ORTAÖĞRETİM

FEN LİSESİ MATEMATİK

12

DERS KİTABI

YAZARLAR
Dr. Bayram KEMANCI
Arda BÜYÜKOKUTAN
Serkan ÇELİK
Zekiye KEMANCI

DEVLET KİTAPLARI
İKİNCİ BASKI
........................., 2019

MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI YAYINLARI ....: 6673
DERS KİTAPLARI DİZİSİ ....: 1748

HAZIRLAYANLAR

Editör
Dr. Bayram KEMANCI

Dil Uzmanı
Mehmet ATCI

Program Geliştirme Uzmanı
Zekiye KEMANCI

Ölçme ve Değerlendirme Uzmanı
Yrd. Doç. Dr. Serkan ARIKAN

Rehberlik ve Gelişim Uzmanı
Canan DURSUN

Görsel Tasarım Uzmanı
Sibel Derin ÖZTEMEL

Grafik Tasarım Uzmanı
Güngör KAPLAN

ISBN 978-975-11-4551-2

Millî Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulunun 28.05.2018 gün ve 78 sayılı kararı ile ders kitabı olarak kabul edilmiş, Destek Hizmetleri Genel Müdürlüğünün 28.05.2019 gün ve 10443977 sayılı yazısı ile ikinci defa 55.669 adet basılmıştır.

İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl.
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl.

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,
Medeniyyet dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş, yurduma alçakları uğratma sakın;
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın;
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın.

Bastığın yerleri toprak diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki feda?
Şüheda fışkıracak toprağı sıksan, şüheda!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüda.

Ruhumun senden İlâhî, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar -ki şehadetleri dinin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,
Her cerîhamdan İlâhî, boşanıp kanlı yaşım,
Fışkırır ruh-ı mücerret gibi yerden na'şım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalan sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl;
Hakkıdır hür yaşamış bayrağımın hürriyyet;
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif Ersoy

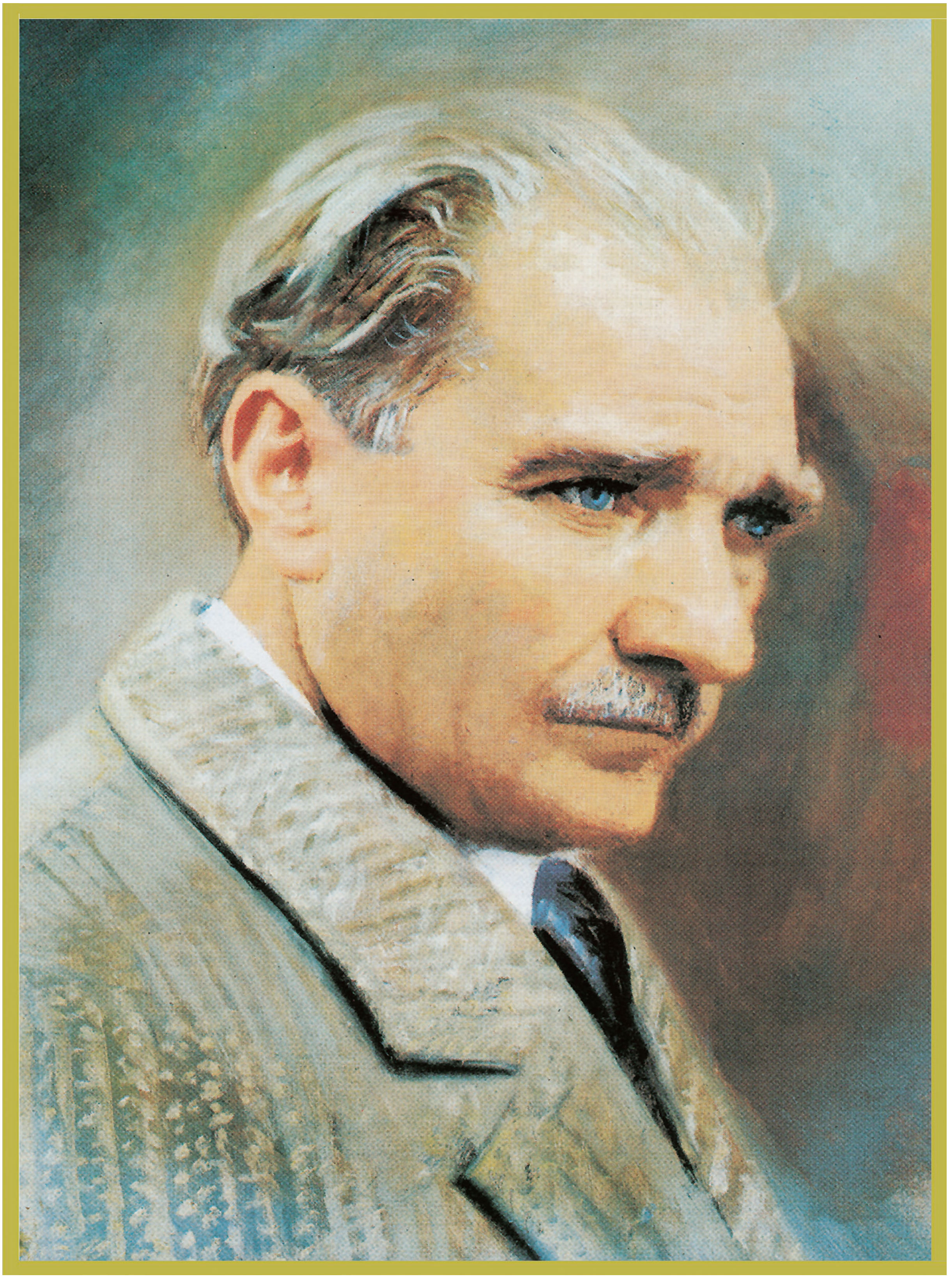
GENÇLİĞE HİTABE

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk Cumhuriyetini, ilelebet muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni bu hazineden mahrum etmek isteyecek dâhilî ve hâricî bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok namüsait bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dâhilinde iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlîlerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi vazifen, Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır. Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asil kanda mevcuttur.

Mustafa Kemal Atatürk



MUSTAFA KEMAL ATATÜRK

İÇİNDEKİLER

KİTABIN TANITIMI

Alt öğrenme alanı

Konu

Alt öğrenme alanının tanıtıldığı bölüm

Öğrenme alanı

Karekod okuyucu ile taratılarak resim, video, animasyon, soru, soru çözümleri vb. ilave kaynaklara ulaşabilecek barkod.

Detaylı bilgi için «http://www.kitap.eba.gov.tr/karekod» adresine bakınız.

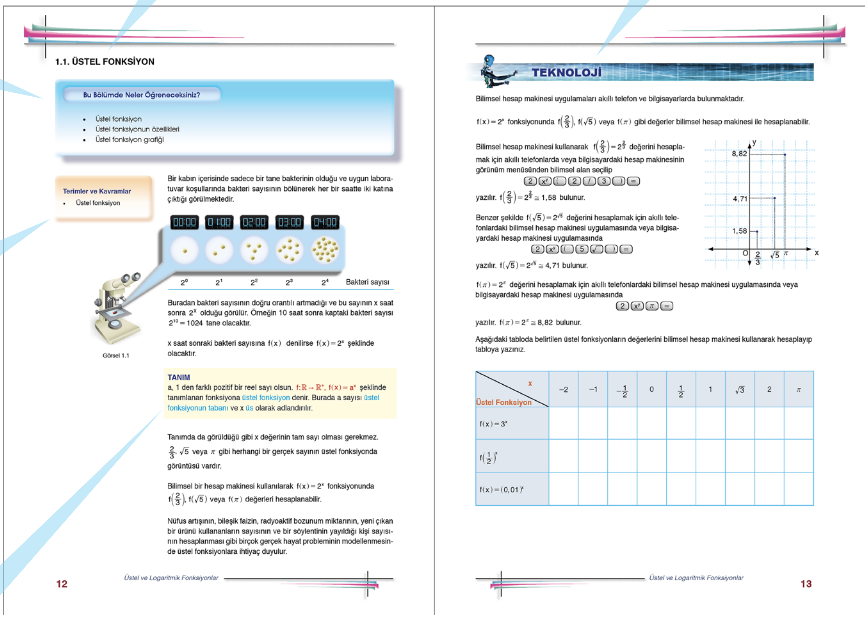
Konu başlığı

Bilgi ve iletişim teknolojilerinden faydalanılarak konunun daha iyi öğrenilmesini sağlayan bölüm

Alt öğrenme alanında neler öğrenileceğinin bulunduğu bölüm

Konu içinde geçen terimlerin ve kavramların bulunduğu bölüm

Konu ile ilgili önemli tanımların verildiği bölüm



HATIRLATMA

Orta nokta formulü

M(a, b)

A(x_1, y_1) B(x_2, y_2)

$a = \frac{x_1 + x_2}{2}$ $b = \frac{y_1 + y_2}{2}$

Bir Noktanın Bir Doğruya En Kısa Uzaklığı

A(x_1, y_1)

H $ax + by + c = 0$

$|AH| = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Önceden işlenmiş konuların hatırlatıldığı bölüm

SONUÇ

$n, m \in \mathbb{N}^+$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\sqrt[m]{ax+b}$ ve $\sqrt[n]{ax+b}$ köklü ifadesini içeren fonksiyonların integrallerini hesaplamak için $\text{Ekok}(m, n) = k$ olmak üzere $ax + b = u^k$ değişken değiştirmesi yapılır.

Bulunan sonuçların verildiği bölüm

Teoremlerin verildiği bölüm

TEOREM

$f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında integrallenebilen bir fonksiyon olsun. $\forall x \in (a, b)$ için $F'(x) = f(x)$ olacak şekilde sürekli bir $F:[a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ olur.

SIRA SİZDE

Konu aralarında öğrencilerin cevaplandıracağı bölüm

Aşağıda tabloda verilen boşlukları örnekte olduğu gibi integral bulunabilecek şekilde doldurunuz.

$\int u\,dv$	u ve dv	du ve v	$uv - \int v\,du$
$\int (x^2+1)\ln x\,dx$	$u = \ln x$ $dv = (x^2+1)dx$	$du = \frac{1}{x}dx$ $v = \frac{x^3}{3} + x$	$\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\ln x - \int \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\frac{1}{x}dx$
$\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$			
$\int x^3 \ln x\,dx$			

Gelenbevî İsmail Efendi (1729-1790)

Görsel 1.3 Gelenbevî İsmail Efendi

Gelenbevî İsmail Efendi; matematik, gök bilimi ve fizik alanında çalışmıştır. 33 veya 34 yaşlarındayken medreseler için açılan müderrislik sınavını kazanmıştır.

Hakkında anlatılan şu olay Gelenbevî'nin nasıl bir bilgin olduğunu göstermektedir. 1780 yılında İstanbul'a gelen bir Fransız mühendis, logaritma konusunu bilen bir bilginin olup olmadığını sorar. Onu Gelenbevî'ye götürürler. Fransız mühendis yanında getirdiği bir logaritma cetvelini Gelenbevî'ye takdim eder. Gelenbevî kendi yazdığı logaritma eserini Fransız'a gösterince Fransız hayli şaşırmış hâlde Gelenbevî'nin evinden ayrılır. Ayrılırken de şu sözleri söylediği nakledilir: "Bu adam Avrupa'da olsaydı ağırlığınca altınla ödüllendirilirdi."

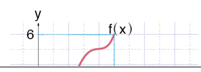
Gelenbevî'nin logaritma ile ilgili Şerh-i cedâvili'l-ensâb (Logaritma Cetvellerinin Açıklanması) ve Usûl-i cedâvi'l-insâb-ı sittînî (Altmışlık Sisteme Göre Logaritma Düzenlemesi) olmak üzere eserleri mevcuttur.

Tarihî kişiliklerin anlatıldığı bölüm

ALIŞTIRMALAR

1. **Aşağıda verilen eğri ve doğruların belirtilen sınırlarda alanlarını bulunuz.**

5.



Konu ile ilgili alıştırma sorularının bulunduğu bölüm

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 6

A) Aşağıda verilen integrallerin eşitini bulup sonuçlarını karşılarındaki boşluklara yazınız.

1.

1	$\int_1^2 \frac{3x+7}{x^2+6x+5}dx$	
2	$\int^{\frac{\pi}{8}} \sec^2(2x)dx$	

Ünite sonunda değerlendirme sorularının bulunduğu bölüm

SEMBOL VE GÖSTERİMLER

$f: \mathbb{A} \to \mathbb{B}$	f, A dan B ye bir fonksiyon	$\int f(x)dx$	$f(x)$ fonksiyonunun x e göre integrali
logx	10 tabanında logaritma	$\int_a^b f(x)dx$	$f(x)$ fonksiyonunun a dan b ye kadar x e göre integrali
$\log_a x$	a tabanında logaritma	$\forall$	her, bütün
lnx	e tabanında logaritma	$\exists$	bazı, en az
e	yaklaşık değeri 2,718 olan sabit bir sayı	$\Rightarrow$	ise
e^x	e tabanında üstel fonksiyon	$\Leftrightarrow$	ancak ve ancak
a^x	a tabanında üstel fonksiyon	$\in$	elemanıdır
(a_n)	a_n dizisi	$\notin$	elemanı değildir
Σ	toplam simgesi	$\varnothing, \{\}$	boş küme
S_n	ilk n terim toplamı	$\subseteq$	alt kümesidir
$-\infty$	eksi sonsuz	$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$	$y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ daki sağdan limiti	$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$	$y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ daki soldan limiti	$\mathbb{Z}^-$	Negatif tam sayılar kümesi
$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	$y = f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ daki limiti	$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tam sayılar kümesi
$f'(x_0)$	$y = f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi	$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$f''(x_0)$	$y = f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasındaki ikinci mertebeden türevi	$\mathbb{Q}^+$	Pozitif rasyonel sayılar kümesi
$\frac{dy}{dx}$	y nin x e göre türevi	$\mathbb{Q}^-$	Negatif rasyonel kümesi
$f^{(n)}(x)$	$y = f(x)$ fonksiyonunun n. mertebeden türevi	$\mathbb{Q}'$	İrrasyonel sayılar kümesi
$\frac{d^n y}{dx^n}$	y nin x e göre n. mertebeden türevi	$\mathbb{R}$	Gerçek sayılar kümesi
$f'(a^+)$	f fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki sağdan türevi	$\mathbb{R}^+$	Pozitif gerçek sayılar kümesi
$f'(a^-)$	f fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki soldan türevi	$\mathbb{R}^-$	Negatif gerçek sayılar kümesi

SAYILAR VE CEBİR

1. ÜSTEL VE LOGARİTMİK FONKSİYONLAR

1.1. ÜSTEL FONKSİYON
1.2. LOGARİTMA FONKSİYONU
1.3. ÜSTEL, LOGARİTMİK DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Öldükten sonra canlıların vücutlarına karbon girişi duracağından vücutlarında zamanla karbon-14 yoğunluğu azalır. Bu nedenle bir fosilin yaşını hesaplamak için fosile karbon-14 testi uygulanır. Fosildeki karbon azalması üstel fonksiyon ile modellenir ve üstel fonksiyonun tersi olan logaritma fonksiyonu yardımı ile fosilin yaşı bulunur.

Hazırlık Çalışması

Ortalama 5715 yılda miktarı yarıya düşen 3200 gr bir maddenin doğada 200 gr kalması için geçen süreyi aşağıdaki gibi bulunur.

$$3200 \text{ gr} \xrightarrow{5715 \text{ yıl}} 1600 \text{ gr} \xrightarrow{5715 \text{ yıl}} \ldots \xrightarrow{5715 \text{ yıl}} 200 \text{ gr}$$

1.1. ÜSTEL FONKSİYON

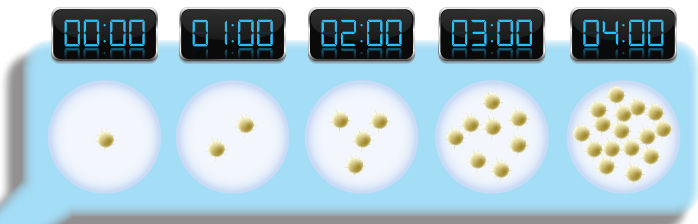
Bu Bölümde Neler Öğreneceksiniz?

- Üstel fonksiyon
- Üstel fonksiyonun özellikleri
- Üstel fonksiyon grafiği

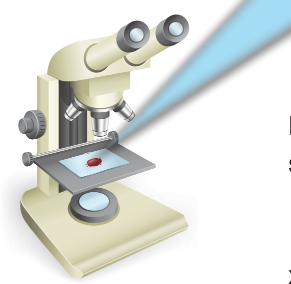
Terimler ve Kavramlar

- Üstel fonksiyon

Bir kabın içerisinde sadece bir tane bakterinin olduğu ve uygun laboratuvar koşullarında bakteri sayısının bölünerek her bir saatte iki katına çıktığı görülmektedir.



2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	Bakteri sayısı



Görsel 1.1

Buradan bakteri sayısının doğru orantılı artmadığı ve bu sayının x saat sonra 2^x olduğu görülür. Örneğin 10 saat sonra kaptaki bakteri sayısı $2^{10} = 1024$ tane olacaktır.

x saat sonraki bakteri sayısına $f(x)$ denilirse $f(x) = 2^x$ şeklinde olacaktır.

TANIM

a, 1 den farklı pozitif bir reel sayı olsun. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+,\ f(x) = a^x$ şeklinde tanımlanan fonksiyona üstel fonksiyon denir. Burada a sayısı üstel fonksiyonun tabanı ve x üs olarak adlandırılır.

Tanımda da görüldüğü gibi x değerinin tam sayı olması gerekmez. $\frac{2}{3}$, $\sqrt{5}$ veya π gibi herhangi bir gerçek sayının üstel fonksiyonda görüntüsü vardır.

Bilimsel bir hesap makinesi kullanılarak $f(x) = 2^x$ fonksiyonunda $f\left(\frac{2}{3}\right)$, $f(\sqrt{5})$ veya $f(\pi)$ değerleri hesaplanabilir.

Nüfus artışının, bileşik faizin, radyoaktif bozunum miktarının, yeni çıkan bir ürünü kullananların sayısının ve bir söylentinin yayıldığı kişi sayısının hesaplanması gibi birçok gerçek hayat probleminin modellenmesinde üstel fonksiyonlara ihtiyaç duyulur.

TEKNOLOJİ

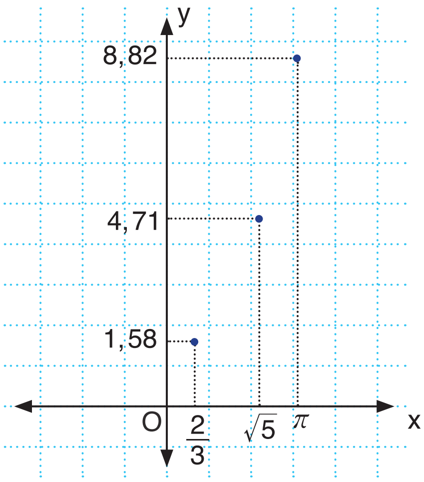
Bilimsel hesap makinesi uygulamaları akıllı telefon ve bilgisayarlarda da bulunmaktadır.

$f(x)=2^x$ fonksiyonunda $f\left(\frac{2}{3}\right)$, $f(\sqrt{5})$ veya $f(\pi)$ gibi değerler bilimsel hesap makinesi ile hesaplanabilir.

Bilimsel hesap makinesi kullanarak $f\left(\frac{2}{3}\right)=2^{\frac{2}{3}}$ değerini hesaplamak için akıllı telefonlarda veya bilgisayardaki hesap makinesinin görünüm menüsünden bilimsel alan seçilip

$\boxed{2}\ \boxed{x^y}\ \boxed{(}\ \boxed{2}\ \boxed{/}\ \boxed{3}\ \boxed{)}\ \boxed{=}$

yazılır. $f\left(\frac{2}{3}\right)=2^{\frac{2}{3}}\cong 1{,}58$ bulunur.



Benzer şekilde $f(\sqrt{5})=2^{\sqrt{5}}$ değerini hesaplamak için akıllı telefonlardaki bilimsel hesap makinesi uygulamasında veya bilgisayardaki hesap makinesi uygulamasında

$\boxed{2}\ \boxed{x^y}\ \boxed{(}\ \boxed{5}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{)}\ \boxed{=}$

yazılır. $f(\sqrt{5})=2^{\sqrt{5}}\cong 4{,}71$ bulunur.

$f(\pi)=2^{\pi}$ değerini hesaplamak için akıllı telefonlardaki bilimsel hesap makinesi uygulamasında veya bilgisayardaki hesap makinesi uygulamasında

$\boxed{2}\ \boxed{x^y}\ \boxed{\pi}\ \boxed{=}$

yazılır. $f(\pi)=2^{\pi}\cong 8{,}82$ bulunur.

Aşağıdaki tabloda belirtilen üstel fonksiyonların değerlerini bilimsel hesap makinesi kullanarak hesaplayıp tabloya yazınız.

x / Üstel Fonksiyon	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{3}$	2	π
$f(x)=3^x$									
$f\left(\frac{1}{2}\right)^x$									
$f(x)=(0{,}01)^x$									

ÖRNEK 1

Aşağıdaki ifadelerin üstel fonksiyon olup olmadığını inceleyiniz.

a) $f(x)=\pi^x$ **b)** $g(x)=3x^{-5}$ **c)** $h(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$ **ç)** $t(x)=5^n$

ÇÖZÜM

a) f fonksiyonu, tabanı π olan üstel bir fonksiyondur.

b) $g(x)=3\left(\frac{1}{x}\right)^5$ fonksiyonu, tabanı gerçek sayı olmadığından üstel bir fonksiyon değildir.

c) $h(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{-x}=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ fonksiyonu, tabanı $\frac{3}{2}$ olan üstel bir fonksiyondur.

ç) $t(x)=5^n$ fonksiyonunda n değişken olmayıp sabit bir sayı olduğundan bu fonksiyon üstel bir fonksiyon değildir.

Üstel Fonksiyonun Özellikleri

Üslü ifadelerin aşağıdaki özellikleri bulunmaktadır.

$x\neq 0,\ y\neq 0$ ve $m, n, x, y\in\mathbb{R}$ olmak üzere

a) $x^0=1$

b) $x^m\cdot x^n=x^{m+n}$

c) $(x^m)^n=x^{mn}$

ç) $\frac{x^m}{x^n}=x^{m-n}$

d) $(x\cdot y)^m=x^m\cdot y^m$

e) $\left(\frac{x}{y}\right)^m=\frac{x^m}{y^m}$

f) $x^{-m}=\frac{1}{x^m}$

g) $x\neq 1$ ve $x\neq -1$ olmak üzere $x^m=x^n \Leftrightarrow m=n$ bulunur.

Bu özellikler kullanılarak $f(x)=a^x$ üstel fonksiyonu için aşağıdaki özellikler gösterilebilir.

$a\neq 1,\ a\in\mathbb{R}^+$ ve $f(x)=a^x$ olmak üzere

a) $f(0)=a^0=1$

b) $f(1)=a^1=a$

c) $\left.\begin{aligned} f(x+y)&=a^{x+y}\\ &=a^x\cdot a^y\\ &=f(x)\cdot f(y)\end{aligned}\right\}\ f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$

ç) $k\in\mathbb{R}-\{0\},\ \left.\begin{aligned} f(kx)&=a^{kx}\\ &=(a^x)^k\\ &=[f(x)]^k\end{aligned}\right\}\ f(kx)=[f(x)]^k$

d) $\left.\begin{aligned} f(-x)&=a^{-x}\\ &=\frac{1}{a^x}\\ &=\frac{1}{f(x)}\end{aligned}\right\}\ f(-x)=\frac{1}{f(x)}$

şeklinde gösterilebilir.

ÖRNEK 2

$n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $f(x) = 3^{x+2}$ ve $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \ldots \cdot f(n) = 27^{3n}$ olduğuna göre n değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \ldots \cdot f(n) &= 3^3 \cdot 3^4 \cdot \ldots \cdot 3^{n+2} \\ &= 3^{3+4+\ldots+(n+2)} \\ &= 3^{\frac{(n+2)(n+3)}{2}-3} \\ &= 3^{\frac{n^2+5n+6-6}{2}} \\ &= 3^{\frac{n^2+5n}{2}} \text{ olur.} \end{aligned}$$

HATIRLATMA

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Buradan

$$3^{\frac{n^2+5n}{2}} = 27^{3n}$$

$$3^{\frac{n^2+5n}{2}} = 3^{9n}$$

$$\frac{n^2+5n}{2} = 9n$$

$$n^2+5n = 18n$$

$n^2 - 13n = 0 \quad \Rightarrow \quad n(n-13) = 0$ olur.

$n = 0$ olamayacağı için $n = 13$ bulunur.

