |BP|$ bulunur (Şekil 5.3.3).

1. ÖRNEK



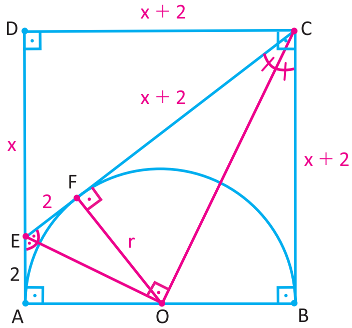
Şekildeki ABCD karesinde $[CE]$, $[AB]$ çaplı O merkezli yarım çembere F noktasında teğettir. $|AE| = 2$ cm olduğuna göre

a) $|DE|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

b) $|CF|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

c) $|AO|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçaları eşit olduğundan $|AE| = |EF| = 2$ cm olur.

$|DE| = x$ alınırsa ABCD kare olduğundan $|BC| = |FC| = x + 2$ olur.

$\widehat{DEC}$ dik üçgen olduğundan Pisagor teoremi uygulanırsa

$$|EC|^2 = |DC|^2 + |DE|^2$$

$$(x+4)^2 = (x+2)^2 + x^2 \Rightarrow \cancel{x^2} + 8x + 16 = \cancel{x^2} + 4x + 4 + x^2$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0 \text{ olur.}$$

Denklem çözülürse $x_1 = 6$ veya $x_2 = -2$ bulunur.

Uzunluk negatif olamayacağından dolayı $x_1 = 6$ alınırsa

a) $|DE| = 6$ cm

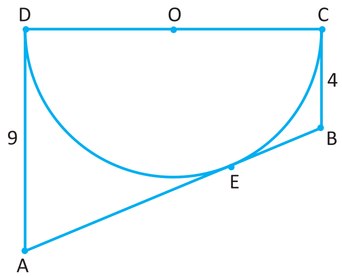
b) $|CF| = x + 2 \Rightarrow |CF| = 6 + 2 = 8$ cm

c) $\widehat{AEF}$ ve $\widehat{BCF}$ nın açıortayları, O noktasında dik kesişir. Bu durumda OEC dik üçgen olur.

Öklid teoremine göre $|OF|^2 = |EF| \cdot |CF|$ $\quad (|OF| = |AO|)$

$$r^2 = 2 \cdot 8 = 16 \Rightarrow r = 4 \text{ cm olur.}$$

2. ÖRNEK

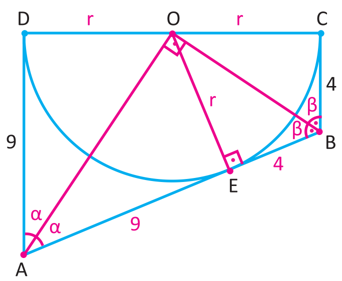


Yandaki şekilde O merkezli yarım çember ABCD dik yamuğuna D, E ve C noktalarında teğettir.

$|BC| = 4$ cm

$|DA| = 9$ cm olduğuna göre çemberin yarıçapının kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



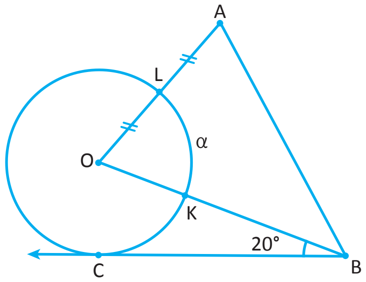
$[OE]$ yarıçapı çizilirse $[OE] \perp [AB]$ olur. Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları eşit olduğundan $|AD| = |AE| = 9$ cm ve $|BC| = |BE| = 4$ cm olur.

$[AO]$ ve $[BO]$ çizilirse açıortay olur. Bir yamukta yan kenarlara ait açıların açıortayları dik kesiştiğinden $\widehat{AOB}$ dik üçgendir. Bu üçgende Öklid teoremi uygulanırsa

$|OE|^2 = |AE| \cdot |EB|$

$r^2 = 9 \cdot 4 = 36 \Rightarrow r = 6$ cm bulunur.

3. ÖRNEK

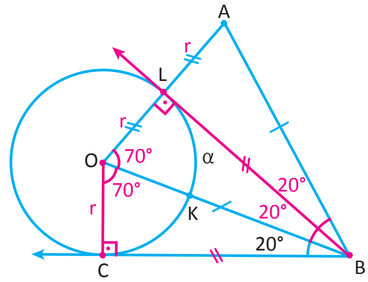


Şekilde $[BC$, O merkezli çembere C noktasında teğettir. A, L, O noktaları doğrusal ve
$|AL| = |LO|$
$|AB| = |BO|$
$m(\widehat{OBC}) = 20^\circ$ olduğuna göre
$m(\widehat{LK}) = \alpha$ değerinin kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Çemberde $[OC]$ yarıçapı çizilirse $[OC] \perp [BC$ olur. Buradan

$$m(\widehat{BOC}) = 180^\circ - (90^\circ + 20^\circ)$$
$$= 180^\circ - 110^\circ$$
$$= 70^\circ \text{ olur.}$$



AOB üçgeni, $|AB| = |BO|$ olduğundan ikizkenar üçgendir.
AOB ikizkenar üçgeninde $[BL]$ kenarortayı çizilirse $[BL]$ aynı zamanda yükseklik ve açıortay olur.

$|OL| = |AL| = |OC| = r$ olduğundan $[BL]$ çembere teğettir.
Çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları eşit olduğundan $|BL| = |BC|$ olur.

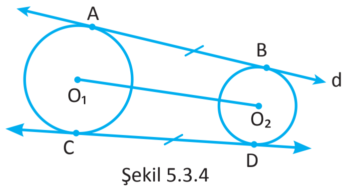
$|OL| = |OC| = r$ olduğundan $\widehat{BLO} \cong \widehat{BCO}$ (K.K.K) olur.

Buna göre
$m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{BOL}) = m(\widehat{LK}) = \alpha = 70^\circ$ bulunur.

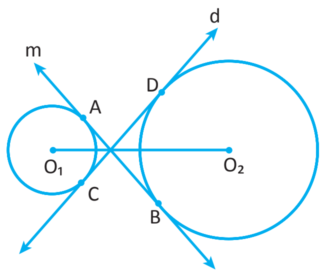
Tanım

Aynı düzlemde iki çembere de teğet olan doğruya **çemberlerin ortak teğeti** denir.

İki çemberin merkezlerini birleştiren doğru parçasını kesmeyen ortak teğetlere ortak dış teğet denir (Şekil 5.3.4).
$|AB| = |CD|$ olur.



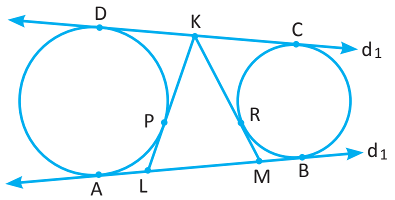
Şekil 5.3.4



Şekil 5.3.5

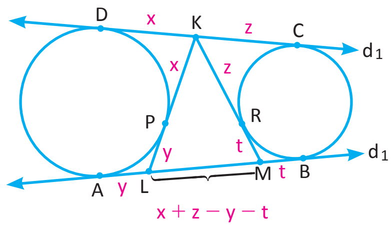
İki çemberin merkezlerini birleştiren doğru parçasını kesen ortak teğetlere **ortak iç teğet** denir (Şekil 5.3.5).
$|AB| = |CD|$ olur.

4. ÖRNEK



Şekildeki çemberlerde $[AB]$ ve $[CD]$ ortak dış teğetlerdir. KLM üçgeninin çevresi 18 cm olduğuna göre $[AB]$ nın uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



İki çemberin ortak dış teğet parçalarınının uzunlukları eşit olduğundan $|AB| = |CD|$ olur.

Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları birbirine eşit olduğundan

$|KD| = |KP| = x$

$|AL| = |LP| = y$

$|KR| = |KC| = z$

$|MB| = |MR| = t$ olarak alınırsa

$|LM| = |DC| - (y + t)$

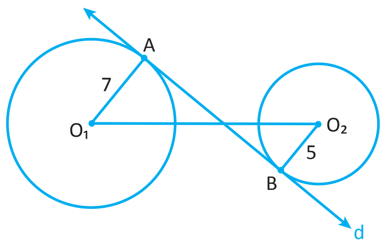
$|LM| = x + z - y - t$ olur.

KLM üçgeninin çevresi 18 cm olduğundan

$x + \cancel{y} + x + z - \cancel{y} - \cancel{t} + z + \cancel{t} = 18$

$2 \cdot (x + z) = 18 \Rightarrow x + z = |AB| = 9$ cm bulunur.

5. ÖRNEK



Şekildeki d doğrusu, O_1 ve O_2 merkezli çemberlerin ortak iç teğetidir.

$|O_1A| = 7$ cm

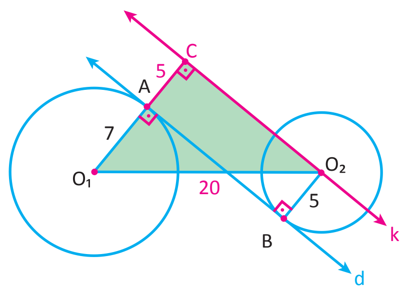
$|O_2B| = 5$ cm

$|O_1O_2| = 20$ cm olduğuna göre

$[AB]$ nın uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

O_1 ve O_2 merkezli çemberlerin yarıçapları sırasıyla r_1 ve r_2 olsun. $[O_1A] \perp d$ ve $[O_2B] \perp d$ olur. $[O_1A]$ uzatılıp O_2 merkezinden geçen $d \parallel k$ olacak şekilde k doğrusu çizildiğinde kesiştikleri nokta C olarak adlandırılırsa ABO_2C dikdörtgen, $\widehat{O_1CO_2}$ dik üçgen olur.



Bu durumda $|AC| = |BO_2| = 5$ cm ve $|CO_2| = |AB|$ olur. O_1CO_2 dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

$|O_1O_2|^2 = |O_1C|^2 + |CO_2|^2$

$20^2 = (r_1 + r_2)^2 + |AB|^2$

$400 = (7 + 5)^2 + |AB|^2$

$|AB|^2 = 400 - 12^2 = 400 - 144 = 256 \Rightarrow |AB| = 16$ cm bulunur.

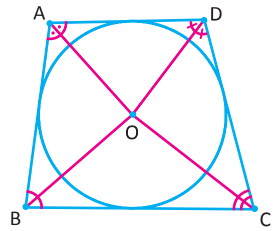
Teğetler Dörtgeni ve İç Teğet Çember

Tanım

Kenarları bir çembere teğet olan dörtgene **teğetler dörtgeni** denir.

Bir çokgenin tüm kenarlarına içten teğet olan çembere çokgenin **iç teğet çemberi** denir.

Teğetler dörtgeninin iç açıortaylarının kesişme noktası iç teğet çemberinin merkezidir (Şekil 5.3.6).

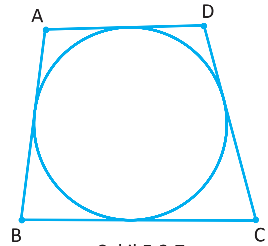


Şekil 5.3.6

Özellik

1. Teğetler dörtgeninin karşılıklı kenarlarının uzunlukları toplamı eşittir (Şekil 5.3.7).

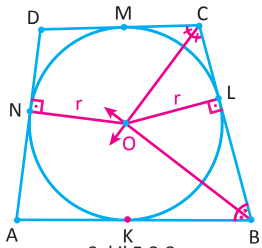
$|AB| + |DC| = |BC| + |AD|$



Şekil 5.3.7

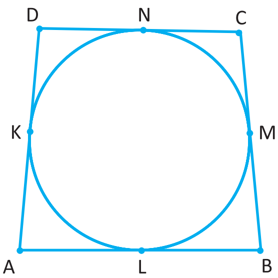
2. Teğetler dörtgeninin alanı, çevresinin uzunluğu ile iç teğet çemberinin yarıçapının çarpımının yarısına eşittir (Şekil 5.3.8).

$$A(ABCD) = \frac{Ç(ABCD) \cdot r}{2}$$



Şekil 5.3.8

6. ÖRNEK



Şekildeki ABCD teğetler dörtgeninde

$|AB| = 12$ cm

$|DN| = 7$ cm

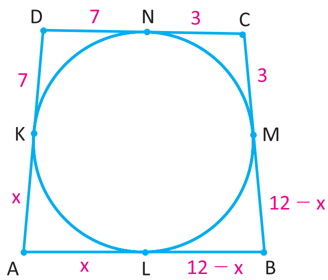
$|CM| = 3$ cm dir.

Buna göre ABCD teğetler dörtgeninin çevresinin kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Çembere dışındaki A, B, C ve D noktalarından çizilen teğet parçalarının uzunlukları eşit olduğundan $|DN| = |DK| = 7$ cm

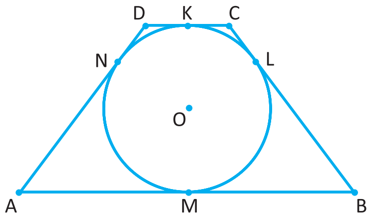
$|CN| = |CM| = 3$ cm olur.



$|AL| = |AK| = x$ alınırsa $|AB| = 12$ cm olduğundan $|MB| = |LB| = 12 - x$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} Ç(ABCD) &= |AB| + |BC| + |CD| + |DA| \\ &= 12 + 15 - \cancel{x} + 10 + \cancel{x} + 7 \\ &= 44 \text{ cm bulunur.} \end{aligned}$$

7. ÖRNEK

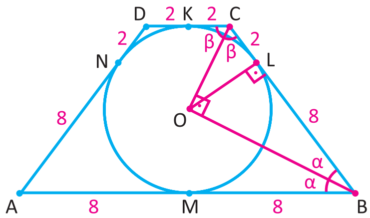


Şekilde O merkezli çember K, L, M ve N noktalarında ABCD ikizkenar yamuğunun kenarlarına teğettir.

$|AB| = 16$ cm

$|DC| = 4$ cm olduğuna göre çemberin yarıçapının kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



ABCD ikizkenar yamuk olduğundan $|MA| = |MB| = 8$ cm ve $|DK| = |KC| = 2$ cm dir.

Çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları eşit olduğundan $|MA| = |NA| = 8$ cm, $|MB| = |LB| = 8$ cm, $|KC| = |LC| = 2$ cm ve $|KD| = |ND| = 2$ cm olur.

Teğetler dörtgeninin herhangi iki iç açısının açıortaylarının kesişme noktası, iç teğet çemberin merkezidir.

B ve C açılarının açıortayları çizilirse $[BO] \perp [CO]$ olduğundan $\widehat{COB}$ dik üçgen olur.

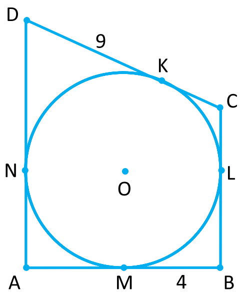
$[OL]$ yarıçapı çizilirse $[OL] \perp [BC]$ olduğundan $\widehat{COB}$ dik üçgeninde Öklid teoremi uygulanırsa

$|OL|^2 = |BL| \cdot |LC|$

$r^2 = 8 \cdot 2 = 16 \Rightarrow r = 4$ cm bulunur.

Sıra Sizde

SORU



ABCD dörtgeni, teğetler dörtgenidir.

$|MB| = 4$ cm

$|DK| = 9$ cm veriliyor.

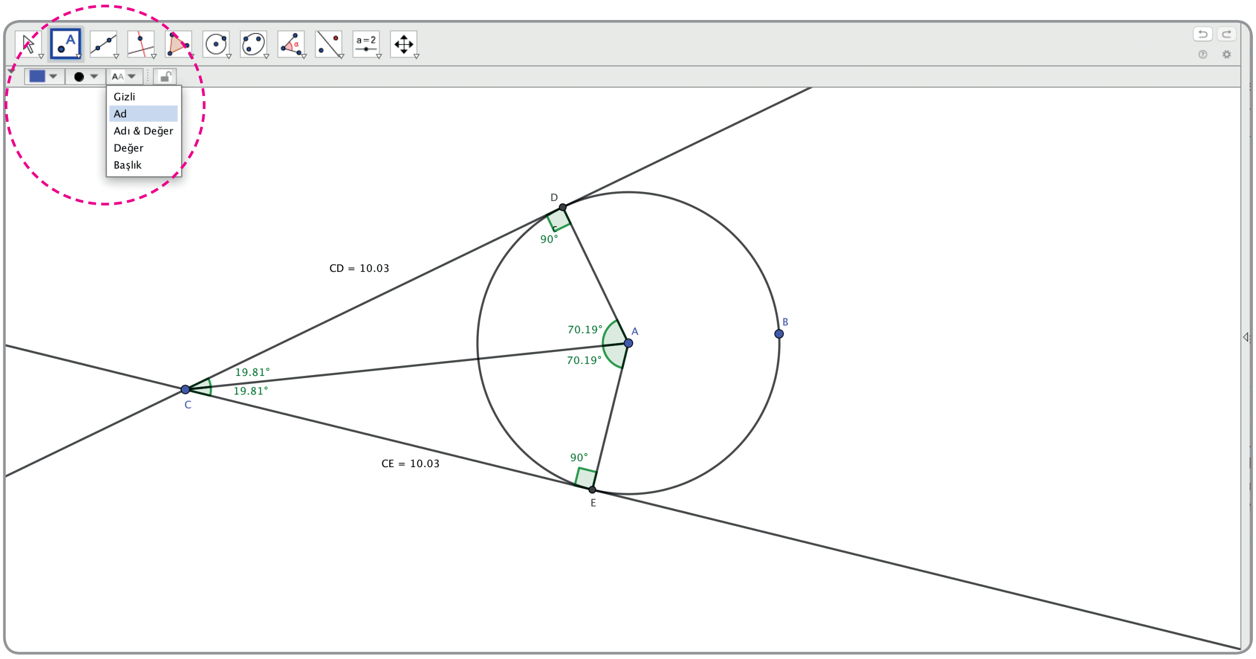
Buna göre çemberin yarıçapının kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Teknoloji Uygulaması

Görsel 5.3.1'de GeoGebra programı kullanılarak çemberin dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları incelenmiştir.

Geometri	Programı çalıştırdığınızda **Geometri** kutucuğunu seçiniz.
	Merkez ve Bir Noktadan Geçen Çember aracını seçiniz. Çemberin merkezini ve geçtiği noktayı seçiniz.
	Nokta isimlerinin ekranda görünür olması için Görsel 5.3.1'deki işaretlenen kısımdan "Ad" seçeneğini aktifleştiriniz.
	Nokta aracını seçiniz. Oluşturduğunuz çember dışında bir C noktası belirleyiniz.
	Teğet aracını seçiniz. C noktasını ve çemberi seçerek teğet doğrularını oluşturunuz.
	Kesiştir aracını seçiniz. Oluşturduğunuz teğet doğrulardan birincisi ve çemberi, daha sonra teğet doğrulardan ikincisi ile çemberi seçerek teğetlerin D ve E değme noktalarını belirleyiniz.
	Doğru parçası aracını seçiniz. AD, AE ve AC doğru parçalarını oluşturunuz.
	Açı aracını seçiniz. Sırasıyla ACE, ADC, CAD, EAC, ve CEA açılarınım ölçülerini belirleyiniz.
	Uzaklık veya Uzunluk aracını seçiniz. Önce C ve D yi, daha sonra C ile E noktalarını seçiniz. CD ve CE doğru parçalarının uzunluklarını belirleyiniz.
	Taşı aracını seçiniz. A, B ve C noktalarının yerlerini değiştirerek teğet parçalarının uzunlukları, çemberde ve oluşan açılardaki değişimleri inceleyiniz.

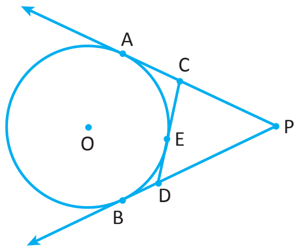


Görsel 5.3.1

GeoGebra uygulamasını yaptığınızda teğet parçalarının uzunluklarının eşit ve teğet çizilen nokta ile çemberin merkezini birleştiren doğru parçasının açıortay olduğuna dikkat ediniz.

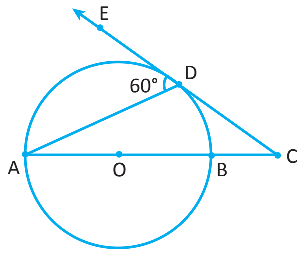
ALIŞTIRMALAR-3

1. Aşağıdaki şekilde $[PA$, $[PB$ ve $[CD]$ O merkezli çembere sırasıyla A, B ve E noktalarında teğettir.



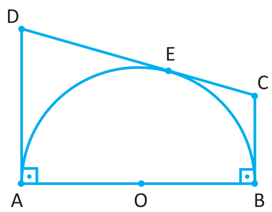
$|PB| = 24$ cm ise $\overparen{DPC}$ nin çevresinin kaç cm olduğunu bulunuz.

2. Aşağıdaki şekilde $[CE$, O merkezli çembere D noktasında teğet ve A, O, B, C noktaları doğrusal olmak üzere



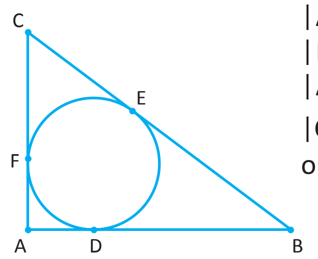
$m(\widehat{ADE}) = 60^\circ$ ve
$|AB| = 10$ cm
olduğuna göre
$|DC|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

3. Yandaki şekilde $[AD]$, $[BC]$ ve $[DC]$ sırasıyla A, B ve C noktalarında O merkezli yarım çembere teğettir.



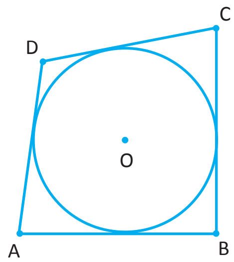
$|AD| = 8$ cm
$|BC| = 5$ cm ve
$[AB] \perp [AD]$
$[AB] \perp [BC]$
olduğuna göre çemberin yarıçapı kaç cm dir?

4. Aşağıdaki şekilde ABC üçgeninin iç teğet çemberi çizilmiştir.



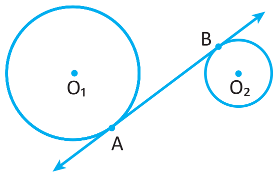
$|AB| = 16$ cm
$|BC| = 20$ cm
$|AC| = 12$ cm ise
$|CE|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

5.



ABCD bir teğetler dörtgeni
$|AB| = 17$ cm
$|CD| = 15$ cm
olduğuna göre ABCD dörtgeninin çevresinin kaç cm olduğunu bulunuz.

6. Aşağıdaki şekilde O_1 ve O_2 merkezli çemberlerin ortak iç teğeti AB doğrusudur.



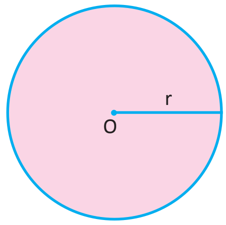
O_1 merkezli çemberin yarıçapı 6 cm,
O_2 merkezli çemberin yarıçapı 3 cm ve
$|AB| = 12$ cm ise $|O_1O_2|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

11.5.4. DAİRENİN ÇEVRESİ VE ALANI

Dairede Çevre ve Alan

Tanım

Bir çember ve iç bölgesinin birleşim kümesine **daire** denir (Şekil 5.4.1).



Şekil 5.4.1

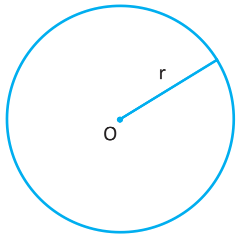
Dairenin Çevresi

Bütün çemberlerde $\dfrac{\text{Çevre uzunluğu}}{\text{Çap}} = 3,141592...$

oranı sabit bir sayıdır. Bu sabit sayı π ile gösterilir. π sayısı irrasyonel bir sayıdır.

Buna göre r yarıçaplı bir çemberin çevre uzunluğu Ç ise

$\dfrac{Ç}{2r} = \pi \Rightarrow Ç = 2\pi r$ bulunur (Şekil 5.4.2).

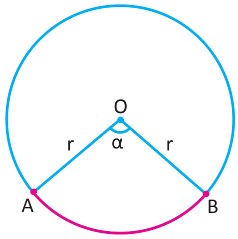


Şekil 5.4.2

Yay Uzunluğu

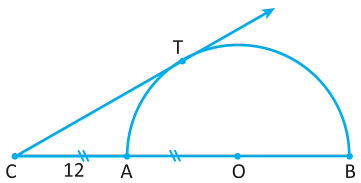
Yarıçapı r olan O merkezli bir çemberde $\overset{\frown}{AB}$ yayının uzunluğu $|\overset{\frown}{AB}|$ şeklinde gösterilir. AB yayını gören merkez açı α olarak seçilirse yay uzunluğu, bu yayı gören merkez açı ile orantılı olduğundan

$|\overset{\frown}{AB}| = 2\pi r \cdot \dfrac{\alpha}{360^\circ}$ olur (Şekil 5.4.3).



Şekil 5.4.3

1. ÖRNEK

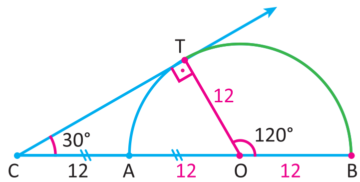


Şekildeki O merkezli yarım çemberde C, A, O, B noktaları doğrusal [CT, T noktasında çembere teğet ve $|AO| = |CA| = 12$ cm dir.
Buna göre $\overset{\frown}{BT}$ yayının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Çemberde [OT] yarıçapı çizilirse $[OT] \perp [CT$ dir. $|AO| = |CA| = 12$ cm olduğundan $|OT| = 12$ cm ve ($|OC| = 24$ cm elde edilir.)

Buradan $\overset{\frown}{OTC}$ 30° - 60° - 90° üçgenidir.



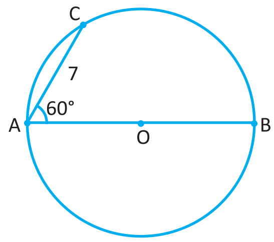
$m(\widehat{AOT}) = 60^\circ$ olduğundan

$m(\widehat{TOB}) = 120^\circ$ olur.

Buna göre $\overset{\frown}{BT}$ yayının uzunluğu

$|\overset{\frown}{BT}| = \dfrac{2\pi r \cdot 120^\circ}{360^\circ} = \dfrac{2\pi \cdot 12}{3} = 8\pi$ cm bulunur.

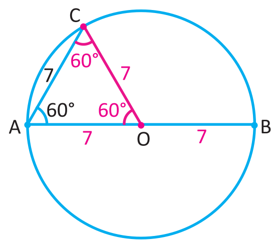
2. ÖRNEK



Şekildeki O merkezli çemberde
$m(\widehat{BAC}) = 60^\circ$
$|AC| = 7$ cm dir.
Buna göre çemberin çevresinin kaç cm olduğunu bulunuz.

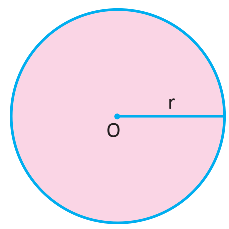
ÇÖZÜM

Çemberde $[OC]$ çizilirse $|OC| = |OA| = r$ ve
$m(\widehat{OAC}) = m(\widehat{OCA}) = 60^\circ$ olur. Bu durumda $\widehat{OAC}$ eşkenar üçgen ve
$r = 7$ cm bulunur. Buna göre çemberin çevresi
$Ç = 2\pi r = 2\pi \cdot 7 = 14\pi$ cm bulunur.



Dairenin Alanı

r yarıçaplı dairenin alanı
$A = \pi r^2$ ile hesaplanır (Şekil 5.4.4).

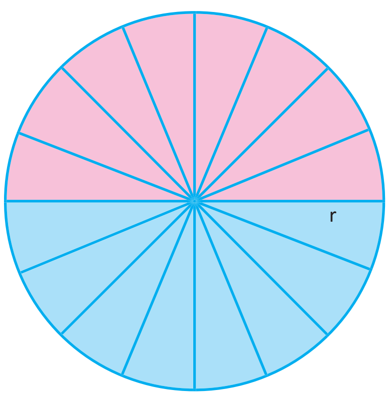


Şekil 5.4.4

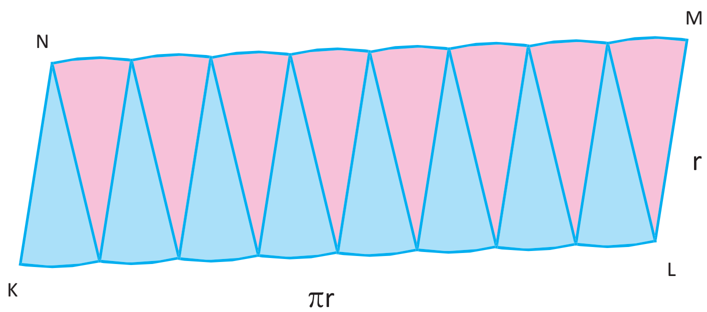
Şekil 5.4.5'te daire yeteri kadar eş daire dilimlerine ayrılarak kesilsin. Kesilen dilimler şekildeki gibi birleştirilirse dikdörtgene benzer bir şekil oluşur. Buradan dikdörtgenin alanından dairenin alanı aşağıdaki gibi elde edilir (Şekil 5.4.6).

$A(KLMN) = |KL| \cdot |LM| = \left(\dfrac{\text{Dairenin Çevresi}}{2}\right) \cdot r = \pi r \cdot r = \pi r^2$ olur.