ÖRNEK 3

$f(x) = 3^x$ olsun. $f(x+5)$ in $f(x-5)$ türünden değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

I. Yol

$f(x-5) = 3^{x-5}$

$f(x-5) = 3^x \cdot 3^{-5}$

$f(x-5) = \dfrac{3^x}{3^5} \quad \Rightarrow \quad 3^x = 3^5 \cdot f(x-5)$

$$\begin{aligned} f(x+5) &= 3^{x+5} \\ &= 3^x \cdot 3^5 \text{ olur.} \end{aligned}$$

3^x değeri $f(x+5)$ fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} f(x+5) &= (3^5 \cdot f(x-5)) \cdot 3^5 \\ &= 3^{10} \cdot f(x-5) \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

II. Yol

$$\frac{f(x+5)}{f(x-5)} = \frac{3^{x+5}}{3^{x-5}}$$

$$\frac{f(x+5)}{f(x-5)} = 3^{x+5-x+5}$$

$$\frac{f(x+5)}{f(x-5)} = 3^{10}$$

$f(x+5) = 3^{10} \cdot f(x-5)$ bulunur.

ÖRNEK 4

$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ ve $f(3)=81$ olduğuna göre $f(5)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ olduğundan $f(x)=a^x$ biçiminde bir üstel fonksiyon olarak alınabilir.

$f(3)=a^3=81$ olduğundan

$a^3=3^4$

$a^{\frac{3}{3}}=3^{\frac{4}{3}}$

$a=3^{\frac{4}{3}}$ bulunur.

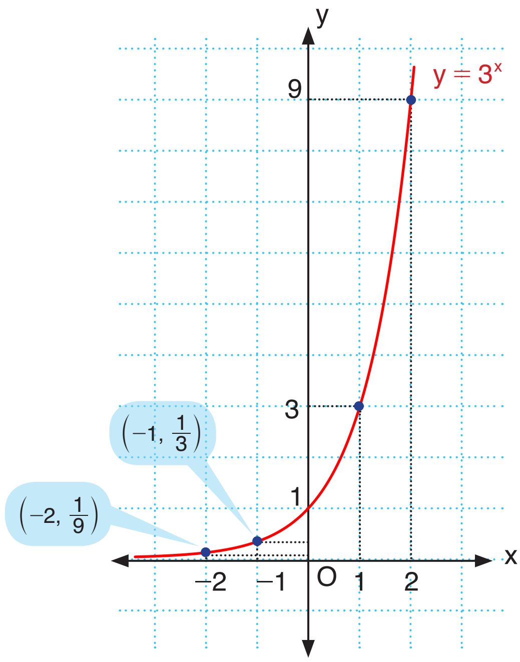
Buradan $f(5)=a^5=\left(3^{\frac{4}{3}}\right)^5=3^{\frac{20}{3}}$ elde edilir.

Üstel Fonksiyonun Grafiği

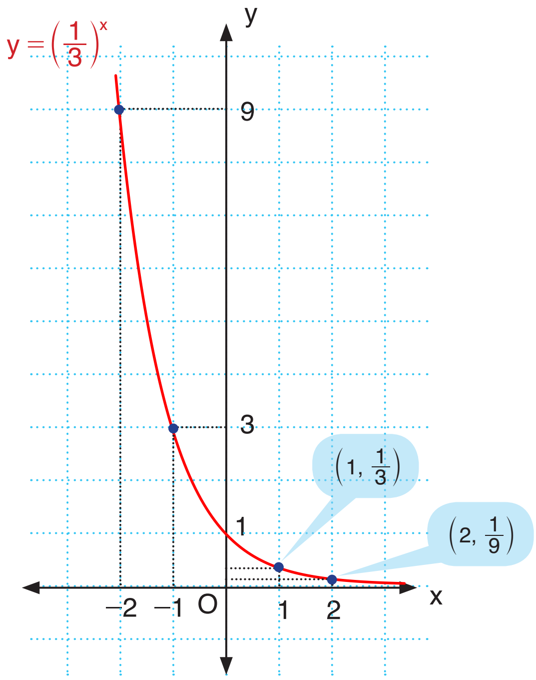
$f(x)=a^x$ üstel fonksiyonunun tanımında a, 1 den farklı pozitif bir gerçek sayıdır. Pozitif bir sayının tüm kuvvetleri de pozitif olduğundan $f(x)=a^x$ fonksiyonunun görüntü kümesi $\mathbb{R}^+$ kümesidir.

Örneğin $f(x)=3^x$ ve $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ fonksiyonlarının grafiğini çizmek için x e değerler verilip bulunan noktalar analitik düzlemde gösterilir.

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f(x)=3^x$		$\frac{1}{9}$ ↗	$\frac{1}{3}$ ↗	1 ↗	3 ↗	9 ↗	

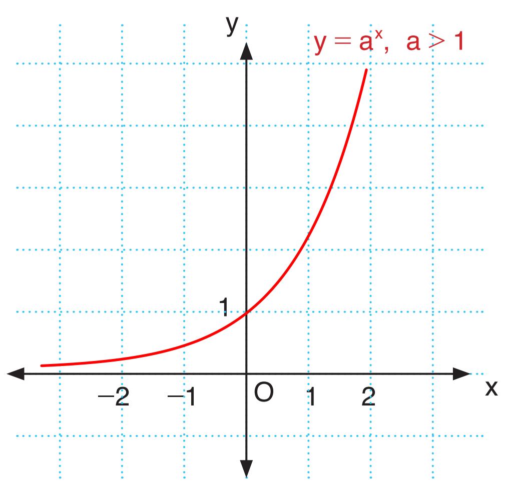


x	$-\infty$	-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$		9	$\searrow$	3	$\searrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{9}$	$\searrow$	

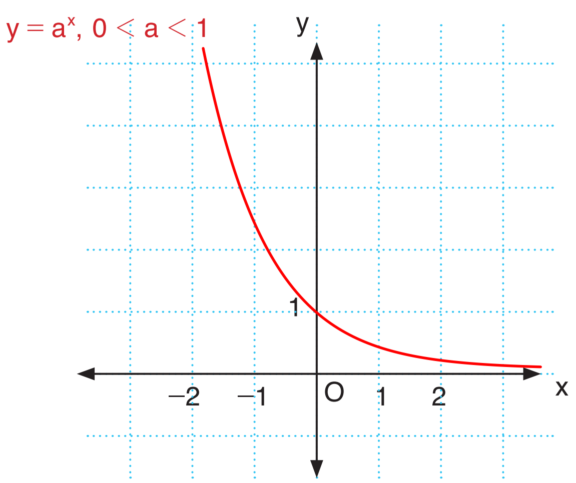


TANIM

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ fonksiyonuna
$a > 1$ için artan fonksiyon, $0 < a < 1$ için azalan fonksiyon denir.



Artan fonksiyon



Azalan fonksiyon

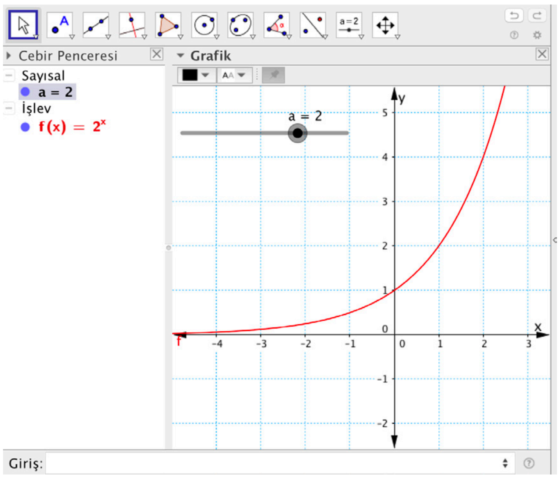
TEKNOLOJİ

Bilgisayarınızda www.geogebra.org Genel Ağ adresinden indireceğiniz GeoGebra matematik programıyla

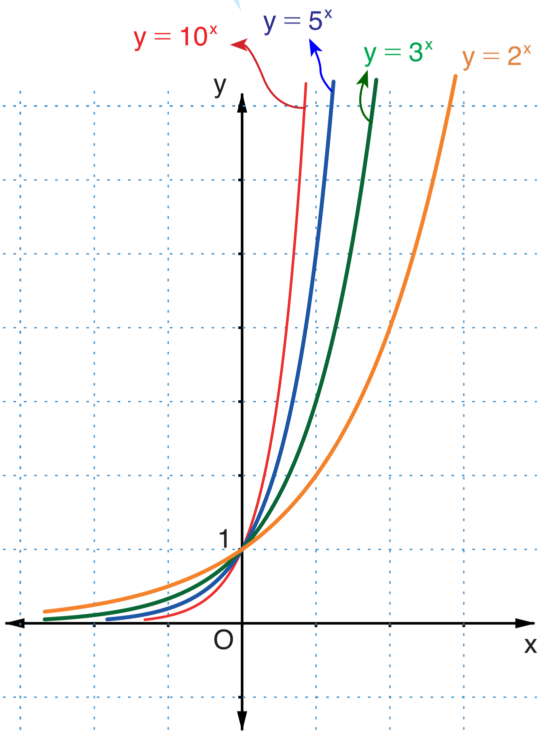
I. a=2 minimum: 0.1 ve maksimum: 10 olan bir sürgü tanımlayınız.

II. Giriş: f(x)=a^x biçiminde $f(x) = a^x$ fonksiyonunu girişe yazınız.

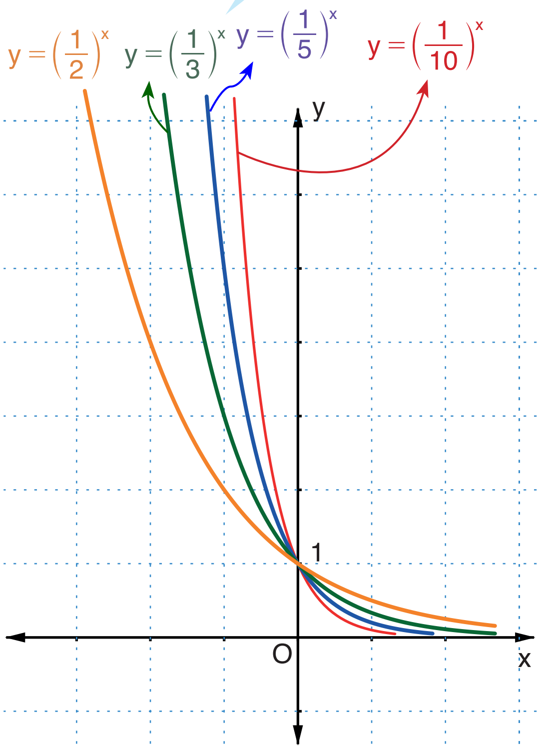
III. Sürgüyü artırıp azaltarak fonksiyondaki değişimi test ediniz.



$f(x) = a^x$ ve $a > 1$ iken a değeri büyüdükçe grafiğin kolu y eksenine yaklaşır.



$f(x) = a^x$ ve $0 < a < 1$ iken a değeri büyüdükçe grafiğin kolu y ekseninden uzaklaşır.



ÖRNEK 5

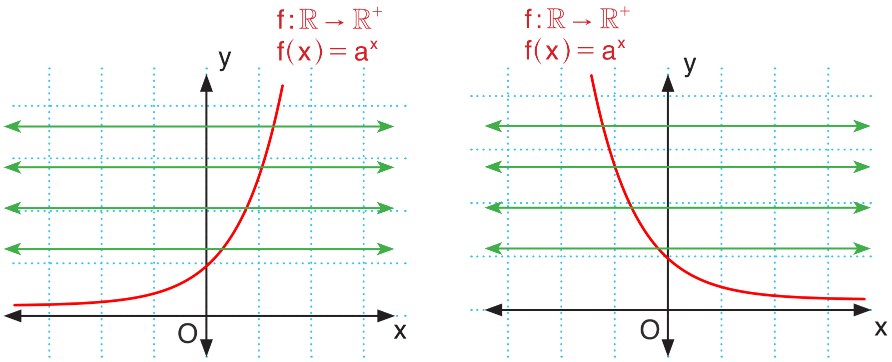
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ şeklinde verilen üstel fonksiyonun bire bir ve örten olup olmadığını inceleyiniz.

ÇÖZÜM

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ şeklindeki üstel fonksiyonun bire bir olup olmadığı iki farklı şekilde incelenebilir.

I. Yol

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ fonksiyonunun bire bir olduğu grafik üzerinde yatay doğru testi ile gösterilebilir.



$a > 1$ $\qquad$ $0 < a < 1$

x eksenine çizilen paralel her doğru $f(x) = a^x$ fonksiyonunun grafiğini en çok bir noktada kestiğinden f bire birdir.

II. Yol

$f(x) = a^x$ için

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ olduğundan f bire bir fonksiyondur.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ şeklindeki üstel fonksiyonun örten olup olmadığı iki farklı şekilde incelenebilir.

I. Yol

$y = f(x)$ olmak üzere her $y \in \mathbb{R}^+$ için $y = a^x$ eşitliğini sağlayan en az bir $x \in \mathbb{R}$ sayısı olduğundan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ fonksiyonu örtendir.

II. Yol

Yatay doğru testi ile değer kümesinin içinde çizilen yatay doğrular her noktada $y = a^x$ fonksiyonunu kestiğinden $f(x) = a^x$ örtendir.

O hâlde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ üstel fonksiyonu bire bir ve örtendir.

HATIRLATMA

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ fonksiyon olmak üzere $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $f(x_1) = f(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ oluyorsa f bire bir fonksiyondur.

SIRA SİZDE

Laboratuvar ortamında bulunan bir kap içerisinde 200 bakteri bulunmaktadır. Popülasyondaki bakteri sayısını veren fonksiyon $f(t) = 200 \cdot 2^t$ olarak modelleniyor. Buna göre bilimsel hesap makinesi kullanarak aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

Saat (t)	Yaklaşık Bakteri Sayısı ($f(t) = 200 \cdot 2^t$)
0	200
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

Yukarıda elde edilen sonuca göre bakteri sayısının zamana bağlı olarak düzenli arttığı söylenebilir mi? Açıklayınız.

ALIŞTIRMALAR

1. $f(x) = 5^x$ ve $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ **olmak üzere aşağıdaki değerleri bilimsel hesap makinesi kullanarak hesaplayınız.**

a) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ **ç)** $g(-\sqrt{7})$

b) $f(\sqrt{3})$ **d)** $f(2, 5)$

c) $g\left(\frac{1}{3}\right)$ **e)** $g(-2, 5)$

2. $f(x) = a^x$ **olsun.** $f(x+y)$ nin $f(x-y)$ **türünden ifadesini yazınız.**

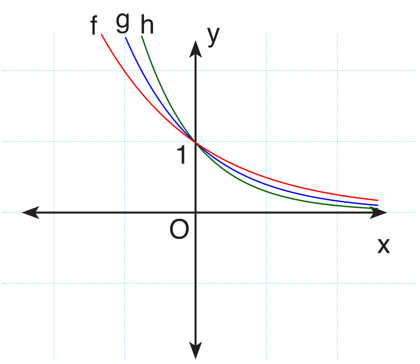
3. $f(x) = 3 \cdot 5^x$ ve $g(x) = 2 \cdot 7^x$ fonksiyonları veriliyor.

a) **GeoGebra programı kullanarak fonksiyonların grafiklerini çiziniz.**

b) **Aşağıdaki değerleri küçükten büyüğe sıralayınız.**

$f(-1,2),\ g(-1,2),\ f(0,4),\ g(0,4)$

4.



Yukarıda grafiği verilen f, g ve h üstel fonksiyonlarını aşağıdaki üstel fonksiyonlar ile eşleştiriniz.

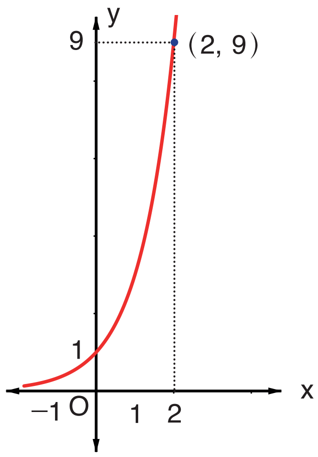
a) $y = (0,3)^x = ...$

b) $y = \left(\frac{2}{5}\right)^x = ...$

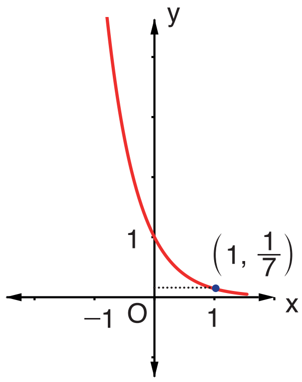
c) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = ...$

5. **Aşağıda grafiği verilen** $f(x) = a^x$ **biçimindeki üstel fonksiyonların kuralını bulunuz.**

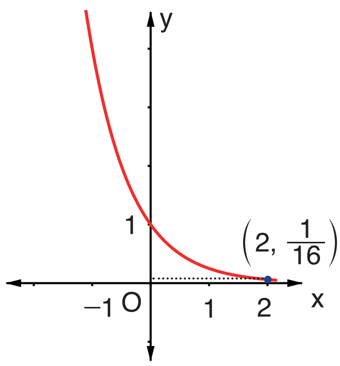
a)



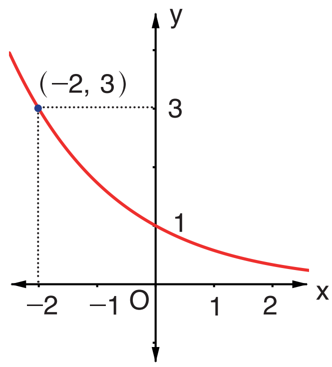
b)



c)



ç)



1.2. LOGARİTMA FONKSİYONU

Bu Bölümde Neler Öğreneceksiniz?

- Logaritma fonksiyonu
- Logaritma fonksiyonunun grafiği
- e sayısı
- Doğal logaritma fonksiyonu
- 10 tabanında logaritma fonksiyonu
- Logaritma fonksiyonunun özellikleri

Terimler ve Kavramlar

- Logaritma fonksiyonu
- Doğal logaritma

Logaritma fonksiyonu günlük hayatta karşılaşılan birçok durumun çözümünde kullanılır.


Görsel 1.2: Ses şiddeti

Fosil yaşlarının tayini, bir bilgisayar işlemcisinin transistör sayısını bulma, pH değerinin hesaplanması, ses şiddetinin ölçümü, deprem şiddetinin ölçümü, bazı maddelerin soğuma sürelerinin hesaplanması gibi birçok alanda logaritma fonksiyonu kullanılır.

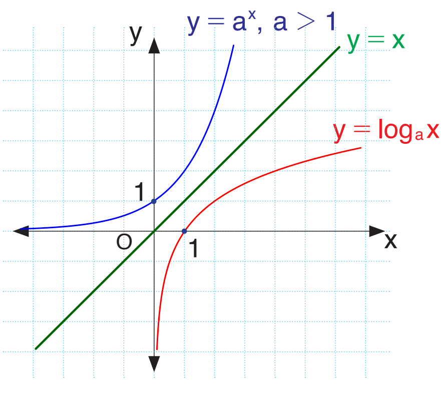
$a > 0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ üstel fonksiyonu bire bir ve örten olduğu için bu fonksiyonun tersi vardır.

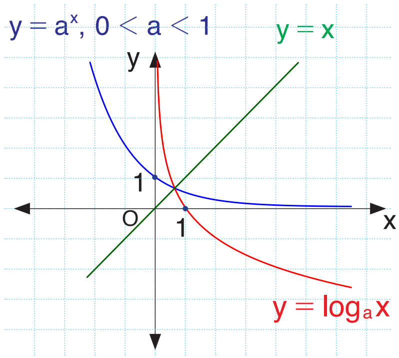
TANIM

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$, $a > 0$ ve $a \neq 1$ üstel fonksiyonunun tersi $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ şeklinde bir fonksiyondur. Bu ters fonksiyona logaritma fonksiyonu denir ve $f^{-1}(x) = y = \log_a x$ biçiminde yazılır. Bu ifade a tabanına göre logaritma x şeklinde okunur.

$x > 0$ için $y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$ olur.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ fonksiyonunun grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriği $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_a x$ fonksiyonunun grafiği olur.





Logaritmanın tanımı kullanılarak logaritmik biçimde veya üstel biçimde verilen ifadeler birbirine dönüştürülebilir.

Logaritmik Biçim		**Üstel Biçim**
Üs		Üs
$\log_a x = y$	$\Leftrightarrow$	$a^y = x$
Taban		Taban

Logaritmik Biçim		**Üstel Biçim**
$\log_{10} 10000 = 4$	$\Leftrightarrow$	$10^4 = 10000$
$\log_2 32 = 5$	$\Leftrightarrow$	$2^5 = 32$
$\log_3\left(\frac{1}{81}\right) = -4$	$\Leftrightarrow$	$3^{-4} = \frac{1}{81}$
$\log_7 x = k$	$\Leftrightarrow$	$7^k = x$

ÖRNEK 1

Aşağıda logaritmik biçimde verilen eşitlikleri üstel biçimde yazınız.

a) $\log_3 243 = 5$

b) $\log_{10}\sqrt{10} = \frac{1}{2}$

c) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = 2$

ç) $\log_{2\sqrt{2}} \frac{1}{128} = -\frac{14}{3}$

d) $\log_2 \frac{1}{32} = -5$

e) $\log_7 1 = 0$

f) $\log_8 8 = 1$

g) $\log_{0,\overline{3}} 243 = -5$

ÇÖZÜM

$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$ olduğundan

a) $\log_3 243 = 5 \Leftrightarrow 3^5 = 243$

b) $\log_{10}\sqrt{10} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$

c) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

ç) $\log_{2\sqrt{2}} \frac{1}{128} = -\frac{14}{3} \Leftrightarrow (2\sqrt{2})^{-\frac{14}{3}} = \frac{1}{128}$

$$(\sqrt{8})^{-\frac{14}{3}} = \frac{1}{128}$$
$$(2^{\frac{3}{2}})^{-\frac{14}{3}} = \frac{1}{128}$$
$$2^{-7} = \frac{1}{128}$$

d) $\log_2 \frac{1}{32} = -5 \Leftrightarrow 2^{-5} = \frac{1}{32}$

e) $\log_7 1 = 0 \Leftrightarrow 7^0 = 1$

f) $\log_8 8 = 1 \Leftrightarrow 8^1 = 8$

g) $\log_{0,\overline{3}} 243 = -5 \Leftrightarrow (0,\overline{3})^{-5} = 243$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-5} = 243$$
$$3^5 = 243$$

olarak bulunur.

ÖRNEK 2

Aşağıda üstel biçimde verilen eşitlikleri logaritmik biçimde yazınız.

a) $5^4 = 625$

b) $\sqrt{64} = 8$

c) $7^{-2} = \frac{1}{49}$

ç) $6^0 = 1$

d) $\sqrt[3]{125} = 5$

e) $5^1 = 5$

ÇÖZÜM

a) $5^4 = 625 \Leftrightarrow \log_5 625 = 4$

b) $\sqrt{64} = 8 \Leftrightarrow \log_{64} 8 = \frac{1}{2}$

c) $7^{-2} = \frac{1}{49} \Leftrightarrow \log_7 \frac{1}{49} = -2$

ç) $6^0 = 1 \Leftrightarrow \log_6 1 = 0$

d) $\sqrt[3]{125} = 5 \Leftrightarrow \log_{125} 5 = \frac{1}{3}$

e) $5^1 = 5 \Leftrightarrow \log_5 5 = 1$

SIRA SİZDE

Aşağıdaki tabloda üstel biçimde verilen eşitlikleri logaritmik biçimde, logaritmik biçimde verilen eşitlikleri üstel biçimde yazınız.

Üstel Biçim	Logaritmik Biçim
$(0,1)^4 = 10^{-4}$	
$\left(\frac{2}{3}\right)^{-5} = \frac{243}{32}$	
$7^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{49}}$	
$(\sqrt{2})^5 = \sqrt{32}$	
	$\log_{0,2} 5 = -1$
	$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{8} = 3$
	$\log_{\frac{1}{125}} \left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{3}$
	$\log_3 (0,\overline{3}) = -1$

Logaritma Fonksiyonunun En Geniş Tanım Kümesi

$f(x) = \log_{g(x)} h(x)$ fonksiyonunun tanımlı olabilmesi için

I. $g(x) > 0$

II. $g(x) \neq 1$

III. $h(x) > 0$

şartlarını sağlaması gerekir.

ÖRNEK 3

$f(x) = \log_{(x+3)}(-x^2 + 5x - 6)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x) = \log_{(x+3)}(-x^2 + 5x - 6)$ fonksiyonunun tanımlı olması için

I. $x + 3 > 0$

II. $x + 3 \neq 1 \Rightarrow x \neq -2$

III. $-x^2 + 5x - 6 > 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 < 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) < 0$

olmalıdır.

	$-\infty$	-3	2	3	$+\infty$
$(x-2)(x-3) < 0$	$+$	$+$	$-$	$+$	
$x + 3 > 0$	$-$	$+$	$+$	$+$	
			Çözüm		

Burada $f(x)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi $(2, 3)$ olur.

ÖRNEK 4

$f(x) = \dfrac{3}{1 - \log_5(x+2)} + \sqrt{4-x}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x) = \dfrac{3}{1 - \log_5(x+2)} + \sqrt{4-x}$ fonksiyonunun tanımlı olması için

$1 - \log_5(x+2) \neq 0$, $x + 2 > 0$ ve $4 - x \geqslant 0$ olmalıdır.

$\log_5(x+2) \neq 1 \Rightarrow x + 2 \neq 5^1 \Rightarrow x \neq 3$ olur.

Buradan $x \neq 3$, $x > -2$ ve $x \leqslant 4$ elde edilir.

En geniş tanım kümesi $(-2, 4] - \{3\}$ bulunur.

ÖRNEK 5

$f(x)=\log_3(2x^2-(m+2)x+2)$ fonksiyonu $\forall x\in\mathbb{R}$ için tanımlı olduğuna göre m nin değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x)$ fonksiyonu $\forall x\in\mathbb{R}$ için tanımlı olduğundan $\forall x\in\mathbb{R}$ için $2x^2-(m+2)x+2>0$ olmalıdır. Bunun için de denklemin gerçek kökünün olmaması gerekir. Buradan
$\Delta=b^2-4ac<0$

$[-(m+2)]^2-4\cdot2\cdot2<0$
$m^2+4m-12<0$ olur.

$m^2+4m-12=0$ denkleminin kökleri $m_1=-6$ ve $m_2=2$ olur.
$m^2+4m-12<0$ eşitsizliğinin işaret tablosu yapılırsa

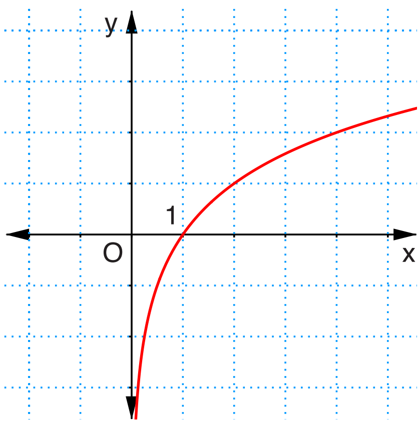
	$-\infty$	-6		2	$+\infty$
$m^2+4m-12<0$	$+$	○	$-$	○	$+$
			Çözüm		

m nin değer aralığı $(-6,\ 2)$ şeklinde bulunur.

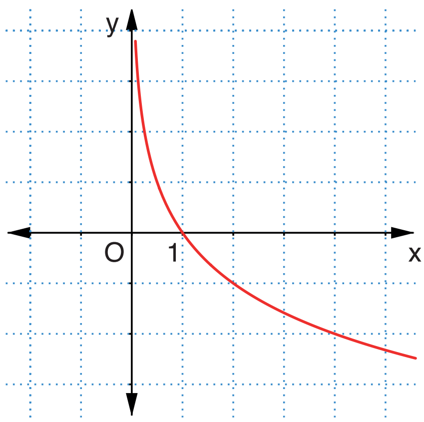
Logaritma Fonksiyonunun Grafiği

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, $f(x)=a^x$, $a\neq1$ kuralı ile verilen üstel fonksiyon grafiği üzerindeki noktaların $y=x$ doğrusuna göre simetriği alınarak $f^{-1}(x)=\log_a x$ fonksiyonunun grafiği çizilir.

TANIM
$a\in\mathbb{R}^+-\{1\}$ olmak üzere $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, $y=f(x)=\log_a x$ logaritma fonksiyonuna $a>1$ için artan fonksiyon, $0<a<1$ için azalan fonksiyon denir.



$a>1\Rightarrow y=\log_a x$
Artan fonksiyon



$0<a<1\Rightarrow y=\log_a x$
Azalan fonksiyon

Örneğin

$f(x) = 2^x$ artan bir fonksiyondur.

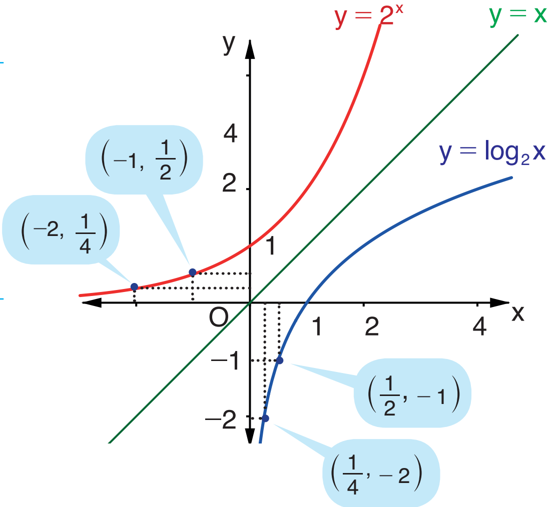
$f^{-1}(x) = \log_2 x$ fonksiyonu da artan bir fonksiyondur.

ÖRNEK 6

$y = 2^x$ ve $y = \log_2 x$ fonksiyonlarının grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

x	$-\infty$	-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$y = 2^x$		$\frac{1}{4}$	↗	$\frac{1}{2}$	↗	1	↗	2	↗	4	↗	



Bu noktaların $y = x$ doğrusuna göre simetriği

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		1		2		4		$+\infty$
$y = \log_2 x$		-2	↗	-1	↗	0	↗	1	↗	2	↗	

şeklinde bulunur.

ÖRNEK 7

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ve $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ fonksiyonlarının grafiğini çiziniz. Bu fonksiyonlar artan mı yoksa azalan mıdır? Gösteriniz.

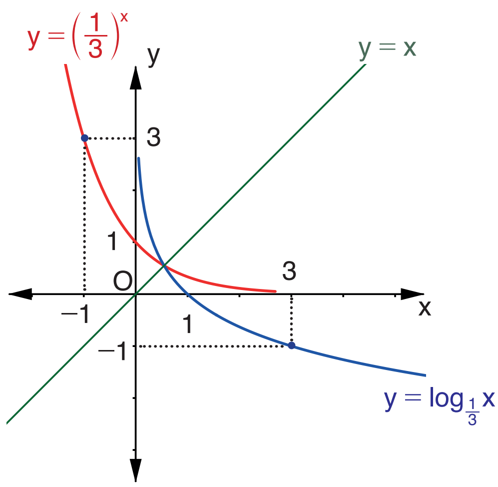
ÇÖZÜM

x	$-\infty$	-1		0		1		$+\infty$
$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$		3	↘	1	↘	$\frac{1}{3}$	↘	

$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ azalan bir fonksiyondur.

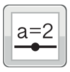
x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		1		3		$+\infty$
$f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$		1	↘	0	↘	-1	↘	

$f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ fonksiyonu azalan bir fonksiyondur.



TEKNOLOJİ

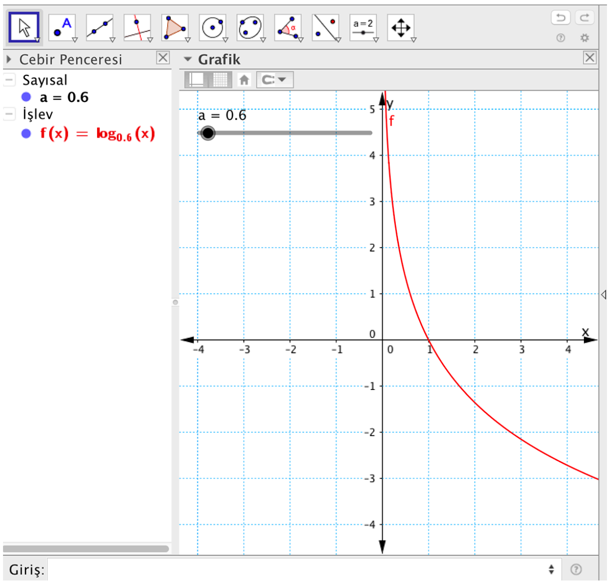
Bilgisayarınızda GeoGebra pragramını kullanarak

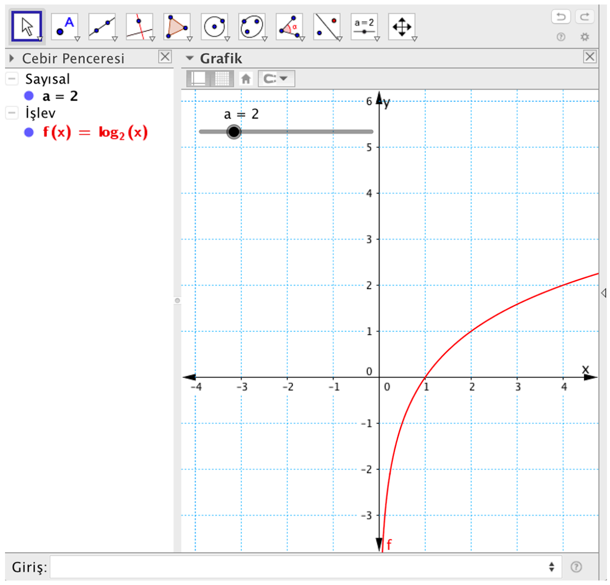
I. 

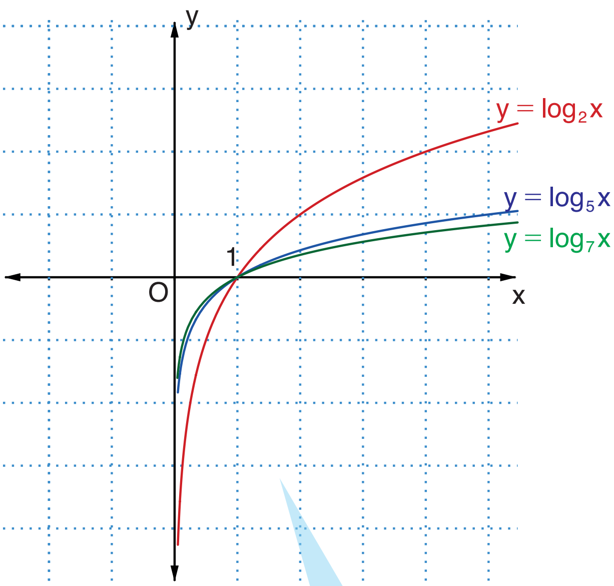
minimum: 0.1 ve maksimum: 10 olan bir a sürgüsü tanımlayınız.

II. Giriş: $f(x) = \log(a,\ x)$ yazıp $f(x) = \log_a x$ fonksiyonunu oluşturunuz.

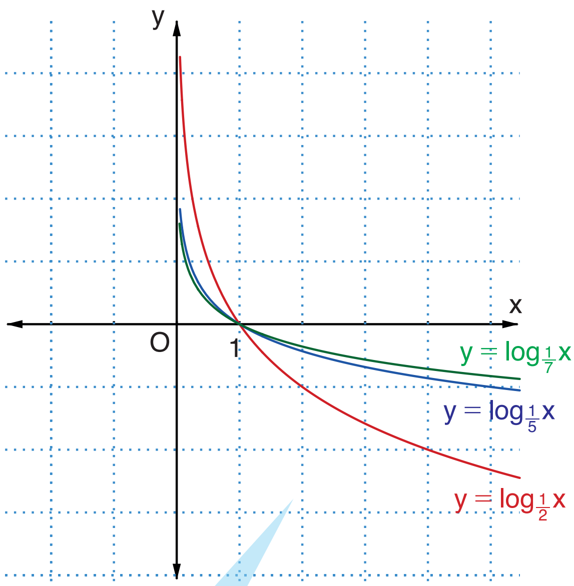
III. Sürgüyü sağa ve sola çekerek a tabanı değiştikçe $y = \log_a x$ fonksiyonunun değişimini test ediniz.







$y = \log_a x$ ve $a > 1$ iken taban arttıkça grafiğin kolu x eksenine yaklaşır.



$y = \log_a x$ ve $0 < a < 1$ iken taban arttıkça grafiğin kolu x ekseninden uzaklaşır.

$y = \log_a x + k$ Fonksiyonunun Grafiği

$y = \log_a x + k$ fonksiyonunun grafiği $y = \log_a x$ fonksiyonunun grafiğinin y eksenine göre k pozitif ise k birim yukarı, k negatif ise k birim aşağı ötelenmesi ile elde edilir.

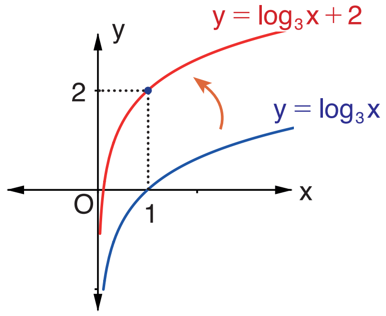
ÖRNEK 8

Aşağıdaki fonksiyonların grafiğini çiziniz.

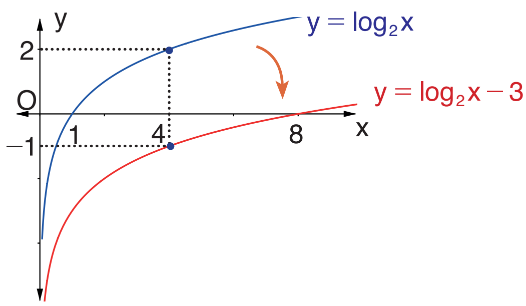
a) $f(x) = \log_3 x + 2$ **b)** $g(x) = \log_2 x - 3$

ÇÖZÜM

a) $y = \log_3 x$ fonksiyonunun grafiği 2 birim yukarı ötelenerek $f(x) = \log_3 x + 2$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.



b) $y = \log_2 x$ fonksiyonunun grafiği 3 birim aşağı ötelenerek $g(x) = \log_2 x - 3$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.



$y = \log_a (x + k)$ Fonksiyonunun Grafiği

$y = \log_a (x + k)$ fonksiyonunun grafiği $y = \log_a x$ fonksiyonunun grafiğinin x eksenine göre k pozitif ise k birim sola, k negatif ise k birim sağa ötelenmesi ile elde edilir.

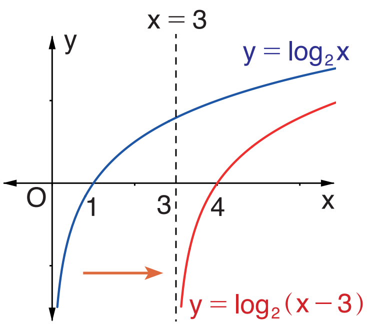
ÖRNEK 9

Aşağıdaki fonksiyonların grafiğini çiziniz.

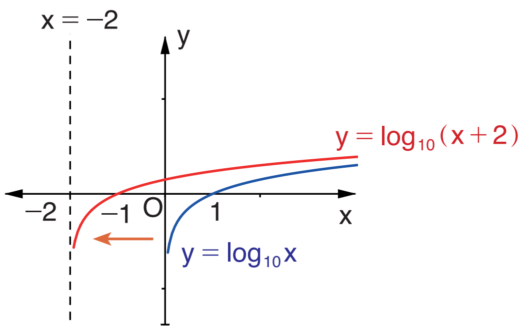
a) $f(x) = \log_2 (x - 3)$ **b)** $g(x) = \log_{10} (x + 2)$

ÇÖZÜM

a) $y = \log_2 x$ fonksiyonunun grafiği 3 birim sağa ötelenerek $f(x) = \log_2 (x - 3)$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.



b) $y = \log_{10} x$ fonksiyonunun grafiği 2 birim sola ötelenerek $g(x) = \log_{10} (x + 2)$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.



$n > 0,\ y = n \cdot \log_a x$ Fonksiyonunun Grafiği

$y = \log_a x$ fonksiyonununda her x değerinin görüntüsünün n katı alınarak $y = n \cdot \log_a x$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.

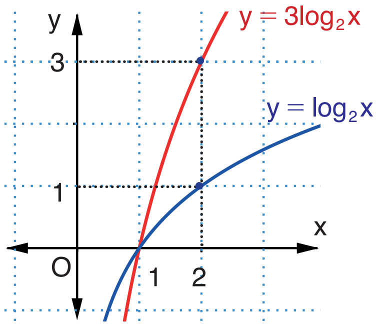
ÖRNEK 10

Aşağıdaki fonksiyonların grafiğini çiziniz.

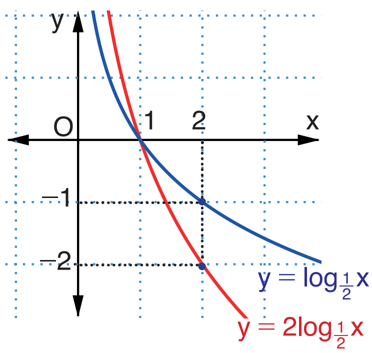
a) $f(x) = 3\log_2 x$ **b)** $g(x) = 2\log_{\frac{1}{2}} x$

ÇÖZÜM

a) $y = \log_2 x$ fonksiyonunun y değerlerinin 3 katı alınarak $f(x) = 3\log_2 x$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.



b) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ fonksiyonunun y değerlerinin $\frac{1}{2}$ katı alınarak $g(x) = 2\log_{\frac{1}{2}} x$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.



$y = -\log_a x$ Fonksiyonunun Grafiği

$y = -f(x)$ fonksiyonunun grafiği $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin x eksenine göre simetriği olduğundan $y = \log_a x$ fonksiyonunun grafiğinin x eksenine göre simetriği alınarak $y = -\log_a x$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.

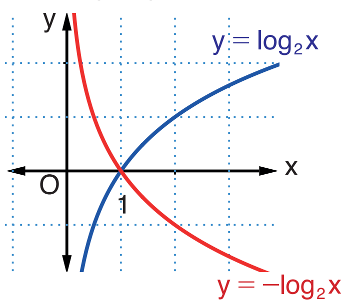
ÖRNEK 11

Aşağıdaki fonksiyonların grafiğini çiziniz.

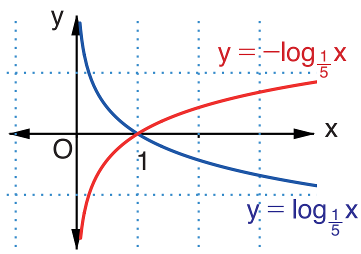
a) $f(x) = -\log_2 x$ **b)** $g(x) = -\log_{\frac{1}{5}} x$

ÇÖZÜM

a) $y = \log_2 x$ fonksiyonunun grafiğinin x eksenine göre simetriği alınarak $y = -\log_2 x$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.



b) $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ fonksiyonunun grafiğinin x eksenine göre simetriği alınarak $y = -\log_{\frac{1}{5}} x$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.



$y = n \cdot \log_a(x \pm b) \pm c$ Fonksiyonunun Grafiği

$y = \log_a x$ fonksiyonunun grafiği b birim sağa veya sola ötelenerek ve y değerlerinin n katı alınıp c birim yukarı veya aşağı ötelenerek $y = n \cdot \log_a(x \pm b) \pm c$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.

ÖRNEK 12

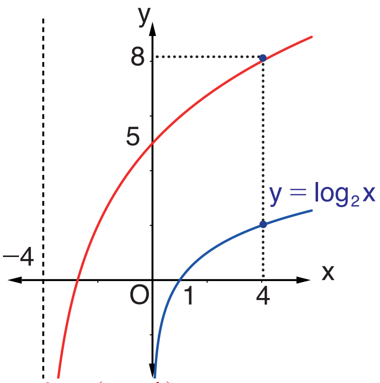
Aşağıdaki fonksiyonların grafiğini çiziniz.

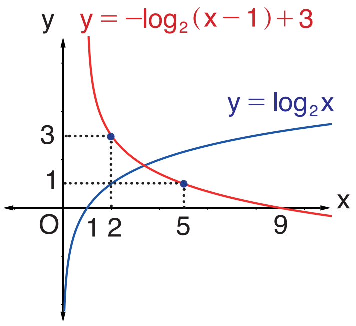
a) $f(x) = 3\log_2(x+4) - 1$ **b)** $g(x) = -\log_2(x-1) + 3$

ÇÖZÜM

a) $y = \log_2 x$ fonksiyonunun grafiğinin 4 birim sola ötelenip y değerlerinin 3 katının alınması ve 1 birim aşağı ötelenmesi ile $f(x) = 3\log_2(x+4) - 1$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.

b) $y = \log_2 x$ fonksiyonunun grafiğinin x eksenine göre simetriği alınıp 1 birim sağa, 3 birim yukarı ötelenmesi ile $g(x) = -\log_2(x-1) + 3$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.





Gelenbevî İsmail Efendi (1729-1790)

Görsel 1.3
Gelenbevî İsmail Efendi

Gelenbevî İsmail Efendi; matematik, gök bilimi ve fizik alanında çalışmıştır. 33 veya 34 yaşlarındayken medreseler için açılan müderrislik sınavını kazanmıştır.

Hakkında anlatılan şu olay Gelenbevî'nin nasıl bir bilgin olduğunu göstermektedir. 1780 yılında İstanbul'a gelen bir Fransız mühendis, logaritma konusunu bilen bir bilginin olup olmadığını sorar. Onu Gelenbevî'ye götürürler. Fransız mühendis yanında getirdiği bir logaritma cetvelini Gelenbevî'ye takdim eder. Gelenbevî kendi yazdığı logaritma eserini Fransız'a gösterince Fransız hayli şaşırmış hâlde Gelenbevî'nin evinden ayrılır. Ayrılırken de şu sözleri söylediği nakledilir: "Bu adam Avrupa'da olsaydı ağırlığınca altınla ödüllendirilirdi."

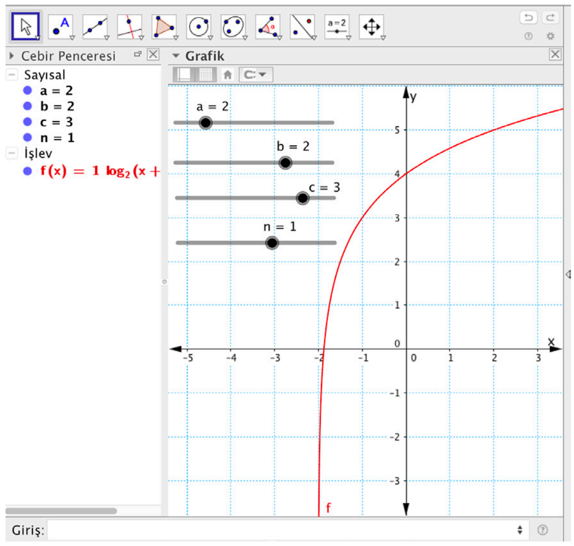
Gelenbevî'nin logaritma ile ilgili Şerh-i cedâvili'l-ensâb (Logaritma Cetvellerinin Açıklanması) ve Usûl-i cedâvi'l-insâb-ı sittînî (Altmışlık Sisteme Göre Logaritma Düzenlemesi) olmak üzere eserleri mevcuttur.

TEKNOLOJİ

$y = n \cdot \log_a(x+b)+c$ biçimindeki fonksiyonların grafiklerini GeoGebra programı yardımı ile çizmek için

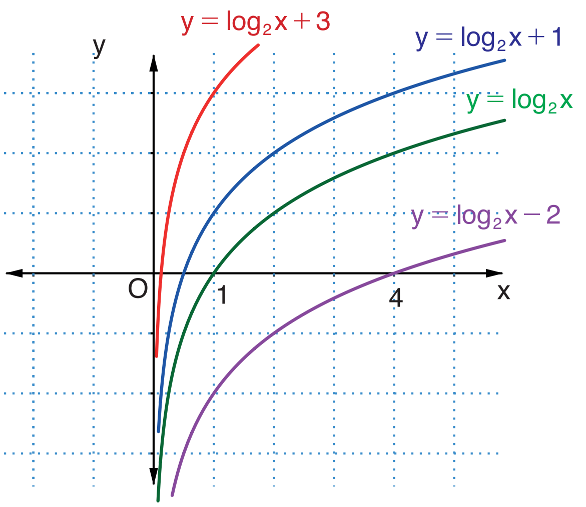
I. a=2 Aşağıdaki özelliklere sahip 4 adet sürgü tanımlayınız.