Buna göre O merkezli r yarıçaplı dairenin alanı $A = \pi r^2$ bulunur.



Şekil 5.4.5



Şekil 5.4.6

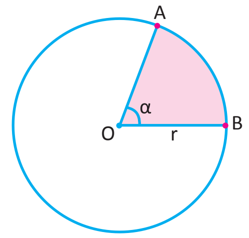
Daire Dilimi ve Alanı

Tanım

Bir dairede α merkez açısının kolları ve bu açının gördüğü yay ile sınırlanan bölgeye **daire dilimi** denir (Şekil 5.4.7).

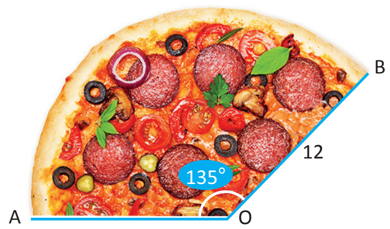
Yarıçapı r ve merkez açısının ölçüsü α olan daire diliminin alanı merkez açının ölçüsü ile orantılı olduğundan

$A = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{|\overset{\frown}{AB}|}{2} \cdot r$ ile hesaplanır.



Şekil 5.4.7

3. ÖRNEK



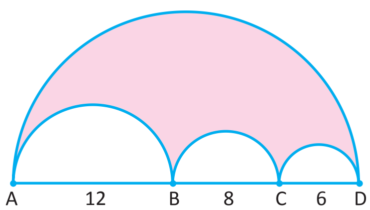
Şekildeki pizza dilimi daire dilimi şeklinde olup
$m(\widehat{AOB}) = 135^\circ$
$|OB| = 12$ cm dir.
Buna göre pizza diliminin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Pizza diliminin alanı $= \pi \cdot 12^2 \cdot \frac{135^\circ}{360^\circ}$

$= \pi \cdot 144 \cdot \frac{3}{8} = 54\pi \ cm^2$ olur.

4. ÖRNEK



Şekilde $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ ve $[AD]$ birer çap olmak üzere
$|AB| = 12$ cm
$|BC| = 8$ cm
$|CD| = 6$ cm veriliyor.
Buna göre boyalı bölgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

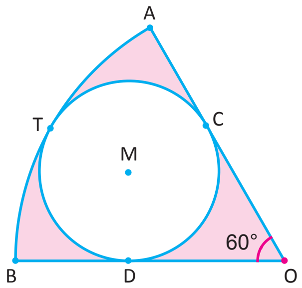
ÇÖZÜM

$|AB| = 12$ cm olduğundan $[AB]$ çaplı yarım dairenin yarıçapı $r_{[AB]} = 6$ cm
$|BC| = 8$ cm olduğundan $[BC]$ çaplı yarım dairenin yarıçapı $r_{[BC]} = 4$ cm
$|CD| = 6$ cm olduğundan $[CD]$ çaplı yarım dairenin yarıçapı $r_{[CD]} = 3$ cm
$|AD| = |AB| + |BC| + |CD| = 12 + 8 + 6 = 26$ cm olduğundan $[AD]$ çaplı yarım dairenin yarıçapı $r_{[AD]} = 13$ cm bulunur.
Boyalı alanı bulmak için $[AD]$ çaplı yarım dairenin alanından diğer yarım dairelerin alanları çıkarılmalıdır. Buna göre

Boyalı alan $= \frac{\pi \cdot 13^2}{2} - \left(\frac{\pi \cdot 6^2}{2} + \frac{\pi \cdot 4^2}{2} + \frac{\pi \cdot 3^2}{2}\right)$

$= \frac{\pi}{2} \cdot (169 - 36 - 16 - 9) = \frac{\pi}{2} \cdot 108 = 54\pi \ cm^2$ bulunur.

5. ÖRNEK



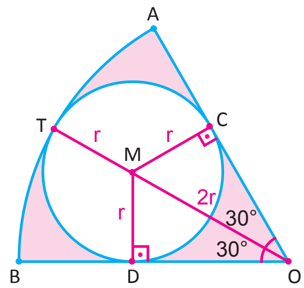
Şekildeki O merkezli daire dilimi, içindeki M merkezli daireye C, D ve T noktalarında teğet ve

$m(\widehat{AOB}) = 60^\circ$

$|\overset{\frown}{AB}| = 4\pi$ cm veriliyor.

Buna göre boyalı bölgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



M merkezli dairenin yarıçapı r olsun.

M merkezli çembere ait $[MT]$, $[MC]$ ve $[MD]$ yarıçapları çizilirse

$[MC] \perp [AO]$ ve $[MD] \perp [BO]$; $[OM]$ açıortay

olduğundan $m(\widehat{MOD}) = m(\widehat{MOC}) = 30^\circ$ elde edilir.

Buradan $\widehat{MDO}$ dik üçgeninde $|MD| = r$ olduğundan $|MO| = 2r$ olur.

Buna göre O merkezli çemberin yarıçapı $|OM| + |MT| = 2r + r = 3r$ olur.

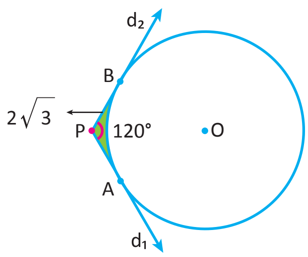
$|\overset{\frown}{AB}| = 2\pi \cdot 3r \cdot \dfrac{60^\circ}{360^\circ}$

$4\pi = \pi r \Rightarrow r = 4$ cm bulunur.

Bu durumda O merkezli çemberin yarıçapı $3r = 3 \cdot 4 = 12$ cm olur.

Buradan boyalı alan $= \pi \cdot 12^2 \cdot \dfrac{60^\circ}{360^\circ} - \pi \cdot 4^2 = 24\pi - 16\pi = 8\pi \text{ cm}^2$ olarak bulunur.

6. ÖRNEK

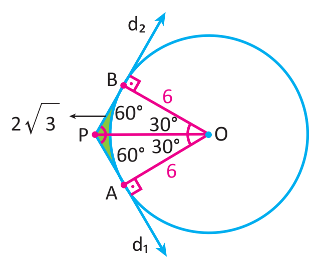


Şekildeki O merkezli çembere, dışındaki P noktasından çizilen d_1 ve d_2 ışınları çembere, sırasıyla A ve B noktalarında teğettir.

$m(\widehat{APB}) = 120^\circ$

$|PB| = 2\sqrt{3}$ cm olduğuna göre boyalı bölgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Şekildeki gibi çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları eşit olduğundan $|PA| = |PB| = 2\sqrt{3}$ cm olur.

OA, OB yarıçapları ve $[OP]$ çizilirse

$m(\widehat{POB}) = m(\widehat{POA}) = 30^\circ$ ve

$m(\widehat{BPO}) = m(\widehat{OPA}) = 60^\circ$ olur.

$\widehat{PAO}$ ve $\widehat{PBO}$ $(30^\circ - 60^\circ - 90^\circ)$ dik üçgenlerinde

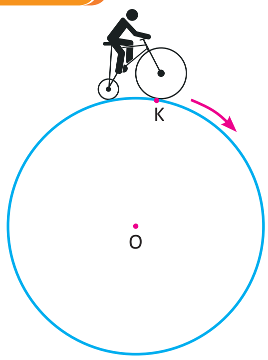
$|PA| = |PB| = 2\sqrt{3}$ cm olduğundan

$|OA| = |OB| = 6$ cm olur.

Buna göre

Boyalı alan $= A(PAOB) - A(AOB) = 2 \cdot A(\widehat{PAO}) - \pi \cdot 6^2 \cdot \dfrac{60^\circ}{360^\circ} = 2 \cdot \dfrac{2\sqrt{3} \cdot 6}{2} - 6\pi = 12\sqrt{3} - 6\pi \text{ cm}^2$

7. ÖRNEK



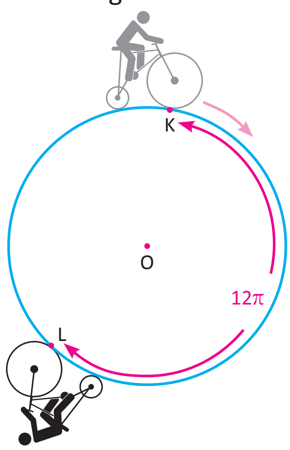
Görseldeki gösterici; ön tekerleğinin çapı 100 cm, arka tekerleğinin çapı 40 cm olan bisiklet ile O merkezli yarıçapı $r = 10$ m olan çember piste teğet olacak şekilde K noktasından başlayarak ok yönünde hareket ediyor. Buna göre

a) Gösterici, bisiklet ile pistin etrafında 1 tur attığında bisikletin ön tekerleğinin dönme sayısının arka tekerleğinin dönme sayısına oranını bulunuz.

b) Gösterici, bisiklet ile 52π m yol gittiğinde geldiği nokta L olduğuna göre $\overset{\frown}{KL}$ nı gören merkez açının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Gösterici, bisiklet ile pistin etrafında 1 tur attığında pistin çevresi kadar yol gider. Buradan pistin çevresi $= 2\pi \cdot 10 = 20\pi$ m olur. Bisikletin ön tekerleğinin çevresi $Ç_1$, arka tekerleğinin çevresi $Ç_2$ olsun. Göstericinin bindiği bisikletin ön ve arka tekerleğinin metre cinsinden çevresi bulunursa ön tekerleğin yarıçapı 0,5 m, arka tekerleğin yarıçapı 0,2 m olur. Buradan
$Ç_1 = 2\pi \cdot 0,5 = \pi$ m ve $Ç_2 = 2\pi \cdot 0,2 = 0,4\pi$ m olur.
Buna göre gösterici bisiklet ile pistin etrafında 1 tur attığında bisikletin ön tekerleği $\dfrac{20\pi}{\pi} = 20$ tur, arka tekerleği $\dfrac{20\pi}{0,4\pi} = 50$ tur atar.
Buradan gösterici bisiklet ile pistin etrafında 1 tur attığında bisikletin ön tekerleğinin dönme sayısının arka tekerleğinin dönme sayısına oranı $\dfrac{20}{50} = \dfrac{2}{5}$ bulunur.



b) Pistin çevresi 20π m olduğundan gösterici bisiklet ile 52π m yol gittiğinde

$$\begin{array}{r|l} 52\pi & 20\pi \\ \hline -40\pi & 2 \\ 12\pi & \end{array}$$

2 tam tur ve 12π m yol gitmiş olur.
Buradan $|\overset{\frown}{KL}| = 12\pi$ m olur.
Buna göre $m(\overset{\frown}{KL}) = \dfrac{12\pi}{20\pi} \cdot 360^\circ = 216^\circ$ bulunur.

Tarih Köşesi

Archimedes (Arşimet),(Görsel 5.4.1) MÖ 290-280 ile MÖ 212-211 yıllarında Syrakusa'da (Siraküza) yaşamış eski Yunan matematikçisi ve mucididir.

Arşimet'in bugüne ulaşan ve dokuz eserinden biri olan ''Dairenin Ölçümü''nde bir çemberin içine ve çevresine çizdiği düzgün çokgenler yardımıyla pi (π) sayısının değerinin 3+1/7 ile 3+10/7 arasında olduğunu belirtmiştir.

Bu değerler, ondalık gösterimleriyle yazılırsa π sayısının 3,14285 ile 3,14084 sayıları arasında olduğu görülür. Bu iki değerin ortalaması alınırsa π sayısının yaklaşık değeri 3,14185 değeri çıkar ki Arşimet'in bulduğu bu değer, π sayısının gerçek değerinin ilk dört basamağı ile aynıdır.

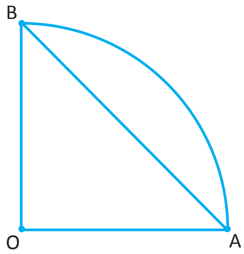
Kaynak: Ana Britannica C 2, s. 307

Görsel 5.4.1: Archimedes

ALIŞTIRMALAR-4

1. Bir traktörün ön tekerleğinin çapı 120 cm, arka tekerleğinin yarıçapı 100 cm dir. Arka tekerlek 30 tam tur dönme yaptığında ön tekerleğin kaç tam tur dönme yaptığını bulunuz.

2.

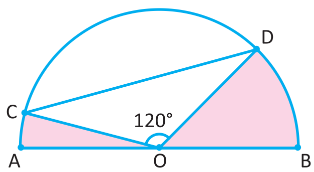


O merkezli çeyrek çemberde

$|\overset{\frown}{AB}| = 8\pi$ cm

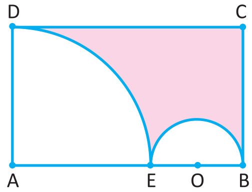
olduğuna göre $[AB]$ nın uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

3.



Yandaki şekilde verilen O merkezli yarım dairede $|DC| = 10\sqrt{3}$ cm ve $m(\widehat{DOC}) = 120^\circ$ olduğuna göre boyalı bölgelerin alanları toplamının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

4. Aşağıdaki şekilde ABCD dikdörtgeni A merkezli çeyrek daire ile O merkezli yarım daireye dıştan teğettir.



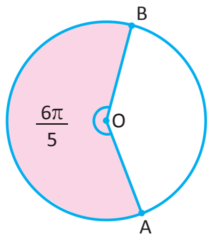
$|DC| = 20$ cm ve

$|BC| = 12$ cm

olduğuna göre boyalı bölgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

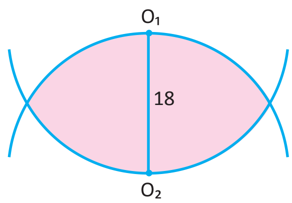
(π yerine 3 alınız.)

5. Aşağıdaki O merkezli daire diliminin merkez açısının ölçüsü $\frac{6\pi}{5}$ radyandır.



Boyalı bölgenin alanı 30π cm^2 olduğuna göre çemberin yarıçapının kaç cm olduğunu bulunuz.

6. O_1 ve O_2 merkezli eş dairelerin kesişmeleri ile elde edilen boyalı bölge aşağıda verilmiştir.



$|O_1O_2| = 18$ cm olduğuna göre boyalı bölgenin çevre uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A) Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerlere uygun sözcük ya da değerleri yazınız.

1. Çemberin merkezinden herhangi bir kirişine indirilen dikme, kirişi .... parçaya ayırır.

2. Çemberde herhangi bir kirişin orta dikmesi çemberin .... geçer.

3. Çapı gören çevre açının ölçüsü .... derecedir.

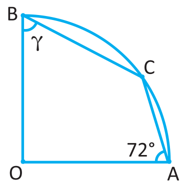
4. Bir çembere herhangi bir noktasından çizilen teğet değme noktasında .... diktir.

5. İki çemberin merkezini birleştiren doğru parçasını kesmeyen ortak teğetlere .... denir.

B) Aşağıda numaralar ile verilen açıları, harf ile verilen açılarla eşleştiriniz.

6.

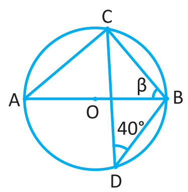
a)



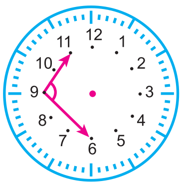
Çeyrek çember

1.

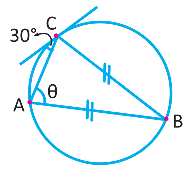
b)



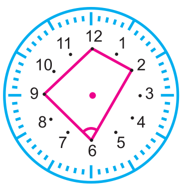
2.



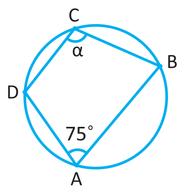
c)



3.

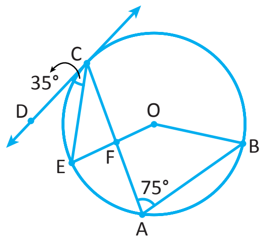


ç)



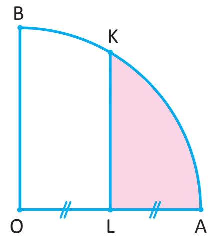
C) Aşağıdaki soruların cevaplarını boş bırakılan yerlere yazınız.

7. Şekildeki d doğrusu O merkezli çembere C noktasında teğettir.



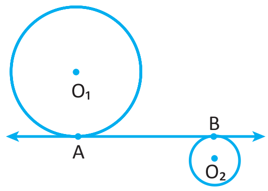
$[AC] \cap [EO] = \{F\}$
$m(\widehat{DCE}) = 35^\circ$ ve
$m(\widehat{CAB}) = 75^\circ$
olduğuna göre
$m(\widehat{EOB})$ kaç derece olduğunu bulunuz.

8. Şekilde O çeyrek çemberin merkezidir.



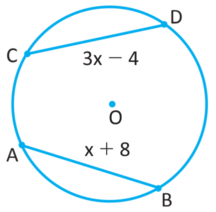
$[KL] \perp [OA]$
$|OL| = |AL| = 4$ cm
olduğuna göre boyalı bölgenin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

9. Şekilde AB doğrusu, O_1 ve O_2 merkezli çemberlere sırasıyla A ve B noktalarında içten teğettir.



$|O_1O_2| = 25$ cm
$|AB| = 24$ cm
olduğuna göre çemberler arasındaki en kısa mesafenin kaç cm olduğunu bulunuz.

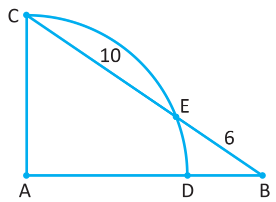
Ç) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruları okuyunuz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

10. 

Şekilde O merkezli ve 25 cm yarıçaplı çemberin merkezine eşit uzaklıktaki AB ve CD kirişleri verilmiştir.

Buna göre O noktasının CD kirişine olan en kısa uzaklığı kaç cm dir?

A) 7 B) 12 C) 18 D) 20 E) 24

11. 

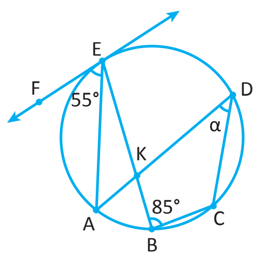
Yandaki şekilde A merkezli çeyrek çember verilmiştir.

C, E, B ve A, D, B noktaları doğrusaldır.

$|CE| = 10$ cm ve $|EB| = 6$ cm olduğuna göre çeyrek çemberin yarıçapı kaç cm dir?

A) $4\sqrt{5}$ B) 5 C) $5\sqrt{5}$ D) 6 E) $6\sqrt{5}$

12. Aşağıda FE doğrusu çembere E noktasında teğet



$[AD] \cap [BE] = \{K\}$,

$m(\widehat{FEA}) = 55^\circ$,

$m(\widehat{EBC}) = 85^\circ$

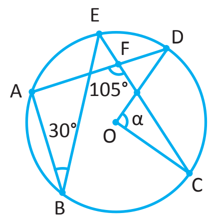
olduğuna göre

$\mathbf{m(\widehat{ADC}) = \alpha}$

kaç derecedir?

A) 30 B) 40 C) 45 D) 50 E) 55

13. Şekilde O merkezli çemberde



$[AD] \cap [EC] = \{F\}$

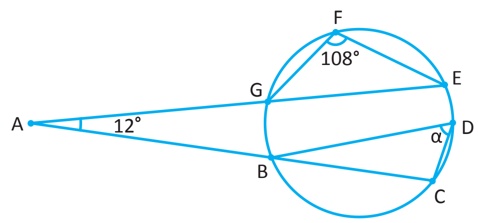
$m(\widehat{AFC}) = 105^\circ$

$m(\widehat{ABE}) = 30^\circ$

olduğuna göre

$\mathbf{m(\widehat{DOC}) = \alpha}$ kaç derecedir?

A) 45 B) 50 C) 65 D) 75 E) 90

14. 

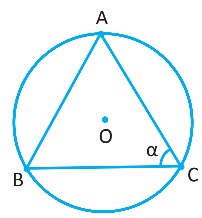
Yukarıdaki çemberde A, G, E ve A, B, C doğrusal

$m(\widehat{EAC}) = 12^\circ$, $m(\widehat{EFG}) = 108^\circ$,

$3 \cdot m(\widehat{EDC}) = 5 \cdot m(\widehat{GB})$ olduğuna göre

$\mathbf{m(\widehat{BDC}) = \alpha}$ kaç derecedir?

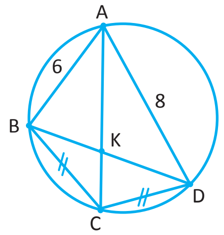
A) 45 B) 50 C) 55 D) 60 E) 65

15. 

Şekilde O merkezli bir çemberin merkezinin $4\sqrt{3}$ cm uzunluğundaki $[AB]$ kirişine olan uzaklığı 2 birim olduğuna göre $m(\widehat{C}) = \alpha$ kaç derecedir?

A) 60 B) 62 C) 64 D) 65 E) 70

16. Şekilde ABCD kirişler dörtgenidir.



$|AB| = 6$ cm

$|AD| = 8$ cm

$|BD| = 7$ cm ve

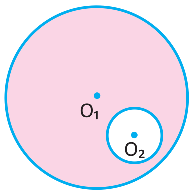
$[AC] \cap [BD] = \{K\}$

veriliyor.

Buna göre Çevre(ABCD) kaç cm dir?

A) 22 B) 25 C) 28 D) 32 E) 36

17.

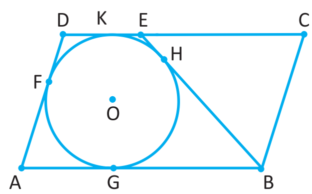


Şekildeki O_1 ve O_2 merkezli çemberlerin çevre uzunlukları toplamı 24π cm dir. Boyalı bölgenin alanı 36π cm^2 veriliyor.

Buna göre O_1 merkezli dairenin yarıçapı kaç cm dir?

A) $\frac{19}{2}$ B) 9 C) $\frac{17}{2}$ D) 8 E) $\frac{15}{2}$

18. Aşağıdaki şekilde ABED yamuk, ABCD paralelkenardır. Yamuğun kenarları O merkezli çembere F, G, H, K noktalarında teğettir.



$|AB| = 18$ cm,

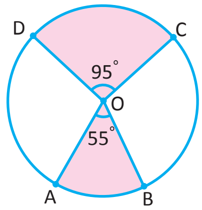
$|DE| = 7$ cm

olduğuna göre

$\widehat{BCE}$ nin çevresinin uzunluğu kaç cm dir?

A) 25 B) 28 C) 32 D) 36 E) 40

19. Şekildeki O merkezli dairede



$m(\widehat{AOB}) = 55°$

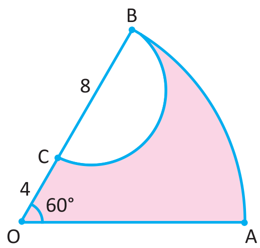
$m(\widehat{DOC}) = 95°$

ve boyalı olmayan daire dilimlerinin alanları toplamı 49π cm^2 veriliyor.

Buna göre dairenin yarıçapı kaç cm dir?

A) $2\sqrt{19}$ B) $2\sqrt{21}$ C) $3\sqrt{19}$ D) $3\sqrt{21}$ E) 15

20. O merkezli daire diliminde



$m(\widehat{AOB}) = 60°$

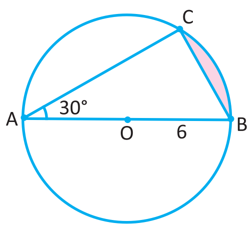
$|OC| = 4$ cm

$|CB| = 8$ cm dir.

$[BC]$, yarım dairenin çapı olduğuna göre boyalı bölgenin alanı kaç cm^2 dir?

A) 14π B) 15π C) 16π D) 17π E) 18π

21. Şekildeki O merkezli $[AB]$ çaplı dairede



$m(\widehat{BAC}) = 30°$

$|OB| = 6$ cm

olarak veriliyor.

Buna göre boyalı bölgenin alanı kaç cm^2 dir?

A) $6\pi - 7\sqrt{3}$ B) $8\pi - 4\sqrt{3}$ C) $9\pi - 6\sqrt{3}$ D) $6\pi - 9\sqrt{3}$ E) $8\pi - 10\sqrt{3}$

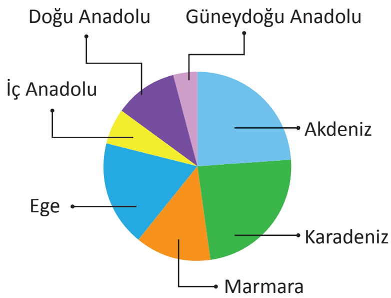
D) 22 ve 23. soruları aşağıda verilen ortak metne ve grafiğe göre cevaplandırınız.

Yanda Türkiye'nin yedi coğrafi bölgesinin orman varlığı dairesel grafik olarak verilmiştir. Grafiğe göre

I) Karadeniz ve Ege Bölgesi'nin toplam orman varlığı Türkiye'deki ormanların %42 si kadardır.

II) Akdeniz Bölgesi'ndeki orman varlığı, Türkiye'deki orman varlığının %24 ü kadardır.

III) İç Anadolu ve Ege Bölgesi'nin toplam orman varlığı Akdeniz Bölgesi'nin orman varlığına eşittir.



22. Ege Bölgesi'ndeki orman varlığının Karadeniz Bölgesi'ndeki orman varlığına oranı $\frac{3}{4}$ olduğuna göre Karadeniz Bölgesi'ndeki orman varlığı kaç derecelik bir açı ile gösterilebilir?

23. Marmara, Güneydoğu Anadolu ve Doğu Anadolu Bölgesi'nin toplam orman varlığının yüzdelik değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

E) 24 ve 25. soruları aşağıda verilen ortak metne göre cevaplandırınız.

Nazlı, doğum gününü 19 arkadaşıyla kutlamaktadır.
Bu amaçla doğum günü için yarıçapı 15 cm olan bir doğum günü pastası yaptırmıştır. Hediye takdimi öncesi Nazlı, doğum günü pastasını 20 yerine 18 eş parçaya böldüğünü fark ediyor. Buna göre

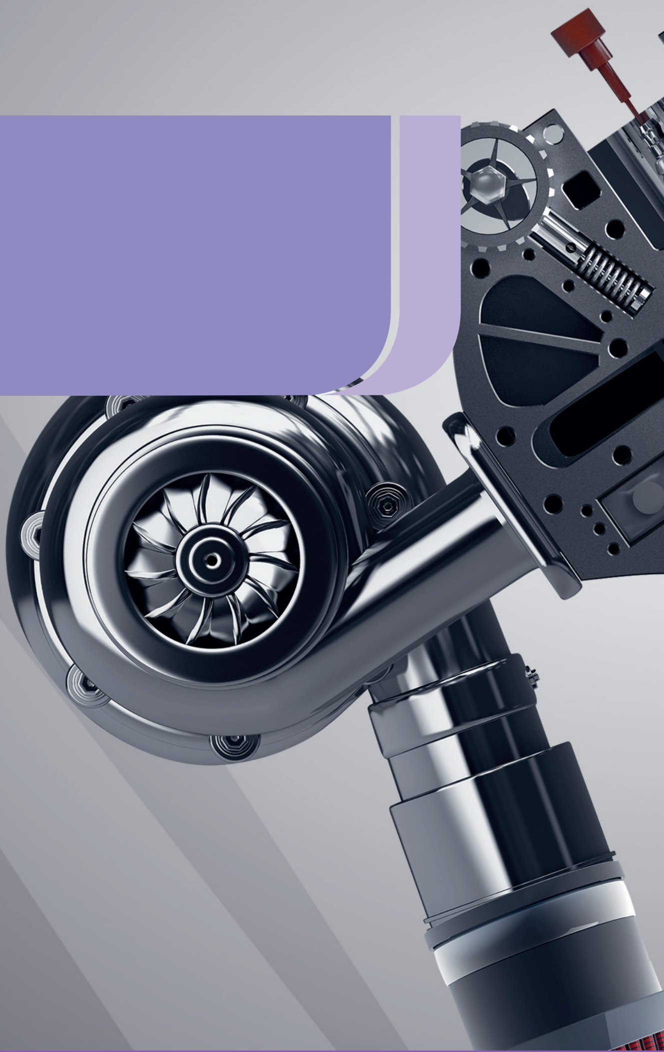
24. Nazlı'nın eşit bir paylaşım yapabilmesi için kesilen her 18 parçadan kaç derecelik merkez açıya sahip parçalar kesmelidir?