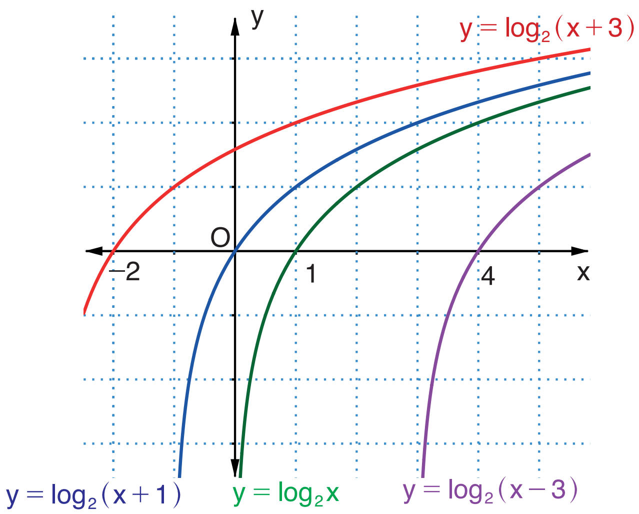
a sürgüsü minimum: 0.1, maksimum: 10 ve artış: 0.1
b sürgüsü minimum: -5, maksimum: 5 ve artış: 1
c sürgüsü minimum: -5, maksimum: 5 ve artış: 1
n sürgüsü minimum: -5, maksimum: 5 ve artış: 1

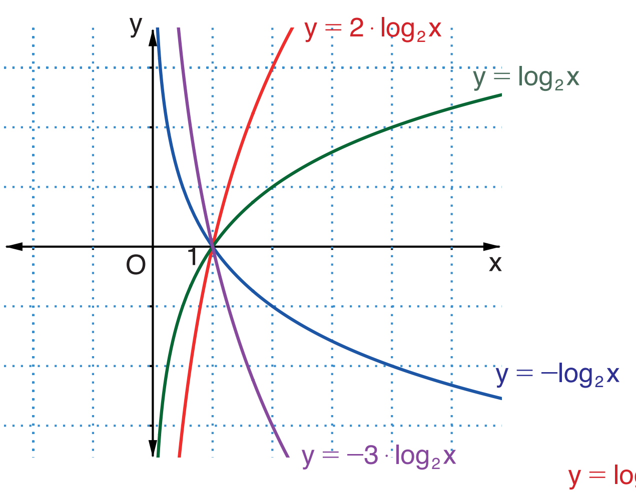


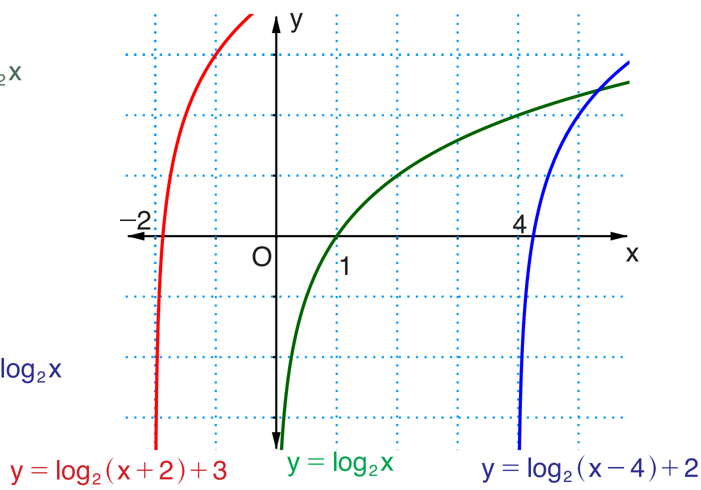
II. Giriş: $f(x) = n * \log(a, x+b)+c$ yazarak $f(x) = n \cdot \log_a(x+b)+c$ biçiminde bir f fonksiyonu oluşturunuz.

III. Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini test ediniz.









ALIŞTIRMALAR

1. **Aşağıda logaritmik biçimde verilen ifadeleri üstel biçimde yazınız.**

a) $\log_2 32 = 5$

b) $\log_{\frac{1}{3}} 81 = -4$

c) $\log_7(\sqrt{7}) = \frac{1}{2}$

ç) $\log_{\frac{1}{5}} 25 = -2$

2. **Aşağıda üstel biçimde verilen ifadeleri logaritmik biçiminde yazınız.**

a) $2^{-3} = \left(\frac{1}{8}\right)$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-5} = 243$

c) $7^0 = 1$

ç) $\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$

3. **Aşağıdaki x değerlerini bulunuz.**

a) $\log_2 x = 7$

b) $\log_{\frac{1}{3}} x = -2$

c) $\log_x 27 = 3$

ç) $\log_2(\log_3 x) = 5$

4. **Aşağıdaki logaritmik fonksiyonların grafiklerini çiziniz. Bu grafiklerin artan veya azalan olma durumlarını belirtiniz.**

a) $y = \log_5 x$

b) $y = \log_{\frac{2}{3}} x$

c) $y = \log_2(x-3)$

ç) $y = \log_3(x) + 1$

d) $y = 2\log_5 x$

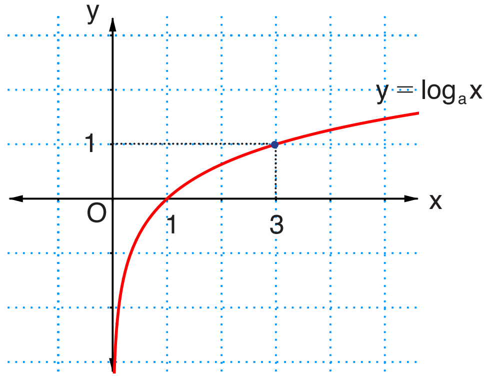
e) $y = -\log_2 x + 2$

f) $y = \log_{10}(x+1) - 3$

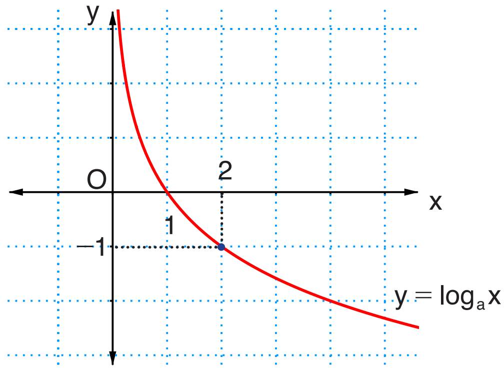
g) $y = -\log_2(x-3) + 5$

5. **Aşağıda verilen fonksiyon grafiklerindeki a, b ve c değerlerini bulunuz.**

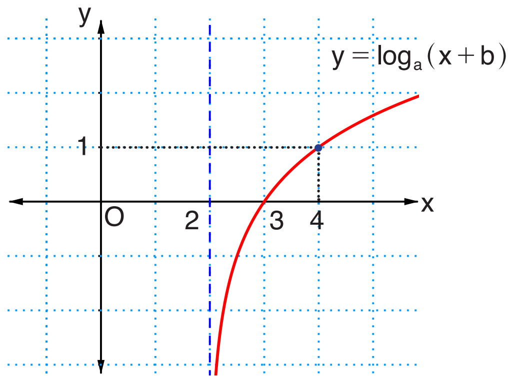
a)



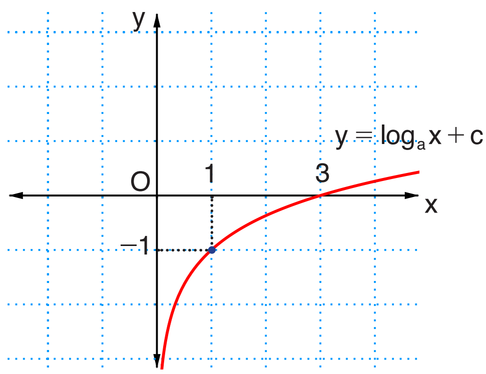
b)



c)



ç)



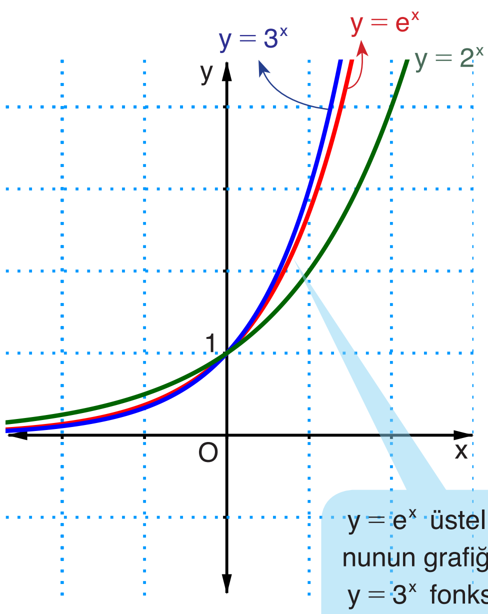
e Sayısı

Bileşik faiz hesapları, karbon testi, nüfus artışı, ilaçların etki süreleri gibi matematik ve mühendislikte karşılaşılan pek çok problemin çözümünün modellenmesinde e sayısı kullanılmaktadır. n değeri arttıkça $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ifadesinin yaklaştığı değere e sayısı veya Euler sayısı denir.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
5	2,48832
10	2,59374
100	2,71692
1000000	2,71828
⋮	⋮

Buradan $e \cong 2,71828182845904523536...$ biçiminde irrasyonel bir sayı elde edilir.

e sayısına ilk kez İskoçyalı matematikçi John Napier (Can Napier) değinmiştir. 1618'de logaritma üzerine yayımladığı bir kitabın ekinde bu sayıya değinmiştir. Fakat sabitin kendisi ile fazla ilgilenmemiştir. e sayısını gerçek anlamda ilk keşfeden matematikçi Jocob Bernouilli (Yakop Bernovli) olmuştur. Bernouilli bileşik faiz problemlerini incelerken bu sayıyı keşfetmiş ve bu sayının yaklaşık değerini hesaplamıştır. İsveçli matematikçi Leonhard Euler (Lionhard Eüler) e sayısına ismini vermiştir. Euler e sayısının irrasyonel bir sayı olduğunu da ispatlamıştır.



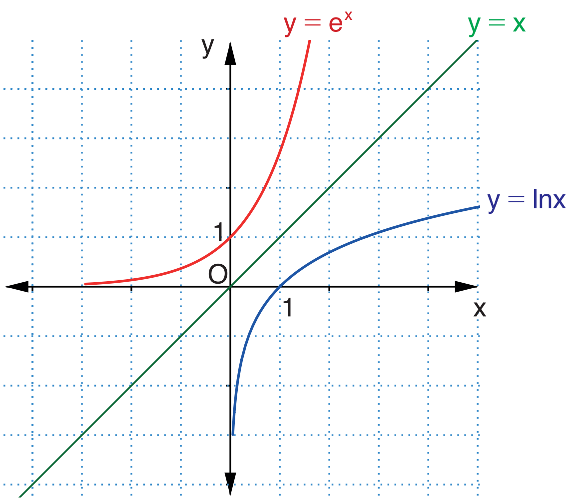
$y = e^x$ üstel fonksiyonunun grafiği $y = 2^x$ ile $y = 3^x$ fonksiyonunun grafiği arasındadır.

Doğal Logaritma Fonksiyonu

TANIM

Tabanı e sayısı olan logaritma fonksiyonuna doğal logaritma fonksiyonu denir. $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $y = f(x) = \log_e x = \ln x$ biçiminde gösterilir.

$\ln x = y \iff e^y = x$ olur.



$f(x) = \ln x$ fonksiyonunun grafiği artandır.

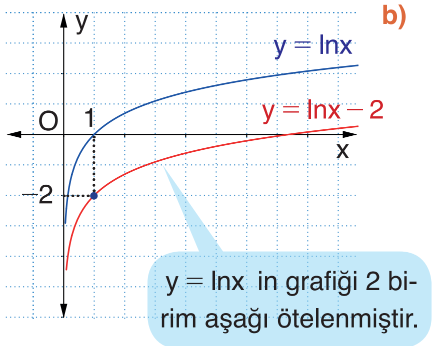
ÖRNEK 13

Aşağıdaki fonksiyonların grafiğini çiziniz.

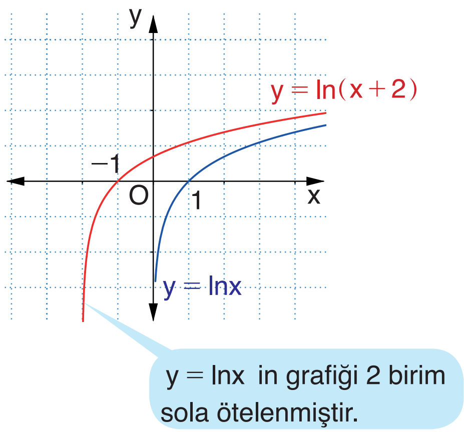
a) $y = \ln x - 2$ **b)** $y = \ln(x+2)$ **c)** $y = e^{-x}$

ÇÖZÜM

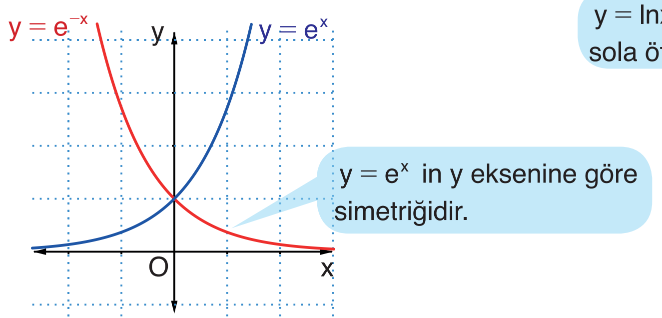
a)



b)



c)



Görsel 1.4

John Napier

Görsel 1.5

Mirifici

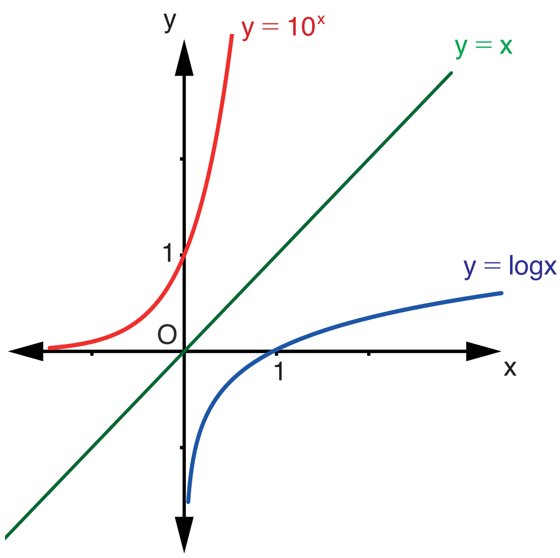
John Napier (1550-1617)

Matematikçi John Napier logaritmanın kurucusudur. 1614 yılında "Mirifici Logaritmorum Canonis Deseriptio" (Mirifisi Yograitmorum Ganoniz Dizeriptio) adlı kitabını yayımladı. İki Yunanca kelimeyi birleştiren Napier, "orantılı sayılar" anlamına gelen "logaritma" sözcüğünü ilk kullanan kişidir. Kitabında "Wonderful Table of Logarthms" (Vandırful Teybıl of Lagridıms) adı altında trigonometri hesaplamaları kullanılmış bir bölüm ile logaritma tabloları yer almaktadır. Napier, kitabının ön sözünde matematikte büyük sayılarla işlem yapmanın zaman alıcı ve yanlış yapma olasılığının yüksek olduğuna değinir. Logaritma kavramını aritmetik ve geometrik dizileri karşılaştırarak elde etmiştir.

Logaritma, matematik hesaplamalarında büyük kolaylık sağlamaktadır. e tabanlı logaritmalara "doğal logaritma" ya da "Napier logaritması" denir.

10 Tabanında Logaritma Fonksiyonu

TANIM
Tabanı 10 olan logaritma fonksiyonuna 10 tabanında logaritma fonksiyonu (adi logaritma veya bayağı logaritma) denir. 10 tabanında logaritma fonksiyonu $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_{10}x = \log x$ biçiminde gösterilir. Buradan $\log x = y \Leftrightarrow 10^y = x$ olur.



$y = \log x$ fonksiyonu artan bir fonksiyondur.

ÖRNEK 14

Aşağıdaki logaritmik ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) $\log 10000$

b) $\log \frac{1}{1000}$

c) $\log \sqrt{10}$

ç) $\log 0,0001$

ÇÖZÜM

$\log x = y \iff 10^y = x$ olduğundan

a) $\log 10000 = a$

$10000 = 10^a$

$10^4 = 10^a$

$a = 4$

b) $\log \frac{1}{1000} = \log 10^{-3} = b$

$10^{-3} = 10^b$

$b = -3$

c) $\log \sqrt{10} = \log 10^{\frac{1}{2}} = c$

$10^{\frac{1}{2}} = 10^c$

$c = \frac{1}{2}$

ç) $\log 0,0001 = \log 10^{-4} = d$

$10^{-4} = 10^d$

$d = -4$ bulunur.

ÖRNEK 15

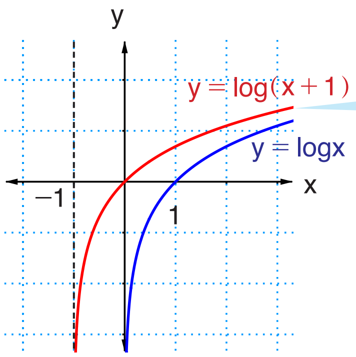
Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a) $y = \log(x+1)$

b) $y = -\log x$

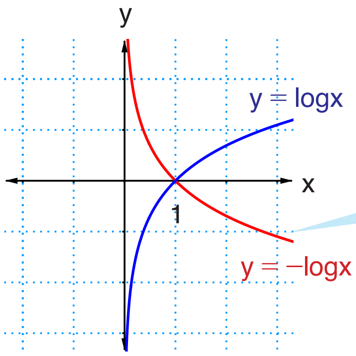
ÇÖZÜM

a)



$y = \log x$ fonksiyonu 1 birim sola ötelenmiştir.

b)



$y = \log x$ fonksiyonunun x eksenine göre simetriği alınmıştır.

Logaritma Fonksiyonunun Özellikleri

Logaritma fonksiyonunun aşağıdaki özellikleri bulunmaktadır.

$a \in \mathbb{R}^+$ ve $a \neq 1$ olmak üzere

1. $\log_a 1 = 0$

$\log_a 1 = x$ olsun.

$\log_a 1 = x \;\Leftrightarrow\; a^x = 1$ olduğundan $x = 0$ bulunur.

Örneğin

- $\log_3 1 = 0$
- $\log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$
- $\log_{\sqrt{3}} 1 = 0$
- $\log 1 = 0$
- $\ln 1 = 0$ olur.

2. $\log_a a = 1$

$\log_a a = x$ olsun.

$\log_a a = x \;\Leftrightarrow\; a^x = a^1$ olduğundan $x = 1$ bulunur.

Örneğin

- $\log_5 5 = 1$
- $\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right) = 1$
- $\log_{\sqrt{7}} \sqrt{7} = 1$
- $\log 10 = 1$
- $\ln e = 1$ olur.

3. $\log_a a^x = x$

$\log_a a^x = y \;\Leftrightarrow\; a^y = a^x$ olduğundan $y = x$ bulunur.

Örneğin

- $\log_3 3^5 = 5$
- $\log_{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}\right)^7 = 7$
- $\log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$
- $\log 10^3 = 3$
- $\ln e^{-2} = -2$ olur.

4. $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$

$\log_a x = y$ olsun.

$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y$ olur.

$x^n = a^{ny}$

Eşitliğin her iki tarafının a tabanında logaritması alınır.

$\log_a x^n = \log_a a^{ny}$

$\log_a x^n = n \cdot y$

y yerine $\log_a x$ yazılır.

olduğundan $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$ bulunur.

Örneğin

- $\log_2 5^3 = 3 \cdot \log_2 5$
- $\log_{\frac{1}{3}} 2^4 = 4 \cdot \log_{\frac{1}{3}} 2$
- $\log_3 \sqrt{5} = \log_3 5^{\frac{1}{2}}$
  $= \frac{1}{2} \cdot \log_3 5$
- $\log 25 = \log 5^2$
  $= 2 \cdot \log 5$
- $\ln 81 = \ln 3^4$
  $= 4 \cdot \ln 3$ olur.

5. $a^{\log_a x} = x$

$a^{\log_a x} = y$ ve
$\log_a x = t$ olsun.
$a^t = y \Leftrightarrow \log_a y = t$ olur.

Buradan $\log_a y = \log_a x$ olduğundan $y = x$ bulunur.

Örneğin

- $2^{\log_2 5} = 5$
- $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 4} = 4$
- $(\sqrt{3})^{\log_{\sqrt{3}} 7} = 7$
- $10^{\log 2} = 2$
- $e^{\ln 4} = 4$ olur.

6. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

$\log_a x = u \Leftrightarrow x = a^u$
$\log_a y = v \Leftrightarrow y = a^v$ olur.

$\log_a (x \cdot y) = \log_a (a^u \cdot a^v)$
$= \log_a (a^{u+v})$
$= u + v$
$= \log_a x + \log_a y$ bulunur.

Örneğin

- $\log_2 48 = \log_2 (16 \cdot 3)$
  $= \log_2 16 + \log_2 3$
  $= \log_2 2^4 + \log_2 3$
  $= 4 + \log_2 3$
- $\log 10 = \log 2 + \log 5$
  $1 = \log 2 + \log 5$
- $\ln(5e) = \ln 5 + \ln e$
  $= \ln 5 + 1$ olur.

7. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

$$\log_a x = \log_a\left(\frac{x \cdot y}{y}\right)$$
$$= \log_a \frac{x}{y} + \log_a y \text{ olur.}$$

Buradan $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ bulunur.

Örneğin

- $\log(8,1) = \log\frac{81}{10}$
  $= \log 81 - \log 10$
  $= \log 3^4 - 1$
  $= 4\log 3 - 1$ olur.
- $\log_2\left(\frac{1}{3}\right) = \log_2 1 - \log_2 3$
  $= -\log_2 3$ olur.

8. $\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$ **ve** $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ **(Taban Değiştirme Özelliği)**

$\log_a x = y \;\Leftrightarrow\; x = a^y$ olur.

Eşitliğin her iki tarafının c tabanında logaritması alınır.

$$\log_c x = \log_c a^y$$
$$\log_c x = y \cdot \log_c a$$
$$y = \frac{\log_c x}{\log_c a}$$
$$= \log_a x \text{ bulunur.}$$

Bu özellikte $x = a$ olursa

$$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b}$$
$$= \frac{1}{\log_a b} \text{ bulunur.}$$

O hâlde $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ olur.

Örneğin $\log_3 5$ farklı tabanlarda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$\log_3 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 3} = \frac{\log 5}{\log 3} = \frac{\ln 5}{\ln 3}$ olur.

Ayrıca $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ olduğundan

$\log_3 5 = \frac{1}{\log_5 3}$ olur.

9. $\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n}\log_a b$

$$\log_{a^n} b^m = \frac{\log b^m}{\log a^n}$$
$$= \frac{m}{n}\frac{\log b}{\log a}$$
$$= \frac{m}{n}\log_a b \text{ bulunur.}$$

Örneğin

- $\log_{32} 64 = \log_{2^5} 2^6$
  $= \frac{6}{5}\log_2 2$
  $= \frac{6}{5}$

- $\log_{\sqrt{27}} \sqrt[4]{3} = \log_{3^{\frac{3}{2}}} 3^{\frac{1}{4}}$
  $= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}} \cdot \underbrace{\log_3 3}_{1}$
  $= \frac{2}{3 \cdot 4} = \frac{1}{6}$ olur.

10. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

Eşitliğin her iki tarafının c tabanında logaritması alınır.

$$a^{\log_b c} = x \Rightarrow \log_c a^{\log_b c} = \log_c x$$
$$\log_b c \cdot \log_c a = \log_c x$$
$$\frac{\cancel{\log c}}{\log b} \cdot \frac{\log a}{\cancel{\log c}} = \log_c x$$
$$\log_b a = \log_c x$$
$$x = c^{\log_b a} \text{ olur.}$$

Buradan $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ olduğu görülür.

Örneğin

- $2^{\log_3 5} = 5^{\log_3 2}$
- $e^{\log_2 10} = 10^{\log_2 e}$ olur.

11. $\log_{x_1} x_2 \cdot \log_{x_2} x_3 \cdot \ldots \cdot \log_{x_{n-1}} x_n = \log_{x_1} x_n$

Taban değiştirme özelliği ile

$$\frac{\cancel{\log x_2}}{\log x_1} \cdot \frac{\cancel{\log x_3}}{\cancel{\log x_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{\log x_n}{\cancel{\log x_{n-1}}} = \frac{\log x_n}{\log x_1}$$
$$= \log_{x_1} x_n$$

bulunur.

Örneğin

$$\log_2 4 \cdot \log_4 8 \cdot \log_8 16 = \log_2 16$$
$$= \log_2 2^4$$
$$= 4 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 16

Aşağıdaki ifadelerin hangi ardışık tam sayılar arasında olduğunu bulunuz.

a) $\log 2$

b) $\log 78$

c) $\log 0,05$

ç) $\log e$

ÇÖZÜM

$\log_a x$ ifadesinin değeri bulunurken x sayısı $a^n < x < a^{n+1}$ aralığında olacak biçimde a nın tam sayı kuvvetleri belirlenir.

a) $10^0 < 2 < 10 \Rightarrow \log 1 < \log 2 < \log 10$ olur.

Buradan $0 < \log 2 < 1$ bulunur.

b) $10^1 < 78 < 10^2 \Rightarrow \log 10 < \log 78 < \log 100$ olur.

Buradan $1 < \log 78 < 2$ bulunur.

c) $10^{-2} < 0,05 < 10^{-1} \Rightarrow \log 10^{-2} < \log 0,05 < \log 10^{-1}$ olur.

Buradan $-2 < \log 0,05 < -1$ bulunur.

ç) $10^0 < e < 10^1 \Rightarrow \log 1 < \log e < \log 10$ olur.

Buradan $0 < \log e < 1$ bulunur.

ÖRNEK 17

$25^{\log_5 16} + 27^{\log_3 4}$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$25^{\log_5 16} = 16^{\log_5 25}$$
$$= 16^2 = 256 \text{ olur.}$$
$$27^{\log_3 4} = 4^{\log_3 27}$$
$$= 4^3 = 64 \text{ olur.}$$

Buradan $256 + 64 = 320$ bulunur.

ÖRNEK 18

$\log 5 = x$ ise $\log 40$ ifadesinin x türünden değeri nedir?

ÇÖZÜM

$$\log 40 = \log(5 \cdot 2^3)$$
$$= \log 5 + \log 2^3$$
$$= \log 5 + 3 \cdot \log 2$$
$$= x + 3 \cdot \log 2$$
$$= x + 3(1 - \log 5)$$
$$= x + 3 - 3x$$
$$= 3 - 2x \text{ bulunur.}$$

$$\log 10 = 1$$
$$\log 5 + \log 2 = 1$$
$$\log 2 = 1 - \log 5$$

ÖRNEK 19

$\log 2 \cong 0,301$ olduğuna göre $\log 320$ nin yaklaşık değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} \log 320 &= \log(32 \cdot 10) \\ &= \log 32 + \log 10 \\ &= \log 2^5 + 1 \\ &= 5\log 2 + 1 \\ &\cong 5(0,301) + 1 \\ &\cong 2,505 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK 20

$\log_2 5 = a$ ise $\log_{40} 50$ ifadesinin a türünden değeri nedir?

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} \log_{40} 50 &= \frac{\log_2 50}{\log_2 40} \\ &= \frac{\log_2(5^2 \cdot 2)}{\log_2(5 \cdot 2^3)} \\ &= \frac{\log_2 5^2 + \log_2 2}{\log_2 5 + \log_2 2^3} \\ &= \frac{2\log_2 5 + 1}{\log_2 5 + 3} \\ &= \frac{2a+1}{a+3} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK 21

$1 + \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{1 + \log_3 5}}$ ifadesinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$$1 + \frac{1}{1 - \dfrac{1}{1 + \log_3 5}} = 1 + \frac{1}{1 - \dfrac{1}{1 + \log_3 5}}$$

$$\begin{aligned} 1 + \log_3 5 &= \log_3 3 + \log_3 5 \\ &= \log_3 15 \text{ olur.} \end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{1}{1 - \dfrac{1}{\log_3 15}}$$

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{\log_3 15} &= 1 - \log_{15} 3 \\ &= \log_{15} 15 - \log_{15} 3 \\ &= \log_{15} \frac{15}{3} = \log_{15} 5 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 1 + \frac{1}{\log_{15} 5} \\ &= 1 + \log_5 15 \\ &= \log_5 5 + \log_5 15 \\ &= \log_5(5 \cdot 15) \\ &= \log_5 75 \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

ÖRNEK 22

$\log_8 a + \log_4 b^2 = 5$ ve $\log_8 b + \log_4 a^2 = 7$ olduğuna göre $a \cdot b$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Taban değiştirme özelliğinden

$$\frac{\log a}{\log 8} + \frac{\log b^2}{\log 4} = 5 \text{ ve } \frac{\log b}{\log 8} + \frac{\log a^2}{\log 4} = 7 \text{ olur.}$$

Buradan iki ifadede gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\frac{\log a}{3\log 2} + \frac{\cancel{2}\log b}{\cancel{2}\log 2} = 5 \text{ ve } \frac{\log b}{3\log 2} + \frac{\cancel{2}\log a}{\cancel{2}\log 2} = 7 \text{ bulunur.}$$

Paydalar eşitlenirse

$$\frac{\log a + 3\log b}{3\log 2} = 5 \text{ ve } \frac{\log b + 3\log a}{3\log 2} = 7 \text{ olur.}$$

Bu ifadeler düzenlenirse

$\log a + \log b^3 = 15\log 2 \Rightarrow \log(a \cdot b^3) = 15\log 2$

$\log b + \log a^3 = 21\log 2 \Rightarrow \log(b \cdot a^3) = 21\log 2$

olur. Bu ifadeler taraf tarafa toplanırsa

$\log(a \cdot b^3) + \log(b \cdot a^3) = 36\log 2 \Rightarrow \log(a^4 \cdot b^4) = 36\log 2$

$\Rightarrow a^4 \cdot b^4 = 2^{36}$

$\Rightarrow a \cdot b = 2^9$ bulunur.

ÖRNEK 23

$x = \log_5 2$

$y = \log_6 10$

$z = \log_{10} 145$

sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

ÇÖZÜM

$5^0 < 2 < 5^1$ olduğundan $\log_5 5^0 < \log_5 2 < \log_5 5^1$

$0 < \log_5 2 < 1$ olur.

$0 < x < 1$ bulunur.

$6^1 < 10 < 6^2$ olduğundan $\log_6 6^1 < \log_6 10 < \log_6 6^2$

$1 < \log_6 10 < 2$ olur.

$1 < y < 2$ bulunur.

$10^2 < 145 < 10^3$ olduğundan $\log_{10} 10^2 < \log_{10} 145 < \log_{10} 10^3$

$2 < \log_{10} 145 < 3$ olur.

$2 < z < 3$ bulunur.

Buradan $x < y < z$ sıralaması elde edilir.

ALIŞTIRMALAR

1. **Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.**

   a) $\log_{32}\sqrt{2}+\log_{\sqrt{2}}32$

   b) $3\log_{27}81-\log_{81}243$

   c) $\log\left(\log 10^{10000}\right)$

   ç) $\ln\left(\ln e^{e^{100}}\right)$

   d) $\log_{\sqrt{3}}e\cdot\ln(0{,}001)\cdot\log 27$

   e) $\log\sqrt{10\sqrt{10\sqrt{10}}}$

   f) $\dfrac{3}{\log_2 120}+\dfrac{1}{\log_3 120}+\dfrac{1}{\log_5 120}$

2. $\log 9=x$ ve $\log 4=y$ **olmak üzere** $\log_6 135$ **ifadesinin x ve y türünden eşiti nedir?**

3. $x=\log_{\sqrt{2}}81$
   $y=\log_{\sqrt{3}}25$
   $z=\log_{\sqrt{5}}7$
   sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

4. $\log 5\cong 0{,}699$ **olduğuna göre** $\log 160$ **ifadesinin yaklaşık değerini bulunuz.**

5. $\log_5 24!=x$ ise $\log_{25}25!$ **ifadesinin x türünden ifadesi nedir?**

6. $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$ ve $f(10)=1$ ise $f(1000)$ **değerini bulunuz.**

7. $\ln(x\cdot y)=2a$
   $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)=2b$
   olduğuna göre x ve y değerini bulunuz.

8. x_1, x_2, x_3 ve x_4 sayıları pozitif gerçek sayılar olmak üzere bu sayıların geometrik ortalaması a **olduğuna göre**
   $\dfrac{1}{\log_{x_1}a}+\dfrac{1}{\log_{x_2}a}+\dfrac{1}{\log_{x_3}a}+\dfrac{1}{\log_{x_4}a}$
   ifadesinin değeri kaçtır?

1.3. ÜSTEL, LOGARİTMİK DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

Bu Bölümde Neler Öğreneceksiniz?

- Üstel denklemler ve eşitsizlikler
- Logaritmik denklemler ve eşitsizlikler
- Üstel ve logaritmik fonksiyonlar ile gerçek hayat durumlarını modelleme

Terimler ve Kavramlar

- Üstel denklem
- Logaritmik denklem

Üstel Denklemler

TANIM

Tabanı 1 den farklı pozitif gerçek sayı olan ve içerisinde bilinmeyeni üs olarak bulunduran denklemlere üstel denklemler denir.

Örneğin

$5^{3x} = 7$

$3^{2x} - 3^{x} - 6 = 0$

$e^{2x} - 2e^{x} + 1 = 0$

$e^{x} = 4$

gibi denklemler üstel denklemlerdir.

Bazı üstel denklemler üslü sayıların özellikleri kullanılarak çözülür.

ÖRNEK 1

Aşağıdaki üstel denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.

a) $5^{2x} = 125$

b) $3^{x+2} = 27$

c) $(0,2)^{x+7} = 125$

ÇÖZÜM

$a > 0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere $a^{x} = a^{y} \Leftrightarrow x = y$ olur.

a) $5^{2x} = 5^{3} \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

Buradan $Ç = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ bulunur.

b) $3^{x+2} = 27 \Rightarrow 3^{x+2} = 3^{3} \Rightarrow x + 2 = 3 \Rightarrow x = 1$

Buradan $Ç = \{1\}$ bulunur.

c) $(0,2)^{x+7} = 125 \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{x+7} = 5^{3}$

$\Rightarrow 5^{-x-7} = 5^{3}$

$\Rightarrow -x - 7 = 3$

$\Rightarrow x = -10$

Buradan $Ç = \{-10\}$ bulunur.

$5^{2x} = 16$ gibi aynı tabanda yazılamayan üstel denklemler üslü sayıların özellikleri kullanılarak çözülemez.

Bu tip denklemleri çözmek için

- Üstel ifade yalnız bırakılır.
- Verilen üstel ifadenin tabanında her iki tarafın logaritması alınarak bilinmeyen aşağı indirilir.
- Bilinmeyen yalnız bırakılarak denklemin çözüm kümesi bulunur.

Örneğin $5^{2x} = 16$ denkleminde her iki tarafın 5 tabanında logaritması alınır.

$\log_5 5^{2x} = \log_5 16$

$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$ özelliği kullanılarak

$2x \cdot \log_5 5 = \log_5 16 \Rightarrow 2x = \log_5 16$

Buradan $x = \dfrac{\log_5 2^4}{2} = \dfrac{4 \cdot \log_5 2}{2} = 2\log_5 2$ bulunur.

ÖRNEK 2

Aşağıdaki üstel denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz ve grafik üzerinde gösteriniz.

a) $e^{3x} = 5$

b) $2^{2x-5} = 3$

ÇÖZÜM

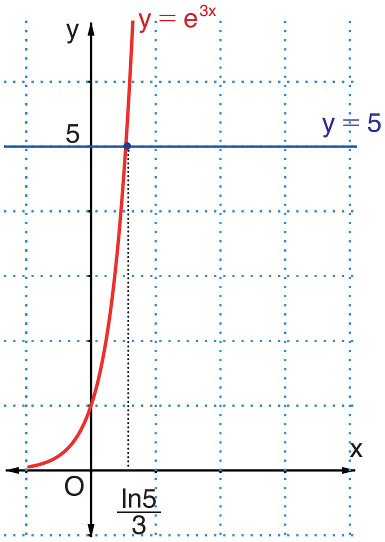
a) $e^{3x} = 5 \Rightarrow \ln e^{3x} = \ln 5$

$\Rightarrow 3x = \ln 5$

$\Rightarrow x = \dfrac{\ln 5}{3}$

Buradan $Ç = \left\{\dfrac{\ln 5}{3}\right\}$ bulunur.

$y = e^{3x}$ eğrisi ile $y = 5$ doğrusunun kesim noktası $e^{3x} = 5$ denkleminin ortak çözüm kümesidir.



b) $2^{2x-5} = 3 \Rightarrow \log_2 2^{2x-5} = \log_2 3$

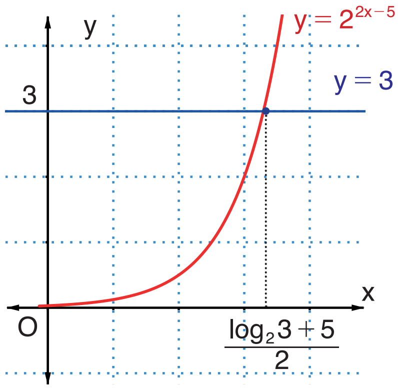
$\Rightarrow 2x - 5 = \log_2 3$

$\Rightarrow 2x = \log_2 3 + 5$

$\Rightarrow x = \dfrac{\log_2 3 + 5}{2}$

Buradan $Ç = \left\{\dfrac{\log_2 3 + 5}{2}\right\}$ bulunur.

$y = 2^{2x-5}$ eğrisi ile $y = 3$ doğrusunun kesim noktası $2^{2x-5} = 3$ denkleminin ortak çözüm kümesidir.



ÖRNEK 3

Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.

a) $3^{2x} - 3^{x} - 6 = 0$ b) $x^{2}e^{x} + 2xe^{x} = 0$

ÇÖZÜM

a) $3^{2x} - 3^{x} - 6 = 0$

$3^{x} = a$ olsun.

$a^{2} - a - 6 = 0 \Rightarrow (a-3)(a+2) = 0 \Rightarrow a = 3$ veya $a = -2$ olur.

$3^{x} = 3 \Rightarrow x = 1$ olduğundan $Ç_1 = \{1\}$ olur.

$3^{x} > 0$ olduğundan $3^{x} = -2 \Rightarrow Ç_2 = \{\ \}$ bulunur.

Buradan $Ç = Ç_1 \cup Ç_2 = \{1\}$ olur.

b) $x^{2}e^{x} + 2xe^{x} = 0 \Rightarrow xe^{x}(x+2) = 0$

$\Rightarrow x(x+2) = 0$

Buradan $x_1 = 0$ ve $x_2 = -2$ olur.

$Ç = \{-2, 0\}$ biçiminde elde edilir.

ÖRNEK 4

Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.

a) $2^{x-1} = 3^{x+1}$ b) $e^{3x-1} = 2^{x+1}$

ÇÖZÜM

a) $2^{x-1} = 3^{x+1} \Rightarrow \log 2^{x-1} = \log 3^{x+1}$

$\Rightarrow (x-1)\log 2 = (x+1)\log 3$

$\Rightarrow x\log 2 - \log 2 = x\log 3 + \log 3$

$\Rightarrow x(\log 2 - \log 3) = \log 2 + \log 3$

$\Rightarrow x\log\frac{2}{3} = \log 6$

$\Rightarrow x = \dfrac{\log 6}{\log\frac{2}{3}} = \log_{\frac{2}{3}} 6$

Buradan $Ç = \{\log_{\frac{2}{3}} 6\}$ bulunur.

b) $e^{3x-1} = 2^{x+1} \Rightarrow \ln e^{3x-1} = \ln 2^{x+1}$

$\Rightarrow 3x - 1 = (x+1)\ln 2 = x\ln 2 + \ln 2$

$\Rightarrow x(3 - \ln 2) = 1 + \ln 2$

$\Rightarrow x = \dfrac{1+\ln 2}{3-\ln 2}$

Buradan $Ç = \left\{\dfrac{1+\ln 2}{3-\ln 2}\right\}$ bulunur.

ÖRNEK 5

$8^{x} + 21 \cdot 18^{x} = 8 \cdot 12^{x} + 18 \cdot 27^{x}$ olduğuna göre x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$2^x = a$ ve $3^x = b$ olsun.

Bu durumda

$$a^3 + 21b^2a = 8a^2b + 18b^3 \Rightarrow a^3 + 21b^2a = 8a^2b + 10b^3 + 8b^3$$
$$\Rightarrow a^3 - 8b^3 = 8a^2b - 21b^2a + 10b^3$$
$$\Rightarrow (a-2b)(a^2+2ab+4b^2) = b(8a^2 - 21ab + 10b^2)$$
$$\Rightarrow (a-2b)(a^2+2ab+4b^2) = b(a-2b)(8a-5b)$$

Buradan $a^2 + 2ab + 4b^2 = 8ab - 5b^2 \Rightarrow a^2 - 6ab + 9b^2 = 0$

$$\Rightarrow (a-3b)^2 = 0$$
$$\Rightarrow a = 3b$$
$$\Rightarrow 2^x = 3 \cdot 3^x$$
$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 3$$
$$\Rightarrow x = \log_{\frac{2}{3}} 3$$

veya $a - 2b = 0 \Rightarrow a = 2b$

$$\Rightarrow 2^x = 2 \cdot 3^x$$
$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2$$
$$\Rightarrow x = \log_{\frac{2}{3}} 2 \text{ olur.}$$

Buradan $Ç = \left\{\log_{\frac{2}{3}} 3, \log_{\frac{2}{3}} 2\right\}$ bulunur.

SIRA SİZDE

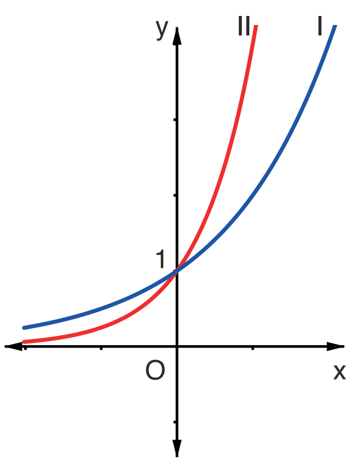
Aşağıdaki fonksiyonları I, II, III ve IV numaralı grafiklerle eşleştiriniz. Bu fonksiyonların artan veya azalan olma durumlarını belirleyiniz.

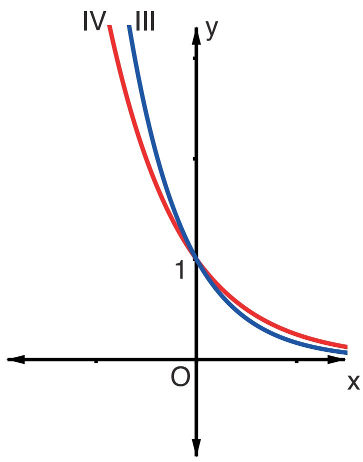
a) $y = 4^{-x}$

b) $y = 4^x$

c) $y = \frac{1}{6^x}$

ç) $y = 2^x$





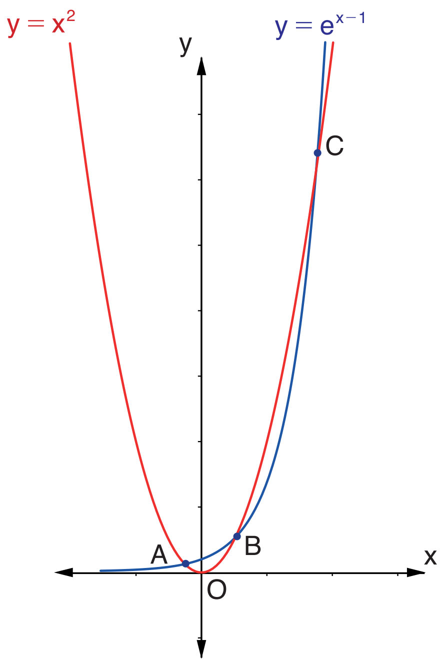
ÖRNEK 6

Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerinin kaç elemanlı olduğunu fonksiyonların grafiklerinden yararlanarak bulunuz.

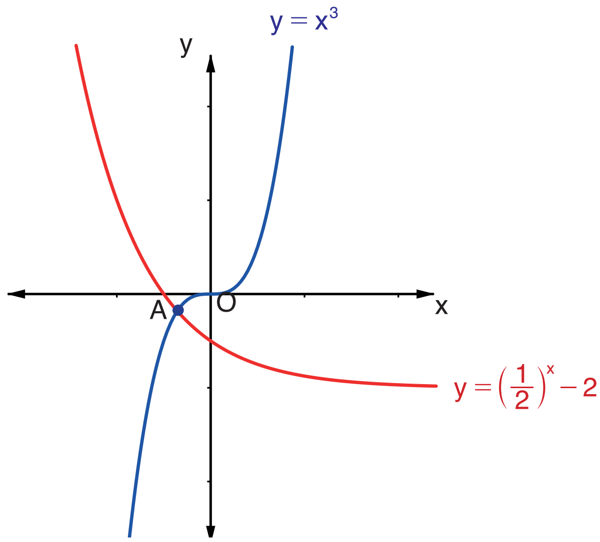
a) $x^2 = e^{x-1}$ **b)** $x^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$

ÇÖZÜM

a) $y = x^2$ ve $y = e^{x-1}$ fonksiyonlarının grafiği çizilerek incelenirse grafiklerin A, B ve C şeklinde üç farklı noktada kesiştiği görülür. O hâlde bu denklemin çözüm kümesi 3 elemanlıdır.



b) $y = x^3$ ve $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$ fonksiyonlarının grafiği çizilerek incelenirse grafiklerin A noktasında kesiştiği görülür. O hâlde bu denklemin çözüm kümesi 1 elemanlıdır.



ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $5^{2x-3} = 1$

b) $2^{1-x} = 5$

c) $(\sqrt{3})^{x} = 0,1$

ç) $e^{0,2x} = 8$

2. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $e^{2x} - e^{x} + 2 = 0$

b) $3^{4x} - 3^{2x} - 6 = 0$

c) $2^{x} - 6 \cdot 2^{-x} = 5$

ç) $e^{2x} - (e+2)e^{x} + 2e = 0$

3. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $x^2e^{x} - 2xe^{x} + e^{x} = 0$

b) $x^2 2^{x} - x2^{x} - 2^{x+1} = 0$

4. $3^a = 5^b = 7^c$ **olduğuna göre** $\frac{a}{b} + \frac{a}{c}$ **toplamı kaçtır?**

5. $x^3 = e^{x+1}$ **denkleminin çözüm kümesinin kaç elemanlı olduğunu fonksiyonların grafiklerinden yararlanarak bulunuz.**

6. $10^{x-1} = 5^{2x+1}$ **olduğuna göre x değerini bulunuz.**

7. $e^{2x} - e^{x} - 7 = 2 \cdot e^{x} + 3$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

8. $2^{a} - 2^{-a} = x$ **olduğuna göre** $2^{a} + 2^{-a}$ **ifadesinin x cinsinden eşitini bulunuz.**

9. $4^{2x-a} - 4^{x} - 6 = 0$ denkleminin çözüm kümesi $\{1\}$ **olduğuna göre a değerini bulunuz.**

10. $e^{2-\ln 2x} = x$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

11. $e^{2x} = e^{x+a} + 2$ denkleminin kökü ln2 **olduğuna göre a değerini bulunuz.**

Logaritmik Denklemler

İçerisinde bilinmeyenin logaritmasını bulunduran denklemlere logaritmik denklemler denir. $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$ ve $g(x) > 0$ olmak üzere $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ veya $\log_a f(x) = b$ gibi denklemler logaritmik denklemlerdir.

I. Logaritmik denklem $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ biçiminde ise $f(x) = g(x)$ olur.

Örneğin $\log_2 (x+14) = \log_2 [(x+5)\cdot(x-2)]$ denkleminin çözüm kümesi

$x + 14 = (x+5)(x-2)$

$x + 14 = x^2 + 3x - 10$

$x^2 + 2x - 24 = 0$

$(x+6)(x-4) = 0$

$x = -6$ veya $x = 4$ olarak bulunur.

$y = \log_a f(x)$ fonksiyonunun tanımlı olması için $a > 0$, $a \neq 1$ ve $f(x) > 0$ olmalıdır.

$x = -6$ ve $x = 4$ için

$\log_2 (x+14) = \log_2 [(x+5)\cdot(x-2)]$ denklemi tanımlıdır.

Buradan $Ç = \{-6, 4\}$ bulunur.

II. $f(x) > 0$ olmak üzere $\log_a f(x) = b$ denkleminin çözüm kümesi bulunurken

- Logaritma fonksiyonu yalnız bırakılır.
- Denklem üstel denkleme dönüştürülür.
- Denklem çözülerek çözüm kümesini $f(x) > 0$ yapan çözümler alınır.

Örneğin $\log_2 (x+1) = 6$ denklemi üstel biçimde yazılırsa

$x + 1 = 2^6$

$x = 63$ olur.

Bu değer

$x + 1 > 0$

$x > -1$

koşulunu sağladığından $Ç = \{63\}$ bulunur.

ÖRNEK 7

Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $\log((x+2)(x-1)) = 1$

b) $\log_2 (x+5) - \log_2 (x+1) = \log_2 (x+2) - \log_2 x$

ÇÖZÜM

a) $\log[(x+2)(x-1)]=1$

$\log[(x+2)(x-1)]=\log 10$

$(x+2)(x-1)=10$

$x^2+x-2-10=0$

$x^2+x-12=0$

$(x+4)(x-3)=0$

$x=-4$ veya $x=3$ bulunur.

$x=-4$ için $(-4+2)(-4-1)>0$ olur.

$x=3$ için $(3+2)(3-1)>0$ olur.

O hâlde $Ç=\{-4,\ 3\}$ olur.

b) $\log_2(x+5)-\log_2(x+1)=\log_2(x+2)-\log_2 x$

$$\log_2\frac{x+5}{x+1}=\log_2\frac{x+2}{x}$$

$$x^2+5x=x^2+3x+2$$

$$2x=2$$

$x=1$ bulunur.

$x=1$ için $\log_2(1+5)-\log_2(1+1)=\log_2(1+2)-\log_2 1$ eşitlik sağlandığından $Ç=\{1\}$ olur.

ÖRNEK 8

$\log_3(6+\log_3(5x+2))=2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\log_3(6+\log_3(5x+2))=2$

$6+\log_3(5x+2)=3^2$

$\log_3(5x+2)=3$

$5x+2=3^3$

$5x=25 \quad \Rightarrow \quad x=5$ bulunur.