25. Son durumda bir kişiye düşen pasta diliminin düzlemsel kesiti olan daire diliminin alanı kaç cm^2 olur?

ÇÖZÜM

GEOMETRİ

11.6. UZAY GEOMETRİ



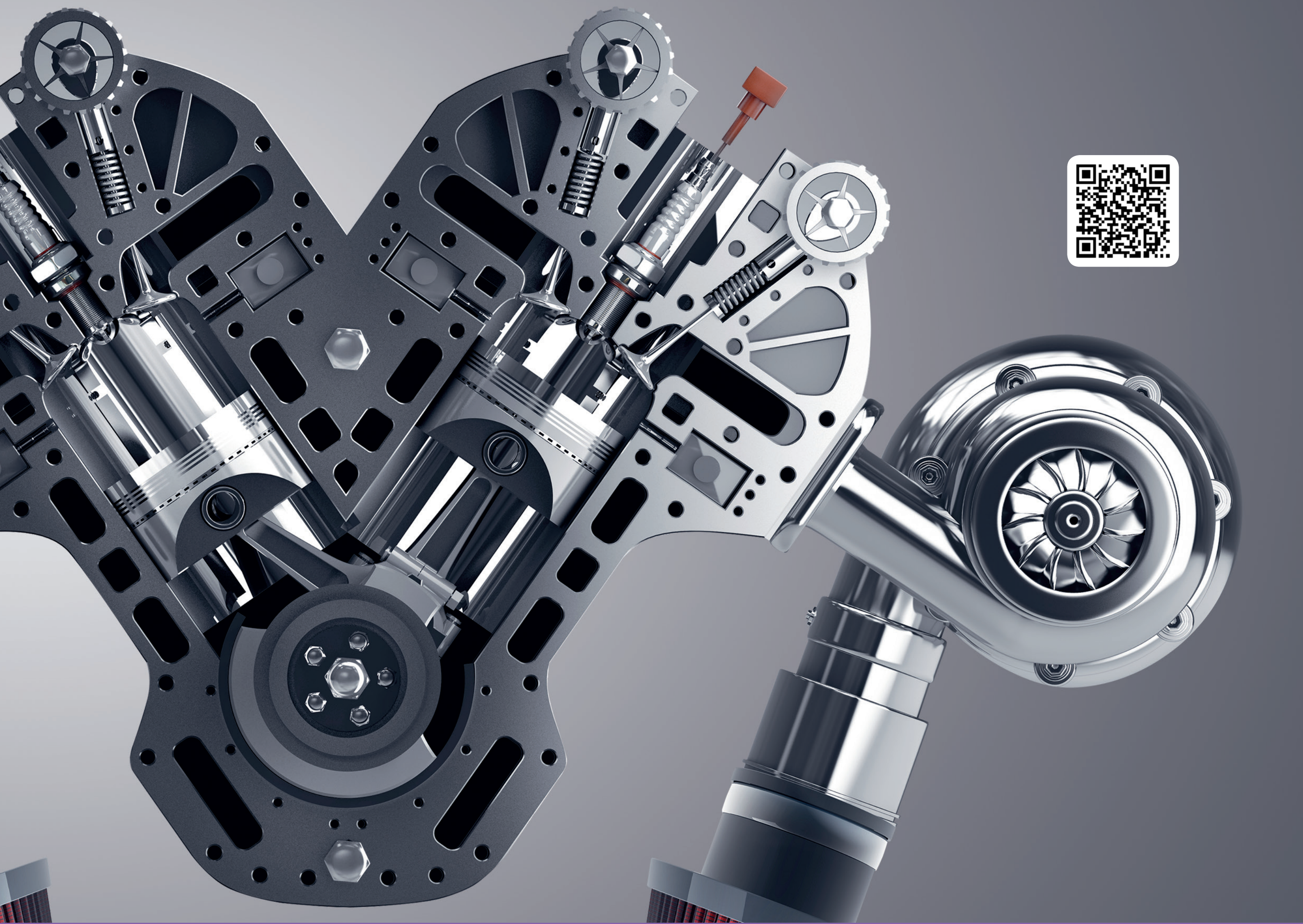
Neler Öğreneceksiniz?

11.6.1. KATI CİSİMLER

1. Dik Dairesel Silindir
2. Dik Dairesel Koni
3. Küre

Uzay Geometrinin Kullanım Alanları

- Şekil ya da planların üç boyutlu çizimleri ve modelleri gerçek düşünce ve planı ortaya çıkarır. Bu da üç boyutlu görüntü sayesinde karar verme sürecini kolaylaştırmaktadır.
- Soyut düşünce ve planlamaları somutlaştırarak görselliği ortaya çıkarır.
- Uzay geometri ile tasarlanan araç, gereç ya da yapıtların yüzey alan ve hacimleri kolayca hesaplanabilmektedir.
- Günlük hayatta üç boyutlu pek çok araç gerecin yanında silindir, koni ve küre de kullanılmaktadır.



Hazırlık Çalışmaları

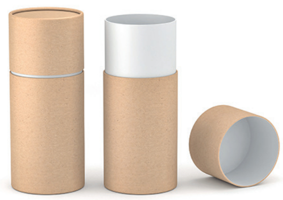
1. Günlük hayatta kullandığınız eşyaların hangi geometrik cisme benzediğini tespit ediniz.
2. Tepe noktası, yanal yüzey, hacim ifadeleri size neler çağrıştırmaktadır? Arkadaşlarınızla paylaşınız.
3. Günlük hayatta sıvıları bir kaptan diğer kaba aktarırken kullanılan huniler, güvenlik amacıyla takılan baretler, yardım çadırları, camilerin kubbeleri ve minareleri, yuvarlak kurşun kalemler, LPG tankerleri, tünellerin üst yüzeyleri, su ve kanalizasyon boruları hangi geometrik şekillere benzemektedir? Bu şekillerin kullanılmasının gerekçelerini tartışınız.

11.6.1. KATI CİSİMLER

1. Dik Dairesel Silindir

Doğrusal olmayan her çizgi bir eğri, düzlemsel olmayan her yüzey eğri yüzeydir. Bir düzlem ya da eğri yüzey parçasını her yönden sınırlayan eğri kapalı eğridir.

Küp, kare prizma gibi yüzeyler düz yüzeylerdir. Silindir kutu (Görsel 6.1.1), basketbol topu (Görsel 6.1.2), dondurma külahı (Görsel 6.1.3) gibi yüzeyler ise eğri yüzeylere örnek olarak gösterilebilir.



Görsel 6.1.1: Silindir kutu

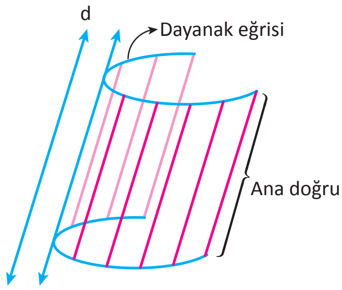
Görsel 6.1.2: Basketbol topu

Görsel 6.1.3: Dondurma külahı

Tanım

Uzayda kapalı düzlemsel bir eğri ile bu eğri düzlemine paralel olmayan bir d doğrusu verildiğinde eğri üzerindeki her noktadan d doğrusuna paralel çizilen doğruların oluşturduğu yüzey silindir yüzey, bu eğriler de silindir yüzeyin **dayanak eğrisi** olarak adlandırılır (Şekil 6.1.1).

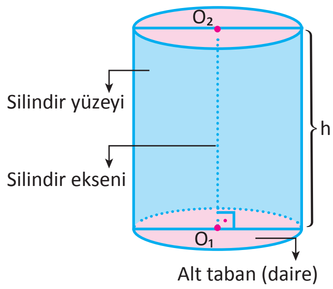
Dayanak eğrisi kapalı bir eğri olan silindir yüzeyin ana doğrularını kesen ve birbirine paralel iki düzlem arasında kalan cisimlere **silindir** denir.



Şekil 6.1.1: Dayanak eğrisi

Silindir yüzeyinin düzlemlerle olan kesitleri silindirin tabanları, tabanların sınırladığı silindir yüzey silindirin yanal yüzeyi, taban düzlemleri arasındaki uzaklık silindirin yüksekliği, tabanların merkezinden geçen doğru ise silindir eksenidir (Şekil 6.1.2).

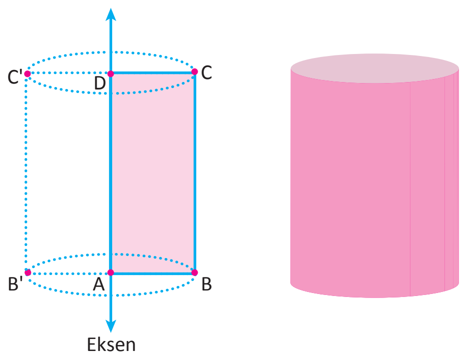
Tabanların karşılıklı iki noktasını birleştiren ve silindir eksenine paralel olan doğrulara silindirin **ana doğruları** denir (Şekil 6.1.2).



Şekil 6.1.2: Dik dairesel silindir.

Ana doğruları tabana dik olan silindirlere **dik silindir**, tabanı daire olan dik silindire de **dik dairesel silindir** denir (Şekil 6.1.2).

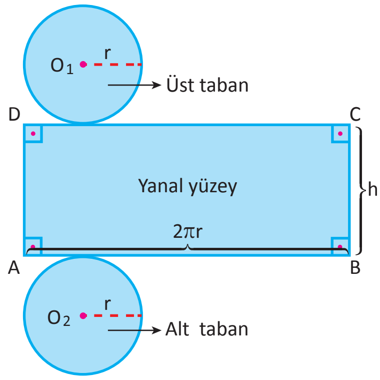
Bir dikdörtgenin herhangi bir kenarı etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan cisim bir dik dairesel silindirdir (Şekil 6.1.3).



Şekil 6.1.3: Silindir

Dik Dairesel Silindirin Alan ve Hacim Bağıntıları

Şekil 6.1.4'te açık şekli verilen silindirin tabanları O merkezli r yarıçaplı daire, yanal yüzeyi de uzun kenarı $2\pi r$ (dairenin çevresi), kısa kenarı h (silindirin yüksekliği) olan ABCD dikdörtgenidir.



Şekil 6.1.4

Yanal yüzeyinin alanı A_Y olmak üzere $A_Y = 2\pi r \cdot h$ olur.
Taban alanlarının toplamı A_T olmak üzere $A_T = 2 \cdot \pi r^2$ olur.
Buradan silindirin yüzey alanı, yanal alanı ile taban alanlarının toplamına eşittir.

$A = A_Y + A_T$

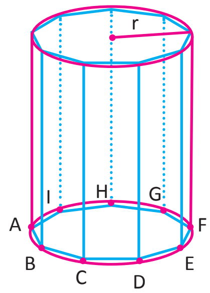
$A = 2\pi r \cdot h + 2 \cdot \pi r^2$ bulunur.

Şekil 6.1.5'te dik dairesel silindirin alt ve üst tabanları, eş düzgün çokgenlere bölünür ve karşılıklı kenarları silindirin simetri eksenine paralel olacak şekilde birleştirildiğinde n kenarlı düzgün çokgen prizma oluşur.

Kenar sayısı istenildiği kadar artırıldığında düzgün çokgen prizma silindire dönüşür. Bu durumda silindirin hacmi de prizmaların hacminde olduğu gibi taban alanı ile yüksekliğinin çarpımına eşit olur.
Buradan silindirin hacmi

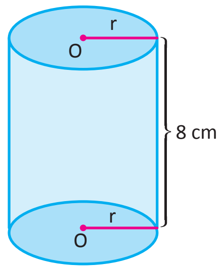
A_T taban alanı, h yükseklik, V hacim olmak üzere

$V = A_T \cdot h = \pi r^2 \cdot h$ bulunur.



Şekil 6.1.5: Düzgün çokgen prizma

1. ÖRNEK



Şekildeki dik dairesel silindirin hacmi 128π cm^3 ve yüksekliği 8 cm dir.
Buna göre

a) Dik dairesel silindirin yanal alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

b) Dik dairesel silindirin yüzey alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Önce dik dairesel silindirin yarıçapı bulunursa

$V = \pi r^2 \cdot h$

$128\cancel{\pi} = \cancel{\pi} \cdot r^2 \cdot 8 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = 4$ cm olur.

Silindirin yanal alanı

$A_Y = 2\pi r \cdot h = 2\pi \cdot 4 \cdot 8 = 64\pi$ cm^2 olur.

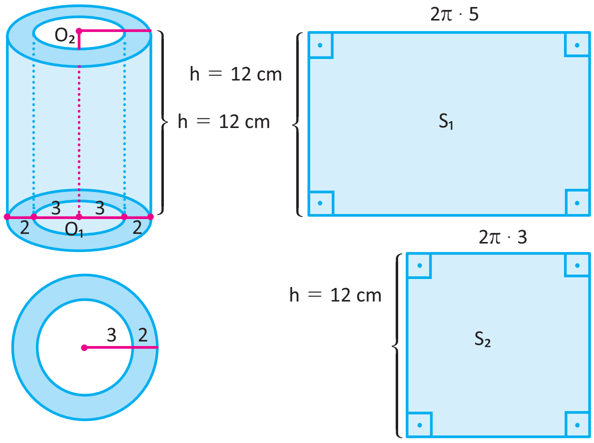
b) Dik dairesel silindirin yüzey alanı

$A = A_Y + A_T = 64\pi + 2\pi \cdot 4^2 = 96\pi$ cm^2 bulunur.

2. ÖRNEK

İç yarıçapı 3 cm, dış yarıçapı 5 cm ve yüksekliği 12 cm olan dik dairesel silindir şeklindeki bir borunun dolgu kısmının alanını bulunuz.

ÇÖZÜM

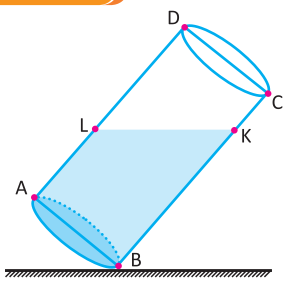


Cismin toplam alanı A_T, silindirin dış yüzeyi S_1, silindirin iç yüzeyi S_2 ve daire halkasının alanı A_H olmak üzere borunun dolgu kısmının alanı

$A_T = S_1 + S_2 + A_H$ olur. Buradan

$$A_T = 2\pi \cdot 5 \cdot 12 + 2\pi \cdot 3 \cdot 12 + 2[\pi \cdot 5^2 - \pi \cdot 3^2]$$
$$= 120\pi + 72\pi + 2 \cdot 16\pi$$
$$= 224\pi \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$

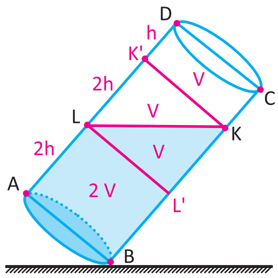
3. ÖRNEK



İçinde bir miktar su bulunan dik dairesel silindir, şekildeki konuma getiriliyor.

$|CK| = \frac{1}{4} \cdot |BK| = \frac{1}{2} \cdot |AL|$ olduğuna göre silindirin boş kısmının hacminin dolu kısmının hacmine oranını bulunuz.

ÇÖZÜM



Silindirin boş kısmının hacmine V_1, dolu kısmının hacmine V_2 denilirse

$|CK| = \frac{1}{4}|BK| = \frac{1}{2}|AL| = h$ ise

$|CK| = h$, $|AL| = 2h$ ve $|BK| = 4h$ olur.

$K'KCD$ silindirinin hacmi 1V, $LL'KK'$ silindirin hacmi 2V

$ABL'L$ silindirin hacmi 2V olduğundan $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2V}{3V} = \frac{2}{3}$ bulunur.

4. ÖRNEK

Bir lisenin öğrencileri, kendi aralarında topladıkları parayla bir köy okuluna bağışta bulunmak istiyorlar. Bu amaçla 20 cm boyunda, 1 cm çapında silindir şeklindeki 12 adet kalemin altışarlı iki sıra hâlinde konulabildiği dikdörtgenler prizması şeklinde hediye kutuları hazırlıyorlar.
100 öğrenciye verilecek hediye kutuları boşluk kalmayacak şekilde bir koliye konulacaktır. Bu kolinin hacminin en az kaç cm^3 olabileceğini bulunuz.

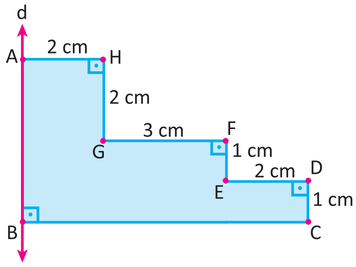
ÇÖZÜM

Kalemlerin çapı 1 cm olduğundan bir kalem için taban ayrıtı 1 cm ve yüksekliği 20 cm olan bir kare prizma gereklidir. Kalemler altışarlı iki sıra hâlinde dizileceğinden 12 kalemin yerleştirileceği dikdörtgenler prizmasının taban ayrıt uzunlukları 6 cm ve 2 cm, yüksekliği 20 cm olur.

Bu durumda bir kutunun hacmi

$V = 6 \cdot 2 \cdot 20 = 240 \text{ cm}^3$ olarak bulunur. 100 öğrenci için hazırlanan kutuların konabileceği kolinin hacmi $240 \cdot 100 = 24\,000 \text{ cm}^3$ olur.

5. ÖRNEK



Şekildeki çokgensel bölgede

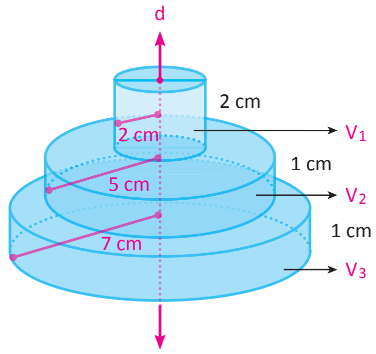
$[AH] \perp [GH]$, $[GF] \perp [EF]$, $[ED] \perp [CD]$

$|AH| = |HG| = |ED| = 2$ cm

$|GF| = 3$ cm, $|EF| = |DC| = 1$ cm veriliyor.

Çokgensel bölgenin d doğrusu etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

ÇÖZÜM



Oluşan cisim, şekilde görüldüğü gibi aynı merkezli ve sırasıyla 2 cm, 5 cm ve 7 cm yarıçaplı silindirlerdir. Bu silindirlerin hacimleri sırasıyla V_1, V_2, V_3 ve toplam hacim de V_T olmak üzere

$V_T = V_1 + V_2 + V_3$

$V_T = \pi \cdot 2^2 \cdot 2 + \pi \cdot 5^2 \cdot 1 + \pi \cdot 7^2 \cdot 1$

$V_T = (8 + 25 + 49) \cdot \pi = 82\pi$ cm^3 bulunur.

6. ÖRNEK

486 m^3 tehlikeli atık madde, çevre sağlığı ve güvenliği açısından dik dairesel silindir biçimindeki kapalı varillerde saklanmak isteniyor. Bu sebeple tehlikeli maddeyi depolamak için

a) Yarıçapı $0,6$ m ve yüksekliği 1 m olan dik silindir biçimindeki kapalı varillerden en az kaç adet kullanılması gerektiğini bulunuz. (π yerine 3 alınız.)

b) İhtiyaç duyulan varillerin yapılabilmesi için kaç m^2 sac kullanılması gerektiğini bulunuz. (π yerine 3 alınız.)

ÇÖZÜM

a) Kapalı varillerden birinin hacmi

$V = \pi r^2 \cdot h = 3 \cdot (0,6)^2 \cdot 1$

$= 1,08$ m^3 olur.

Bu durumda ihtiyaç duyulan varil sayısı

$\dfrac{486}{1,08} = 450$ adet olur.

b) Bir varilin yüzey alanı

$A = 2\pi r \cdot (h + r)$

$= 2 \cdot 3 \cdot (0,6) \cdot (1 + 0,6)$

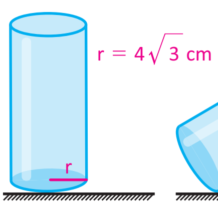
$= (3,6) \cdot (1,6) = 5,76$ m^2 olur.

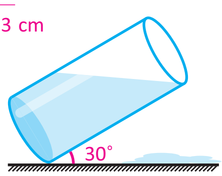
Bu durumda ihtiyaç duyulan sac

$450 \cdot (5,76) = 2592$ m^2 olur.

Sıra Sizde

SORU





Yandaki şekilde taban yarıçapı $4\sqrt{3}$ cm olan soldaki dik dairesel silindir, su ile doludur. Bu silindir, taban düzlemi ile 30° lik açı yapacak şekilde eğilerek sağdaki duruma getirildiğinde içinden dökülen suyun kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

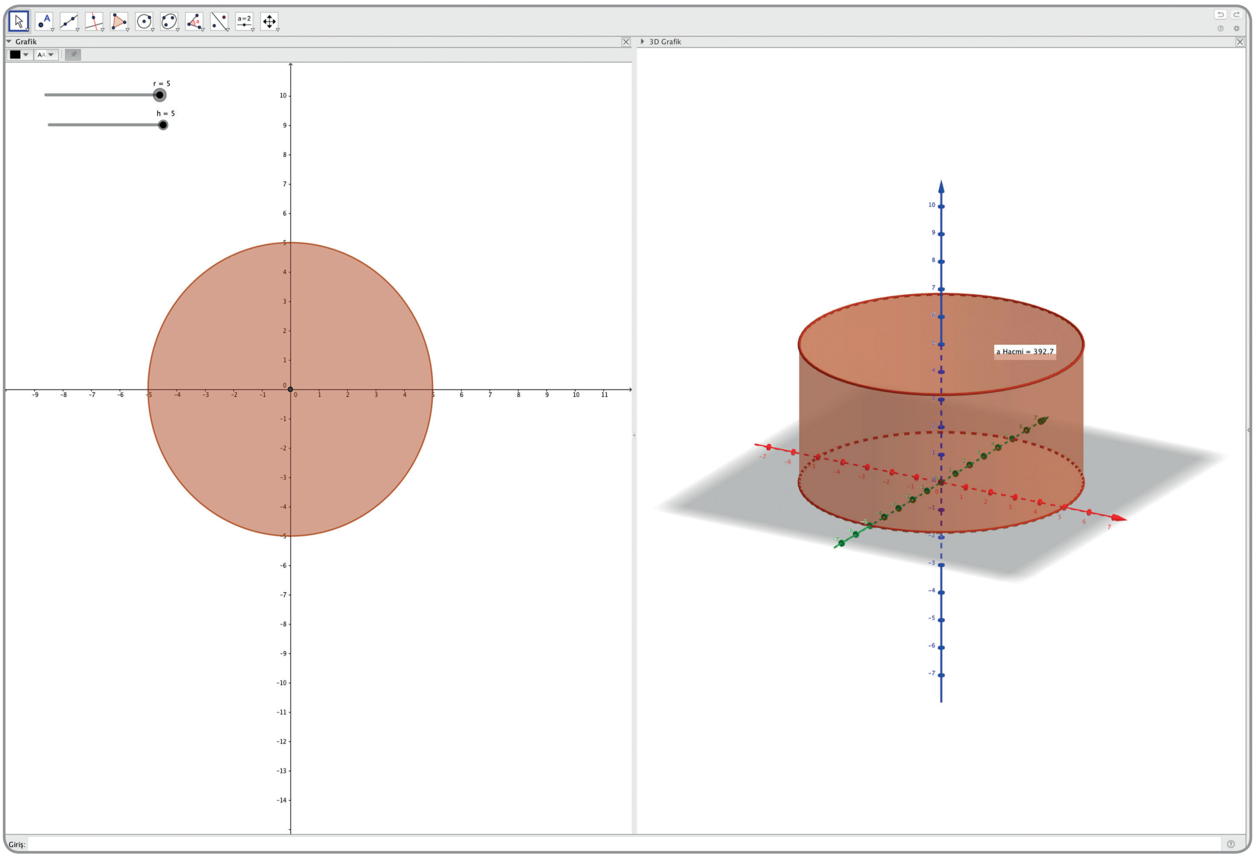
ÇÖZÜM

Teknoloji Uygulaması

Aşağıda GeoGebra programı kullanılarak bir silindirin yarıçap ve yüksekliğine bağlı hacmindeki değişim incelenmiştir.

Aşağıdaki yönergelere göre Görsel 6.1.4’teki şekilleri oluşturmaya çalışınız.

Grafik Çizme	Programı çalıştırdığınızda **Grafik Çizme** kutucuğunu seçiniz.
a = 2	**Sürgü** aracını seçiniz. h ve r isimli iki sürgü tanımlayınız.
	Merkez ve Yarıçapla Çember aracını seçiniz. Düzlemde bir noktayı, çemberin merkezi olarak seçiniz. Karşınıza çıkan **Merkez ve Yarıçapla Çember** kutucuğuna r yazınız.
3D-Grafik	Görünüm sekmesinde bulunan **3D Grafik** menüsünü seçiniz. 3 boyutlu işlemler için açılan bu penceriyi kullanınız.
	Ekranın **3D Grafik** bölümünü daha sonra da **Prizma veya Silindire Dönüştür** aracını seçiniz. Çemberin üzerine tıkladığınızda karşınıza çıkan silindir yükseklik kutucuğuna h yazınız.
cm^3	**Hacim** aracını seçiniz. Oluşturduğunuz silindirin hacmini belirleyiniz.
a = 2	h ve r sürgülerini kaydırarak oluşturduğunuz silindirin hacmindeki değişimi inceleyiniz.



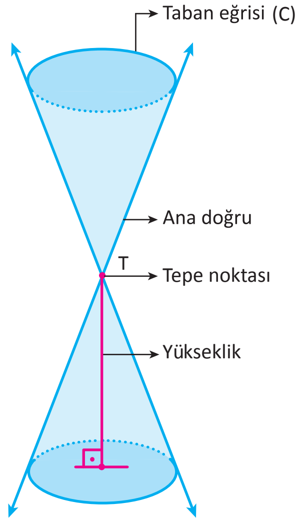
Görsel 6.1.4

Silindirin yarıçapı veya yüksekliği arttığında silindirin hacminin de arttığına dikkat ediniz.

2. Dik Dairesel Koni

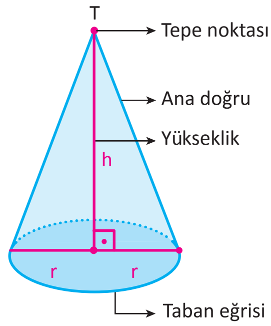
Tanım

Uzayda sabit bir T noktası ile düzlemsel bir kapalı C eğrisi verilsin. T noktası ile C eğrisinin her noktasından geçen doğruların oluşturduğu yüzey koni yüzeyidir.
C eğrisi, taban eğrisi (dayanak eğrisi) olarak adlandırılır.
T noktasına **tepe noktası**, T den geçen ve koni yüzeyi oluşturan doğru parçalarına ise **koni yüzeyinin ana doğruları** denir (Şekil 6.1.6).



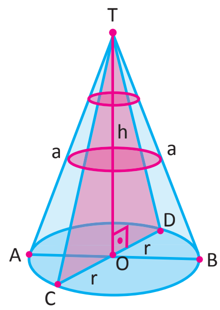
Şekil 6.1.6: Koni yüzeyinin ana doğruları

Dayanak eğrisi kapalı bir eğri olan koni yüzeyin, tüm ana doğrularını kesen bir düzlemle tepe noktası arasında kalan cisme **koni** denir.
Düzlemsel kesit koninin tabanı, tepe noktası ile taban arasındaki uzaklık koninin yüksekliğidir (Şekil 6.1.7).
Koninin tepe noktasından tabana inilen dikmenin taban ile kesiştiği noktaya **taban ayağı** denir.
Yükseklik ayağı taban merkezinde olan koniye **dik koni**, tabanı daire olan koniye de **dik dairesel koni** denir (Şekil 6.1.7).



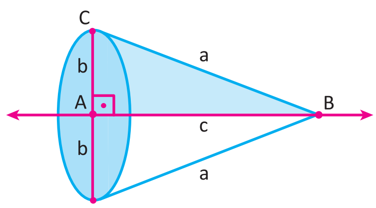
Şekil 6.1.7: Dik dairesel koni

Dik dairesel koninin yüksekliği simetri eksenidir.
Dik dairesel konide ana doğruların uzunlukları eşittir.
$|TA| = |TC| = |TB| = a$
Dik dairesel koninin simetri ekseninden geçen bütün düzlemlerle ara kesiti birbirine eş ikizkenar üçgensel bölgelerdir. Şekilde TCD üçgeni ikizkenar üçgendir.
Dik dairesel konide tabana paralel her kesit bir dairedir (Şekil 6.1.8).



Şekil 6.1.8

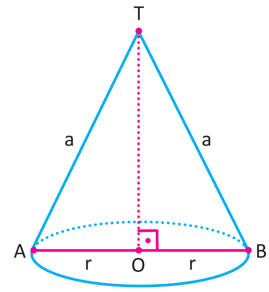
Bir dik üçgenin herhangi bir dik kenarı etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan cisim, dik dairesel konidir (Şekil 6.1.9).



Şekil 6.1.9

Dik Dairesel Koninin Alan ve Hacim Bağıntıları

Dik dairesel koninin tabanı daire olduğundan taban alanı $A_T = \pi r^2$ olur (Şekil 6.1.10). Yanal alanı ise T merkezli yarıçapı a olan α merkez açılı daire diliminin alanına eşittir.



Şekil 6.1.10

Şekil 6.1.11'de $|\overset{\frown}{ABA}| = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi a$ ve $\overset{\frown}{ABA}$ taban dairesinin çevresi olduğundan

$|\overset{\frown}{ABA}| = 2\pi r$ olur. Bu iki değer eşitlenirse

$|\overset{\frown}{ABA}| = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \cancel{2\pi} a = \cancel{2\pi} r \Rightarrow \frac{r}{a} = \frac{\alpha}{360^\circ}$ bulunur.

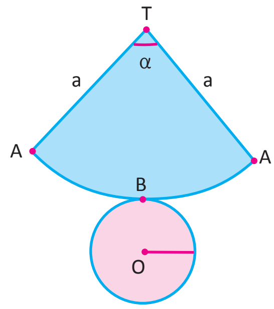
T merkezli daire dilimi koninin yanal yüzü olduğundan koninin yanal alanı

$A_Y = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi a^2$ denkleminde $\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{r}{a}$ değeri yerine yazılırsa

yanal alan $A_Y = \frac{r}{a} \cdot \pi a^2 = \pi r a$ bulunur.

Sonuç olarak dik dairesel koninin yüzey alanı, taban alanı ile yüzey alanının toplamı olmak üzere

$A = A_T + A_Y = \pi r^2 + \pi r a$ şeklinde elde edilir.