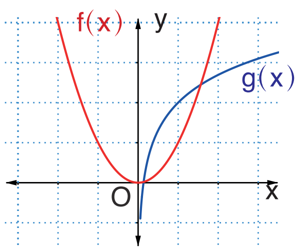
Buradan $x=5$ için $\log_3(6+\log_3(5\cdot 5+2))=2$ eşitlik sağlandığından $Ç=\{5\}$ olur.

ÖRNEK 9

$x^2=\ln x+2$ nin kaç farklı gerçek kökü vardır?

ÇÖZÜM

$f(x)=x^2$ ve $g(x)=\ln x+2$ fonksiyonlarının grafiği çizilirse bu grafiklerin iki farklı noktada kesiştiği görülür. Dolayısıyla $x^2=\ln x+2$ denkleminin iki farklı gerçek kökü vardır.



ÖRNEK 10

$\log_3(x+1)+4\cdot\log_{(x+1)}3=5$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\log_3(x+1)=a \Rightarrow \log_{(x+1)}3=\frac{1}{a}$ olur.

$$a+\frac{4}{a}=5$$
$$\frac{a^2+4}{a}=5$$
$$a^2-5a+4=0$$
$$(a-4)(a-1)=0$$

$a=4$ veya $a=1$ bulunur.

$\log_3(x+1)=4$ veya $\log_3(x+1)=1$

$x+1=3^4$ $\quad$ $x+1=3^1$

$x=80$ $\quad$ $x=2$ olur.

Buradan $Ç=\{80,\ 2\}$ olur.

ÖRNEK 11

$\log_{(x-2)}(6x-17)=2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\log_{(x-2)}(6x-17)=2$$
$$6x-17=(x-2)^2=x^2-4x+4$$
$$x^2-10x+21=0$$
$$(x-3)(x-7)=0 \text{ olur.}$$

Buradan $x=3$ veya $x=7$ bulunur.

$y=\log_a f(x)$ logaritma fonksiyonun tanımlı olması için

$a>0,\ a\neq 1$ ve $f(x)>0$ olmalıdır.

Buradan $x-2>0,\ x-2\neq 1$ ve $6x-17>0$ olmalıdır.

$x=3$ için taban 1 olduğundan $x=3$ değeri çözüm olmaz.

$x=7$ için $x-2>0,\ x-2\neq 1$ ve $6x-17>0$ sağlandığından

$Ç=\{7\}$ bulunur.

ÖRNEK 12

Aşağıdaki fonksiyonların tersinin kuralını bulunuz.

a) $f:(2,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$

$f(x)=2+\log_3(x-2)$

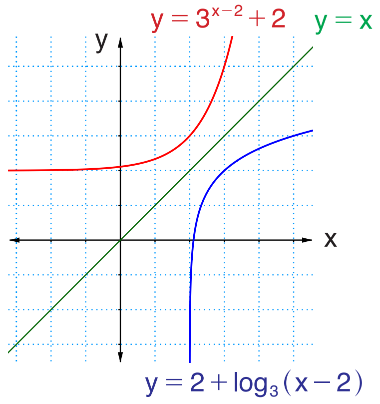
b) $f:\mathbb{R}\rightarrow(-\infty,3)$

$f(x)=3-e^{2x-1}$

ÇÖZÜM

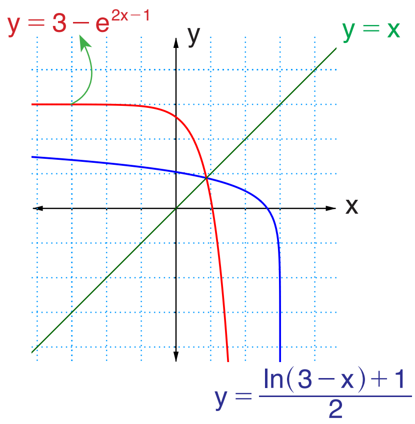
a)

$$y = 2 + \log_3(x-2)$$
$$y - 2 = \log_3(x-2)$$
$$3^{y-2} = x - 2$$
$$3^{y-2} + 2 = x$$
$f^{-1}(x) = 3^{x-2} + 2$ bulunur.



b)

$$y = 3 - e^{2x-1}$$
$$e^{2x-1} = 3 - y$$
$$\ln e^{2x-1} = \ln(3-y)$$
$$2x - 1 = \ln(3-y)$$
$$x = \frac{\ln(3-y)+1}{2}$$
$f^{-1}(x) = \dfrac{\ln(3-x)+1}{2}$ bulunur.



ÖRNEK 13

$\ln(a \cdot b^3) = 7$ ve $\ln(a^2 \cdot b) = 4$ ise $a \cdot b$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\ln(a \cdot b^3) = \ln a + 3\ln b = 7$

$\ln(a^2 \cdot b) = 2\ln a + \ln b = 4$ olur.

$\ln a = x$ ve $\ln b = y$ olarak alınırsa

$x + 3y = 7$

$2x + y = 4$

denklem sistemi elde edilir.

Buradan

$$\begin{array}{rr} & -2x - 6y = -14 \\ + & 2x + y = 4 \\ \hline & -5y = -10 \end{array}$$

$y = 2$ ve $x = 1$ bulunur.

$x = 1$ için $\ln a = 1 \Rightarrow a = e^1$

$y = 2$ için $\ln b = 2 \Rightarrow b = e^2$ olur.

$a \cdot b = e \cdot e^2 = e^3$ elde edilir.

ALIŞTIRMALAR

1. **Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.**

   a) $(\log_2 x)^2 - \log_2(x^2) - 8 = 0$

   b) $5^{\log_2 x} + 25^{\log_2 \sqrt{x}} + x^{\log_2 5} = 15$

   c) $3x - 6 = 3^{2-\log_3 x}$

   ç) $\log_3 x + 2 \cdot \log_x 3 = 3$

   d) $\log(\log x) + \log x = 2 + \log 2$

2. **Aşağıdaki fonksiyonların tersinin kuralını bulunuz.**

   a) $f:(1, +\infty) \to \mathbb{R}$
   $f(x) = 3 - 2\log_5(x-1)$

   b) $g: \mathbb{R} \to (5, +\infty)$
   $g(x) = e^{3x-1} + 5$

3. **Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerinin elaman sayılarını fonksiyonların grafiklerinden yararlanarak bulunuz.**

   a) $\ln x = \cos x$

   b) $e^x = \ln x$

   c) $2^x = x^3 - 1$

   ç) $\sin x - e^x - 1 = 0$

4. $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ için
   $x \cdot y \cdot z = 10^5$ ve
   $(\log x)(\log(y \cdot z)) + (\log y)(\log z) = 9$
   ise $\sqrt{(\log x)^2 + (\log y)^2 + (\log z)^2}$ **değerini bulunuz.**

5. $f(x) = 2^{x+1}$ ve $g(x) = \log_2(3x+1)$ **ise** $(g^{-1} o f^{-1})(x)$ **fonksiyonunu bulunuz.**

6. $f(\log_x 3) = x^3 + 1$ ise $f(5)$ **değerini bulunuz.**

7. $2\log_9 x + 3^{\log_3 y} = 4$ ve $x^y = 27$ ise (x, y) **ikililerini bulunuz.**

8. $\ln x + 2 = 3 \cdot \log_x e$ **denkleminin kökler toplamını bulunuz.**

9. $\sqrt{\log_2 x} - \log_2 \sqrt{x} = 0$ **denkleminin kökler çarpımını bulunuz.**

10. $\ln x - \dfrac{6}{\ln x} = 1$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

11. $2^{\ln x} + 3 \cdot 2^{1-\ln x} = 5$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

12. $\log_2(2^x - 3) + x - 2 = 0$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

13. $\log_2(x + a - 6) + \log_2(x + a) = 4$ denkleminin çözüm kümesi $\{3\}$ **olduğuna göre a değerini bulunuz.**

Üstel Eşitsizlikler

TANIM

Bilinmeyeni üs olarak bulunduran $a > 0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$, $a^{f(x)} < a^{g(x)}$, $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$, $a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$, $a^{f(x)} > b$, $a^{f(x)} < b$,

$a^{f(x)} \geq b$, $a^{f(x)} \leq b$ biçimindeki eşitsizliklere üstel eşitsizlikler denir.

$a > 1$ ve $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ ise $f(x) < g(x)$ olur.

$0 < a < 1$ ve $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ ise $f(x) > g(x)$ elde edilir.

ÖRNEK 14

Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $27^{3x-1} < 9^{5x-2}$ **b)** $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-x} < \left(\frac{2}{3}\right)^{x+8}$ **c)** $e^{x^2-1} \leq e^{x+1}$

ÇÖZÜM

a)

$$27^{3x-1} < 9^{5x-2}$$
$$(3^3)^{3x-1} < (3^2)^{5x-2}$$
$$3^{9x-3} < 3^{10x-4}$$
$$9x-3 < 10x-4$$
$$1 < x$$

$Ç = (1, +\infty)$ bulunur.

b)

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-x} < \left(\frac{2}{3}\right)^{x+8}$$
$$x^2 - x > x + 8$$
$$x^2 - 2x - 8 > 0$$
$$(x-4)(x+2) > 0$$

x	$-\infty$	-2		4	$+\infty$
$x^2-2x-8>0$	$+$	○	$-$	○	$+$
	Çözüm				Çözüm

$Ç = (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$ bulunur.

c)

$$e^{x^2-1} \leq e^{x+1}$$
$$x^2 - 1 \leq x + 1$$
$$x^2 - x - 2 \leq 0$$

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$x^2-x-2 \leq 0$	$+$	●	$-$	●	$+$
			Çözüm		

$Ç = [-1, 2]$ bulunur.

Logaritmik Eşitsizlikler

TANIM

İçerisinde logaritma fonksiyonu bulunan

$a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$ ve $g(x) > 0$ olmak üzere

$\log_a f(x) > \log_a g(x)$, $\log_a f(x) < \log_a g(x)$, $\log_a f(x) \geq \log_a g(x)$,

$\log_a f(x) \leq \log_a g(x)$, $\log_a f(x) > b$, $\log_a f(x) < b$, $\log_a f(x) \geq b$,

$\log_a f(x) \leq b$ biçimindeki eşitsizliklere logaritmik eşitsizlikler denir.

$a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$ ve $g(x) > 0$ olmak üzere
$a > 1$ için

$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Rightarrow f(x) > g(x)$
$\log_a f(x) < \log_a g(x) \Rightarrow f(x) < g(x)$
$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Rightarrow f(x) \geq g(x)$
$\log_a f(x) \leq \log_a g(x) \Rightarrow f(x) \leq g(x)$ olur.

$0 < a < 1$ için

$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Rightarrow f(x) < g(x)$
$\log_a f(x) < \log_a g(x) \Rightarrow f(x) > g(x)$
$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Rightarrow f(x) \leq g(x)$
$\log_a f(x) \leq \log_a g(x) \Rightarrow f(x) \geq g(x)$ olur.

ÖRNEK 15

$\log_2(x^2 - x) < 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\log_2(x^2 - x) < \log_2 2$
$x^2 - x < 2$
$x^2 - x - 2 < 0$ olur.

$\log_2(x^2 - x)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi $x^2 - x > 0$ eşitsizliğini sağlayan x değerlerinin oluşturduğu kümedir.

$x^2 - x - 2 < 0 \;\Rightarrow\; (x-2)(x+1) < 0$
$x^2 - x > 0 \;\Rightarrow\; x(x-1) > 0$

denklem sisteminin ortak çözüm kümesi işaret tablosu yapılarak bulunur.

x	$-\infty$ … -1	-1 … 0	0 … 1	1 … 2	2 … $+\infty$
$x^2 - x - 2 < 0$	+	−	−	−	+
$x^2 - x > 0$	+	+	−	+	+
		Çözüm		Çözüm	

$Ç = (-1, 0) \cup (1, 2)$ bulunur.

ÖRNEK 16

$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-5) \geq \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-5) \geq \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$$
$$x^2-5 \leq x+1$$
$$x^2-x-6 \leq 0$$

$(x-3)(x+2) \leq 0$ elde edilir.

Logaritma fonksiyonlarının tanımlı olması için
$x^2-5 > 0$ ve $x+1 > 0$ olmalıdır. Bu denklemin ortak çözümünü bulmak için işaret tablosu yapılır.

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		-2		-1		$\sqrt{5}$		3		$+\infty$
$(x-3)(x+2) \leq 0$		+		+	●	−		−		−	●	+	
$x^2-5 > 0$		+	○	−		−		−	○	+		+	
$x+1 > 0$		−		−		−	○	+		+		+	
										Çözüm			

$Ç = (\sqrt{5}, 3]$ bulunur.

ÖRNEK 17

Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümesini bulunuz.

a) $1 \leq \log_2(2x-4) < 3$ **b)** $1 \leq \log_{\frac{1}{3}}(x-2) < 2$

ÇÖZÜM

a) $\log_2 2 \leq \log_2(2x-4) < \log_2 2^3$
$$2 \leq 2x-4 < 8$$
$$6 \leq 2x < 12$$
$3 \leq x < 6$ bulunur.

Logaritma fonksiyonu
$2x-4 > 0$
$x > 2$ için tanımlı olduğundan $Ç = [3, 6)$ bulunur.

b) $1 \leq \log_{\frac{1}{3}}(x-2) < 2$

$$\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3} \leq \log_{\frac{1}{3}}(x-2) < \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^2$$
$$\frac{1}{3} \geq x-2 > \left(\frac{1}{3}\right)^2$$
$$\frac{1}{3}+2 \geq x > \frac{1}{9}+2 \Rightarrow \frac{7}{3} \geq x > \frac{19}{9} \text{ bulunur.}$$

Logaritma fonksiyonu $x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$ için tanımlı olduğundan
$Ç = \left(\frac{19}{9}, \frac{7}{3}\right]$ bulunur.

ÖRNEK 18

$\log_2(\log_3(2x-3)) < 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\log_2(\log_3(2x-3)) < 1$$
$$\log_2(\log_3(2x-3)) < \log_2 2$$
$$\log_3(2x-3) < 2$$
$$\log_3(2x-3) < \log_3 3^2$$
$$2x-3 < 9$$
$$2x < 12$$
$x < 6$ bulunur.

Logaritma fonksiyonunun tanımlı olması için

$\log_3(2x-3) > 0$ ve $2x-3>0$ olmalıdır.

$\log_3(2x-3) > 0$ ve $2x-3>0$

$\log_3(2x-3) > \log_3 1$ $\qquad$ $2x > 3$

$2x-3>1$ $\qquad$ $x > \frac{3}{2}$ olur.

$2x > 4$

$x > 2$

$x<6$, $x>2$ ve $x > \frac{3}{2}$ eşitsizliklerinin ortak çözümünden

$Ç = (2, 6)$ bulunur.

ÖRNEK 19

Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümesini bulunuz.

a) $e^{3x} < 2$ **b)** $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{3}$ **c)** $4^x - 2^{x+1} - 15 > 0$

ÇÖZÜM

a)
$$e^{3x} < 2$$
$$\ln e^{3x} < \ln 2$$
$$3x < \ln 2$$
$x < \frac{\ln 2}{3}$ olur.

Her iki tarafın e tabanına göre logaritması alınır.

Buradan $Ç = \left(-\infty, \frac{\ln 2}{3}\right)$ bulunur.

b)
$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{3}$$
$$\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^x > \log_2\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$\log_2 2^{-x} > \log_2 3^{-1}$$
$$-x > -\log_2 3$$
$x < \log_2 3$ olur.

Her iki tarafın 2 tabanına göre logaritması alınır.

Buradan $Ç = (-\infty, \log_2 3)$ bulunur.

c) $4^x - 2^{x+1} - 15 > 0$

$2^{2x} - 2.2^x - 15 > 0 \qquad 2^x = t$ olsun.

$t^2 - 2t - 15 > 0$

$(t-5)(t+3) > 0$

x	$-\infty$	-3		5		$+\infty$
$(t-5)(t+3) > 0$	$+$	○	$-$	○	$+$	
	Çözüm				Çözüm	

$t < -3$ veya $t > 5$ bulunur.

$2^x < -3 \Rightarrow Ç_1 = \varnothing$ veya $2^x > 5 \Rightarrow \quad \log_2 2^x > \log_2 5$

$x \cdot \log_2 2 > \log_2 5$

$x > \log_2 5$

$Ç_2 = (\log_2 5, \infty)$

$Ç = Ç_1 \cup Ç_2 = (\log_2 5, \infty)$ bulunur.

ÖRNEK 20

$\log_2(x-2) > \frac{2}{3}x - 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesini grafiksel çözüm yaparak bulunuz.

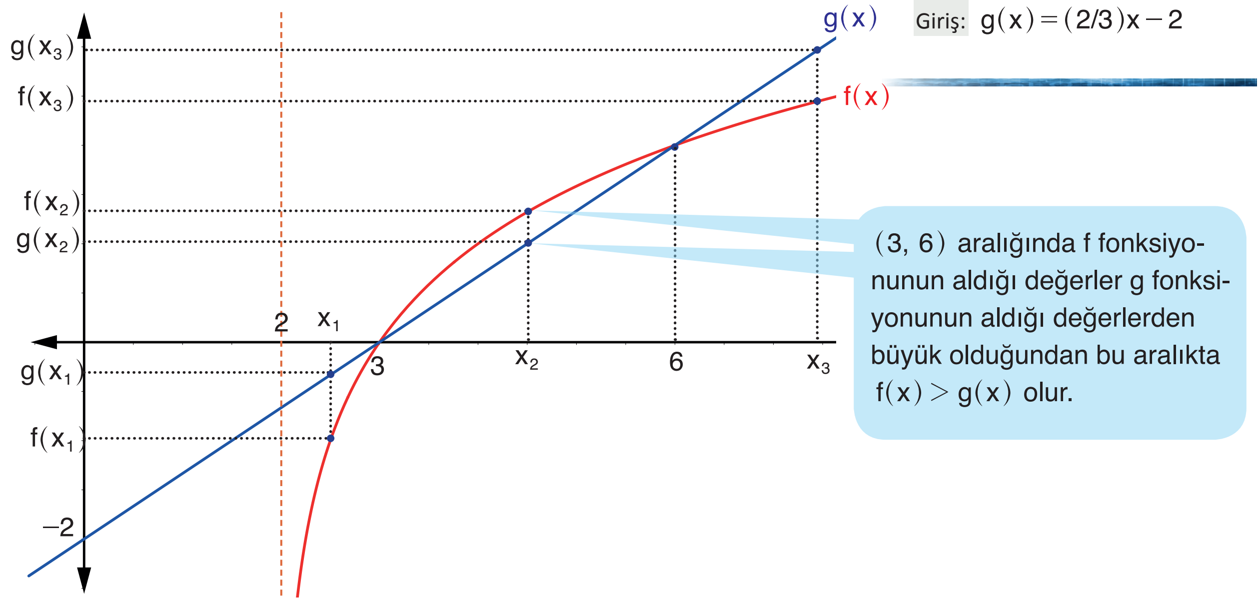
ÇÖZÜM

$f(x) = \log_2(x-2)$ ve $g(x) = \frac{2}{3}x - 2$ fonksiyonlarının grafikleri aynı analitik düzlemde GeoGebra programında çizilirse

GeoGebra

Giriş: $f(x) = \log(2, x-2)$

Giriş: $g(x) = (2/3)x - 2$



olur. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları aldıkları değerlere göre karşılaştırılırsa

2	3	6
$f(x) < g(x)$	$f(x) > g(x)$	$f(x) < g(x)$
	Çözüm	

$Ç = (3, 6)$ bulunur.

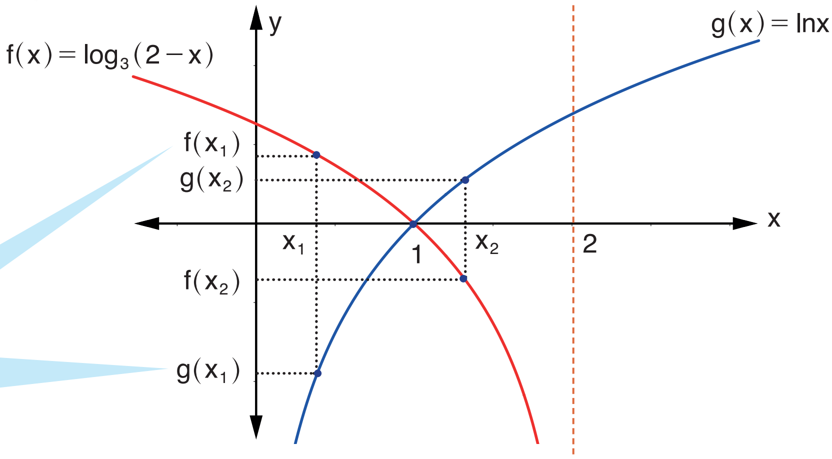
ÖRNEK 21

$\log_3(2-x) \geq \ln x$ eşitsizliğinin çözüm kümesini ve fonksiyonların grafiğini GeoGebra programında çizerek bulunuz.

GeoGebra

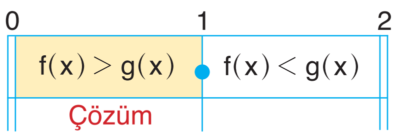
Giriş: $f(x) = \log(3, 2-x)$
Giriş: $g(x) = \log(e, x)$

ÇÖZÜM



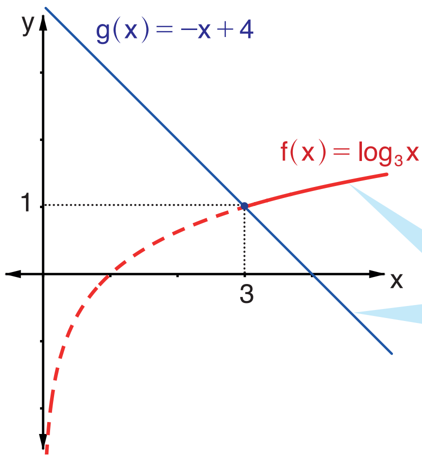
$(0, 1)$ aralığında f fonksiyonunun aldığı değerler g fonksiyonunun aldığı değerlerden büyük olduğundan bu aralıkta $f(x) > g(x)$ olur.

Grafikte $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının aldıkları değerler incelenirse



$Ç = (0, 1]$ olur.

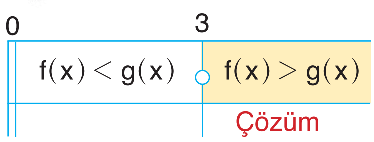
ÖRNEK 22



Yandaki grafikte verilen fonksiyonlara göre çözüm kümesi $Ç = (3, \infty)$ olan eşitsizliği bulunuz.

$(3, \infty)$ aralığında f fonksiyonunun aldığı değerler g fonksiyonunun aldığı değerlerden büyük olduğundan bu aralıkta $f(x) > g(x)$ olur.