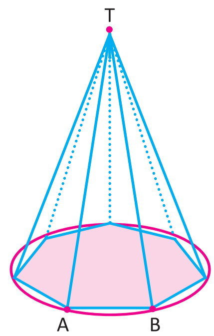


Şekil 6.1.11

Şekil 6.1.12'de tepe noktası T ve yarıçapı r olan koninin içerisine, tepe noktası T ve köşeleri koninin taban çemberi üzerinde olacak şekilde n kenarlı düzgün bir piramit yerleştiriliyor. Bu piramidin taban kenar uzunlukları küçültülerek piramidin kenar sayısı istenildiği kadar artırılırsa piramit, koniye dönüşür.

Bu durumda koninin hacmi, piramidin hacminde olduğu gibi taban alanı ile yüksekliğinin çarpımının üçte birine eşit olur.

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$ elde edilir.



Şekil 6.1.12

1. ÖRNEK

Taban yarıçapı 5 cm ve yüksekliği 12 cm olan dik dairesel koninin

a) Yüzey alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

b) Hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

TOB dik üçgeni özel üçgen olduğundan $|TB| = 13\,cm$ olur.

$r = 5\,cm, h = 12\,cm,\ a = 13\,cm$ olup

a) Dik dairesel koninin yüzey alanı

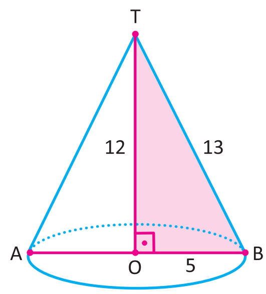
$A_Y = \pi r a = \pi \cdot 5 \cdot 13 = 65\pi\ cm^2$

$A_T = \pi r^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$

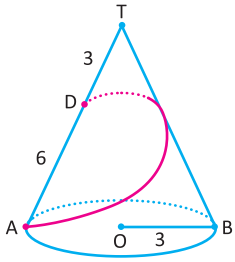
$A = A_T + A_Y = 25\pi + 65\pi = 90\pi\ cm^2$ bulunur.

b) Dik dairesel koninin hacmi

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 100\pi\ cm^3$ bulunur.



2. ÖRNEK



Şekildeki tabanı O merkezli olan dik dairesel konide
$|TD| = |OB| = 3\text{ cm}$
$|DA| = 6\text{ cm}$ veriliyor.
Verilenlere göre A noktasından D noktasına şekildeki gibi koninin yüzeyi üzerinden giden <u>en kısa</u> yolun kaç cm olduğunu bulunuz.

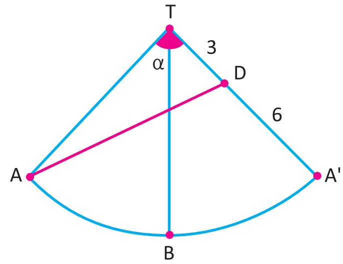
ÇÖZÜM

Şekil 1'de görüldüğü gibi koninin açık şeklinde $r = 3\text{ cm}$ ve $a = 9\text{ cm}$ olduğundan

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{r}{a}$$

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{3}{9}$$

$\alpha = 120^\circ$ bulunur.



Şekil 1

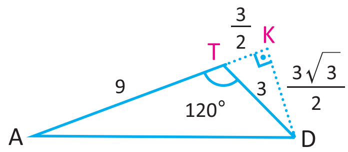
Şekil 2'de görüldüğü gibi ATD üçgeninin AT kenarına ait yüksekliği çizilir ve AT kenarının uzantısıyla kesiştiği nokta K alınırsa ADK dik üçgen olur. Pisagor teoremi uygulanırsa

$$|AD|^2 = \left(9 + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{21}{2}\right)^2 + \frac{9 \cdot 3}{4} = \frac{468}{4}$$

$$|AD|^2 = 117$$

$$|AD| = 3\sqrt{13}\text{ cm}$$



Şekil 2

A ile D noktaları arasındaki en kısa uzaklık $3\sqrt{13}$ cm bulunur.

3. ÖRNEK

Yarıçapı 10 cm ve merkez açısının ölçüsü 216° olan daire dilimiyle oluşturalan koninin hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

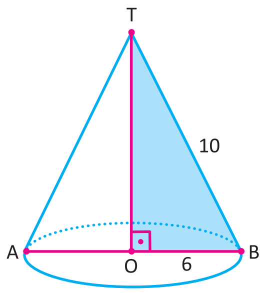
Oluşturulan koninin yanal alanı 216° lik daire diliminin alanına eşittir.

Daire diliminin alanı $= \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi a^2 = \frac{216^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 10^2 = 60\pi\ cm^2$ dir.

Bu durumda koninin yanal alanı da $60\pi\ cm^2$ olur.
Koninin yanal alanında $60\pi\ cm^2$ yerine yazılırsa

$$A_Y = \pi r a$$

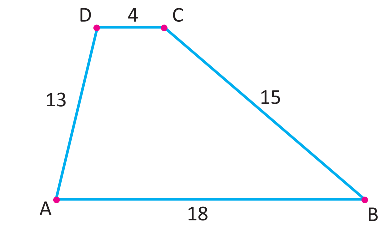
$\cancel{\pi} r \cdot 10 = 60\cancel{\pi}$ ise $r = 6\text{ cm}$ bulunur.



Şekildeki dik dairesel konide TOB dik üçgeni özel üçgen olduğundan $|TO| = h = 8$ cm olur. Buradan dik dairesel koninin hacmi

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi\ cm^3$$ bulunur.

4. ÖRNEK



Şekildeki ABCD yamuğunda $[AB] \parallel [DC]$ ve $|AB| = 18$ cm, $|BC| = 15$ cm, $|DC| = 4$ cm, $|AD| = 13$ cm veriliyor.
ABCD yamuğu, $[AB]$ etrafında 360° döndürüldüğünde elde edilen cismin hacminin kaç cm^3 ve alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

ABCD yamuğu $[AB]$ etrafında 360° döndürüldüğünde elde edilen cisim, aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi bir dik dairesel silindir ile iki dik dairesel koninin birleşimi olur.
Bu cismin hacmi, dik dairesel silindir ile dik dairesel konilerin hacimleri toplamıdır. Aşağıdaki şekilde

$|AE| = x$ cm alınırsa $|EF| = 4$ cm ve $|FB| = (14 - x)$ cm olur.
AED dik üçgeninde $|DE| = h$ cm alınır ve Pisagor teoremi uygulanırsa $h^2 = 13^2 - x^2$ ...(1),
FBC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa $h^2 = 15^2 - (14 - x)^2$ ...(2) olur. (1) ve (2) denklemlerinden

$13^2 - x^2 = 15^2 - (14 - x)^2$

$169 - \cancel{x^2} = 225 - 196 + 28x - \cancel{x^2}$

$140 = 28x$

$|AE| = x = 5$ cm ve

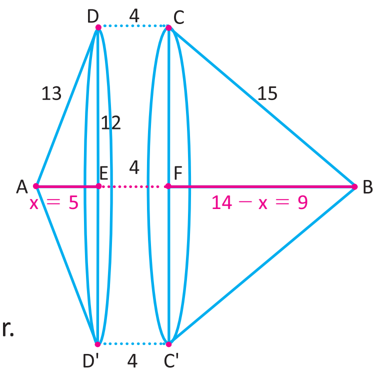
$|FB| = 14 - x = 14 - 5 = 9$ cm olur.

$h^2 = 13^2 - x^2$

$= 169 - 5^2 = 169 - 25$

$h^2 = 144$ ise

$h = 12$ cm olur.



Dik dairesel silindirin hacmi $V_S = \pi \cdot 12^2 \cdot 4 = 576\pi$ cm^3 olur.

Yüksekliği 5 cm olan dik koninin hacmi $V_{K1} = \frac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 5 = 240\pi$ cm^3

Yüksekliği 9 cm olan dik koninin hacmi $V_{K2} = \frac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 9 = 432\pi$ cm^3 olur.

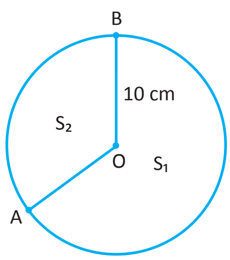
Bütün cismin hacmi $V = 576\pi + 240\pi + 432\pi = 1248\pi$ cm^3 bulunur.
Cismin tüm alanı silindir ve konilerin yanal alanlarının toplamına eşittir.
Silindirin alanı $= 2\pi \cdot 12 \cdot 4 = 96\pi$ cm^2 olur.

Yüksekliği 5 cm, ana doğrusu 13 cm olan dik koninin yanal alanı $= \pi r \cdot a = \pi \cdot 12 \cdot 13 = 156\pi$ cm^2 olur.

Yüksekliği 9 cm, ana doğrusu 15 cm olan dik koninin yanal alanı $= \pi r \cdot a = \pi \cdot 12 \cdot 15 = 180\pi$ cm^2 olur.
Buradan $A = 96\pi + 156\pi + 180\pi = 432\pi$ cm^2 bulunur.

Sıra Sizde

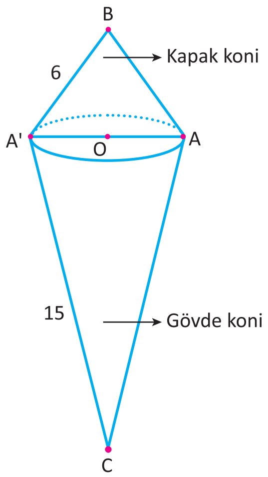
SORU



O merkezli ve $a = 10$ cm yarıçaplı dairede S_1 ve S_2 daire dilimlerinin alanlarının oranı $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{3}$ veriliyor.
Büyük daire dilimi bükülerek bir dik dairesel koni elde ediliyor.
Bu dik dairesel koninin alan ve hacmini bulunuz.

ÇÖZÜM

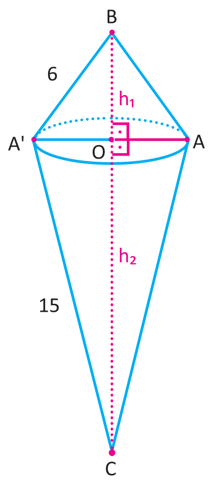
5. ÖRNEK



Şekilde dik dairesel koni biçiminde bir gövdeden oluşan kapaklı bir cisim yapılacaktır. Kapak koninin ana doğrusu 6 cm, yanal alanı $30\pi \ \text{cm}^2$ dir.

Gövde koninin ana doğrusu 15 cm olduğuna göre kapaklı cismin hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Konilerin taban yarıçapı r olsun.

Kapak koninin yanal alanı

$A_{KY} = \pi ra \Rightarrow 30\pi = \pi r \cdot 6$

$r = 5$ cm olur.

Kapak koninin yüksekliği h_1 olmak üzere BOA dik üçgeninde Pisagor teoreminden

$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2$

$6^2 = 5^2 + h_1^2$

$36 = 25 + h_1^2 \Rightarrow h_1^2 = 36 - 25 = 11$

$h_1 = \sqrt{11}$ cm olur.

Bu durumda kapak koninin hacmi $V_K = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1$ olduğundan

$V_K = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot \sqrt{11} = \frac{25\sqrt{11}\pi}{3}$ cm^3 olur.

Gövde koninin yüksekliği h_2 olmak üzere COA dik üçgeninde Pisagor teoreminden

$|AC|^2 = |OA|^2 + |OC|^2$

$15^2 = 5^2 + h_2^2$

$225 = 25 + h_2^2 \Rightarrow h_2^2 = 225 - 25 = 200$

$h_2 = 10\sqrt{2}$ cm olur.

Bu durumda gövde koninin hacmi $V_G = \frac{1}{3}\pi r^2 h_2$ olduğundan

$V_G = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 10\sqrt{2} = \frac{250\sqrt{2}\pi}{3}$ cm^3 olur.

Kapaklı cismin toplam hacmi

$V_T = V_K + V_G = \frac{25\sqrt{11}\pi}{3} + \frac{250\sqrt{2}\pi}{3}$

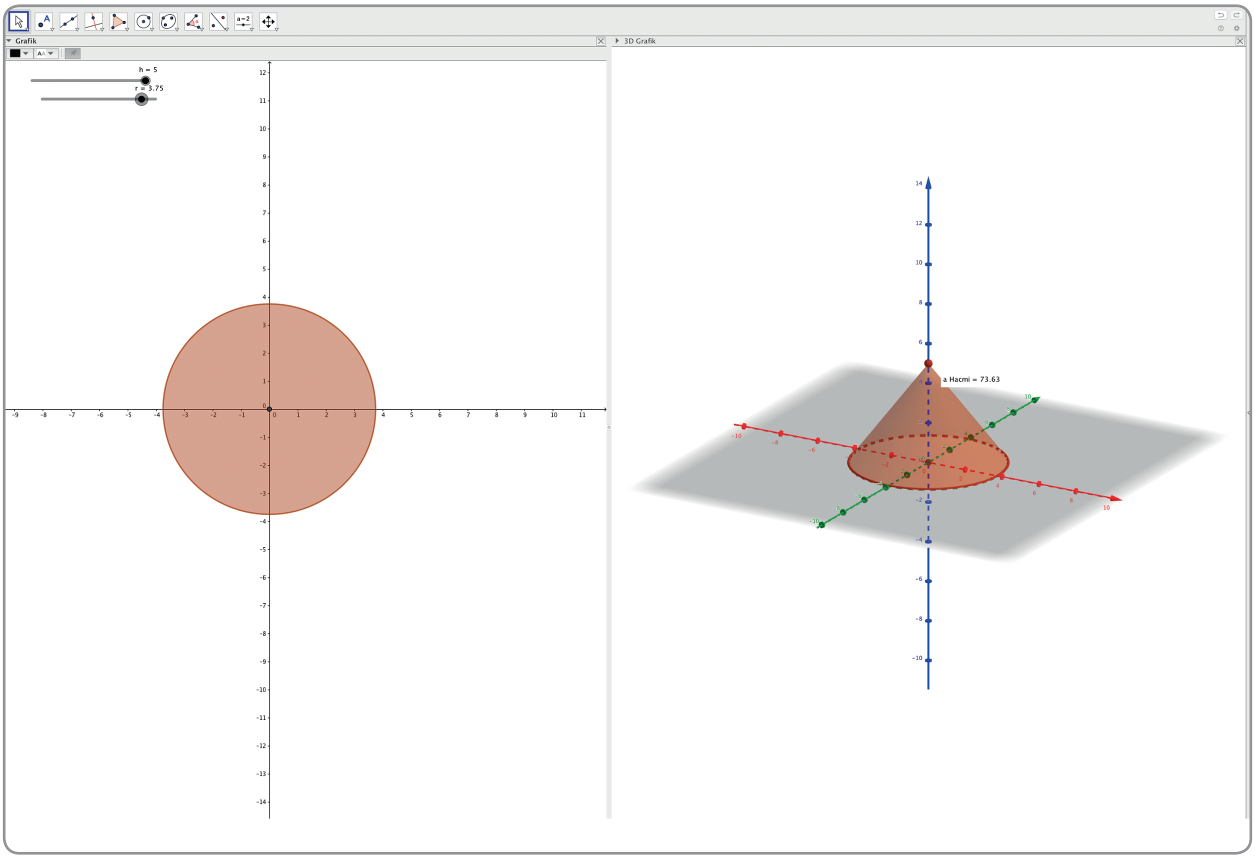
$= \frac{25}{3}(10\sqrt{2} + \sqrt{11})\pi \ \text{cm}^3$ bulunur.

Teknoloji Uygulaması

Aşağıda GeoGebra programı kullanılarak bir koninin yarıçap ve yüksekliğine bağlı hacmindeki değişim incelenmiştir.

Aşağıdaki yönergelere göre Görsel 6.1.5’teki şekilleri oluşturmaya çalışınız.

Grafik Çizme	Programı çalıştırdığınızda **Grafik Çizme** kutucuğunu seçiniz.
a = 2	**Sürgü** aracını seçiniz. h ve r isimli iki sürgü tanımlayınız.
	Merkez ve Yarıçapla Çember aracını seçiniz. Düzlemde bir noktayı, çemberin merkezi olarak seçiniz. Karşınıza çıkan **Merkez ve Yarıçapla Çember** kutucuğuna r yazınız.
3D-Grafik	Görünüm sekmesi de bulunan **3D Grafik** menüsünü seçiniz. 3 boyutlu işlemler için açılan bu pencereyi kullanınız.
	Ekranın **3D Grafik** bölümünü daha sonra da **Piramit veya Koniye Döndür** aracını seçiniz. Çemberin üzerine tıkladığınızda karşınıza çıkan koninin yükseklik kutucuğuna h yazınız.
cm^3	**Hacim** aracını seçiniz. Oluşturduğunuz silindirin hacmini belirleyiniz.
a = 2	h ve r sürgülerini kaydırarak oluşturduğunuz silindirin hacmindeki değişimi inceleyiniz.



Görsel 6.1.5

Koninin yarıçapı veya yüksekliği arttığında koninin hacminin de arttığına dikkat ediniz.

3. Küre

Tanım

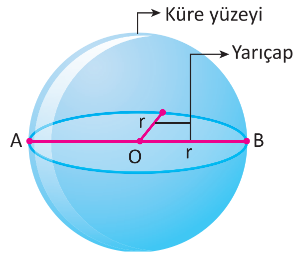
Uzayda sabit bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesine **küre yüzeyi**, küre yüzeyinin sınırladığı cisme de **küre** denir.

Sabit nokta kürenin merkezi, sabit uzunluk da kürenin yarıçapıdır.

Bir küre yüzeyinin bir düzlemle ara kesiti bir çember, kürenin bir düzlemle ara kesiti de bir dairedir.

Bir kürenin merkezinden geçen bir düzlemle ara kesiti kürenin en büyük dairesidir.

Kürenin en büyük dairesinin çapı, aynı zamanda kürenin de çapıdır (Şekil 6.1.13).



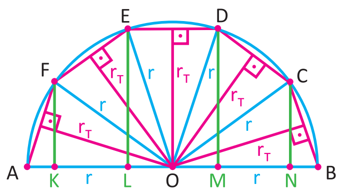
Şekil 6.1.13

Kürenin Alan ve Hacim Bağıntıları

Yarıçapı r olan küre yüzeyinin alanı, en büyük dairesinin alanının 4 katına eşittir. $A = 4 \cdot \pi r^2$ olur.

Şekil 6.1.14'te O merkezli r yarıçaplı yarım çember $[AB]$ etrafında 360° döndürülürse r yarıçaplı bir küre yüzeyi oluşur.

Bu yarım çemberin içine BCDEFA yarım düzgün bir çokgen çizilirse şekildeki gibi bu çokgenin iç teğet çemberinin yarıçapı r_T olur.



Şekil 6.1.14

BCDEFA düzgün yarım çokgenin $[AB]$ etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan cismin alanı $A_Ç$ ile gösterilirse bu alan $[AF], [FE], [ED], [DC], [CB]$ nin döndürülmesiyle elde edilen alanların toplamına eşittir. Buna göre

$$A_Ç = 2\pi \cdot r_T \cdot |AK| + 2\pi \cdot r_T \cdot |KL| + 2\pi \cdot r_T \cdot |LM| + 2\pi \cdot r_T \cdot |MN| + 2\pi \cdot r_T \cdot |NB|$$

$$= 2\pi \cdot r_T \underbrace{(|AK| + |KL| + |LM| + |MN| + |NB|)}_{2r}$$

$$= 2\pi \cdot r_T \cdot 2r$$

$A_Ç = 4\pi r_T \cdot r$ bulunur.

Düzgün yarım çokgenin kenarlarının uzunluklarını azaltarak kenar sayısı istenildiği kadar artırılırsa $r_T = r$ olacağından çokgenin alanı $(A_Ç)$ kürenin alanına (A) eşit olur. Buradan

$A_Ç = 2\pi r_T \cdot 2r = 2\pi \cdot r \cdot 2r$

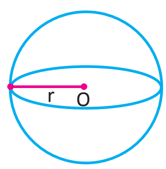
$A = 4\pi r^2$ elde edilir.

Yarıçapı r olan kürenin hacmi $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ olur.

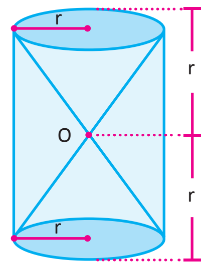
Şekil 6.1.15 ve 6.1.16'da r yarıçaplı O merkezli bir küre ile taban yarıçapı r, yüksekliği 2r olan içi dolu bir dik dairesel silindir görülmektedir.

Silindirden tabanı silindirin tabanları ile çakışık tepe noktası silindirin ağırlık merkezi O noktası olan iki dik dairesel koni çıkartılıyor.

Silindirin ağırlık merkezinden ve kürenin merkezinden k birim uzaklıktaki düzlemle silindirin ve koninin ara kesit alanlarını bulunuz.



Şekil 6.1.15



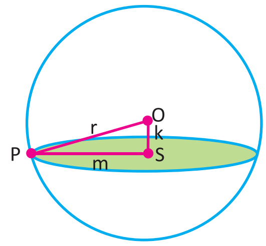
Şekil 6.1.16

Şekil 6.1.17'de r yarıçaplı kürenin merkezinden k birim uzaklıktaki düzlemle ara kesiti m yarıçaplı bir dairedir. OPS dik üçgeninde Pisagor teoreminden $m^2 = r^2 - k^2$ dir. Buradan kürenin ara kesit dairesinin alanı

$A_K = \pi \cdot m^2 = \pi(r^2 - k^2)$ olur.

Şekil 6.1.18'de dik dairesel silindirin k birim uzaklıktaki düzlemle ara kesiti bir daire halkasıdır.
$|OB| = |AB| = r$ olduğundan $\widehat{OBA}$ ikizkenar üçgendir. OCD ve OBA üçgenleri benzer üçgen olduğu için
$|OC| = |CD| = k$ olur.
Buradan silindir ara kesit daire halkasının alanı

$A_H = \pi r^2 - \pi k^2 = \pi(r^2 - k^2)$ olur.



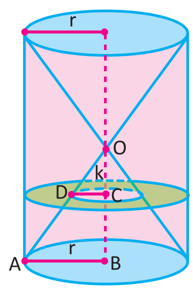
Şekil 6.1.17

$A_K = A_H$ eşitliğinden kürenin ve içerisinden iki koni çıkartılan silindirin merkezlerinden eşit uzaklıktaki arakesit alanlarının eşit olduğu görülür. Bu durumda Cavalieri İlkesi'ne (bk. Cavalieri İlkesi) göre bu iki cismin hacimleri eşittir. Böylece kürenin hacmi

$V =$ Silindirin hacmi $-$ $2 \cdot$ Koninin hacmi

$V = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ elde edilir.



Şekil 6.1.18

Cavalieri İlkesi

Yükseklikleri birbirine eşit olan iki katı cisim ile bir düzlem verilmiş olsun. Verilen düzleme paralel olan her düzlemle bu cisimlerin ara kesitleri eşit alanlı ise bu iki cismin hacimleri birbirine eşittir.

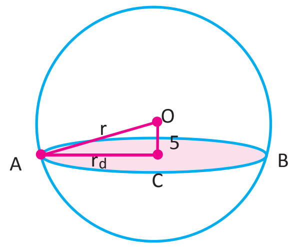
1. ÖRNEK

Bir kürenin merkezinden 5 cm uzaklıktaki düzlemsel kesitinin alanı 144π cm^2 olduğuna göre bu kürenin yüzey alanının kaç cm^2 ve kürenin hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Şekildeki O merkezli r yarıçaplı kürenin merkezinden 5 cm uzaklıktaki kesiti $|AB| = 2r_d$ çaplı bir daire olacağından bu dairenin alanı

$\pi r_d^2 = 144\pi \Rightarrow r_d = 12$ cm olur.



OCA dik üçgeni özel üçgen olduğu için

$|OC| = 5$ cm

$r_d = |AC| = 12$ ise

$|OA| = r = 13$ cm olur.

Buradan kürenin yüzey alanı $A = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 13^2 = 676\pi$ cm^2 olur.

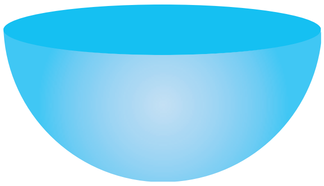
Kürenin hacmi ise

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\pi \cdot 12^3$

$= 2304\pi$ cm^3 bulunur.

2. ÖRNEK



Şekilde verilen yarım kürenin toplam yüzey alanı $243\pi \ \text{cm}^2$ olduğuna göre bu yarım kürenin hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Kürenin yüzey alanı S olmak üzere yarım kürenin yüzey alanı $\frac{S}{2} = \frac{1}{2} \cdot 4\pi r^2 = 2\pi r^2$ olur.

Yarım kürenin dairesel yüzey alanı $A = \pi r^2$ olur.

Yarım kürenin toplam yüzey alanı $\frac{S}{2} + A = 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2 = 243\pi \Rightarrow r = 9$ cm olur.

Yarım kürenin hacmi $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 9^3 = 486\pi \ \text{cm}^3$ bulunur.

3. ÖRNEK

Taban yarıçapı 12 cm, ana doğrusu 20 cm olan dik dairesel koninin içine yerleştirilebilecek en büyük hacimli kürenin hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Koni içerisine yerleştirilebilecek kürenin en büyük hacimli olması için kürenin koninin tabanı ve yan yüzeyine içten teğet olması gerekir.

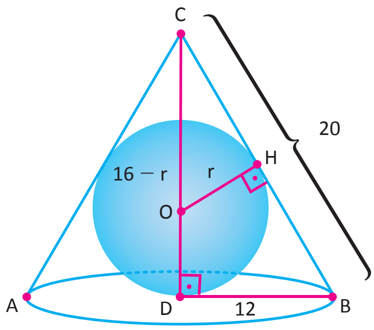
Kürenin merkezinden teğet noktalarına çizilen yarıçaplar $[OD]$ ve $[OH]$ koni yüzeyine ve tabanına diktir.

Şekilde CDB dik üçgeni özel üçgen olduğu için $|CD| = 16$ cm olur.

Diğer taraftan $\widehat{CHO} \sim \widehat{CDB}$ (A.A. benzerliği)

$\frac{|HO|}{|DB|} = \frac{|CO|}{|CB|} \Rightarrow \frac{r}{12} = \frac{16-r}{20} \Rightarrow 5r = 48 - 3r \Rightarrow r = 6$ cm olur.

En büyük kürenin hacmi $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 288\pi \ \text{cm}^3$ bulunur.



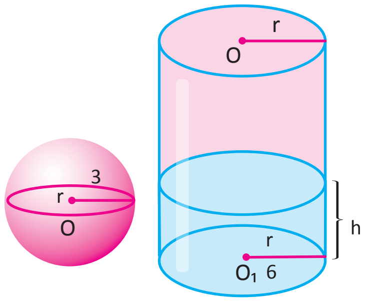
Sıra Sizde

SORU

Bir ayrıtının uzunluğu 10 cm olan küpün içine sığabilecek en büyük hacimli kürenin, küpün bir köşesine olan en kısa uzaklığının kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

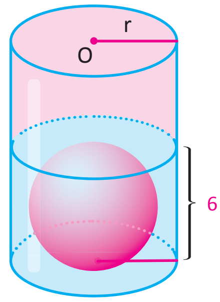
4. ÖRNEK



Yandaki şekilde yarıçapı 3 cm olan bir bilye ve taban yarıçapı 6 cm olan dik dairesel silindir içinde bir miktar su vardır. Küre şeklindeki bilye silindirin içine atıldığında silindirin içindeki su yüzeyi, küreye teğet olacak kadar yükseliyor.

Buna göre küre atılmadan önce silindirin içindeki suyun yüksekliğinin kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Kürenin hacmi $V_K = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi \ \ cm^3$ olur.

$V_{SU} = \pi \cdot 6^2 \cdot h = 36\pi \cdot h$ olur.

$$V_{SU} + V_K = \pi \cdot 6^2 \cdot 6$$
$$36\pi \cdot h + 36\pi = 36\pi \cdot 6$$
$$h + 1 = 6$$
$$h = 5 \text{ cm bulunur.}$$

5. ÖRNEK

Yarıçapı 15 cm olan küre şeklindeki mum eritiliyor ve yarıçapı 2 cm, yüksekliği 7,5 cm olan silindir şeklinde mumlar elde ediliyor.

Silindir şeklinde kaç adet mum elde edilebileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Eritilecek mumun hacmi

$V_K = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 15^3 = \frac{13\,500\pi}{3} = 4500\pi \ \ cm^3$ bulunur.

Silindirlerin sayısı n olarak alınırsa elde edilecek mumların toplam hacmi, kürenin hacmine eşit olur.