ÇÖZÜM



Buradan eşitsizlik $\log_3 x > -x + 4$ bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1. **Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümesini bulunuz.**

a) $e^{x^2-3x} < e^4$

b) $27^{x-2} < 9^{x+3}$

c) $a^2 < a$ olmak üzere $a^{x+3} < a^{3x-5}$

ç) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^{3x-1} < (\sqrt{2}+1)^{x+3}$

2. **Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümesini bulunuz.**

a) $\log(x^2-4) \leq 5$

b) $\log(x^2-3x) > 1$

c) $\log_{\frac{1}{4}}(x^2-2x+1) < -1$

ç) $\log_5(x+2)+\log_5(4-x) < 1$

3. **Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümesini bulunuz.**

a) $\ln(2x+3) < \ln(x+5)+\ln(x-1)$

b) $\log_{\frac{1}{5}}(x+1) \leq \log_{\frac{1}{5}}(x+5)-\log_{\frac{1}{5}}(x-1)$

4. **Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümesini bulunuz.**

a) $0 \leq \log(x^2+1) < 1$

b) $-4 < \log_{\frac{1}{2}}(x^2-3x-2) < -3$

5. **Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümesini grafiksel çözüm yaparak bulunuz.**

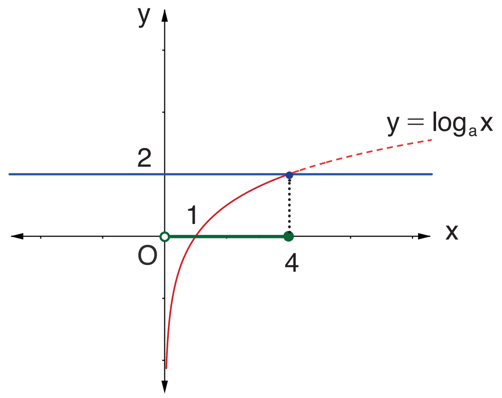
a) $\log_3(x-3) < 1$

b) $\log_{\frac{1}{5}}(x+2) \geq 0$

c) $0 \leq \log_2(x+1) < 3$

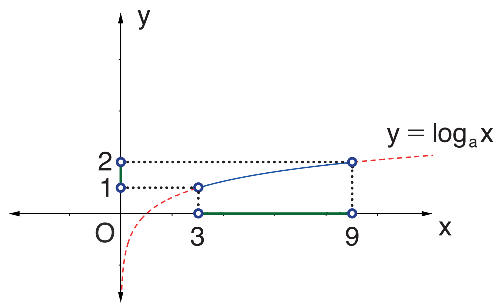
6. **Aşağıda çözüm kümesi verilmiş olan eşitsizlikleri yazınız.**

a)



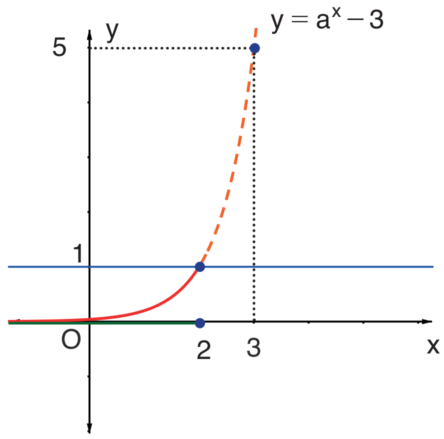
$Ç = (0,\ 4]$

b)



$Ç = (3,\ 9)$

c)



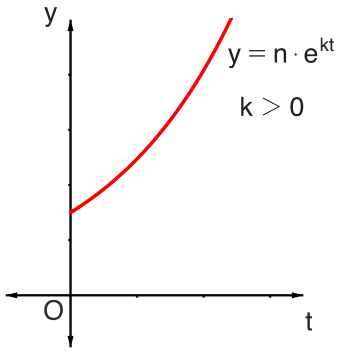
$Ç = (-\infty,\ 2]$

Üstel Fonksiyonlar İle Modelleme

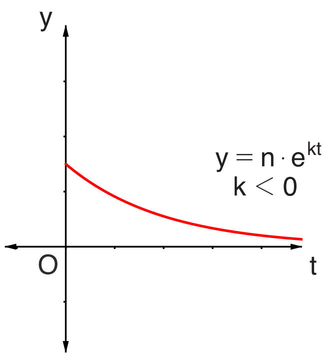
Nüfus artışı, radyoaktif bozunma, ısı yayılımı gibi doğada karşılaşılan pek çok durum üstel fonksiyonlar ile ifade edilebilir.

TANIM

Başlangıç değeri n ve t zamandaki değişim miktarı y ile gösterilmek üzere $y = n \cdot e^{kt}$ bağıntısına üstel değişim bağıntısı denir. Bu bağıntıya $k > 0$ ise üstel büyüme, $k < 0$ ise üstel bozunma denir. k sayısına değişim oranı sabiti denir.



Üstel büyüme



Üstel bozunma

ÖRNEK 23

Bakteri Popülasyonu

Bir biyolog yeni keşfettiği bir bakteri türünü uygun bir büyüme ortamına koyarak gözlemliyor. 100 bakteriyi 8 saat sonra 480 bakteri olarak ölçen bu biyolog, 12 saat sonra bakteri miktarını yaklaşık olarak kaç bulmuştur?

ÇÖZÜM

Başlangıçtaki bakteri sayısı $n = 100$ adet ve $t = 8$ saat sonraki bakteri sayısı $y = 480$ adet olduğuna göre bu değerler $y = ne^{kt}$ üstel değişim bağıntısında yerine yazılırsa

$480 = 100 \cdot e^{k \cdot 8}$

$4,8 = e^{8k}$

$\ln 4,8 = 8k$

$k = \dfrac{\ln 4,8}{8} \cong 0,196$ bulunur.

Buradan büyüme sabitinin yaklaşık olarak 0,196 olduğu görülür.

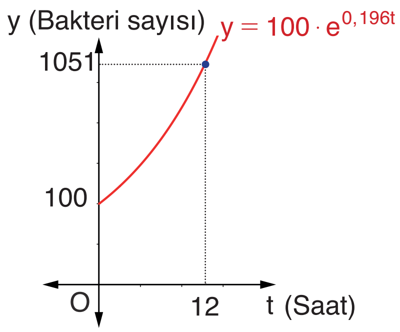
12 saat sonra

$y = n \cdot e^{kt}$

$y = 100 \cdot e^{(0,196) \cdot 12}$

$y \cong 1051$

bakteri bulunur.



Bilimsel Hesap Makinesi

$\dfrac{\ln 4,8}{8} =$ [ln] [4] [.] [8] [=] [÷] [8] [=]

$= 0,1960769897$

Bilimsel Hesap Makinesi

$y = 100 \cdot e^{(0,196) \cdot 12}$

$=$ [1] [0] [0] [x] [e^x] [0] [.] [1] [9] [6] [x] [1] [2] [()] [=]

$= 1050,656...$

GeoGebra

Giriş: $f(x) = 100 \cdot e^{0,196x}$

Giriş: $f(12)$

GeoGebra

ÖRNEK 24

Radyoaktif Bozunma

Çernobil nükleer santralinin 1986 yılında patlaması sonucu 10 kg radyoaktif Cs-137 maddesi atmosfere karışmıştır.
Bu radyoaktif maddenin yarılanma ömrünün 30,15 yıl olduğu bilindiğine göre

a) Kaç yıl sonra Cs-137 nin atmosferde 0,1 kg kalması beklenir?
b) 50 yıl sonra atmosferdeki Cs-137 miktarı kaç kilogram olur?

ÇÖZÜM

a) Yarılanma ömrünün 30,15 yıl olması 100 birimlik bir radyoaktif maddenin 50 birime düşmesi anlamına gelmektedir.

$$y = n \cdot e^{kt}$$
$$50 = 100 \cdot e^{k \cdot 30,15}$$
$$\frac{1}{2} = e^{k \cdot 30,15}$$
$$k = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{30,15} \cong -0,023$$

Bozunma sabiti yaklaşık −0,023 olarak bulunur.
Buradan

$$y = n \cdot e^{-0,023 \cdot t}$$
$$0,1 = 10 \cdot e^{-0,023 \cdot t}$$
$$\frac{0,1}{10} = e^{-0,023 \cdot t}$$
$$\ln(0,01) = -0,023 \cdot t$$
$$t = \frac{\ln(0,01)}{-0,023} \cong 200,22 \text{ olur.}$$

Bu durumda Cs-137 nin atmosferde 0,1 kilogram kalması için yaklaşık 200 yıl geçmesi gerekir.

Bilimsel Hesap Makinesi

$$\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{30,15} =$$ ln 0 . 5 = ÷ 3 0 . 1 5 =

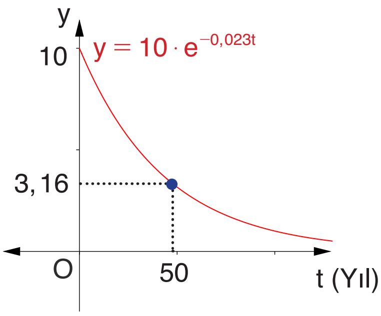
$= -0,0229899562$

Bilimsel Hesap Makinesi

$$\frac{\ln(0,01)}{-(0,023)} =$$ ln 0 . 0 0 0 1 = ÷ ± 0 . 0 2 3 =

$= 200,224790695$

b) $t = 50$ alınırsa 50 yıl sonra
$$y = 10 \cdot e^{-0,023 \cdot 50}$$
$$y \cong 3,16636 \text{ kg}$$
radyoaktif madde atmosferde bulunur.



Cs-137 radyoaktif maddesinin bozunumu

GeoGebra

Giriş: $f(x) = 10 \cdot e^{-0,023t}$
Giriş: $f(50)$

ÖRNEK 25

Karbon-14 Testi

Antik eserlerin veya fosillerin yaşlarını bulmak için karbon-14 testi yapılır. Karbon-14 bozunumu, radyoaktif bozunum gibi üstel bir fonksiyon kullanılarak hesaplanır. Karbon-14 ün yarılanma ömrü yaklaşık 5715 yıldır.

$$y = n \cdot e^{k \cdot 5715}$$

$$\frac{n}{2} = n \cdot e^{k \cdot 5715}$$

n mg karbon-14 5715 yıl sonra $\frac{n}{2}$ olur.

$$\frac{1}{2} = e^{k \cdot 5715}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln e^{k \cdot 5715}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = 5715 \cdot k$$

$$k = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{5715} \cong -0{,}000121 \text{ bulunur.}$$

k değeri karbon-14 ün bozunma sabitidir.

Karbon-14 ün bozunma modeli $y = n \cdot e^{-0{,}000121 \cdot t}$ dir.

Örneğin Mısır'daki piramitlerde bulunan bir mumyanın elbisesinde yapılan teste göre %59 oranında karbon-14 bulunduğu görülmüştür. Buna göre bu mumyanın yaşını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$y = n \cdot e^{-0{,}000121t}$$

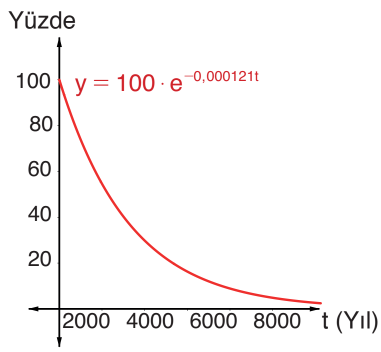
$$59 = 100 \cdot e^{-0{,}000121t}$$

$$\frac{59}{100} = e^{-0{,}000121t}$$

$$\ln(0{,}59) = -0{,}000121 \cdot t$$

$$t = \frac{\ln(0{,}59)}{-0{,}000121} \cong 4360{,}6011$$

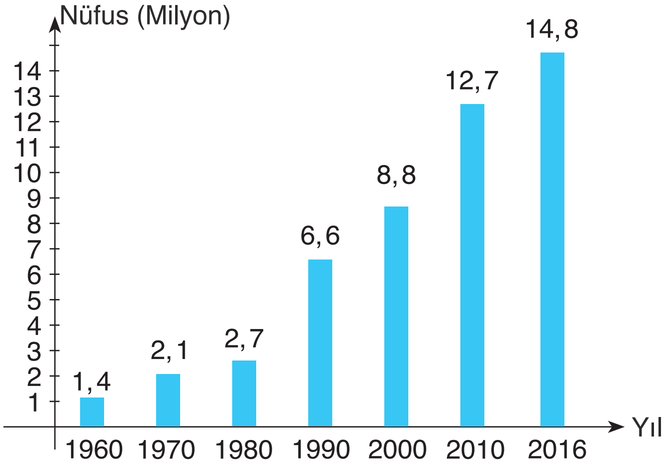
O hâlde bu mumya yaklaşık 4361 yaşındadır.



ÖRNEK 26

Nüfus Artışı

Aşağıdaki grafikte İstanbul'un yıllara göre nüfusu verilmiştir.



Buna göre üstel bir model oluşturup 2023 yılında İstanbul nüfusunun tahminî olarak kaç olacağını hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$$y = n \cdot e^{kt}$$

$$y = 1,4 \cdot e^{kt}$$

$$t = 2016 - 1960 = 56$$

$$14,8 = 1,4 \cdot e^{k \cdot 56}$$

$$\ln\left(\frac{14,8}{1,4}\right) = \ln e^{k \cdot 56}$$

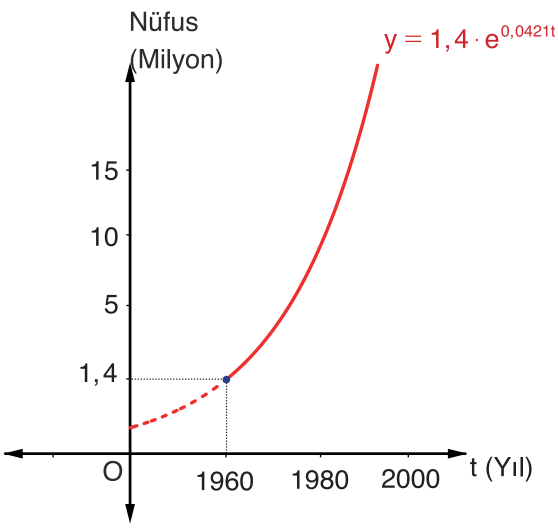
$$\ln\frac{14,8}{1,4} = k \cdot 56$$

$$k = \frac{\ln\frac{14,8}{1,4}}{56} \cong 0,0421$$

$y = 1,4 \cdot e^{0,0421 \cdot t}$ bağıntısı elde edilir. Buna göre 2023 yılında İstanbul nüfusunun

$t = 2023 - 1960 = 63$

$y = 1,4 \cdot e^{0,0421 \cdot 63} \cong 19,8$ milyon olması beklenir.



ÖRNEK 27

Newton'un Soğuma Yasası

Newton'un soğuma yasasına göre maddeler çevrelerindeki diğer maddelerin sıcaklığına bağlı olarak soğur. Örneğin bir bardak sıcak çay etrafındaki havanın sıcaklığına bağlı olarak soğur. Suya batırılmış sıcak bir demir çubuk, çubuğun etrafındaki suyun sıcaklığına bağlı olarak soğur.

Soğuma yasası $T(t) = T_s + (T_0 - T_s) \cdot e^{-kt}$ denklemi ile modellenir.

$T(t)$: Cismin t anındaki sıcaklığı

T_s : Çevrenin sabit sıcaklığı

T_0 : $t = 0$ anındaki cismin sıcaklığı

k : Soğuma sabiti

Örneğin sıcaklığı $24\,^\circ C$ olan bir odada sıcaklığı $84\,^\circ C$ olan bir kâse çorba 10 dakikada $64\,^\circ C$ sıcaklığa düşüyor.

Buna göre

a) Çorbanın sıcaklığının $84\,^\circ C$ tan $34\,^\circ C$ a düşmesi için ne kadar süre geçmesi gerekir?

b) Çorba kâsesi odada bırakılmak yerine sıcaklığı $-10\,^\circ C$ olan bir dondurucuya bırakılırsa çorbanın sıcaklığının $84\,^\circ C$ tan $34\,^\circ C$ a düşmesi için ne kadar süre geçmesi gerektiğini bulunuz.

ÇÖZÜM

a) T_s : Çevrenin sabit sıcaklığı

$T_s = 24\,^\circ C$

T_o : Cismin t=0 anındaki sıcaklığı

$T_o = 84\,^\circ C$

$$T(t) = 24 + (84 - 24) \cdot e^{-kt}$$

$$T(10) = 24 + 60 \cdot e^{-10k}$$

$$64 = 24 + 60 \cdot e^{-10k}$$

$$\frac{40}{60} = e^{-10k}$$

$$\ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln e^{-10k}$$

$$\ln\frac{2}{3} = -10k \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\ln\frac{2}{3}}{-10} \cong 0{,}0405 \text{ bulunur.}$$

Buradan

$$T(t) = 24 + 60 \cdot e^{-0{,}0405 \cdot t}$$

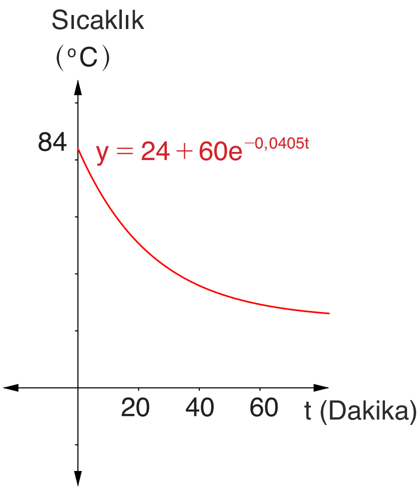
$$34 = 24 + 60 \cdot e^{-0{,}0405 \cdot t}$$

$$\frac{1}{6} = e^{-0{,}0405t}$$

$$\ln\left(\frac{1}{6}\right) = -0{,}0405t$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{1}{6}\right)}{-0{,}0405} \cong 44{,}24 \text{ dakika olarak bulunur.}$$

Buradan çorbanın sıcaklığının $34\,^\circ C$ düşmesi için yaklaşık olarak 44,24 dakika geçmesi gerekir.



b) $T(t)=T_s+(T_o-T_s)\cdot e^{-0,0405t}$

$34=-10+(84-(-10))e^{-0,0405t}$

$44=94e^{-0,0405t}$

$\ln\left(\frac{44}{94}\right)=\ln e^{-0,0405t}$

$\ln\left(\frac{44}{94}\right)=-0,0405t$

$t=\dfrac{\ln\left(\frac{44}{94}\right)}{-0,0405}\cong 18,7$ bulunur.

Buradan çorbanın sıcaklığının $84\,°C$ tan $34\,°C$ a düşmesi için 18,7 dakika geçmesi gerekir.

ÖRNEK 28

Bileşik Faiz

Üstel fonksiyonların gerçek hayattaki en güncel uygulamalarından biri de bileşik faizdir.
Belirlenmiş süreye dek birikmiş faizlerin anaparaya eklenmesiyle elde edilen toplam üstünden ödenen faize bileşik faiz denir ve $A(t)$ ile gösterilir. Bileşik faiz $A(t)=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ şeklinde modellenir.

P : Anapara
r : Yıllık faiz oranı
n : Dönem sayısı
t : Yıl sayısı

1000 TL %10 faiz oranı ile 3 yıllığına bankaya yatırılıyor. Buna göre 1000 TL ye yıllık, aylık ve günlük faiz uygulandığında bu paranın 3 yılın sonunda ulaştığı değerleri bulunuz.

ÇÖZÜM

$P=1000,\ r=0,1$ ve $t=3$ olduğuna göre

Yıllık : $A(3)=1000\cdot\left(1+\frac{0,1}{1}\right)^{1\cdot 3}=1331$ TL,

Aylık : $A(3)=1000\cdot\left(1+\frac{0,1}{12}\right)^{12\cdot 3}\cong 1340$ TL,

Günlük : $A(3)=1000\cdot\left(1+\frac{0,1}{365}\right)^{365\cdot 3}\cong 1350$ TL olur.

Faizde bulunan anaparanın faizi ile her an birleştiği faize sürekli bileşik faiz denir.

Sürekli bileşik faiz $A(t)=A\cdot e^{r\cdot t}$ biçiminde modellenir.

A : Anapara
r : Faiz oranı
t : Zaman (Yıl)

Buna göre 1000 TL sürekli bileşik faiz ve %10 faiz oranı ile 3 yıllığına bankaya yatırılırsa 3 yılın sonunda toplam para ne kadar olur?

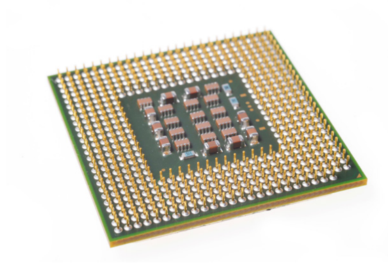
$A(t)=A\cdot e^{r\cdot t}$

$A(3)=1000\cdot e^{0,1\cdot 3}$

$\cong 1350$ TL bulunur.

ÖRNEK 29

Moore Yasası



Moore yasası, bir bilgisayar şirketinin kurucusu olan Gordon Earle Moore (Gordın Örl Mor) tarafından 1965 yılında yayımlanan makaledeki yasadır.

Moore'a göre bir bilgisayar işlemcisi üzerindeki transistör sayısı her iki yılda bir ikiye katlanır.

Bu yasa $Q(t) = Q_o \cdot e^{kt}$ biçiminde modellenir.
Q_o : Başlangıçtaki transistör sayısı
$Q(t)$: t yılındaki transistör sayısı
Her iki yılda transistör sayısı 2 ye katlandığından

$$Q(2) = 2Q_o = Q_o \cdot e^{2k}$$
$$2 = e^{2k}$$
$$\ln 2 = \ln e^{2k}$$
$$\ln 2 = 2k$$
$$k = \frac{\ln 2}{2} \text{ bulunur.}$$

$$Q(t) = Q_o e^{\frac{\ln 2}{2} \cdot t}$$
$$Q(t) = Q_o [e^{\ln 2}]^{\frac{t}{2}}$$
$$Q(t) = Q_o 2^{\frac{t}{2}} \text{ bulunur.}$$

Buna göre 1980 yılında bir bilgisayar işlemcisinde 29 000 transistör varsa 2017 yılında bilgisayar işlemcisinde kaç transistör olması beklenir?

ÇÖZÜM

$$Q(t) = Q_o 2^{\frac{t}{2}} \qquad t = 2017 - 1980 = 37$$
$$Q(37) = 29000 \cdot 2^{\frac{37}{2}}$$
$$Q(37) \cong 10\,751\,100\,402$$

O hâlde Moore yasasına göre 2017 yılında bir bilgisayar işlemcisinde yaklaşık olarak 10 751 100 402 tane transistör olması beklenir.

1980 yılındaki bir bilgisayar

2018 yılındaki bilgisayarlar

ÖRNEK 30

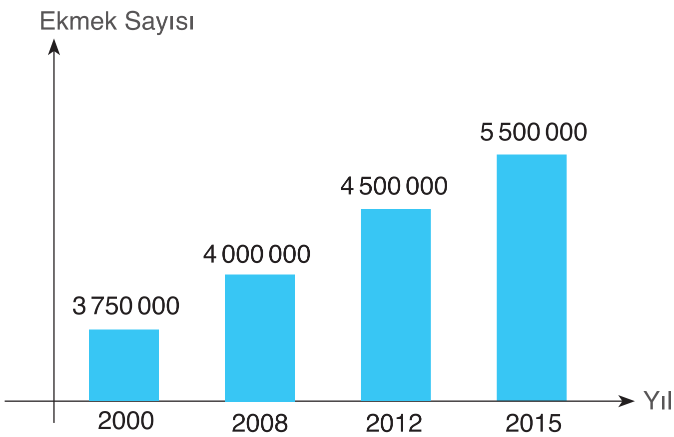
Ekmek İsrafı

Dünyada yıllık 1,3 milyar ton gıdanın israf edildiği tahmin edilmektedir. Dünya Gıda Örgütü verilerine göre israf edilen gıda miktarı Dünya gıda üretiminin üçte birini oluşturmaktadır. Dünyadaki gıda kaybı ve israfının dörtte birinin önlenmesi ile bile yetersiz beslenen 805 milyon insanın gıda ihtiyacı karşılanabilmektedir.

Yandaki tabloda 2000-2015 yılları arasında İstanbul'da israf edilen ekmek sayısı verilmiştir. Bu verilere göre

a) İstanbul'da israf edilen ekmek sayısını modelleyen bir üstel fonksiyon oluşturunuz.

b) 2023 yılında gerekli önlemler alınmaz ve bilinçli bir tüketim toplumu oluşturulmazsa İstanbul'da yaklaşık kaç adet ekmek israfı yapılacağını bulunuz.



ÇÖZÜM

a) $A = A_o \cdot e^{kt}$ denkleminde

$A_o = 3\,750\,000$

$A = 5\,500\,000$

$t = 2015 - 2000 = 15$

olmak üzere

$$5\,500\,000 = 3\,750\,000 \cdot e^{15k}$$

$$\ln\frac{5\,500\,000}{3\,750\,000} = 15k$$

$$k = \frac{1}{15} \cdot \ln\left(\frac{5\,500\,000}{3\,750\,000}\right)$$

$k \cong 0,0255$ bulunur.

Buradan İstanbul'da israf edilen ekmek sayısını gösteren bir model $A = 3\,750\,000 \cdot e^{0,0255t}$ şeklinde oluşturulur.

b) 2023 yılı için

$t = 2023 - 2000$

$= 23$ yıl geçmesi gerekir.

Buradan İstanbul'da

$A = 3\,750\,000 \cdot e^{0,0255t}$

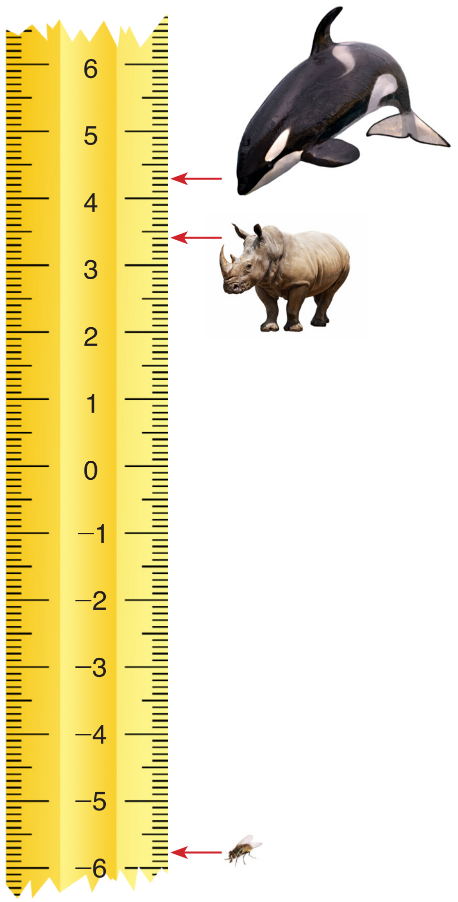
$A = 3\,750\,000 \cdot e^{0,0255 \cdot 23}$

$A = 3\,750\,000 \cdot e^{0,5865}$

$\cong 6\,741320$

adet ekmeğin İstanbul'da israf edileceği görülür.