Silindir şeklindeki bir mumun hacmi

$V_S = \pi r^2 \cdot h = \pi 2^2 \cdot 7{,}5 = 30\pi \ \ cm^3$ ise n tane mumun hacmi

$n \cdot V_S = n \cdot 30\pi \ \ cm^3$ olur. Buradan

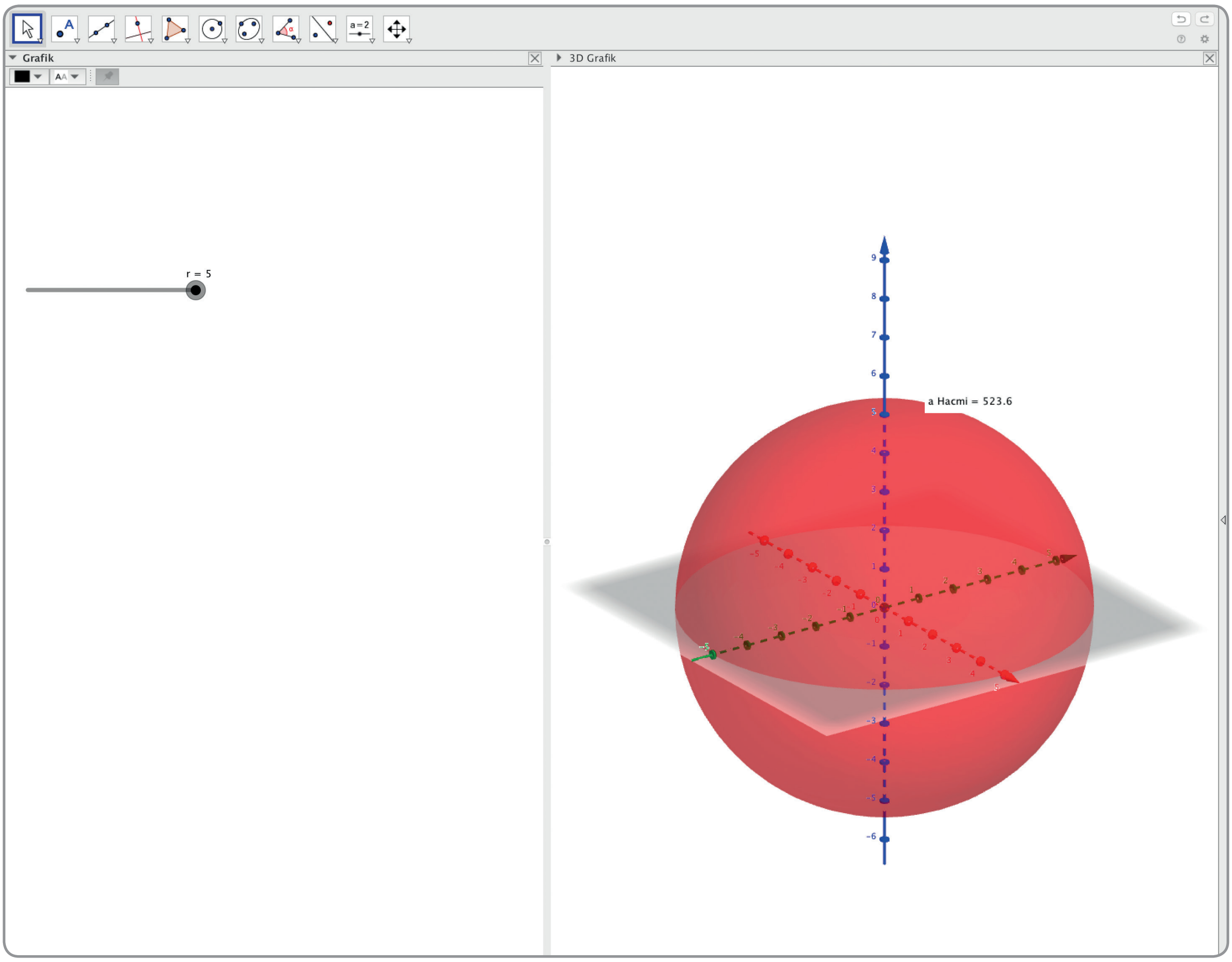
$V_K = V_S \Rightarrow 4500\pi = n \cdot 30\pi$

$n = 150$ bulunur.

Teknoloji Uygulaması

Aşağıda GeoGebra programı kullanılarak bir kürenin yarıçapına bağlı hacmindeki değişim incelenmiştir. Aşağıdaki yönergelere göre Görsel 6.1.6'daki şekli oluşturmaya çalışınız.

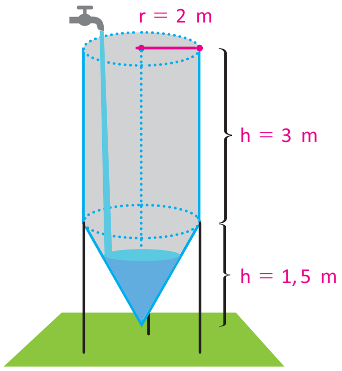
Geometri	Programı çalıştırdığınızda **Geometri** kutucuğunu seçiniz.
a = 2	**Sürgü** aracını seçiniz. r isimli bir sürgü tanımlayınız.
3D-Grafik	Görünüm sekmesi de bulunan **3D Grafik** menüsünü seçiniz. 3 boyutlu işlemler için açılan bu pencereyi kullanınız.
	Merkez ve Yarıçap ile Küre aracını seçiniz. Kürenin merkezini seçiniz ve karşınıza çıkan kürenin yarıçapı kutucuğuna r yazınız.
cm^3	**Hacim** aracını seçiniz. Oluşturduğunuz kürenin hacmini belirleyiniz.
a = 2	r sürgüsünü kaydırarak oluşturduğunuz kürenin hacmindeki değişimi inceleyiniz.



Görsel 6.1.6

Kürenin yarıçapı arttığında kürenin hacminin de arttığına dikkat ediniz.

6. ÖRNEK



Bir su deposunun şekli ve boyutları yandaki gibidir. Musluk saniyede 1 litre su dolduruyor. Su deposu boştur.
Buna göre su yüksekliğinin zamana bağlı değişimini gösteren grafiği çiziniz. ($\pi = 3$ alınız.)

ÇÖZÜM

Bir kısmı ters çevrilmiş koni bir kısmı silindir olan su deposunun hacmi bulunursa
Koninin hacmi
$= \frac{1}{3}\pi r^2 h$
$= \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot \frac{3}{2} = 6 \text{ m}^3 = 6000 \text{ dm}^3 = 6000$ litredir.

Dik dairesel silindirin hacmi
$= \pi r^2 h$
$= 3 \cdot 2^2 \cdot 3$
$= 36 \text{ m}^3 = 36\,000 \text{ dm}^3 = 36\,000$ litredir.

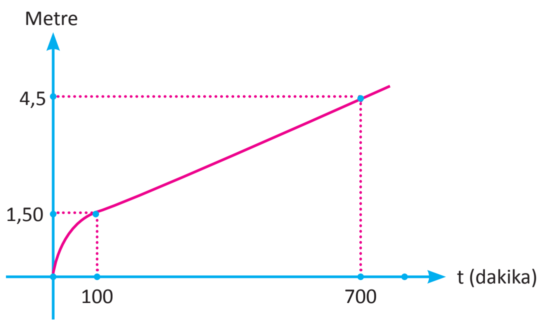
Musluk saniyede 1 litre su akıttığından

$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ litre} & & 1 \text{ saniye} \\ 6\,000 \text{ litre} & & x \text{ saniye} \end{array}$$

$x = 6000$ saniye $= 100$ dakikada su deposunun koni olan kısmı dolar. Aynı şekilde silindir olan kısmının ne kadar sürede dolduğu bulunursa

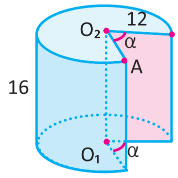
$$\begin{array}{rcl} 1 \text{ litre} & & 1 \text{ saniye} \\ 36\,000 \text{ litre} & & y \text{ saniye} \end{array}$$

$y = 36\,000$ saniye $= 600$ dakika olur. Buna göre
$\frac{3}{2}$ m yüksekliğe 100 dakikada, $\frac{9}{2}$ m yüksekliğe yüksekliğe ise $100 + 600 = 700$ dakikada ulaşır. Dikkat edilirse su deposunun koni olan kısmında alt tarafta çap daha küçük olduğundan su yüksekliği başta daha hızlı artar. Su silindir seviyesine ulaştığında ise sabit hızla yükselir. Bu durum aşağıdaki grafikle gösterilir.



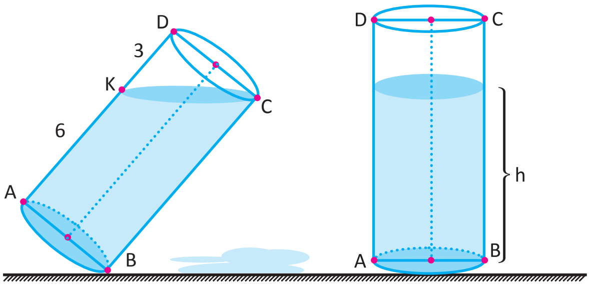
ALIŞTIRMALAR

1. Taban yarıçapı 12 cm, yüksekliği 16 cm taban merkezleri O_1 ve O_2 olan dik dairesel silindirin bir parçası şekilde görüldüğü gibi kesiliyor.



Kesilen parçanın hacmi 160π cm^3 olduğuna göre $m(\widehat{AO_2B}) = \alpha$ kaç derece olduğunu bulunuz.

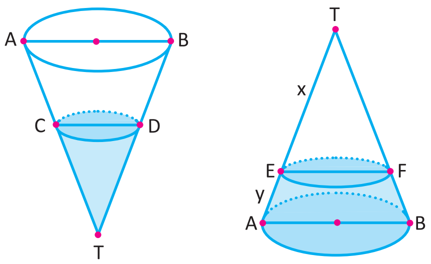
2. Şekilde $2 \cdot |DK| = |AK| = 6$ cm olmak üzere içi su dolu dik dairesel silindir 1. durumdaki gibi eğilerek içindeki suyun bir kısmı dökülüyor.



1. Durum　　2. Durum

Silindir 2. duruma getirildiğinde içinde kalan suyun yüksekliğinin (h) kaç cm olduğunu bulunuz.

3.

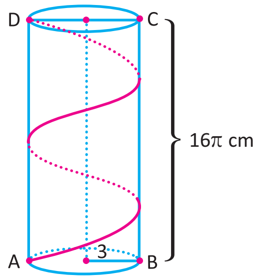


Şekil 1　　Şekil 2

Şekil 1'deki dik dairesel koninin içinde bulunan bir miktar su, koni ters çevrildiğinde Şekil 2'deki konumu almıştır.

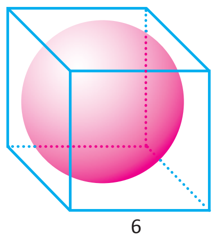
$|AC| = 2 \cdot |CT|$ olduğuna göre $\frac{x}{y}$ oranının kaç olduğunu bulunuz.

4. Taban yarıçapı 3 cm, yüksekliği 16π cm olan dik dairesel silindir biçimindeki yer altı su borusunun A noktasına bir ip bağlanıyor. İp, boruya şekildeki gibi iki tur dolanıyor ve ucu D noktasına getiriliyor.



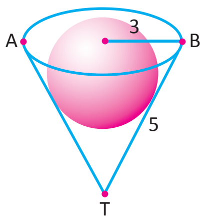
Buna göre kullanılan ipin uzunluğunun <u>en az</u> kaç cm olduğunu bulunuz.

5.



Bir ayrıtı 6 cm olan bir küpün içindeki <u>en büyük</u> hacimli kürenin alanının kaç cm^2 ve hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

6. Şekildeki ters çevrilmiş dik dairesel koninin taban yarıçapı 3 cm ve ana doğrusunun uzunluğu 5 cm olarak veriliyor.



Bu verilere göre dik dairesel koni içine sığabilecek <u>en büyük</u> kürenin hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A) Aşağıdaki 1-6. cümlelerde boş bırakılan yerlere uygun sözcük ya da değerleri yazınız.

1. Kürenin alanı, en büyük dairesinin alanının .... katıdır.

2. Bir küre yüzeyinin bir düzlemle ara kesiti ...., kürenin bir düzlemle ara kesiti .... dir.

3. Bir karenin herhangi bir kenarı etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan cisim .... dir.

4. Dairesel konide taban merkezi ile tepe noktasından geçen doğru .... dir.

5. Silindirin alanı .... ile .... toplamına eşittir.

6. Bir dik üçgenin dik kenarlarından herhangi biri etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan cisim .... dir.

B) Aşağıda numaralar ile verilen ifadeleri, harf ile verilen ifadelerle eşleştiriniz.

7.

Dik kenarları 5 cm ve 12 cm olan bir dik üçgensel bölgenin hipotenüsü etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi	1.
Bir kenarının uzunluğu 8 cm olan karesel bölgenin herhangi bir kenarı etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi	2.
Yarıçapı 4 cm olan dairenin çapı etrafında 180° döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi	3.

a)	512π
b)	$\frac{512}{3}\pi$
c)	$\frac{1200}{13}\pi$
ç)	$\frac{600}{13}\pi$
d)	$\frac{256}{3}\pi$

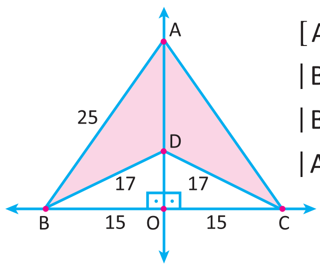
C) Aşağıdaki soruların cevaplarını boş bırakılan yerlere yazınız.

8. Yanal alanı $120\pi\ cm^2$ ve yüksekliği 15 cm olan dik dairesel silindirin alanının kaç cm^2 ve hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

9. Yanal alanları eşit iki silindirin hacimleri oranını yarıçapları cinsinden bulunuz.

10. Bir dik dairesel koninin taban yarıçapı 20 cm, ana doğrusunun uzunluğu 29 cm olduğuna göre bu koninin yüzey alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

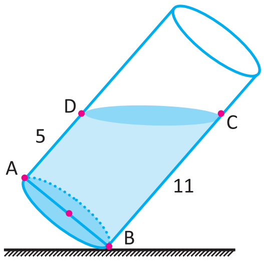
11. Şekildeki ABDC dörtgeni içbükey dörtgendir.



$[AO] \perp [BC]$ ve
$|BO| = |OC| = 15$ cm
$|BD| = 17$ cm
$|AB| = 25$ cm
veriliyor.

Bu dörtgenin $[AO]$ etrafında 90° döndürülmesiyle oluşan cismin hacminin kaç cm^3 olduğunu bulunuz.

Ç) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruları okuyunuz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

12. 

Şekilde eğik durumda bulunan ve CD seviyesine kadar su ile dolu olan dik dairesel silindirde

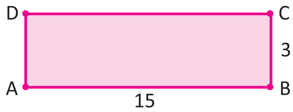
$|AD| = 5$ cm

$|BC| = 11$ cm

veriliyor.

Silindir dik konuma getirildiğinde suyun yüksekliği kaç cm olur?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

13. 

Şekildeki ABCD dikdörtgeninde

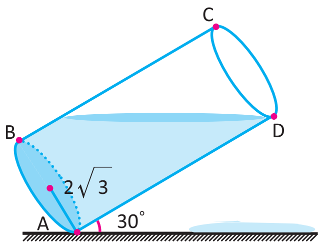
$|AB| = 15$ cm

$|BC| = 3$ cm

veriliyor.

ABCD dikdörtgeninin $[BC]$ etrafında $360°$ döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmi kaç cm^3 tür?

A) 540π B) 555π C) 575π D) 650π E) 675π

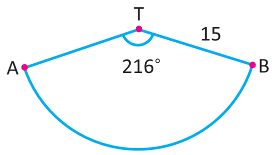
14. 

Şekildeki taban yarıçapı $2\sqrt{3}$ cm ve içi tamamen su ile dolu olan silindir taban düzlemiyle $30°$ lik açı yapacak şekilde eğilmiştir.

Buna göre dökülen suyun hacmi kaç cm^3 olur?

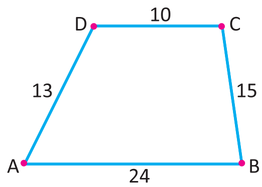
A) 30π B) 32π C) 34π D) 36π E) 38π

15. Yarıçapı 15 cm olan T merkezli daire diliminin merkez açısı $216°$ veriliyor.



Bu dilimin kıvrılması ile oluşan dik dairesel koninin hacmi kaç cm^3 olur?

A) 324π B) 344π C) 346π D) 350π E) 354π

16. 

Şekildeki ABCD yamuğunda

$[AB] \parallel [CD]$

$|AB| = 24$ cm

$|AD| = 13$ cm

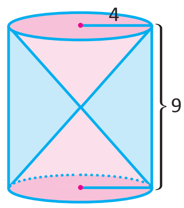
$|BC| = 15$ cm

$|DC| = 10$ cm

veriliyor.

Yamuğun $[AB]$ etrafında $360°$ döndürülmesiyle oluşan cismin yüzey alanı kaç cm^2 olur?

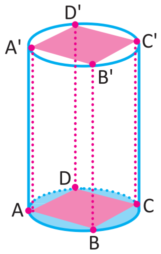
A) 324π B) 334π C) 454π D) 576π E) 624π

17. 

Şekildeki yarıçapı 4 cm, yüksekliği 9 cm olan dik dairesel silindirin içine tepe noktaları ortak olacak şekilde yerleştirilen iki koninin hacimleri toplamı kaç cm^3 olur?

A) 48π B) 50π C) 52π D) 54π E) 56π

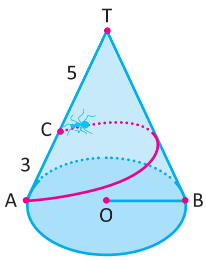
18. Bir dik dairesel silindir içine alt tabanı ABCD, üst tabanı $A'B'C'D'$ olan kare dik prizma şekildeki gibi yerleştiriliyor.



Dik dairesel silindirin yarıçapı $3\sqrt{2}$ cm ve hacmi 180π cm^3 olduğuna göre kare dik prizmanın hacmi kaç cm^3 olur?

A) 300 B) 320 C) 340 D) 360 E) 380

19. Şekildeki dik dairesel koninin tabanındaki A noktasından şekildeki yolu izleyen bir karınca, yüzey üzerinden C noktasına ulaşıyor.



$|TC| = 5$ cm

$|AC| = 3$ cm

$|OB| = r = \frac{4}{3}$ cm

veriliyor.

Buna göre karıncanın alabileceği <u>en kısa</u> yol kaç cm olur?

A) 6 B) 7 C) $7\sqrt{2}$ D) $7\sqrt{3}$ E) 8

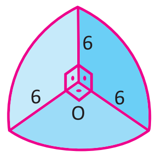
20. Analitik düzlemde köşe noktalarının koordinatları A(1, 4), O(0,0), B(4, 0) olan AOB üçgeninin y ekseni etrafında $360°$ döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç cm^3 olur?

A) $\frac{70\pi}{3}$ B) 25π C) $\frac{80\pi}{3}$ D) 30π E) $\frac{95\pi}{3}$

21. Metal bir küre eritilerek 27 eş küre oluşturuluyor. Başlangıçtaki kürenin alanının elde edilen yeni kürelerden birinin alanına oranı kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) 3 C) 4 D) 9 E) 27

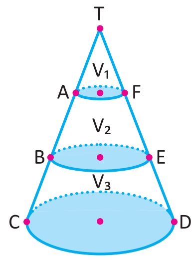
22. Şekildeki cisim, O merkezli yarıçapı 6 cm olan bir kürenin parçasıdır.



Bu küre parçasının yüzey alanı kaç cm^2 dir?

A) 18π B) 28π C) 35π D) 40π E) 45π

23.

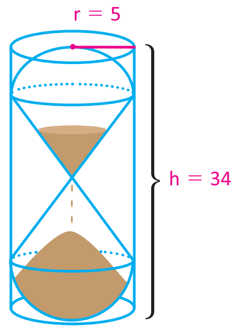


Şekildeki dik dairesel konide paralel taban kesitlerinin alanları sırasıyla 1, 4, 9 ile orantılıdır. V_1, V_2 ve V_3 bulundukları bölgelerin hacimleri olmak üzere $\frac{V_1 + V_3}{V_2}$ oranı kaçtır?

A) $\frac{3}{7}$ B) $\frac{5}{7}$ C) $\frac{9}{7}$ D) $\frac{13}{7}$ E) $\frac{20}{7}$

D) 24-27. soruları aşağıda verilen ortak metne ve şekle göre cevaplandırınız.

Kum saati üretimi yapan bir firma, şekildeki gibi yarıçapı 5 cm ve yüksekliği 34 cm olan dik dairesel silindir içerisinde iki yarım küre arasında tepe noktaları çakışık olacak şekilde her tarafı cam olan kum saatinden 1000 adet sipariş almıştır. Üretim aşağıdaki şartlarda yapılacaktır.



- İşçilik dâhil cam ücretinin m^2 si 40 TL ve kullanılan kumun litresi 3 TL dir.
- Üretilen kum saatinde KDV oranı %18 dir.
- Kum saatinin hacminin $\frac{5}{11}$ i oranında kum kullanılmaktadır.
- Hesaplamalarda camın kalınlığı ihmal edilecektir.
- Gelir vergisi %15 tir. Buna göre

24. Bu sipariş için kaç m^2 cam gerektiğini bulunuz.

25. Bin adet kum saatinin maliyetinin ne kadar olduğunu bulunuz.

26. %50 kâr elde edilebilmesi için 1 kum saatinin yaklaşık kaç TL ye satılması gerektiğini bulunuz.

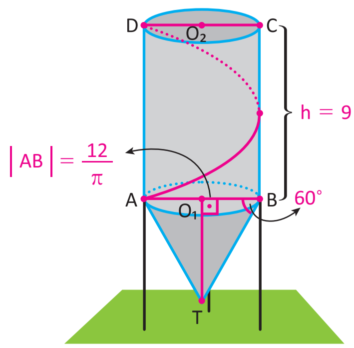
27. Üreticinin bu satış sonunda ödeyeceği gelir vergisini yaklaşık olarak bulunuz.

ÇÖZÜM

E) 28-30. soruları aşağıda verilen ortak metne ve şekle göre cevaplandırınız.

Bir çiftçi, hasat ettiği tahılı depolamak için yanda görseli verilen dik dairesel silindir ve dik dairesel koni birleşiminden oluşan bir galvaniz sac silo yapmak istiyor.

Planlanan silonun silindir kısmının yüksekliği $h = 9$ m, taban dairesinin çapı $R = \frac{12}{\pi}$ m ve $m(\widehat{ABT}) = 60^\circ$ veriliyor. Buna göre



28. Silonun yüzey alanını kaplamak için <u>en az</u> kaç m^2 galvaniz sac malzemesi gerekli olduğunu bulunuz.

29. Yapılması planlanan silonun hacminin kaç m^3 olduğunu bulunuz.

30. Silonun A noktasından D noktasına silindir gövdesini dolanacak şekilde silindir yüzeyine merdiven monte edilecektir. Monte edilecek merdiven için <u>en kısa</u> merdiven yolunun kaç metre olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

VERİ, SAYMA VE OLASILIK

11.7. OLASILIK

Neler Öğreneceksiniz?

11.7.1. KOŞULLU OLASILIK

1. Koşullu Olasılık
2. Bağımlı ve Bağımsız Olayların Olasılığı
3. Bileşik Olayların Olasılığı

11.7.2. DENEYSEL VE TEORİK OLASILIK

Deneysel ve Teorik Olasılık

Olasılığın Kullanım Alanları

1. Günlük hayatta yapılan işlerden elde edilebilecek kazanç veya kayıpların hesaplanmasında kullanılır.
2. Temel bilimler, siyaset, ekonomi, meteoroloji ve güvenlik gibi alanlarda kullanılır.
3. Eldeki verilerden yararlanarak gelecekteki genç nüfusun genel nüfusa oranının hesaplanması gibi konularda kullanılır.
4. Yapılması planlanan yerel ya da genel seçim sonuçlarının tahmininde kullanılır.

Hazırlık Çalışmaları

1. Örnek uzay, olay, ayrık olay, kesin olay ve imkânsız olay kavramlarını açıklayınız.
2. Bir A olayının olasılığının, gerçek sayıların hangi alt kümesindeki tüm değerleri alabileceğini bulunuz.
3. Bir madenî paranın 10 defa havaya atılması deneyinde 3 yazı, 7 tura geldiği görülmüştür. 11. atışta tura gelme olasılığını bulunuz.
4. Bir futbol sezonunda şampiyonluk mücadelesi veren iki takımın yapacağı son maçlardan önceki puan durumu yanda verilmiştir.

   Galibiyete 3 puan, beraberliğe 1 puan verilirken mağlubiyet hâlinde puan verilmemektedir. İkili averaj, B takımı lehine olduğuna göre B takımının şampiyon olma durum sayısının A takımının şampiyon olma durum sayısına oranını bulunuz.

	A Takımı	B Takımı
Oyun	33	33
Galibiyet	22	21
Beraberlik	9	10
Mağlubiyet	2	2
Attığı Gol	73	63
Yediği Gol	30	28
Puan	75	73

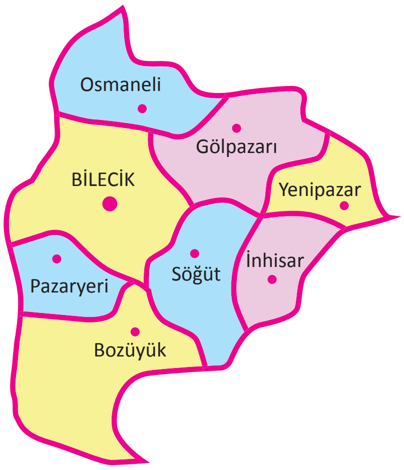
11.7.1. KOŞULLU OLASILIK

1. Koşullu Olasılık

Bir okul yönetimi "Kardeş Okul Projesi" kapsamında okullar arasında "barış, sevgi, kardeşlik, dostluk" gibi değerlerin geliştirilmesini amaçlamaktadır. Bu proje kapsamında Görsel 7.1.1'deki haritadan kura ile bir ilçe ve bu ilçeden bir okul seçilecektir.

Seçilen ilçenin haritadaki renginin mavi olduğu bilinmektedir. Bu ilçenin Söğüt olma olasılığı aşağıdaki gibi bulunur. Haritada mavi renkli ilçe sayısının 3 olduğu görülür (kesinleşmiş olayın eleman sayısı). İstenen ilçe sayısı 1 olduğundan istenen olayın olasılığı

$\dfrac{\text{İstenilen ilçe sayısı}}{\text{Mavi renkli ilçe sayısı}} = \dfrac{1}{3}$ olarak bulunur.



Görsel 7.1.1: Bilecik il haritası

Tanım

A ile B, E örnek uzayının iki olayı olsun. B olayının gerçekleşmiş olması koşulu ile A olayının gerçekleşme olasılığına A olayının B ye bağlı **koşullu olasılığı** denir ve $P(A \mid B)$ ile gösterilir.

$P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ biçiminde hesaplanır.

E eş olumlu örnek uzay ise $P(A \mid B) = \dfrac{s(A \cap B)}{s(B)}$ olur.

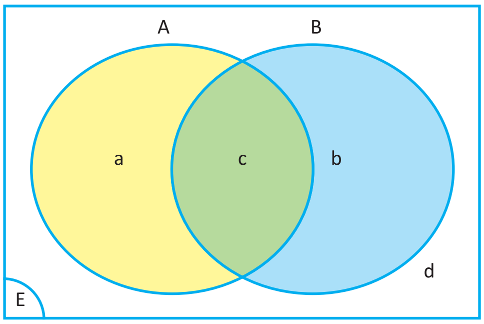
$s(A - B) = a$

$s(B - A) = b$

$s(A \cap B) = c$

$s(A \cup B)' = d$

bulundukları kümenin eleman sayıları olmak üzere Şekil 7.1.1'deki Venn şeması çizilir.



Şekil 7.1.1: Venn şeması

B olayının $(b + c)$ farklı şekilde gerçekleşmesi koşulunda A olayı c defa gerçekleşebilir.

Bu durum $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{c}{(b + c)} = \dfrac{\frac{c}{s(E)}}{\frac{b + c}{s(E)}} = \dfrac{\frac{s(A \cap B)}{s(E)}}{\frac{s(B)}{s(E)}} = \dfrac{s(A \cap B)}{s(B)}$ ile hesaplanır.

1. ÖRNEK

Hilesiz iki zarın atılması deneyinde örnek uzayı tablo ile gösteriniz. Zarlardan birinin 4 geldiği bilindiğine göre diğer zarın 3 gelme olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Bir zardaki her sayı için diğer zarda 6 farklı durum olacağından $6 \cdot 6 = 36$ farklı sonuç elde edilir. Bu durum yandaki tabloda gösterilmiştir.

B olayı kesinleşmiş olay olsun. Tabloda kesinleşmiş olayın sonuçları pembe ile boyalı satır ve sütunda gösterilmiştir. Buradan $s(B) = 6 + 6 - 1 = 11$ olur.

A olayı istenen olay olsun.

Buradan $A = \{(4,3),(3,4)\}$ olduğundan $s(A) = 2$ olur.

Buna göre

$P(A \mid B) = \dfrac{s(A \cap B)}{s(B)} = \dfrac{2}{11}$ bulunur.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
⚁	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
⚂	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
⚃	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
⚄	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
⚅	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

2. ÖRNEK

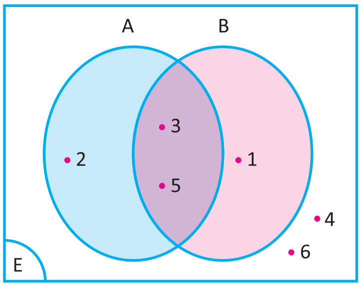
Hilesiz bir zarın atılması deneyinde üst yüze tek sayı geldiği bilinmektedir. Buna göre bu sayının asal sayı olma olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Üst yüze tek sayı gelme olayı B ise $B = \{1,3,5\}$ tir. Asal sayı olma olayı A ise $A = \{2,3,5\}$ olur.

Duruma uygun Venn şeması çizilirse $A \cap B = \{3,5\}$ olduğu görülür.

Buna göre $P(A \mid B) = \dfrac{s(A \cap B)}{s(B)} = \dfrac{2}{3}$ bulunur.



3. ÖRNEK

Hilesiz iki zar birlikte atılıyor. Üst yüze gelen sayılar toplamının tek sayı olduğu bilinmektedir. Buna göre bu sayıların toplamının 5 ile bölünebilme olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

B, üst yüze gelen sayılar toplamının tek sayı olma olayı olsun. $T = \{1,3,5\}$ ve $Ç = \{2,4,6\}$ olmak üzere

$B = \{(x,y) : x + y = T\} = \{(Ç,T),(T,Ç)\}$ olmalıdır. Buradan

$s(B) = \underbrace{3}_{Ç} \cdot \underbrace{3}_{T} + \underbrace{3}_{T} \cdot \underbrace{3}_{Ç} = 18$ olur.

A olayı, toplamı 5 ile bölünebilen ikililer olduğundan

$A = \{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2),(6,4),(4,6)\}$

$A \cap B = \{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\}$

$P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{s(A \cap B)}{s(B)} = \dfrac{4}{18} = \dfrac{2}{9}$ bulunur.

4. ÖRNEK

Hileli bir zar atma deneyinde tek rakamların gelme olasılığı, çift rakamların gelme olasılığının yarısıdır. Atılan zarın 5 ten küçük geldiği bilinmektedir. Buna göre gelen sayının karekökünün bir tam sayı olma olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(\{1\}) = P(\{3\}) = P(\{5\}) = x$

$P(\{2\}) = P(\{4\}) = P(\{6\}) = 2 \cdot x$ olsun.

B, üst yüze gelen sayının 5 ten küçük olma olayı olsun. $B = \{4, 3, 2, 1\}$ olduğundan $s(B) = 4$ olur.

A, üst yüze gelen sayının karekökünün tam sayı olma olayı olsun.

$A = \{1, 4\}$ olduğundan $s(A \cap B) = 2$ olur.

Örnek uzay eş olumlu olmadığından

$P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \neq \dfrac{s(A \cap B)}{s(B)}$ olur. Buna göre

$$P(A \mid B) = \frac{P(1) + P(4)}{P(1) + P(3) + P(2) + P(4)}$$

$$= \frac{x + 2 \cdot x}{x + x + 2 \cdot x + 2 \cdot x}$$

$$= \frac{3 \cdot x}{6 \cdot x}$$

$$= \frac{3}{6}$$

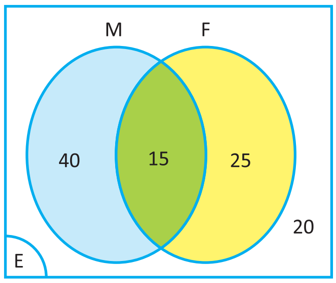
$= \dfrac{1}{2}$ bulunur.

5. ÖRNEK

Bir sınıftaki öğrencilerin %55 i matematikten, %40 ı fizikten, %15 i ise her iki dersten de geçmiştir. Sınıftan rastgele seçilen iki öğrencinin matematik dersinden kaldığı bilinmektedir. Buna göre öğrencilerin fizik dersinden geçmiş olma olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Derslerden geçme ve kalma oranları yüzdelik olarak verildiğinden sınıf mevcudu 100 olsun.
Duruma uygun Venn şeması çizilirse
M, matematik dersinden geçenler
F, fizik dersinden geçenler
$(M \cap F)$, her iki dersten geçenler
M', matematik dersinden kalanların olayı olsun. Yandaki şemaya göre bu durum $s(M') = 45$ olur.



Her iki dersten de geçenler %15 olduğundan $s(M \cap F) = 15$ olur. Diğer kümelerin eleman sayıları da bu değerden faydalanılarak bulunur.

$$P(F \mid M') = \frac{P(F \cap M')}{P(M')} = \frac{s(F \cap M')}{s(M')}$$

$$P(F \mid M') = \frac{\binom{25}{2}}{\binom{25+20}{2}} = \frac{\frac{25 \cdot 24}{2 \cdot 1}}{\frac{45 \cdot 44}{2 \cdot 1}}$$

$$= \frac{25 \cdot 24}{45 \cdot 44}$$

$$= \frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 11}$$

$= \dfrac{10}{33}$ bulunur.

6. ÖRNEK

E örnek uzayının iki olayı A ve B olsun. $P(A)=\frac{2}{5}$, $P(B)=\frac{1}{4}$, $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$ olduğuna göre $P(A\mid B)$ nı bulunuz.

ÇÖZÜM

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{5}+\frac{1}{4}-P(A\cap B)$$

$$P(A\cap B)=\frac{13}{20}-\frac{1}{2}$$

$$P(A\cap B)=\frac{13-10}{20}=\frac{3}{20}$$

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{4}}=\frac{3\cdot 4}{1\cdot 20}=\frac{3}{5}\text{ bulunur.}$$

7. ÖRNEK

Bir okulda 4 matematik, 3 fizik, 2 kimya öğretmeni vardır. Pansiyon nöbeti için görevlendirilen herhangi iki öğretmenden yalnız birinin matematik öğretmeni olduğu bilinmektedir. Buna göre diğer öğretmenin kimya öğretmeni olma olasılığını bulunuz. (Nöbet tutmayan öğretmen yoktur.)

ÇÖZÜM

B olayı, yalnız 1 matematik öğretmeni görevlendirildiğinde 2 kişilik nöbet ekipleri olma olayı olsun.

$$s(B)=\binom{4}{1}\cdot\binom{3+2}{1}=\binom{4}{1}\cdot\binom{5}{1}=20\text{ olur.}$$

A olayı, en az bir kimya öğretmeninin bulunduğu 2 kişilik nöbet ekipleri olma olayı olsun. Buradan

$$s(A\cap B)=\binom{2}{1}\cdot\binom{4}{1}=8\text{ olur.}$$

$$P(A\mid B)=\frac{s(A\cap B)}{s(B)}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}\text{ bulunur.}$$

Tarih Köşesi

Olasılık bir şeyin olmasının veya olmamasının matematiksel veya olabilirlik yüzdesi değeri olarak tanımlanır. 17. yüzyılın ikinci yarısında olasılık konusunun Pascal (Paskal) ve Fermat (Ferma) tarafından matematiksel olarak incelenmeye başlanması ile olasılık sözcüğü modern anlamına doğru bir yol almıştır.

Bugün Olasılık Kuramı bilim, endüstri, ekonomi, spor, yönetim gibi çağdaş insanın yaşamını etkileyen her alana girmiştir. Örneğin bankacılık, sigortacılık, endüstride kalite kontrolü, genetik, gazların kinetik teorisi, kuantum mekaniği gibi pek çok alan olasılık kuramı olmadan ayakta duramaz.

Pierre Simon Laplace' ın (Piyer Simon Laplas) da belirttiği gibi olasılık, kökleri şanş oyunlarına dayanan ve büyük birikimler elde edilmesini sağlayan bir yöntem iken bugün insan bilgisinin önemli bir aracı durumuna gelmiştir.

Kaynak: Dönmez Ali, Matematiğin Öyküsü ve Serüveni, Toplumsal Dönüşüm Yayınları İstanbul, 2002

Görsel 7.1.2: Fermat

2. Bağımlı ve Bağımsız Olayların Olasılıkları

1.Bağımsız Olayların Olasılıkları

Tanım

A ve B, E örnek uzayında iki olay olsun. B olayının gerçekleşmesi veya gerçekleşmemesi, A olayının gerçekleşme olasılığını etkilemiyorsa A ve B olaylarına **bağımsız olay** denir. $P(A) > 0,\ P(B) > 0$ olmak üzere
$P(A) = P(A \mid B)$ ya da $P(B) = P(B \mid A)$ veya $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ ise
A olayı B olayından bağımsızdır denir.

A ve B gibi iki olayda B olayının gerçekleştiğinin bilindiği durumda A olayının gerçekleşme olasılığı $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ile tanımlıydı.

A ile B olayları bağımsız ise $P(A) = P(A \mid B)$ veya $P(B) = P(B \mid A)$ olur.

$P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ eşitliğinde $P(A \mid B)$ yerine $P(A)$ yazılırsa

$P(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ bağıntısı ile bağımsız A ve B olaylarının olasılığı hesaplanır.

Örneğin bir zar ve bir madenî para atıldığında zarın çift sayı gelmesi ile paranın tura gelmesi olayları bağımsız olaylardır. Zarın çift sayı gelmesi, paranın tura gelmesini ya da paranın tura gelmesi, zarın üst yüzüne çift sayı gelmesini etkilemez. Bu yüzden bu olaylar bağımsızdır.

Özellik

A ile B bağımsız olayları için

$P(A \wedge B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$P(A \vee B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$ olur.

1. ÖRNEK

Hilesiz bir zar 2 kez atılıyor. Birinci atışta üst yüze asal sayı ikinci atışta üst yüze bileşik sayı gelme olasılığını bulunuz (1 ve kendisi dışında pozitif tam sayı böleni olan doğal sayılara bileşik sayı denir.).

ÇÖZÜM

Birinci atış (A olayı) ikinci atışın (B olayı) sonucunu etkilemediğinden A ve B olayları bağımsız olaylardır.

A olayının kümesi $A = \{2, 3, 5\}$ ve $s(A) = 3$ olur.

B olayının kümesi $B = \{4, 6\}$ ve $s(B) = 2$ olur.

$$P(A \text{ ve } B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
$$= \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6}$$
$$= \frac{1}{6}$$ bulunur.

2. ÖRNEK

Bir madeni para art arda 3 kez havaya atılıyor. 1. atışta yazı, 2. atışta yazı ve 3. atışta tura gelme olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

A olayı 1. para atışında yazı gelmesi, B olayı 2. para atışında yazı gelmesi, C olayı 3. para atışında tura gelme olayı olsun.

1. Yol

Bu deneyde A olayı B yi, B olayı C yi etkilemez. Bu olaylar kendi aralarında bağımsızdır.

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \text{ bulunur.}$$

2. Yol

3 madeni paranın 3 kez art arda veya 3 metal paranın aynı anda havaya atılması deneylerindeki örnek uzay aynıdır. $s(E) = 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 8$ durum vardır.

A olayı, (Y, Y, T) olduğundan $s(A) = 1$ olur. Buradan $P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{1}{8}$ bulunur.

3. ÖRNEK

Hilesiz bir zarın atılması deneyinde zarın üst yüzüne çift sayı gelmesi olayı ile asal sayı gelmesi olaylarının bağımsız olup olmadığını inceleyiniz.

ÇÖZÜM

E örnek uzayı $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olur.

Çift sayı gelme olayı $Ç = \{2, 4, 6\}$ olduğundan $P(Ç) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ olur.

Asal sayı gelme olayı $A = \{2, 3, 5\}$ olduğundan $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ olur. $Ç \cap A = \{2\}$ olup $P(Ç \cap A) = \frac{1}{6}$ bulunur.

Ç ve A olayları bağımsız olaylar ise $P(Ç \cap A) = P(Ç) \cdot P(A)$ olmalıdır. Buradan

$P(Ç \cap A) = \frac{1}{6}$ ve $P(Ç) \cdot P(A) = \frac{1}{4}$ olduğundan $P(Ç \cap A) \neq P(Ç) \cdot P(A)$ olur. Buna göre bu iki olay bağımsız olay değildir.

4. ÖRNEK

E örnek uzayına ait bağımsız iki olay A ve B olsun. A' ve B' olaylarının bağımsız olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

Verilenlere göre $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$ olur. A' ve B' olayları bağımsız ise $P(A') \cdot P(B') = P(A' \cap B')$ olmalıdır. De Morgan kuralından $A \subseteq E$, $B \subseteq E$ ise $(A' \cap B') = (A \cup B)'$ olduğundan

$$P(A \cup B) + P(A \cup B)' = P(E)$$
$$P(A \cup B) + P(A \cup B)' = 1$$
$$P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$$
$$P(A \cup B)' = 1 - [P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)]$$
$$P(A \cup B)' = 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B)$$
$$P(A \cup B)' = 1 \cdot [1 - P(A)] - P(B) \cdot [1 - P(A)]$$
$$P(A \cup B)' = [1 - P(A)] \cdot [1 - P(B)] = P(A') \cdot P(B')$$

$P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B')$ olur. Bu durumda A' ve B' olayları bağımsız olaylardır.

5. ÖRNEK

Hilesiz bir zar ile bir madenî para aynı anda atılıyor. Buna göre

a) Deneyin örnek uzayını bulunuz.

b) A olayı zarın üst yüzüne asal sayı gelmesi olduğuna göre $P(A)$ nı bulunuz.

c) B olayı paranın tura gelmesi olayı olduğuna göre $P(B)$ nı bulunuz.

ç) $A \cap B$ kümesini liste biçiminde yazarak $P(A \cap B)$ nı bulunuz.

d) $P(A) \cdot P(B)$ nı bulup $P(A \cap B)$ ile karşılaştırınız.

ÇÖZÜM

a) $E = \{(1, Y), (1, T), (2, Y), (2, T), (3, Y), (3, T), (4, Y), (4, T), (5, Y), (5, T), (6, Y), (6, T)\}$ bulunur.

b) $A = \{(2, Y), (2, T), (3, Y), (3, T), (5, Y), (5, T)\}$ olduğundan $s(A) = 6$ olur. Böylece

$P(A) = \dfrac{s(A)}{s(E)} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$ bulunur.

c) $B = \{(1, T), (2, T), (3, T), (4, T), (5, T), (6, T)\}$ olduğundan $s(B) = 6$ olur. Böylece

$P(B) = \dfrac{s(B)}{s(E)} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$ bulunur.

ç) $A \cap B = \{(2, T), (3, T), (5, T)\}$ olduğundan $s(A \cap B) = 3$ olur. Böylece

$P(A \cap B) = \dfrac{s(A \cap B)}{s(E)} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$ bulunur.

d) $P(A) \cdot P(B) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$ ve $P(A \cap B) = \dfrac{1}{4}$ olduğundan $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ olur.

Buna göre A ile B olayları bağımsız olaylardır.

Sonuç

Bağımsız olaylarla ayrık olaylar birbirine karıştırılmamalıdır. Bağımsız olayların olasılıkları sıfırdan farklı ise ortak noktaları vardır. Ayrık olayların örnek uzayları aynıdır, bağımsız olayların örnek uzayları farklıdır.

6. ÖRNEK

İki asker aynı hedefe atış yapacaktır. Birinci askerin hedefi vurma olasılığı $\dfrac{3}{8}$, ikinci askerin hedefi vurma olasılığı ise $\dfrac{1}{4}$ veriliyor. Askerler aynı anda birer atış yaptığında hedefin vurulma olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

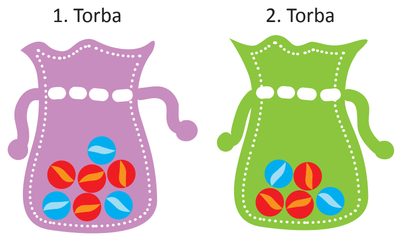
Birinci askerin hedefi vurma olayı A, ikinci askerin hedefi vurma olayı B olsun.

$$P(A \text{ veya } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \frac{3}{8} + \frac{1}{4} - \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{5}{8} - \frac{3}{32} \\ &= \frac{20 - 3}{32} = \frac{17}{32} \text{ olarak bulunur.} \end{aligned}$$

7. ÖRNEK

Yandaki birinci torbada özdeş 4 kırmızı ve 3 mavi renkli bilye, ikinci torbada özdeş 3 kırmızı ve 2 mavi renkli bilye vardır. Buna göre bu torbalardan rastgele seçilen bir bilyenin kırmızı olma olasılığını bulunuz.



Kırmızı bilye sayısı: 4
Mavi bilye sayısı: 3

Kırmızı bilye sayısı: 3
Mavi bilye sayısı: 2

ÇÖZÜM

T_1, birinci torbayı seçme olayı, T_2, ikinci torbayı seçme olayı ve K seçilen torbada kırmızı renkli bilye olma olayı olsun.

$P(T_1 \cap K)$ veya $P(T_2 \cap K)$ olur. Bu durumda

$$P(T_1 \cap K) + P(T_2 \cap K) = P(T_1) \cdot P(K) + P(T_2) \cdot P(K)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{7} + \frac{3}{5}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{41}{35}\right) = \frac{41}{70} \text{ bulunur.}$$

8. ÖRNEK

Bir basketbolcunun serbest atış kullanırken basket atma olasılığı $\frac{3}{5}$ tir. Basketbolcu 3 serbest atış kullanacaktır. Bu atışta en az ikisinin basket olma olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

B olayı atış sonunda başarılı olma, B' olayı atış sonunda başarısız olma olayı olsun.

İstenen durumlar $\{BBB' \vee BB'B \vee B'BB \vee BBB\}$ olduğundan

$$P(B \cap B \cap B') \cdot \left(\frac{3!}{2!}\right) + P(B \cap B \cap B) = P(B) \cdot P(B) \cdot P(B') \cdot 3 + P(B) \cdot P(B) \cdot P(B)$$

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot 3 + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25} \cdot \left(\frac{6}{5} + \frac{3}{5}\right)$$

$$= \frac{9}{25} \cdot \frac{9}{5} = \frac{81}{125} \text{ bulunur.}$$

Sıra Sizde

SORU

Hilesiz bir zar 3 defa atılıyor. Zarın üst yüzüne tek sayı geldiğine göre ilk atışta 5, ikinci atışta 1, üçüncü atışta 3 gelme olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

2. Bağımlı Olayların Olasılığı

Tanım

A ile B, E örnek uzayının iki olayı olsun. A olayının gerçekleşmesi durumunda B olayının gerçekleşme olasılığı ile A olayının gerçekleşmemesi durumunda B olayının gerçekleşme olasılığı birbirinden farklı ise A ve B olaylarına **bağımlı olaylar** denir.

$P(A) \neq P(A \mid B)$ ve $P(B) \neq P(B \mid A)$ olur.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$ bağıntısı hem bağımlı olaylar hem de bağımsız olaylar için geçerlidir.

9. ÖRNEK

Hilesiz bir zar atıldığında zarın asal sayı gelme olayı A, çift sayı gelme olayı B, tek sayı gelme olayı C olsun. A, B ve C olaylarının aralarında bağımlı olay olup olmadığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Deneyde örnek uzay $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{2, 3, 5\}$ olup $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ olur. $B = \{2, 4, 6\}$ olup $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ olur.

$C = \{1, 3, 5\}$ olup $P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ olur. Bu durumda

$A \cap B = \{2\}$ ise $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, $A \cap C = \{3, 5\}$ ise $P(A \cap C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ olur.

$P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3}$ bulunur. $P(B) \neq P(B \mid A)$ olduğundan B olayı ile A olayı bağımlıdır.

$P(C \mid A) = \dfrac{P(A \cap C)}{P(A)} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$ bulunur. $P(C) \neq P(C \mid A)$ olduğundan C olayı ile A olayı bağımlıdır.

10. ÖRNEK

Bir torbada özdeş 4 beyaz, 5 mavi bilye vardır. Çekilen bilye geri konulmamak şartı ile torbadan art arda iki bilye çekiliyor.

a) İkisinin de mavi olma olasılığını

b) İkisinin de farklı renkte olma olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

a) İlk çekilişte mavi gelme olayı M_1, ikinci çekilişte mavi gelme olayı M_2 olsun.

$P(M_1) = \dfrac{s(M_1)}{s(E)} = \dfrac{5}{5+4} = \dfrac{5}{9}$ olur. İlk çekilişte mavi gelmesi koşulu ile ikinci çekilişte mavi gelme olasılığı

$P(M_2 \mid M_1) = \dfrac{5-1}{5+4-1} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$ olur.

$P(M_1 \cap M_2) = P(M_1) \cdot P(M_2 \mid M_1)$

$= \dfrac{5}{9} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{18}$ bulunur.

b) İkisinin de farklı renkte olması, birinci çekilişte mavi, ikinci çekilişte beyaz veya birinci çekilişte beyaz, ikinci çekilişte mavi olması hâlidir.

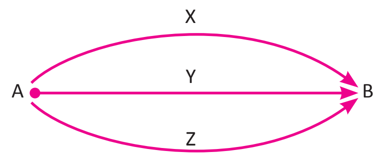
$P(M \text{ ve } (B \mid M))$ veya $P(B \text{ ve } (M \mid B)) = P(M) \cdot P(B \mid M) + P(B) \cdot P(M \mid B)$

$= \dfrac{5}{9} \cdot \dfrac{4}{8} + \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{5}{8} = \cancel{2} \cdot \left(\dfrac{5 \cdot \cancel{4}}{9 \cdot \cancel{8}} \right) = \dfrac{5}{9}$ bulunur.

Sonuç

A ve B bağımlı iki olay olsun. A ve B olaylarının gerçekleşme olasılığı, A olayının gerçekleşme olasılığı ile A olayının gerçekleşmesi durumunda B olayının gerçekleşme olasılığının çarpımına eşittir.

11. ÖRNEK



Bir okul servisi A semtinden B semtine gitmek istediğinde

X yolunu seçerse $\frac{3}{10}$ olasılıkla,

Y yolunu seçerse $\frac{1}{4}$ olasılıkla,

Z yolunu seçerse $\frac{1}{20}$ olasılıkla varış noktasına geç kalmış olacaktır.

Sabah trafiğinde X, Y, Z yollarından rastgele bir yol seçen servisin varış noktasına geç kalma olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

G olayı geç kalma, X olayı X yolunu seçme, Y olayı Y yolunu seçme, Z olayı Z yolunu seçme olsun.
$[P(G) = P(X)$ ve $P(G \mid X)]$ veya $[P(Y)$ ve $P(G \mid Y)]$ veya $[P(Z)$ ve $P(G \mid Z)]$ olur. Buradan

$P(G) = P(X) \cdot P(G \mid X)$ veya $P(Y) \cdot P(G \mid Y)$ veya $P(Z) \cdot P(G \mid Z)$ olur. Bu durumda

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{3}\left[\frac{3}{10} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{6+5+1}{20}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{20}$$

$$= \frac{1}{5} \text{ bulunur.}$$

12. ÖRNEK

Şehit Ömer HALİSDEMİR Fen Lisesi 11/A sınıfı öğrencilerine görev ve sorumluluk duygusu kazanmaları için nöbet tutturulmaktadır. 24 kişilik sınıfta erkek öğrencilerin sayısı, kız öğrencilerin sayısının 2 katından 3 eksiktir. Bu sınıftaki öğrencilerin içinden rastgele bir sınıf nöbetçisi ve bir de kütüphane nöbetçisi seçiliyor. Sınıf nöbetçisinin erkek ve kütüphane nöbetçisinin kız öğrenci olma olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Kız öğrencilerin sayısı x ise erkek öğrencilerin sayısı $(2 \cdot x - 3)$ olur. Sınıf mevcudu 24 kişi olduğundan

$x + 2 \cdot x - 3 = 24 \Rightarrow x = 9$ bulunur.

Bu sınıfta 9 kız, 15 erkek öğrenci vardır.

A olayı sınıf nöbetçisinin erkek öğrenci olması olayı, B olayı kütüphane nöbetçisinin kız öğrenci olması olayı olsun. A olayı gerçekleştiğinde sınıf mevcudu azalacağından bu durum B olayının gerçekleşmesinde etkilidir.

Bu yüzden bu olaylar bağımlı olaylardır.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$$

$$= \frac{15}{24} \cdot \frac{9}{(24-1)} = \frac{15}{24} \cdot \frac{9}{23}$$

$$= \frac{45}{184} \text{ bulunur.}$$

3. Bileşik Olayların Olasılıkları

Tanım

İki veya daha çok olayın birlikte veya art arda gerçekleşmesi olayına **bileşik olay** denir.

A ve B, E örnek uzayının iki olayı olsun. A ile B bağımsız iki olay iken ve bağlacı ile bağlanan olayların birlikte gerçekleşmesi beklenir. Veya bağlacı ile bağlanan olayların ise en az birinin gerçekleşmesi yeterlidir.

$P(A \text{ veya } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$ olur.

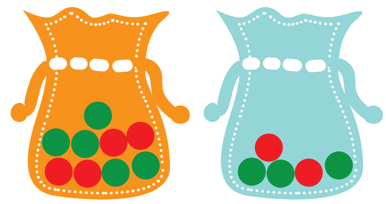
$P(A \text{ ve } B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ olur.

A ile B ayrık olaylar ise $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ olur.

Örneğin bir para havaya atıldığında paranın tura gelme olayı basit olaydır. Bir para ve bir zar birlikte atıldığında ise paranın yazı ve zarın 4 gelmesi, iki basit olaydan oluşan bileşik olaydır.

1. ÖRNEK

A torbasında özdeş 4 kırmızı ve 5 yeşil renkli top, B torbasında özdeş 2 kırmızı ve 3 yeşil renkli top vardır. Her iki torbadan birer top çekildiğinde çekilen her iki topun da aynı renkte olma olasılığını bulunuz.



ÇÖZÜM

Y_A, A torbasından çekilen topun yeşil renkli olma olayı,
Y_B, B torbasından çekilen topun yeşil renkli olma olayı,
K_A, A torbasından çekilen topun kırmızı renkli olma olayı,
K_B, B torbasından çekilen topun kırmızı renkli olma olayı olsun.

İstenilen olay, topların $\{Y \text{ ve } Y\}$ veya $\{K \text{ ve } K\}$ olmasıdır. Bu durumda

$P(Y_A \text{ ve } Y_B)$ veya $P(K_A \text{ ve } K_B)$ olur. Buradan

$P(Y_A \cap Y_B) + P(K_A \cap K_B) = P(Y_A) \cdot P(Y_B) + P(K_A) \cdot P(K_B) = \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{5} = \frac{15+8}{45} = \frac{23}{45}$ bulunur.

2. ÖRNEK

Bir okuldaki görevli 24 öğretmenden 14 ü erkek, 10 u kadındır.

Erkek öğretmenlerin $\frac{4}{7}$ ü A operatörünü, kadın öğretmenlerin yarısı B operatörünü kullanmaktadır. Öğretmenlerin bu iki operatörden birini kullandığı bilindiğine göre bir öğretmenin telefonu çaldığında telefonu çalan kişinin kadın veya A operatörü kullanan biri olma olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Operatör	Erkek (E)	Kadın (K)
A	8	5
B	6	5

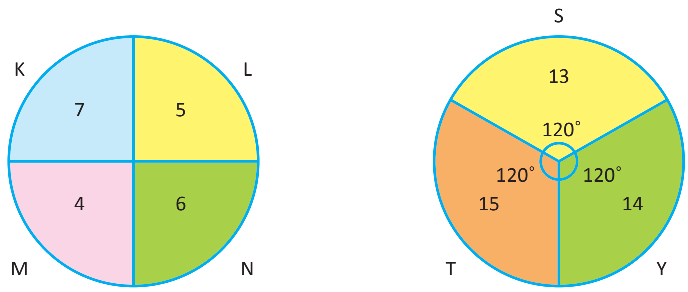
Verilen bilgilere göre yandaki tablo oluşturulur. Buradan istenilen olasılık

$P(K \text{ veya } A) = P(K) + P(A) - P(K \cap A)$ olur. Bu durumda

$= \frac{10}{24} + \frac{13}{24} - \frac{5}{24}$

$= \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$ bulunur.

3. ÖRNEK



Şekildeki hedef tahtalarındaki renklerin puanları üzerlerinde belirtilmiştir. Kural olarak bir oyuncu her bir hedef tahtasına birer atış yaparak isabet ettirdiği renklerin puanını kazanacaktır. Atıcının birer atış sonunda 20 veya 20 den fazla puan alamadığı ve iki atışta da hedef tahtasını vurduğu bilindiğine göre atıcının puanının 18 olma olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Atıcının ulaşmış olabileceği puanlar	17	veya	18	veya	19
	$4+13$		$5+13$		$4+15$
			$4+14$		$6+13$
					$5+14$

B olayı toplanan puanın 20 den küçük olması durumu, A olayı toplanan puanın 18 olması durumu olsun. Bu durumda

$$P(A \mid B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$=\frac{P(5 \wedge 13) \text{ veya } P(4 \wedge 14)}{P(19) \text{ veya } P(18) \text{ veya } P(17)}$$

$$=\frac{P(5) \cdot P(13)+P(4) \cdot P(14)}{P(4) \cdot P(15)+P(6) \cdot P(13)+P(5) \cdot P(14)+P(5) \cdot P(13)+P(4) \cdot P(14)+P(4) \cdot P(13)}$$

$$=\frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2}{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 6}=\frac{1}{3} \text{ bulunur.}$$

(A, B, C olayları bağımlı olaylar ise $P(A \cap B \cap C)=P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P(C \mid (A \cap B))$ dir.)

Sıra Sizde

SORU

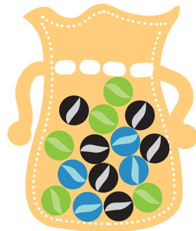
"B A Y R A K" kelimesinin tüm harflerinin bulunduğu bir torbadan art arda bütün harfler rastgele çekiliyor. Çekilen harfler geri konulmadığına göre sıralı olarak çekilen harflerin bir kâğıda yazılması ile "B A Y R A K" kelimesinin oluşma olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

4. ÖRNEK

Özdeş 4 mavi, 5 yeşil ve 6 siyah renkli bilyenin bulunduğu bir torbadan geri konulmamak şartıyla art arda 3 bilye çekiliyor. Buna göre

a) Her çekilişte aynı renk bilyenin gelme olasılığını
b) Her çekilişte farklı renk bilyenin gelme olasılığını
c) Bir bilyenin mavi ve diğer iki bilyenin maviden farklı renkte olma olasılığını bulunuz.



Mavi bilye sayısı: 4
Yeşil bilye sayısı: 5
Siyah bilye sayısı: 6

ÇÖZÜM

a) İstenilen olasılık MMM veya YYY veya SSS olma durumudur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&P(M\cap M\cap M)+P(Y\cap Y\cap Y)+P(S\cap S\cap S)\\
&=P(M)\cdot P(M\mid M)\cdot P(M\mid M\cap M)+P(Y)\cdot P(Y\mid Y)\cdot P(Y\mid Y\cap Y)+P(S)\cdot P(S\mid S)\cdot P(S\mid S\cap S)\\
&=\frac{4}{15}\cdot\frac{3}{14}\cdot\frac{2}{13}+\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}\cdot\frac{3}{13}+\frac{6}{15}\cdot\frac{5}{14}\cdot\frac{4}{13}\\
&=\frac{24+60+120}{15\cdot 14\cdot 13}\\
&=\frac{204}{5\cdot 3\cdot 14\cdot 13}\\
&=\frac{34}{455}\text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

b) İstenilen olasılık MYS, MSY, SMY, SYM, YMS, YSM olma durumları 3! ile gösterilirse

$$\begin{aligned}
P(M\cap Y\cap S)\cdot 3! &= P(M)\cdot P(Y\mid M)\cdot P(S\mid (M\cap Y))\cdot 3!\\
&=\frac{4}{15}\cdot\frac{5}{14}\cdot\frac{6}{13}\cdot 3!\\
&=\frac{4\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{6}\cdot 6}{\cancel{5}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 7\cdot 13}\\
&=\frac{24}{91}\text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

c) İstenilen olasılık MYY veya MYS veya MSS olma durumunun permütasyonlarıdır. Bu durumda olasılık

$$\begin{aligned}
&P(M\cap Y\cap Y)+P(M\cap Y\cap S)+P(M\cap S\cap S)\\
&=P(M)\cdot P(Y)\cdot P(Y)\cdot\frac{3!}{2!}+P(M)\cdot P(Y)\cdot P(S)\cdot 3!+P(M)\cdot P(S)\cdot P(S)\cdot\frac{3!}{2!}\\
&=\frac{4}{15}\cdot\frac{5}{14}\cdot\frac{4}{13}\cdot\frac{3!}{2!}+\frac{4}{15}\cdot\frac{5}{14}\cdot\frac{6}{13}\cdot 3!+\frac{4}{15}\cdot\frac{6}{14}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{3!}{2!}\\
&=\frac{1}{15\cdot 14\cdot 13}\cdot\left[\frac{4\cdot 5\cdot 4\cdot 6}{2}+4\cdot 5\cdot 6\cdot 6+\frac{4\cdot 6\cdot 5\cdot 6}{2}\right]\\
&=\frac{1}{15\cdot 14\cdot 13}\cdot(4\cdot 5\cdot 6)\cdot[2+6+3]\\
&=\frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 11}{15\cdot 14\cdot 13}\\
&=\frac{44}{91}\text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

Ağaç Diyagramı

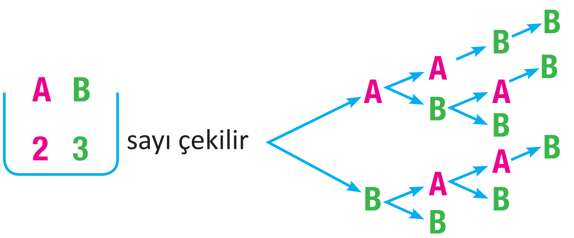
Sayma yöntemlerinden biri de ağaç diyagramıdır. Ağaç diyagramı, sonlu sayıdaki denemeler dizisinin bütün çıktılarının sergilenmesinde kullanılan bir yöntemdir. Deneyin gelişimi dallara ayrılarak izlenir ve ağaca benzer bir görüntü oluşur. Aranılan çıktılar veya olaylar bu diyagramdan kolayca görülüp listelenebilir.

5. ÖRNEK

İçinde 2 asal, 3 bileşik sayı bulunan bir kutudan 2 bileşik sayı gelene kadar çekim yapılmaktadır. Bu deney ile ilgili gelişmeleri ağaç diyagramında gösterip örnek uzayını liste biçiminde yazınız.

ÇÖZÜM

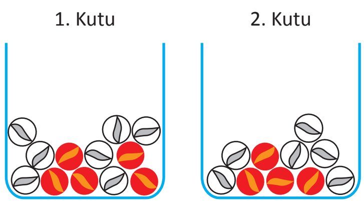
A asal sayı olma olayı, B bileşik sayı olma olayı olsun.



olur. Bu durumda

Örnek uzayın listesi $E = \{AABB, ABAB, ABB, BAAB, BAB, BB\}$ şeklinde gerçekleşir.

6. ÖRNEK



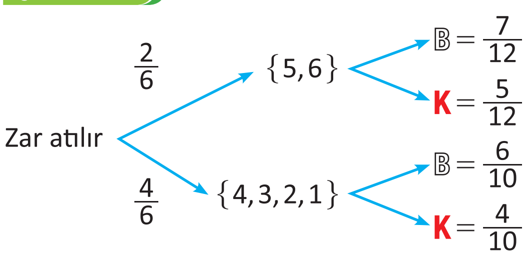
Kırmızı bilye sayısı: 5
Beyaz bilye sayısı: 7

Kırmızı bilye sayısı: 4
Beyaz bilye sayısı: 6

Yandaki şekilde 1 ve 2 no.lu kutuların içinde bulunan özdeş kırmızı ve beyaz renkli bilye sayıları verilmiştir. Bir zar atılarak üst yüze gelen sayının 5 veya 5 ten büyük olması hâlinde 1. kutudan, 5 ten küçük olması hâlinde 2. kutudan bir bilye çekiliyor.

Çekilen bilyenin kırmızı olduğu bilindiğine göre bu bilyenin 1 no.lu kutudan çekilmiş olma olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM



$$\text{Olasılık} = \frac{\text{İstenilen durum olasılığı}}{\text{Bilindik durum olasılığı}} = \frac{\text{1 no.lu kutudan kırmızı bilye çekme olasılığı}}{\left[\begin{array}{l}\text{Zar 5 veya 5 ten büyük}\\ \text{ise 1 no.lu kutudan}\\ \text{kırmızı çekme olasılığı}\end{array}\right] \text{veya} \left[\begin{array}{l}\text{Zar 5 ten küçük ise 2}\\ \text{no.lu kutudan kırmızı}\\ \text{çekme olasılığı}\end{array}\right]}$$

$$= \frac{\frac{2}{6}\cdot\frac{5}{12}}{\frac{2}{6}\cdot\frac{5}{12}+\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{10}} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{5}{36}+\frac{4}{15}}$$

$$= \frac{\frac{5}{36}}{\frac{25}{180}+\frac{48}{180}} = \frac{5}{\cancel{36}}\cdot\frac{\cancel{36}\cdot 5}{73} = \frac{25}{73} \text{ bulunur.}$$

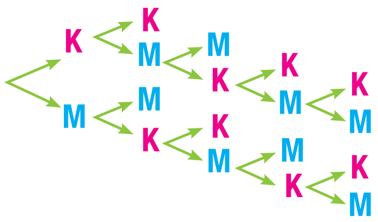
7. ÖRNEK

Kübra ile Meltem tenis maçı yapıyorlar. Art arda iki set veya toplamda üç set kazanan kişi maçın galibi olacaktır.
Maçı Meltem'in kazandığı bilindiğine göre bu maçın üç setten fazla oynanma olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

K maçı Kübra'nın kazandığını, M maçı Meltem'in kazandığını göstersin

Maç başlar



Örnek uzay kümesi
$E=\{KK, KMM, KMKK, KMKMK, KMKMM, MM, MKK, MKMM, MKMKK, MKMKM\}$ şeklindedir.
B olayı Meltem'in maçı kazanmış olma olayı olsun.
$B=\{KMM, KMKMM, MM, MKMM, MKMKM\}$ olduğundan $s(B)=5$ olur.

A olayı 3 setten fazla maç yapılması olayı olsun.
$A=\{KMKK, KMKMK, KMKMM, MKMM, MKMKK, MKMKM\}$ olur.

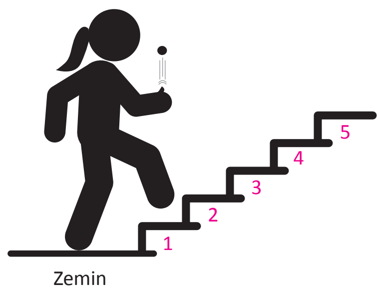
$A\cap B=\{KMKMM, MKMM, MKMKM\}$ olduğundan $s(B)=3$ olur. Bu durumda maçın üç setten fazla oynanma olasılığı

$P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{s(A\cap B)}{s(B)}=\dfrac{3}{5}$ bulunur.

Sıra Sizde

SORU

Selma, olasılığı uygulama yaparak öğrenmek istiyor. Görseldeki merdivende hilesiz bir madenî parayı havaya attığında yazı gelmesi hâlinde merdiven basamaklarını birer birer, tura gelmesi hâlinde ikişer ikişer çıkıyor. Zeminden harekete başlayan Selma'nın 5. basamağa uğrama olasılığını ağaç diyagramı çizerek bulunuz.



ÇÖZÜM

11.7.2. DENEYSEL VE TEORİK OLASILIK

Deneysel ve Teorik Olasılık

Tanım

Bir olayın olma olasılığını ,yapılan deneylere göre bulmaya **deneysel olasılık** denir. Deneysel olasılıkta bir olayın olasılığı geçmiş verilere göre ya da deneyimlere göre hesaplanır. Bir olayın deneysel olasılık değeri, deneyde istenen durumların gerçekleşme sayısının tüm deneme sayısının oranına eşittir.

$$\text{Deneysel olasılık} = \frac{\text{Yapılan deneyde istenilen durumun gerçekleşme sayısı}}{\text{Tüm deneme sayısı}}$$

Deney yapmadan teorik olarak hesaplanan olasılığa **teorik olasılık** denir.

Örneğin bir zar atıldığında üst yüzüne 5 gelme olasılığının $\frac{1}{6}$ olması teorik olasılıktır. Bir madenî parayı 50 kez atan Ali'nin 35 kez tura geldiğini gözlemlemesi ve 51. atışta tura gelme olasılığını hesaplarken $\frac{35}{50} = \frac{7}{10}$ sini bulması deneysel olasılıktır.

1. ÖRNEK

Hilesiz bir madenî para 20 defa havaya atıldığında 12 kez yazı, 8 kez tura geliyor. Buna göre 21. atıştaki yazı gelme olasılığını

a) Teorik olasılık ile bulunuz.
b) Deneysel olasılık ile bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Para, hilesiz olup eş olumlu örnek uzaya sahip olduğundan $E = \{Y, T\}$ olur. A olayı, paranın yazı gelme olayı olsun. Böylece teorik olasılık ile

$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{1}{2} = 0,5$ bulunur.

b) $\text{Deneysel olasılık} = \frac{\text{Geçmişte 12 defa yazı}}{\text{Tüm deneme sayısı}}$

$= \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0,6$ bulunur. Deneysel olasılık, teorik olasılık ile aynı olmayabilir.

2. ÖRNEK

A ve B takımlarının geçmişte yaptığı 100 maçın 38 ini A takımı, 36 sını B takımı kazanmış ve 26 maçta da berabere kalmışlardır. 101. maçta B takımının kazanma olasılığını

a) Teorik olarak hesaplayınız.
b) Deneysel olarak hesaplayınız.

ÇÖZÜM

a) Teorik olarak deney çıktıları E = [Galibiyet, mağlubiyet, beraberlik]
B olayı, B takımının galip gelme olayı olsun. B = [Galibiyet]

$P(B) = \frac{s(B)}{s(E)} = \frac{1}{3}$ bulunur.

b) $\text{Deneysel olasılık} = \frac{\text{Geçmişte B takımının galibiyet sayısı}}{\text{Geçmişte yapılan tüm maç sayısı}} = \frac{36}{38 + 36 + 26} = \frac{9}{25}$ bulunur.

3. ÖRNEK

Yandaki tabloda A, B, C ve D isimli öğrenciler düzgün bir zarı atarak 2 gelme olasılığını hesaplamak istiyorlar.

Yapılan deneyler sonucu 2 gelme olasılığı deneysel olarak hesaplandığında hangi öğrencinin cevabının teorik olarak 2 gelme olasılığına en yakın olduğunu bulunuz.

İsim	Deney sayısı	2 nin geldiği durum sayısı
A	10	4
B	20	5
C	50	6
D	100	17

ÇÖZÜM

Zar deneyinde 2 gelme olasılığı teorik olarak $P(2)=\frac{1}{6}\cong 0,16$ bulunur.

A kişisinin deneysel cevabı $=\frac{4}{10}=0,4$ olur. B kişisinin deneysel cevabı $=\frac{5}{20}=0,25$ olur.

C kişisinin deneysel cevabı $=\frac{6}{50}=0,12$ olur. D kişisinin deneysel cevabı $=\frac{17}{100}=0,17$ olur.

Bu durumda D kişisinin cevabı teorik olasılığa en yakın olandır.

Sonuç Deney sayısı arttıkça deneysel olasılığın değeri, teorik olasılığın değerine yaklaşır.

4. ÖRNEK

Aşağıdaki daire biçimindeki dart tahtası eşit büyüklükte daire dilimlerine ayrılmıştır. Bir yarışmacı bu dart tahtasına bir kez ok atarak okun isabet ettiği dilimdeki hediyeyi kazanacaktır. Buna göre

a) Yarışmacının bir atış sonunda fotoğraf makinesi kazanma olasılığını bulunuz.

b) Yarışmacı 120 atış yaptığında bu atışların kaç tanesinde cep telefonunun bulunduğu daire dilimini isabet ettirebileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

a) F, fotoğraf makinesi kazanma olayı olsun.

$P(F)=\frac{s(F)}{s(E)}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ bulunur.

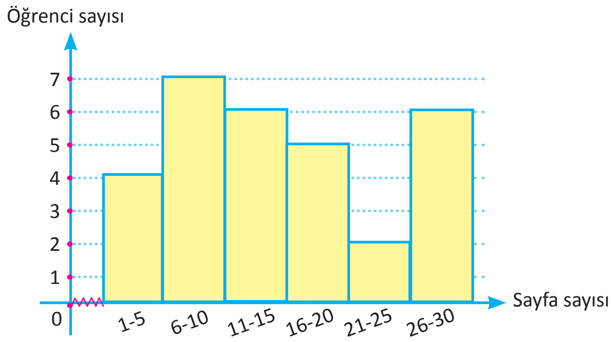
b) C, cep telefonu kazanma olayı olsun. Teorik olasılıkta 1 kez ok atışı yapıldığında cep telefonu kazanma olasılığı $P(C)=\frac{1}{8}$ olur.

$120\cdot\frac{1}{8}=15$ defa okların cep telefonu dilimine isabet etmesi beklenir. Ancak bu kesin değildir.

5. ÖRNEK

Eğitim-öğretim yılının başında bir sınıf öğretmeni, öğrencilerine kitap okumanın yararları hakkında etkili bir konuşma yapıyor. Geçmişte öğrencinin günlük okuduğu sayfa sayısı doğrultusunda elde ettiği verilerle yandaki histogramı oluşturuyor.

Buna göre



a) Sınıftan seçilen rastgele 2 öğrencinin geçmişte 16-20 sayfa aralığında kitap okuyan öğrencilerden olma olasılığını teorik olarak bulunuz.

b) Sınıftan rastgele bir öğrenci seçildiğinde bu öğrencinin günlük 11-30 sayfa aralığında kitap okuyan bir öğrenci olduğu biliniyorsa bu öğrencinin 16-20 sayfa aralığında kitap okuyan bir öğrenci olma olasılığını bulunuz.

c) Bu deneyin ertesi günü öğrencilerin öğretmenin konuşmasından etkilenerek günlük 26-30 sayfa aralığında kitap okuma olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

a) $s(E) = 4 + 7 + 6 + 5 + 2 + 6 = 30$ kişi, A olayı günlük 16-20 sayfa aralığında kitap okuyan öğrenciler olsun. Bu durumda $s(A) = 5$ olur.

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)}$$

$$= \frac{5}{30}$$

$$= \frac{1}{6} \text{ bulunur.}$$

b) B olayı seçilen öğrencinin 11-30 sayfa aralığında günlük kitap okuyan öğrencilerin kümesi, A olayı seçilen öğrencinin 16-20 sayfa aralığında günlük kitap okuyan öğrencilerin kümesi olsun. Koşullu olasılıktan yola çıkılırsa

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{s(A \cap B)}{s(B)}$$

$$= \frac{5}{19} \text{ bulunur.}$$

c) $$\text{Deneysel olasılık} = \frac{\text{Geçmişte 26-30 sayfa aralığında kitap okuyan öğrenci sayısı}}{\text{Sınıf mevcudu}}$$

$$= \frac{6}{30} = \frac{1}{5} \text{ bulunur.}$$

Teknoloji Uygulaması

Yandaki karekodu tablet veya cep telefonunuzdan okutarak deneysel olasılık animasyonunu inceleyiniz.

6. ÖRNEK

280 kişilik bir lisede okul başkanlığı için 5 aday vardır. Bir kişi yalnız bir oy kullanabilir. 280 kişinin tamamının oy kullandığı ve geçersiz oy olmadığı bilindiğine göre

a) Her adayın 54 den fazla oy alması hâlinde bu adaylar arasında kaç farklı oy dağılımı sonucu oluşabileceğini bulunuz.

b) Her adayın 54 den fazla oy alması hâlinde 5 kişiden biri olan Efe'nin başkanlığı kazanma olasılığını bulunuz.

c) Adayların dördünün eşit sayıda oy aldığı diğer adayın onlardan daha az oy aldığı kaç farklı oylama sonucu oluşabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Tüm adaylar 54 ten fazla oy aldığından $54+1=55$ er oyları kesinlikle vardır. Buradan $55\cdot 5=275$ oy kullanılmış olur ve geriye $280-275=5$ oy kalır. Buna göre kalan 5 oy beş adaya kaç farklı biçimde dağıtılabilir sorusuna cevap bulunmalıdır.

5 kişinin aldığı oy sayıları sırasıyla x, y, z, t ve k olmak üzere $x+y+z+t+k=5$ ve $0\le x, y, z, t, k\le 5$ olur.

$5+0+0+0+0=5 \Rightarrow \dfrac{5!}{4!}=5$ durum, $4+1+0+0+0=5 \Rightarrow \dfrac{5!}{3!}=20$ durum

$3+2+0+0+0=5 \Rightarrow \dfrac{5!}{3!}=20$ durum, $3+1+1+0+0=5 \Rightarrow \dfrac{5!}{2!\cdot 2!}=30$ durum

$2+2+1+0+0=5 \Rightarrow \dfrac{5!}{2!\cdot 2!}=30$ durum, $2+1+1+1+0=5 \Rightarrow \dfrac{5!}{3!}=20$

$1+1+1+1+1=5 \Rightarrow \dfrac{5!}{5!}=1$ durum oluşabileceğinden toplam 126 durum bulunur.

b) Her adayın 55 er adet oy aldığı kesin olduğundan kalan 5 oy nasıl dağıtılırsa Efe başkanlığı kazanabilir.

$\underbrace{\text{Efe}}_{5\text{ oy}}\ \underbrace{x\ y\ z\ t}_{0\text{ oy}} \Rightarrow \binom{4}{0}=1$ durum

$\underbrace{\text{Efe}}_{4\text{ oy}}\ \underbrace{x\ y\ z\ t}_{1\text{ oy}} \Rightarrow \binom{4}{1}=4$ durum

$\underbrace{\text{Efe}}_{3\text{ oy}}\ \underbrace{x\ y\ z\ t}_{2\text{ oy}} \Rightarrow \binom{4}{1}+\binom{4}{2}=10$ durum

$\underbrace{\text{Efe}}_{2\text{ oy}}\ \underbrace{x\ y\ z\ t}_{3\text{ oy}} \Rightarrow \binom{4}{3}=4$ durum olur.

Buradan Efe'nin başkanlığı kazanma olayı E alınırsa Efe nin başkanlığı kazanma olasılığı

$$P(E)=\frac{\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}}{126}=\frac{19}{126}$$ bulunur.

c) 5 kişiden 1 kişi $\binom{5}{1}=5$ farklı biçimde seçilebilir. O bir kişi x adet oy alsın. Diğer dört kişi $\dfrac{280-x}{4}$ oy alır. Bölme algoritması gereği $x=4\cdot k\ge 0$ olmak üzere

$x<\dfrac{280-x}{4} \Rightarrow 4x+x<280 \Rightarrow 5x<280 \Rightarrow 5\cdot 4k<280 \Rightarrow k<14$ olur.

$0\le k<14 \quad (k\in\mathbb{N})$ olduğundan oyları eşit olan dört aday için $S(x)=14$ farklı oy sonucu çıkabilir. Buradan adayların dördünün eşit sayıda oy aldığı diğer adayın dört adayın aldığı oydan daha az oy aldığı oylama sayısı $\binom{5}{1}\cdot S(x)=5\cdot 14=70$ farklı durum bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1. $R = \{0, 1, ..., 9\}$ rakamlar kümesinden rastgele bir rakam seçiliyor.

Seçilen rakamın 8 den küçük olduğu bilinmektedir.

Buna göre seçilen sayının asal sayı olma olasılığını bulunuz.

2. Hilesiz bir madenî para 3 kez havaya atılıyor.

İlk atışın tura geldiği bilinmektedir. Buna göre diğer iki atıştan en az birinin yazı gelme olasılığını bulunuz.

3. Bir torbada 1 den 9 a kadar numaralandırılmış özdeş 9 kırmızı, 9 beyaz, 9 yeşil bilardo topu vardır.

Torbadan rastgele 2 top çekildiğinde topun kırmızı veya beyaz olduğu bilinmektedir. Buna göre çekilen topların üzerindeki sayıların asal sayı olma olasılığını bulunuz.

4. Bir madenî para ve bir zar aynı anda atılıyor. Paranın yazı, zarın asal veya tek sayı gelme olasılığını bulunuz.

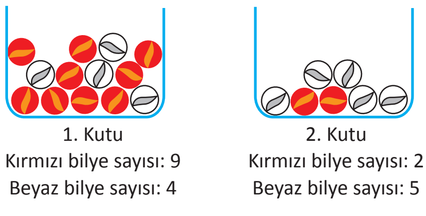
5. Bir torbada özdeş 5 mavi, 4 kırmızı ve 3 beyaz renkli bilye vardır. Çekilen bilye, torbaya geri konulmamak şartıyla torbadan 3 bilye çekilirse 3 ünün de kırmızı renkli olma olasılığını bulunuz.

6. Bir davette bulunan 6 evli çift içinden 2 kişi seçiliyor. Seçilen kişilerin birbiriyle evli olma olasılığını bulunuz.

7. Bir torbada özdeş 4 beyaz, 3 mavi, 2 yeşil renkli top vardır.

Torbaya geri konulmamak koşulu ile art arda 3 top çekiliyor. 1. topun beyaz, 2. topun mavi, 3. topun yeşil renkli olma olasılığını bulunuz.

8.



Şekilde 1 no.lu kutuda özdeş 9 kırmızı, 4 beyaz ve 2 no.lu kutuda özdeş 2 kırmızı, 5 beyaz renkli bilye vardır.

1. kutudan kaç tane kırmızı bilye alınıp 2. kutuya atılırsa, kutulardan rastgele birer bilye çekildiğinde çekilen iki bilyenin de beyaz olma olasılığının <u>en az</u> kaç olabileceğini bulunuz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A) Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerlere uygun sözcük ya da değerleri yazınız.

1. E örnek uzayında B olayının olma olasılığı, A olayının olma olasılığını etkilemiyorsa A olayı B olayından .... denir.

2. B olayının olma olasılığı, A olayının olasılığını etkiliyorsa A olayı ile B olayı .... denir.

3. İki veya daha fazla olaydan elde edilmiş olaya .... denir.

4. Deneysel olasılıkta deneme sayısı artıkça deneysel olasılık değeri teorik olasılık değerine .... olur.

B) Aşağıda numaralar ile verilen ifadeleri, harf ile verilen ifadelerle eşleştiriniz.

5.

Bir torbada 10 çift farklı çorap vardır. Bu torbadan rastgele alınan 2 çorabın bir çift oluşturmama olasılığı	1.	a)	$\frac{18}{19}$
Bir zar ve bir madeni para aynı anda atılıyor. Buna göre üst yüze gelen sayının asal ve paranın tura gelme olasılığı	2.	b)	$\frac{1}{4}$
Bir torbada eşit sayıda kırmızı ve beyaz bilye vardır. Bu torbadan torbaya geri konulmamak koşuluyla art arda çekilen iki bilyenin ikisinin de beyaz olma olasılığı $\frac{3}{13}$ olduğuna göre ilk durumda torbadaki bilye sayısı	3.	c)	14
		ç)	22

C) Aşağıdaki soruların cevaplarını boş bırakılan yerlere yazınız.

6. Bir torbada özdeş 4 mavi, 2 kırmızı, 3 beyaz top vardır. Torbadan rastgele bir top çekiliyor. Top renginin baş harfi not edilip çekilen top torbaya geri konuluyor. Bu deney 20 defa tekrarlanıyor. Deney sonuçları aşağıdaki gibi olduğuna göre 21. çekilişte çekilen topun mavi renkli olma olasılığını bulunuz.

K-K-M-B-M-B-B-K-K-M-B-K-M-B-B-K-M-B-M-B

7. A ve B bağımsız olaylardır.

$P(A \cup B) = \frac{23}{48}, P(A) + P(B) = \frac{13}{24}$ ve

$P(A) > P(B)$ olduğuna göre $P(B')$ nı bulunuz.

8. 1 den 72 ye kadar olan sayma sayıları eş kartlara yazılıp bir torbaya konuyor. Torbadan çekilen bir kartın 60 ile aralarında asal olduğu biliniyor. Buna göre kartta yazan sayının 50 den büyük olma olasılığını bulunuz.

9. Bir kalemlikte özdeş 4 kırmızı, 4 mavi ve 4 siyah kalem vardır. Çekilen kalemler kalemliğe geri konmamak şartıyla art arda 3 kalem çekiliyor.

a) 1. nin kırmızı, 2. nin mavi, 3. nün siyah kalem olma olasılığını

b) Kalemlerin farklı renkte olma olasılığını bulunuz.

Ç) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruları okuyunuz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

10. 3 doktor ve 5 hemşire arasından rastgele seçilen iki kişiden en az birinin hemşire olduğu bilindiğine göre diğer kişinin doktor olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{5}$

11. 96 kişilik bir toplulukta 24 kişinin kan grubu A, 40 kişinin kan grubu B, 9 kişinin kan grubu 0 ve 23 kişinin kan grubu AB dir.

Bu topluluktan rastgele seçilen iki kişinin ikisinde kan grubunun aynı ve kan gruplarının A veya B olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{2}{19}$ B) $\frac{13}{95}$ C) $\frac{3}{19}$ D) $\frac{18}{95}$ E) $\frac{22}{95}$

12. $\frac{5}{9}$ i erkek olan bir sınıfta kızların %25 i erkeklerin de %10 u gözlüklüdür.

Bu sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin gözlük kullanmadığı bilindiğine göre bu öğrencinin erkek olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{3}{56}$ B) $\frac{3}{10}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{4}{5}$

13. Ahmet bir iş yerinde yarı zamanlı çalışmaktadır.

4 saat çalıştığı günler 30 TL, 2 saat çalıştığı günlerde 15 TL kazanıyor. Ahmet'in 7 günde 150 TL kazanma olasılığı kaçtır?

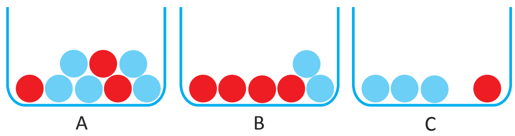
A) $\frac{35}{128}$ B) $\frac{37}{128}$ C) $\frac{39}{128}$ D) $\frac{21}{64}$ E) $\frac{53}{128}$

14. $A=\{1,2,3,4,5\}$ kümesinde tanımlı bire bir tüm fonksiyonlar birer birer eş kartlara yazılıp bir torbaya konuyor. Sonra torbadan rastgele bir kart çekiliyor.

Çekilen karttaki fonksiyonda $f(4)=1$ olduğu bilindiğine göre seçilen karttaki fonksiyonda $f(1)<f(2)<f(3)$ olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{5}{12}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{5}$

15.



Yukarıdaki A kutusunda özdeş 5 mavi, 3 kırmızı; B kutusunda özdeş 2 mavi, 4 kırmızı ve C kutusunda özdeş 3 mavi 1 kırmızı renkli top vardır. A kutusundan rastgele bir top çekilip B kutusuna atıldıktan sonra B kutusundan da rastgele bir top çekilip C kutusuna atılıyor.

Son durumda C kutusundan rastgele bir top çekildiğinde çekilen topun A kutusundan çekilen topla farklı renkte olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{29}{70}$ B) $\frac{31}{70}$ C) $\frac{37}{70}$ D) $\frac{40}{73}$ E) $\frac{47}{72}$

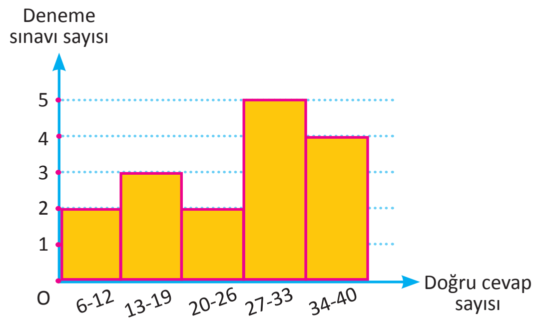
16. Nöbetçi öğretmenin elindeki 5 farklı anahtardan sadece biri pansiyon kapısını açmaktadır. Denenen anahtar kapıyı açmaz ise o anahtar bir daha denenmeyecektir. Buna göre kapının 3. denemede açılma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{5}{6}$

D) 17-19. soruları aşağıda verilen ortak metne ve grafiğe göre cevaplandırınız.

Bir öğrencinin 40 soruluk 16 adet matematik deneme sınavındaki doğru sayılarını gösteren grafik yanda verilmiştir. Deneme sınavında her soru 5 seçeneklidir ve doğru cevap sayısından yanlış cevap sayısının $\frac{1}{4}$ i çıkarılacaktır.

Tüm soruların cevaplanma zorunluluğu olmadığına göre öğrencinin



17. Önceki sınav sonuçlarına göre 17. deneme sınavında 25 veya 25 ten fazla matematik neti yapma olasılığını bulunuz.

18. Önceki sınav sonuçlarına göre 17. deneme sınavında 15 veya 15 ten az matematik neti yapma olasılığını bulunuz.

19. Öğrencinin deneme sınavı kitapçıkları arasından rastgele seçilen bir kitapçıkta doğru sayısının 20 veya 20 den fazla olduğu bilinmektedir. Buna göre kitapçıktaki doğru sayısının 34 veya 34 ten daha fazla olma olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

E) 20-22. soruları aşağıda verilen ortak metne ve tabloya göre cevaplandırınız.

Mehmet ve Deryanur bir zarı onar defa atarak üst yüze gelen sayıların tek ya da çift sayı olma durumları için deney yapıyorlar. Deney sonuçları yandaki tablodaki gibidir. Buna göre

Atış sırası	Mehmet	Deryanur
1.	Çift	Tek
2.	Çift	Çift
3.	Tek	Çift
4.	Çift	Tek
5.	Tek	Tek
6.	Tek	Çift
7.	Çift	Tek
8.	Tek	Tek
9.	Tek	Tek
10.	Tek	Tek

20. Mehmet'in attığı 11. zarda üst yüze tek sayı gelme olayının deneysel olasılığını bulunuz.

21. Deryanur'un zar atma deneyinde üst yüze tek sayı gelme olayının teorik olasılığını bulunuz.

22. Mehmet'in zar atma deneyinde çift sayı gelme olasılığının, Deryanur'un attığı 11. zarın deneysel olarak tek sayı gelme olasılığına oranını bulunuz.

ÇÖZÜM

SEMBOLLER VE ANLAMLARI

Sembol	Anlamı
$^\circ$	derece
$'$	dakika
$''$	saniye
R	radyan
$\sin x$	x açısının sinüs değeri
$\cos x$	x açısının kosinüs değeri
$\tan x$	x açısının tanjant değeri
$\cot x$	x açısının kotanjant değeri
$\sec x$	x açısının sekant değeri
$\operatorname{cosec} x$	x açısının kosekant değeri
T	periyot
$f(x+T)$	periyodu T olan f fonksiyonu
$A(x, y)$	A noktasının koordinatları (x, y) dir.
$\|AB\|$	AB doğru parçasının uzunluğu
m	eğim
$d_1 \parallel d_2$	d_1 d_2 ye paraleldir.
$d_1 \perp d_2$	d_1 d_2 ye diktir.
$y = ax^2 + bx + c$	ikinci dereceden fonksiyon
$y = a(x - r)^2 + k$	tepe noktası (r, k) olan ikinci dereceden fonksiyon.
$y = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$	kökleri x_1 ve x_2 olan ikinci dereceden fonksiyon
r	yarıçap
R	çap
$\overset{\frown}{AB}$	AB yayı
$\overset{\frown}{ABC}$	ABC yayı
$m(\overset{\frown}{AB})$	AB yayının ölçüsü
π	pi sayısı
$P(A \mid B)$	A olayının B olayına bağlı koşullu olasılığı
$P(A \cap B)$	A ve B olaylarının olasılığı
$P(A \cup B)$	A veya B olayının olasılığı

ALIŞTIRMA ÇÖZÜMLERİ

11.1. TRİGONOMETRİ

ALIŞTIRMALAR-1

1

Sembolle Gösterim	Başlangıç Kenarı	Bitim Kenarı	Yönü
$\overset{\frown}{AOB}$	$[OA$	$[OB$	$+$
$\overset{\frown}{COD}$	$[OC$	$[OD$	$-$
$\overset{\frown}{EOF}$	$[OE$	$[OF$	$-$
$\overset{\frown}{CBA}$	$[BC$	$[BA$	$-$
$\overset{\frown}{CBA}$	$[BC$	$[BA$	$+$

2	a) $92°47'4''$ b) $12°41'12''$	3	$4°57'5''$	4	a) $600°$ b) $450°$ c) $165°$	5	a) $\frac{3\pi}{5}$ b) $\frac{9\pi}{10}$ c) $\frac{8\pi}{5}$
6	a) $190°$ b) $190°$ c) $112°$ ç) $280°$	7	a) $\frac{5\pi}{4}$ b) $\frac{5\pi}{3}$ c) π ç) 0	8	$\frac{\pi}{18}$		
9	$\frac{\pi}{9}$	10	$138°23'14''$				

ALIŞTIRMALAR-2

1	7	2	$c < b < d < a$	3	$\sin\alpha$	4	π	5	$60°$	6	$\frac{12\sqrt{5}}{5}$
7	20	8	14	9	a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{8\pi}{3}$ c) $\frac{5\pi}{3}$ ç) $\frac{4\pi}{5}$ d) $\frac{7\pi}{4}$ e) $\frac{\pi}{2}$					10	∓ 10
11	0	12	$-\frac{\sqrt{3}}{6}$	13	a) $\frac{8}{23}$ b) $-\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{7}{25}$ ç) $\frac{4}{3}$ d) $75°$ e) $-\frac{7\pi}{8}$					14	0

11.2. ANALİTİK GEOMETRİ

ALIŞTIRMALAR

1	$-\frac{15}{4}$	2	12 Yıl	3	$\frac{\sqrt{137}}{2}$	4	$3y + 8x + 71 = 0$	5	$\frac{16}{9}$
6	$3x + 9y + 68 = 0$	7	8	8	$\frac{36}{\sqrt{13}}$	9	$y = -2x + 8$	10	3

11.3. FONKSİYONLARDA UYGULAMALAR

ALIŞTIRMALAR-1

1	a) x eksenini kestiği noktalar $(-4,0),(-2,0),(0,0),(4,0)$ y eksenini kestiği noktalar $(0,0)$ b) Pozitif olduğu aralıklar $(-\infty,-4),(-2,0),(4,\infty)$ Negatif olduğu aralıklar $(-4,-2),(0,4)$ c) Artan olduğu aralıklar $(-3,-1),(2,\infty)$ Azalan olduğu aralıklar $(-\infty,-3),(-1,2)$ ç) Maksimumu değeri 1 Minimum değeri -2	2	40 m/sn	3	a) Murat $\frac{32}{5}$ ve $\frac{48}{5}$ Merve $\frac{36}{5}$ ve $\frac{52}{5}$ b) $\frac{13}{12}$
4	a, b, ç				

11.3. FONKSİYONLARDA UYGULAMALAR

ALIŞTIRMALAR-2

1

	x eksenini kestiği nokta	y eksenini kestiği nokta	Simetri ekseni	Tepe noktası
a)	$(-1,0),(3,0)$	$(0,-15)$	$x=1$	$(1,-20)$
b)	$(-2,0)$	$(0,-8)$	$x=-2$	$(-2,0)$
c)	$(-2,0),(3,0)$	$(0,-6)$	$x=\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},-\frac{25}{4}\right)$

2	a) $m=-48$ b) $(-6,0),(8,0)$ $(0,-48)$ c) $f(1)=-49$	**3**	$m=-1$	**4**	1000 m^2	**5**	a) $h=102{,}01\,m$ b) 201 m	**6**	70,5 m

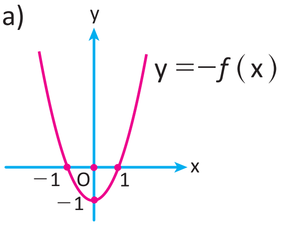
7	a) $f_1(x)=\frac{2}{5}(x+5)\cdot(x-1)$ b) $f_2(x)=-(x+2)^2+6$ c) $f_3(x)=\frac{4}{9}(x-3)^2$ ç) $f_4(x)=-\frac{1}{2}(x-4)^2+8$	**8**	$\frac{144}{5}$ birim kare	**9**	-9

ALIŞTIRMALAR-3

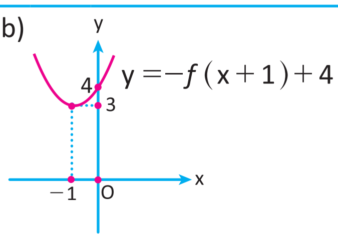
1 $y=(x+2)^2+7$

2

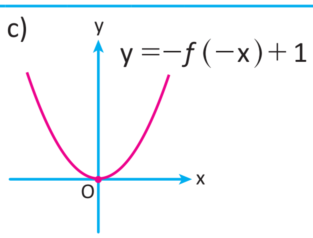
a)



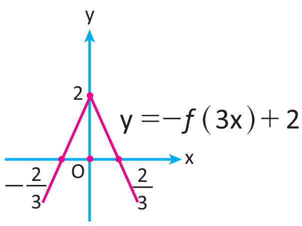
b)



c)



3



4
a) Çift fonksiyon
b) Çift fonksiyon
c) Tek fonksiyon
ç) Tek fonksiyon

5 -

6 $f(2)=-3$

11.4. DENKLEMLER

ALIŞTIRMALAR-1

1	$\{(-3,-4),(2,1)\}$	2	$\varnothing$	3	$\varnothing$	4	$\{(0.28, 8.37), (7.22, 168.13)\}$
5	$\{(0.59, 1.29), (7.66, 4.83)\}$	6	$\{(0,4)\}$				

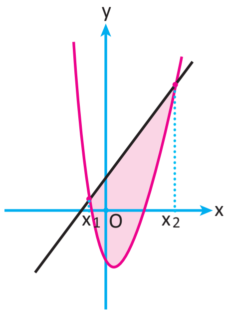
ALIŞTIRMALAR-2

1	12 tane	2	10	3	$\varnothing$	4	$\mathbb{R}-\{-1,5\}$
5	$x=\{4\}$	6	$(-\infty,-2)\cup[1,3)\cup[4,\infty)$	7	$(0,5)$		
8	$\{1\}$	9	$(-1,2)$	10	$(-6,-3)\cup(2,4)$	11	$(-\infty,-2]\cup\{3\}$

12

$x_1 = 2-\sqrt{19}$

$x_2 = 2+\sqrt{19}$



11.5. ÇEMBER VE DAİRE

ALIŞTIRMALAR-1

1	a) İki noktada keser b) Çemberi kesmez c) Teğettir.	2	$42+20\sqrt{2}$	3	$10\sqrt{2}$	4	$r=\sqrt{85}$ cm	5	a) 17 b) 18	6	20 cm

ALIŞTIRMALAR-2

1	49°	2	40°	3	$\alpha=100^\circ$	4	$\alpha=20^\circ$	5	$\alpha=37,5^\circ$	6	$\alpha=80^\circ$

ALIŞTIRMALAR-3

1	48 cm	2	$5\sqrt{3}$ cm	3	$2\sqrt{10}$ cm	4	8 cm	5	64 cm	6	15 cm

ALIŞTIRMALAR-4

1	$x=50$ tur	2	$\lvert AB\rvert=16\sqrt{2}$	3	$\frac{50\pi}{3}$ cm^2	4	108 cm^2	5	$r=5\sqrt{2}$ cm	6	24π cm

11.6. UZAY GEOMETRİ

ALIŞTIRMALAR

1	$\alpha = 25^\circ$	2	$\frac{15}{2}$	3	$\frac{\sqrt[3]{26}}{3-\sqrt[3]{26}}$	4	20π	5	Alan $= 36\pi$ Hacim $= 36\pi$	6	Hacim $= \frac{9\pi}{2}$

11.7. OLASILIK

ALIŞTIRMALAR

1	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{3}{4}$	3	$\frac{28}{153}$	4	$\frac{1}{3}$	5	$\frac{1}{55}$	6	$\frac{1}{11}$	7	$\frac{1}{21}$	8	3

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME CEVAP ANAHTARI

11.1. TRİGONOMETRİ

Soru No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Cevap	$\frac{11\pi}{9}$	$1^\circ 20' 5''$	315°	90°	1. c 2. ç 3. b	1. c 2. ç 3. a	$\cot x$	$\frac{\sqrt{14}}{6}$	195	$\frac{16\pi}{5}$	C	E
Soru No.	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
Cevap	A	B	A	C	B	A	A	C	A	E	B	B

Soru No.	25	26	27	28	29	30	31	32
Cevap	D	C	C	$\sqrt{136+60\sqrt{2}}$	3060° 180°	$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	30°	a) 45° b) $32\sqrt{2}$

11.2. ANALİTİK GEOMETRİ

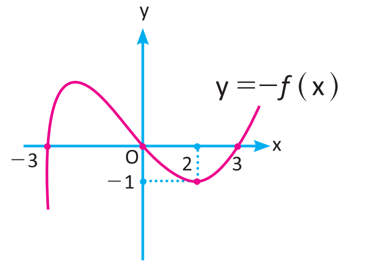
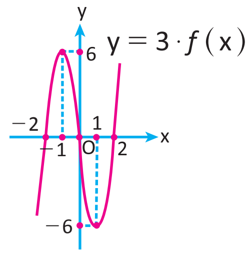
Soru No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Cevap	$2\sqrt{5}$	$(-1, -5)$	$\left(\frac{5}{3}, 3\right)$	-3	2.	1. ç 2. d 3. a 4. c 5. b	$\frac{9}{10}$	$\left(-\frac{7}{5}, 2\right)$	$(-2, 1)$	15	A	A

Soru No.	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Cevap	D	C	D	E	C	D	C	D	$y = 15x + 200, \; y = 25x$

Soru No.	22	23	24	25	26
Cevap	20	B	2 sa.	$\frac{10}{3}$ sa.	$\frac{5}{2}$ sa.

11.3. FONKSİYONLARDA UYGULAMALAR

Soru No.	1	2	3	4	5
Cevap	orijin $(0,0)$	x eksenine	y eksenine	çift	açılır.

Soru No.	6	7	8	9	10
Cevap	1. c 2. ç 3. a 4. b	8	288		

Soru No.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Cevap	B	C	B	E	D	B	C	D	D	B	E	E

Soru No.	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Cevap	B	D	D	A	800	7,2 Milyar TL	400	-	60 km	2 km

11.4. DENKLEM VE EŞİTSİZLİK SİSTEMLERİ

Soru No.	1	2	3	4	5	6
Cevap	eşitsizlik sistemi	$>0,\ <0$	$f(x)\geq 0$	teğet	paydayı sıfır yapan	1. a, 2. b, 3. ç, 4. d

Soru No.	7	8	9
Cevap	Ç.K. $=\left\{-3,\frac{1}{3}\right\}$	Ç.K. $=\{(-2,-1),(-1,0)\}$	Ç.K. $=(-\infty,-2)\cup[2,3]\cup(4,\infty)$

Soru No.	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Cevap	Ç.K. $=(-\infty,-2]\cup[1,2]$	D	A	C	B	B	A	C	C	D	A	B	D	C

Soru No.	24	25	26	27
Cevap	B	$(8220, 13\,280)$	$t=(97,76)^{\circ}$	$(98,99)$

Soru No.	28	29	30
Cevap	12	12 milyon TL	24

11.5. ÇEMBER VE DAİRE

Soru No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cevap	iki eşit	merkezinden	90	yarıçapa	dış ortak teğet	1. b 2. ç 3. c	140°	$\left(\frac{32\pi}{3}-8\sqrt{3}\right)cm^2$	18 cm
Soru No.	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
Cevap	E	A	B	E	D	A	A	E	D
Soru No.	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**		**25**	
Cevap	B	C	D	$(86,4)^\circ$	%28	2°		$\frac{45\pi}{4}$	

11.6. UZAY GEOMETRİ

Soru No.	1	2	3	4	5
Cevap	4	çember - daire	silindir	simetri ekseni	taban alanları - yanal alan

Soru No.	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Cevap	koni	1. c 2. a 3. d	Alan $=152\pi$ Hacim $=240\pi$	$\frac{r_1}{r_2}$	980π	450π	D	E	D	A

Soru No.	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Cevap	D	A	D	B	C	D	E	E	186 m^2	8,94 TL

Soru No.	26	27	28	29	30
Cevap	15823,8 TL	2374 TL	$\left(\frac{108\pi+108}{\pi}\right)m^2$	$\left(\frac{324\pi+72\sqrt{3}}{\pi^2}\right)m^3$	15 m

11.7. OLASILIK

Soru No.	1	2	3	4	5	6	7	8
Cevap	bağımsızdır	bağımlıdır	bileşik	yaklaşmış	1. a, 2. b, 3. c	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{19}$

Soru No.	9	10	11	12	13	14	15
Cevap	a) $\frac{8}{165}$, b) $\frac{16}{55}$	E	E	D	A	A	B

Soru No.	16	17	18	19	20	21	22
Cevap	C	$\frac{11}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{7}$

SÖZLÜK

A

ana doğru	: Tabanların karşılıklı iki noktasını birleştiren ve eksene paralel olan doğrulardan her biri.
analitik düzlem	: Üzerine koordinat sistemi yerleştirilmiş düzlem.

B

bağımsız olay	: Bağımlı olmayan olay.
bağımlı olay	: Bir olayın gerçekleşme olasılığının başka bir olayı etkileme durumu.
bileşik olay	: İki veya daha çok olayın birlikte veya birbiri ardına meydana gelmesi olayı.
bir noktanın bir doğruya uzaklığı	: Bir $A(x_0, y_0)$ noktasının denklemi $ax + by + c = 0$ olan doğruya en yakın mesafesi.
bir doğrunun eğimi	: Analitik düzlemde dikey uzunluğun yatay uzunluğa oranı.
birim çember	: Merkezi orijinde olan ve yarıçapı 1 birim olan çember.

C-Ç

çap	: Çemberin merkezinden geçen kirişlerden her biri.
çember	: Bir noktaya eşit uzaklıkta olan ve bu nokta ile aynı düzlemde bulunan noktaların kümesi.
çemberde dış açı	: Köşesi çember dışında ve kenarları bu çemberin kesenleri olan açı.
çevre	: Kapalı bir şeklin kenar uzunlukları toplamı veya kapalı bir eğrinin uzunluğu.
çevre açı	: Köşesi çember üzerinde olan, kenarları bu çemberi köşeden başka noktalarda kesen açı.
çemberde iç açı	: Çemberin içinde bir noktada kesişen iki kirişin belittiği açılardan her biri.

D-E-F

daire	: Çember ile iç bölgesinin birleşimi.
daire dilimi	: Bir dairenin, bu dairedeki merkez açının içinde kalan parçası.
dakika	: Bir saatin altmışta biri.
deneysel olasılık	: Deney yaparak yapılan olasılık bulma işlemi çeşidi.
derece	: Bir çemberin $\frac{1}{360^\circ}$ lik yayını gören merkez açının ölçüsü. Açı ölçü birimi.
dik dairesel koni	: Tabanı daire olan dik koni. Bir dik konide tepe noktası ile tabandaki dairenin noktalarını birleştiriren doğruların oluşturduğu cisim.
dik dairesel silindir	: Tabanı daire olan dik silindir.
dönüşüm	: Düzlem üzerindeki noktaları birebir örten fonksiyon ile yine düzlemdeki noktalara eşleyen fonksiyondur.
eğim açısı	: Bir doğrunun grafiğinin x ekseniyle pozitif yönde yaptığı açı.
esas ölçü	: Birim çemberde sıfır (dâhil) ile 2π arasındaki yay ölçüsü.

İ

iç teğet çember	:	Şeklin tüm kenarlarına teğet ve merkezi şeklin içinde olan çember.
iki doğrunun dikliği	:	Doğruların eğimleri çarpımının -1 olması durumu.
iki doğrunun paralelliği	:	Doğruların eğimlerinin eşit olması durumu.
ikinci dereceden eşitsizlik	:	$a \neq 0,\ a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax^2 + bx + c$ şeklindeki ifadelerin $<, >, \leq, \geq$ sembolleri kullanılarak yazılmış matematiksel ilişkisi.
ikinci dereceden fonksiyon	:	$a \neq 0,\ a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ \ y = f(x) = ax^2 + bx + c$ şeklinde tanımlanan fonksiyon.
iki nokta arasındaki uzaklık	:	İki noktayı birleştiren doğru parçasının uzunluğu.

K-L

kesen	:	Çemberi iki noktada kesen doğru.
kiriş	:	Çemberin iki noktasını birleştiren doğru parçası.
kirişler dörtgeni	:	Köşeleri çember yayı üzerinde olan dörtgen.
koni	:	Bir noktadan geçen doğrunun kapalı bir çembere dayanarak hareket etmesiyle oluşan yüzey.
koşullu olasılık	:	E örnek uzayının iki olayı A ve B olmak üzere B olayı gerçekleştiğinde, A olayının gerçekleşme olasılığı.
küre	:	Uzayda sabit bir noktadan eşit uzaklıktaki noktaların kümesi.

M

merkez	:	Bir eğrinin ya da geometrik şeklin orta noktası.
merkez açı	:	Köşesi çemberin merkezinde olan, çember düzlemindeki açı.

O-Ö

ortalama değişim hızı	:	Bir fonksiyonun [a, b] aralığındaki fonksiyon değerleri farkının aralığın uzunluğuna oranı.
öteleme	:	Bir şekli duruşu, biçimi ve boyutları değişmeden aynı doğrultuda bir yerden başka yere götürme işlemi.

P-R

parabol	:	$a \neq 0,\ a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c$ şeklindeki fonksiyonunun grafiği.
paralel iki doğru arasındaki uzaklık	:	$ax + by + c_1 = 0$ ve $ax + by + c_2 = 0$ doğruları arasındaki en kısa mesafe.
periyodik fonksiyon	:	Matematikte belli zaman aralığıyla belli aralıklarda aldığı değerleri tekrar eden fonksiyon.
periyot	:	f periyodik fonksiyonu verildiğinde tanım kümesinin her x elemanı için $f(x+T) = f(x)$ eşitliğini gerçekleyen T sayılarının pozitif ve küçük olanı.
radyan	:	Birim çemberde, yarıçap uzunluğundaki yayın ölçüsünü bir birim varsayan açı (yay) ölçü birimi.

S-T

saniye	:	Dakikanın altmışta birlik süresi.
silindir	:	Bir doğrunun bir çembere dayanarak, çembere paralel hareket etmesiyle oluşan yüzey.
simetri	:	Bir cismin bir doğruya göre eşit uzaklıktaki görüntüsü.
simetri ekseni	:	Bir simetrik şekli ortadan ikiye bölen çizgi, doğru.
teğet	:	Verilen eğri ile bir noktası ortak olan doğru.
teğet-kiriş açı	:	Bir kiriş ve bir teğetin oluşturduğu açı.
teğetler dörtgeni	:	Kenarları çembere teğet olan dörtgen.
teğet parçası	:	Bir noktadan geçen teğetin bu nokta ile değme noktası arasında kalan parçası.
teorik olasılık	:	Sonucu matematiksel işleme dayanan olasılık çeşidi.
tepe noktası	:	Bir parabolün en alt veya en üst noktası.
trigonometrik fonksiyon	:	Bir açının değeri olarak ifade edilen fonksiyonlardan her biri.

V-Y

yarıçap	:	Bir daire veya küre merkezinin çemberine olan mesafesi. Merkezden başlayıp çemberin sınırına kadar olan doğru parçası.
yay	:	Çemberin iki noktası arasında kalan parçası.
yay uzunluğu	:	Merkez açının kenarlarının çemberi kestiği noktalar arasındaki yayın radyan değeri.
yönlü açı	:	Bir kenarı başlangıç (sabit), diğer kenarı bitim (hareketli) olarak düşünülen açı.

KAYNAKÇA

[1] H. H. HACISALİHOĞLU, M. BALCI, F. GÖKDAL, Temel ve Genel Matematik Cilt -1, Ankara: Baskı ÖZYEŞİM Web Ofset Tesisleri,1988.

[2] C. TAYFUR, E. ZENCİROĞLU, Matematik I, Olasılık ve İstatistik, Eskişehir: Bizim Büro Basımevi, 1986.

[3] N. ERSOY, E. AĞLI, İhtimaller Hesabı I, Ankara: Gazi Üniversitesi Basın-Yayın Yüksekokulu Mabaası, 1986.

[4] A. SHAHBAZOV, Olasılık Teorisine Giriş, Birsen Yayınevi, 2005.

[5] A. DÖNMEZ, Matematiğin Öyküsü ve Serüveni (Cilt VII), Toplumsal Dönüşüm Yayınları, İstanbul, 2005.

[6] N. CENGİZ, Ö. TARAKÇI, M. AKTAŞ, M. TOSUN, M. KADAKAL, S. ŞENGÜL, A. KAPLAN, E. KIR, Genel Matematik 1, Ankara: Pegem Yayıncılık, 2007.

[7] R. A. BARNETT, M.R. ZİEGLER, K. E. BYLEEN, College Algebra with Trigonomety, Mc Graw-hillHigher Education, 2001.

[8] R. A. Silverman, Modern Calculus and Analytıc Geometry, New York: Courer Corparation,1969.

[9] D. ÇOKER, H. IRMAK, Genel Matematik, Eskişehir: T.C. Anadolu Üniversitesi Eğitim, Sağlık ve Bilimsel Araştırma Çalışmaları Vakfı Yayınları, 1994.

[10] A. SABUNCUOĞLU, Analitik Geometri,, Ankara: Nobel Yayın Dağıtım, 2013.

[11] R. KAYA, Analitik Geometri, İstanbul: Bilim Teknik Yayın Evi, 2012.

[12] Türk Dil Kurumu, Matematik Terimleri Sözlüğü, Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları, 2000.

[13] Türk Dil Kurumu, Türkçe Sözlük, Ankara:Türk Dil Kurumu Yayınları, 2012.

[14] Türk Dil Kurumu, Yazım Kılavuzu, Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları, 2012.

[15] T.C. Millî Eğitim Bakanlığı, Ortaöğretim Fen Lisesi Matematik Dersi (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı, Ankara: MEB Yayınları, 2018.

GÖRSEL KAYNAKÇA

Telif hakkı ödenerek alınan görseller (Shutterstock)

Sayfa 10-11 Görsel ve grafik tasarım uzmanı tarafından karma görsellerden oluşturulmuştur.
Sayfa 12/ID No: 250505104, Sayfa 13/ID No:509755213 (Yeniden düzenlenmiştir.)
Sayfa 14/ID No: 68315365, 167632934, 2885708, 280468766
Sayfa 17/ID No: 718102270 (Yeniden düzenlenmiştir.) Sayfa 46/ID No: 516867646, Sayfa 51/ID No:25390441
Sayfa 67/ID No:495724045 (Yeniden düzenlenmiştir.)
Sayfa 74/ID No: 555257164, Sayfa 75/ ID No: 46888090 (Yeniden düzenlenmiştir.)
Sayfa 77/ID No: 214163815 (Yeniden düzenlenmiştir.),
Sayfa 80/ID No: 19351978, 448488733 (Yeniden düzenlenmiştir.)
Sayfa 82/ID No: 427882342 (Yeniden düzenlenmiştir.), Sayfa 112/ ID No: 692974522,
Sayfa 113/ ID No: 00806874, Sayfa 121/ ID No: 290650208
Sayfa 142/ID No:635217884 (Yeniden düzenlenmiştir.) Sayfa 164/ID No: 247159201 (Yeniden düzenlenmiştir.)
Sayfa 192/ID No: 122202313, 669240145 (Yeniden düzenlenmiştir.), Sayfa 193/ ID No: 571829464
Sayfa 194/ ID No: 696353620 Sayfa 222/ ID No: 107363654 (Yeniden düzenlenmiştir.)
Sayfa 227/ ID No: 587660750 (Yeniden düzenlenmiştir.)
Sayfa 228/ID No: 152798657 (Yeniden düzenlenmiştir.), Sayfa 229/ID No: 312560261
Sayfa 230/ID No: 592877405, 469214471, 33925032, Sayfa 233/ID No: 619299071, Sayfa 244/ID No: 41941444
Sayfa 252/ID No: 3318342, Sayfa 253/ID No: 432493366, Sayfa 257/ID No: 86437507
Sayfa 260/ID No: 13060240 (Yeniden düzenlenmiştir.), Sayfa 268/ID No: 395991700 (Yeniden düzenlenmiştir.)
Kitap genelindeki diğer grafik, şekil, tablo ve çizimler görsel ve grafik tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.

KAREKOD KAYNAKÇASI

Sayfa 271: https://www.geogebra.org/m/tbGAG44W