Logaritmik Ölçekler



Fiziksel değerler çok büyük veya çok küçük olduğunda bu sayılar ile çalışmak yerine bu sayıların logaritmaları ile çalışmak işlem kolaylığı sağlamaktadır. Örneğin yandaki tabloda üç canlının ağırlıkları verilmiştir. Bu ağırlıkları grafiksel olarak karşılaştırmak zordur. Ancak bu sayıların logaritmalarını alarak ölçek üzerinde karşılaştırmak daha kolaydır.

Hayvan	w (kg)	logw
Sinek	0,0000013	$-5,8$
Gergedan	3000	3,4
Balina	23 000	4,3

Depremlerin büyüklüğünü ölçen Richter ölçeği, asitliği ölçen pH ölçeği, sesin şiddetini ölçen desibel ölçeği gibi pek çok ölçek kullanılır.

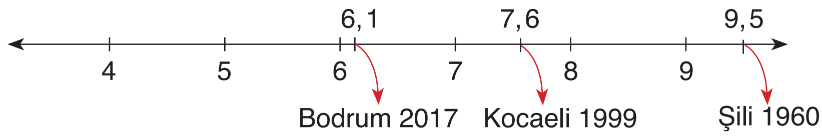
ÖRNEK 31

Richter Ölçeği

1935 yılında Charles Richter (Çarls Rikdır) bir depremin büyüklüğünü ölçmek için logaritmayı kullanarak kendi adıyla anılan aşağıdaki ölçeği geliştirdi.

$$R = \log\frac{I}{I_o}$$

R : Richter ölçeği
I : Depremin şiddeti
I_o : Depremin 0 seviyesindeki şiddeti
Richter ölçeğine göre depremlerin şiddeti karşılaştırılabilir.



Buna göre Richter ölçeğine göre verilen depremleri karşılaştırınız.

ÇÖZÜM

$$R = \log\frac{I}{I_o}$$

$6,1 = \log\frac{I}{I_o}$	$7,6 = \log\frac{I}{I_o}$	$9,5 = \log\frac{I}{I_o}$
$10^{6,1} = \frac{I}{I_o}$	$10^{7,6} = \frac{I}{I_o}$	$10^{9,5} = \frac{I}{I_o}$
$I_{Bodrum} = I_o \cdot 10^{6,1}$	$I_{Kocaeli} = I_o \cdot 10^{7,6}$	$I_{Sili} = I_o \cdot 10^{9,5}$ bulunur.

Buradan

$$\frac{I_{Kocaeli}}{I_{Bodrum}} = \frac{I_o \cdot 10^{7,6}}{I_o \cdot 10^{6,1}} = 10^{1,5} \cong 32 \text{ olur.}$$

O hâlde Bodrum ilçesinde hissedilen sarsıntının 32 katı Kocaeli ilinde hissedilmiştir.

$$\frac{I_{Sili}}{I_{Kocaeli}} = \frac{10^{9,5}}{10^{7,6}} = 10^{1,9} \cong 79,4$$

Buradan Kocaeli ilinde hissedilen depremin yaklaşık 79 katının Şili'de hissedildiği görülür.

ÖRNEK 32

Desibel Ölçeği

İnsan kulağı belirli bir frekans aralığındaki sesleri duyabilmektedir. Duyulabilen en yüksek sesin şiddeti en düşük sesin şiddetinin bir milyon katıdır. Bu şiddeti ölçmek için desibel ölçeği kullanılır.

$B = 10 \cdot \log \frac{I}{I_o}$

B : Ses düzeyi (Desibel)
I : Ses şiddeti
$I_o = 10^{-12}$ W/m^2

Bir jet motorunun 100 W/m^2 olarak ölçülen ses şiddetini desibel (dB) ölçeği türünden bulunuz.

ÇÖZÜM

$B = 10 \cdot \log \frac{100}{10^{-12}}$

$= 10 \cdot \log 10^{14} = 140$ dB bulunur.

ÖRNEK 33

Ses düzeyi 80 dB olarak ölçülen yoğun trafik gürültüsünün şiddeti kaç W/m^2 dir?

ÇÖZÜM

$80 = 10 \cdot \log \frac{I}{10^{-12}}$

$8 = \log I - \log 10^{-12}$

$8 = \log I + 12$

$-4 = \log I$

$I = 10^{-4}$ W/m^2 bulunur.

ÖRNEK 34

PH Değeri

Bir sulu çözeltideki H^+ iyonunun konsantrasyonlarını ifade eden bir ölçektir.1909 yılında Danimarkalı Kimyager Soren Pader Lavritz Sorensaon (Sorın Pedır Lavritz Sorensoen) tarafından tanımlanmıştır.

$pH = -\log[H^+]$

H^+ : 1 litredeki hidrojen iyonuna (mol/lt)

pH = 7 ise nötr, pH < 7 ise asidik, pH > 7 ise bazik denir.

İnsan kanındaki hidrojen iyonu $[H^+] = 3,16 \cdot 10^{-8}$ mol/L ise insan kanının pH değerini bulunuz. İnsan kanı asidik mi yoksa bazik midir?

Madde	pH
Deniz Suyu	8,0 - 8,4
İnsan Kanı	7,3 - 7,5
İnek Sütü	6,4 - 6,8
Ispanak	5,1 - 5,7
Domates	4,1 - 4,4
Portakal	3,0 - 4,0
Elma	2,9 - 3,3
Limon	1,3 - 2,0
Pil Asidi	1,0

ÇÖZÜM

$pH = -\log[H^+] = -\log(3,16 \cdot 10^{-8}) = 7,5$ olur.

O hâlde insan kanı baziktir.

ALIŞTIRMALAR

1. Elverişli bir büyüme ortamına konan bir bakteri türü 6 saatte bir ikiye bölünerek çoğalmaktadır. **Başlangıçta 50 bakteri olduğuna göre 36 saat sonra toplam bakteri sayısı kaç olur?**

2. Polonium-210 $(\text{Po}-210)$ radyoaktif maddesinin yarılanma ömrü yaklaşık 140 gündür.

   a) $\text{Po}-210$ **radyoaktif maddesinin bozunumuna ilişkin üstel bir model oluşturup 50 mg bir radyoaktif maddenin 1 yıl sonra kaç mg olacağını hesaplayınız.**

   b) **300 mg** $\text{Po}-210$ **maddesinin 15 mg kalması için yaklaşık kaç gün geçmesi gerekir?**

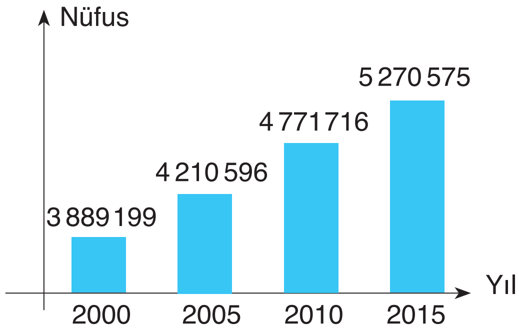
3. Büyüklüğü 6,2 olan bir depremin hemen ardından 5,4 ve 4,1 olan iki artçı deprem meydana gelmiştir. **Bu depremin şiddetinin artçı depremlerin şiddetinden kaç kat fazla olduğunu bulunuz.**

4. Tarih öncesi bir mağarada keşfedilen duvar yazılarına yapılan karbon-14 testinde yazıların %15 oranında karbon içerdiği görülmüştür. **Bu duvar yazıları yaklaşık kaç yaşındadır?**

5. $96\ ^\circ\text{C}$ ta katı olarak pişirilmiş bir yumurta $16\ ^\circ\text{C}$ su bulunan bir kaba koyuluyor. Beş dakika sonra yumurtanın sıcaklığının $36\ ^\circ\text{C}$ olduğu görülüyor. **Suyun fark edilir şekilde ısınmadığı kabul edilirse yumurtanın sıcaklığının** $20\ ^\circ\text{C}$ **a inmesi için ne kadar zaman geçmesi gerekir?**

6. **%12 faiz oranı ve sürekli bileşik faizle yılın sonunda hesabında 1000 TL olmasını isteyen bir kişinin bankaya kaç TL yatırması gerekir?**

7. Aşağıdaki tabloda TÜİK (Türkiye İstatistik Kurumu) verilerine göre Ankara ilinin nüfusu verilmiştir.



   Bu tabloya göre

   a) **2000-2015 yıllarına ait üstel bir model oluşturunuz.**

   b) **2023 yılında Ankara'nın nüfusunun kaç olması beklenir?**

8. Bir matkabın sesi 130 dB olarak belirlenmiştir. **Bir fısıltı 30 dB olduğuna göre matkabın ses şiddeti fısıltının ses şiddetinin kaç katıdır?**

9. 1980 yılında bir bilgisayar işlemcisinde bulunan transistör sayısı 29 000 idi. **Moore yasasına göre bir işlemcide bulunan transistör sayısı her iki yılda bir iki katına çıktığına göre 2030 yılında bir bilgisayar işlemcisinde kaç tane transistör olması beklenir?**

10. **Portakalın pH değeri 4,0 ise içindeki** H^+ **iyonu kaç mol/lt dir?**

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 1

A) Aşağıda boş bırakılan yerleri uygun biçimde doldurunuz.

1.

Fonksiyon	En Geniş Tanım Kümesi	Fonksiyonunun Tersi	Fonksiyonun Tersinin Tanım Kümesi
$f(x)=1+\log_3(x^2-4)$			
$f(x)=4+\log_{\frac{1}{5}}(2x+3)$			
$f(x)=3^{x+1}-1$			
$f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2}+3$			

B) Aşağıda numaralandırılmış kutucuklarda fonksiyonlar verilmiştir. Buna göre aşağıdaki soruları cevaplandırınız.

2.

1 $f:\mathbb{R}^+\rightarrow\mathbb{R}^+,\ f(x)=x^2$	2 $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^+,\ f(x)=3^x$	3 $f:\mathbb{R}^+\rightarrow\mathbb{R},\ f(x)=-x$
4 $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\ f(x)=3^{x-2}-1$	5 $f:\mathbb{R}^+\rightarrow\mathbb{R}^+,\ f(x)=x^3$	6 $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^+,\ f(x)=e^{-x}+1$
7 $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^+,\ f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^{-x}$	8 $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x}$	9 $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^+,\ f(x)=\left(\frac{1}{\pi}\right)^x$

a) **Üstel fonksiyon olan kutucuklar hangileridir?**

b) **Artan fonksiyon olan kutucuklar hangileridir?**

c) **Hem üstel hem de artan fonksiyon olan kutucuklar hangileridir?**

C) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruları cevaplandırınız.

3. $f(x)=\pi^{x+1}$

$h(x)=(\sqrt{2})^{x-5}$

$g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}$

$k(x)=5^{a^2}$

$m(x)=(-2)^x$

Yukarıda verilen fonksiyonlardan kaç tanesi üstel fonksiyondur.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4. $f(x)=\log_2(x^2+ax+4)$ fonksiyonu $\forall x\in\mathbb{R}$ için tanımlı **olduğuna göre a nın değer aralığı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(0, 2)$ B) $(0, 4)$

C) $(-2, 2)$ D) $(-4, 4)$

E) $(-4, 0)$

5. $f(x)=\sqrt{\log\left(\frac{8-x}{x}\right)}$ **fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?**

A) $[4, \infty)$ B) $(1, 4]$

C) $(0, 4]$ D) $(0, 2)$

E) $(2, 4]$

6. $2<\log a<3$

$-5<\log b<-2$

olduğuna göre $a\cdot b$ **nin alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?**

A) 1 B) 0 C) 9 D) 10 E) 100

7. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ olmak üzere $f(x)=\left(\frac{4}{3}\right)^{x-1}$ ve $g(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$ fonksiyonları veriliyor.

Buna göre

I. Örten fonksiyon
II. Artan fonksiyon
III. Bire bir fonksiyon

olma durumlarından hangisi ya da hangileri her iki fonksiyonun da ortak özelliklerindendir?

A) Yalnız I B) Yalnız II

C) I ve III D) II ve III

E) I, II ve III

8. $\log_2\sqrt{14+2\log_3\sqrt{7+\log 100}}$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9. $f(x)=\log_{(x+1)}\left(\frac{x^2+x-6}{x-4}\right)$ **fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(-3,-1)\cup(2, 4)$

B) $(-1, 2)\cup(4, \infty)$

C) $[(-3,-1)\cup(2, 4)]-\{0\}$

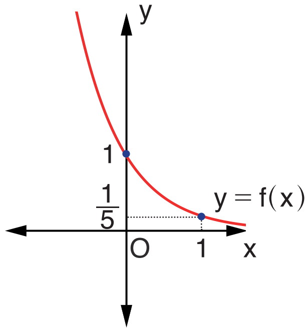
D) $[(-1, 2)\cup(4, \infty)]-\{0\}$

E) $(-1, 2)-\{0\}$

10. $\log_4 27\cdot\log_{\sqrt{3}}5\cdot\log_{125}\frac{1}{64}$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

A) - 6 B) 0 C) 1 D) 3 E) 4

11.



Yukarıdaki şekilde grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $f(x) = 5^{-x}$
B) $f(x) = 5^{x}$
C) $f(x) = (-5)^{x}$
D) $f(x) = 5^{\frac{1}{x}}$
E) $f(x) = \left(-\frac{1}{5}\right)^{x}$

12. $(x - 3\log_2 5)\cdot(x + 2\log_3 5) < 0$ **eşitsizliğini sağlayan x in alabileceği kaç farklı tam sayı değeri vardır?**

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

13. $2^{\ln x} + 2^{2-\ln x} = 5$

eşitliğini sağlayan x değerlerinin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2e^2$
B) $2 + e^2$
C) $1 + e^2$
D) $2 - e^2$
E) $2 + e$

14. $\sqrt{\log_3 x} \leq \log_3 \sqrt{x}$ **eşitsizliğinin çözüm aralığı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $[1, 81]$
B) $(-\infty, 1] \cup [81, \infty)$
C) $[1, \infty)$
D) $\mathbb{R} - (1, 81)$
E) $[81, \infty) \cup \{1\}$

15. $\ln(a^3 \cdot b^2) = 2$ ve $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = 4$

olduğuna göre $a \cdot b$ değerini bulunuz.

A) e B) 1 C) 2 D) 4 E) 2e

16. $f(x) = \log(x^2 - 156)$

$g(x) = 2^{x+1}$

$h(x) = \log_{\sqrt[3]{2}}(\sin x + 1)$

olduğuna göre $(f o g o h)\left(\frac{\pi}{2}\right)$ değerini bulunuz.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 10

17. $x = \log_7 \sqrt{7\sqrt[3]{7\sqrt{7}}}$

$y = \ln \sqrt[3]{e^2} \cdot e^3$ **olduğuna göre $x \cdot y$ değerini bulunuz.**

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{7}{4}$ D) $\frac{9}{4}$ E) $\frac{11}{4}$

18. $\log_{128!} 2 = a$ **olduğuna göre** $\log_2 127!$ **in a türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

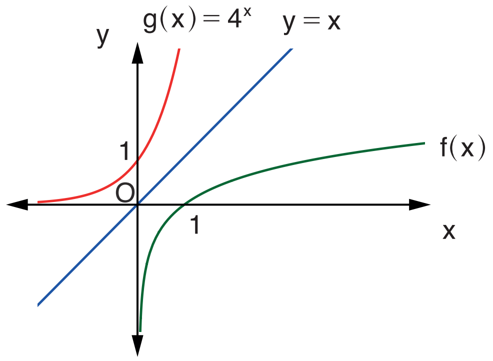
A) $\frac{7a - 1}{a}$
B) $7a - 1$
C) $\frac{a}{6a - 1}$
D) $\frac{6a - 1}{a}$
E) $\frac{1 - 7a}{a}$

19. $\log 2 \cong 0{,}30103$ **olduğuna göre** $\log(0{,}005)$ **ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-2{,}60897$
B) $-1{,}31003$
C) $-3{,}31003$
D) $-2{,}30103$
E) $-3{,}68096$

Ç) Aşağıdaki açık uçlu soruları cevaplandırınız.

20.



Şekilde grafikleri verilen $g(x) = 4^x$ eğrisi ile $f(x)$ eğrisi $y = x$ doğrusuna göre simetriktir. **Buna göre $f(64)$ değerini bulunuz.**

21. $2^{2x} - 11 \cdot 2^x + 24 = 0$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

22. $f(x) = x + \ln x$

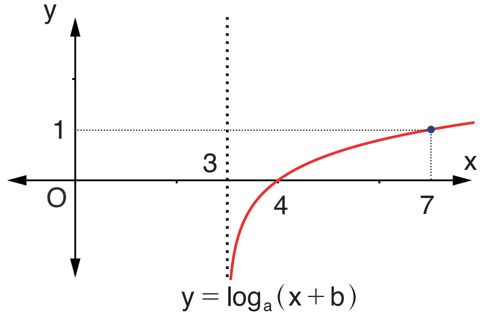
$g(x) = e^{x-1}$

fonksiyonları veriliyor. $(fog^{-1})(1)$ **değerini bulunuz.**

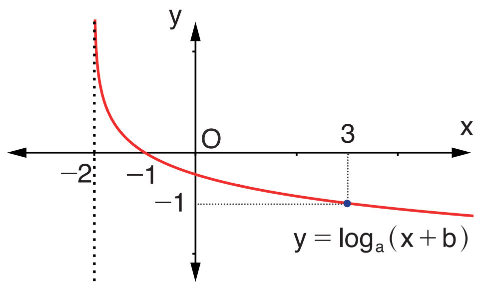
23. $\log_5 2t + \log_5(t-2) = \log_5 80 - 1$ **denkleminin çözüm kümesini bulunuz.**

24. Aşağıda verilen fonksiyon grafiklerindeki a ve b değerlerini bulunuz.

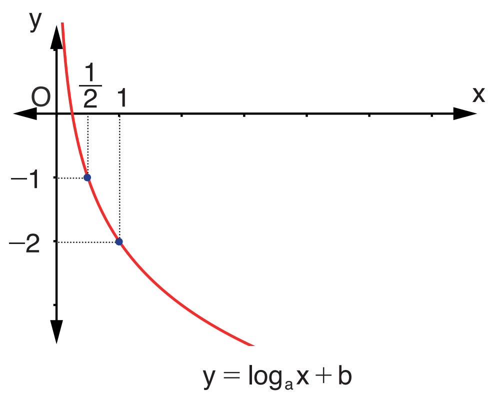
a)



b)



c)



25. $\log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2$

$\log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2$

$\log_5 z + \log_{25} x + \log_{25} y = 2$

denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

26. $2\ln(\sqrt{x})-\ln(1-x)=2$ **olduğuna göre x değerini bulunuz.**

27. $\forall a,b\in\mathbb{R}^{+}$ olmak üzere
$f(a+b)=f(a)\cdot f(b)$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyon için $f(2)=5$ **olduğuna göre** $f(16)$ **değeri kaçtır?**

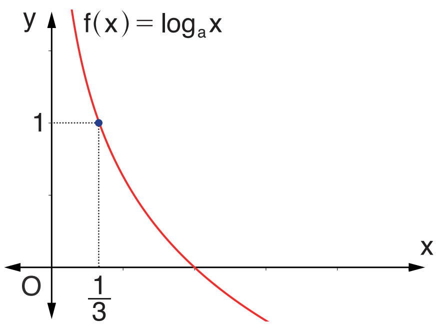
28. $n\in\mathbb{Z}^{+}$ olmak üzere $f(x)=8^{x-1}$ ve
$f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot\ldots\cdot f(n)=8^{2n}$ **olduğuna göre n değerini bulunuz.**

29. $\log_3 x+5^{\log_5 2}=y$ **ve** $x^y=3^8$ **denklemlerini sağlayan** $(x,\ y)$ **ikililerini bulunuz.**

30. Tanımlı olduğu aralıkta
$f(x)=\log_3(x+1)$
$(fog)(x)=\log_9(1-x)$

olduğuna göre $g(x)$ **fonksiyonunu bulunuz.**

31.



Yukarıda $\log_a x$ fonksiyonuna ait grafik verilmiştir. **Buna göre** $f\left(f\left(\frac{1}{27}\right)\right)$ **değerini bulunuz.**

32. $\ln(x\cdot y)=2a$
$\ln\left(\frac{x}{y}\right)=2b$

olduğuna göre x ve y değerini bulunuz.

33. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümesini bulunuz.

a) $\log_2(x^2-6x)-\log_2(1-x)<3$

b) $\ln x+\ln(7-x)>\ln 10$

c) $|1-\log_2(x-2)|\le 3$

ç) $-1\le\log_{\frac{1}{3}}(\log_3(x-1))<1$

34. $\ln 2=a$ ve $\ln 3=b$ **olduğuna göre** $\log_{24}48$ **ifadesinin a ve b türünden ifadesini bulunuz.**

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 1

35. $f(x) = \log(1+x) - \log(1-x)$ ve

$g(x) = \dfrac{x^3+3x}{3x^2+1}$ fonksiyonları veriliyor.

Buna göre $(fog)(x)$ **fonksiyonunu** $f(x)$ **türünden yazınız.**

36. $\log_3 8! = x$

$\log_3 5! + \log_3 4! = y$

olduğuna göre $\log_3 126$ **ifadesinin x ve y türünden değerini bulunuz.**

37. $f(x,y) = \log_3(\sin x) + \log_3(\cos y)$

$g(x,y) = \log_3(\cos x) + \log_3(\sin y)$

fonksiyonları veriliyor.

$h(x,y) = f(x,y) - g(x,y)$ **olduğuna göre**

$h\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{6}\right)$ **değeri kaçtır?**

38. $\ln 2 = x$ ve $\ln 3 = y$ olduğuna göre $\ln(4!)$ **ifadesinin x ve y türünden eşitini bulunuz.**

39. Tanımlı olduğu aralıkta

$f^{-1}(x) = e^{x+2}$

$(gof^{-1})(x) = e^{x-1}$

olduğuna göre $g^{-1}(x)$ **fonksiyonunu bulunuz.**

40. $\log_x y = 2$ **olduğuna göre**

$\log_{x^3} y^4 + \log_{\sqrt{x}} y^2 + \log_{\frac{1}{x}} \sqrt[3]{y}$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

41. $a = \ln\left(\sqrt[5]{e^3} \cdot \sqrt{e}\right)$

$b = \log_{0,\overline{5}} \dfrac{81}{25}$

$c = \log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt[4]{2\sqrt{2}}$

olduğuna göre a, b ve c sayılarını bulunuz.

42. $\log_{(\sqrt{5}-2)}(\sqrt{5}+2) + \log_{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}(\sqrt{3}+\sqrt{2}) + \log_{(\sqrt{2}+1)}(\sqrt{2}-1)$

ifadesinin değerini bulunuz.

43. $1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1+\log_3 2}}$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

44. a, b ve birer pozitif gerçek sayı **olmak üzere**

$\dfrac{1}{\log_{a\cdot b}(a\cdot b\cdot c)} + \dfrac{1}{\log_{b\cdot c}(a\cdot b\cdot c)} + \dfrac{1}{\log_{a\cdot c}(a\cdot b\cdot c)}$

ifadesinin eşitini bulunuz.

D) Aşağıdaki soruları bilimsel hesap makinesinden de faydalanarak verilen bilgilere göre cevaplandırınız.

45. Logaritmik bir ölçek olan Richter ölçeği depremde salınan enerji hakkında bilgi vermektedir ve $\log E_s = 11,8 + 1,5M$ formülüyle hesaplanmaktadır. Bu formülde
E_s : Depremin açığa çıkardığı enerji,
M : Depremin büyüklüğü olarak verilmiştir.

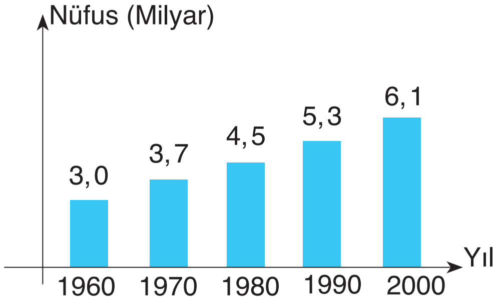
a) Richter ölçeğine göre 7,6 büyüklüğündeki bir depremde ortaya çıkan enerji miktarını bulunuz.

b) Dünyanın en büyük depremlerinden biri olan 1960 yılındaki Şili depreminin büyüklüğü 9,5 tir. Buna göre bu depremde ortaya çıkan enerji miktarını hesaplayınız.

46. Lolan Güzeli olarak anılan bir mumya üzerinde ameliyat izlerine rastlanmıştır. Doğu Türkistan'da bulunan bu mumyanın en büyük özelliği mumyalama tekniğinin Mısır'da uygulanan teknikten farklı olmasıdır. Bu ilk mumya kültürünün Türklerde olduğunu göstermektedir.
n : Başlangıçtaki Karbon-14 oranı,
t : Yıl
olmak üzere Karbon-14 ün bozunma oranı $y = n \cdot e^{-0,000121 \cdot t}$ denklemi ile modellenmiştir. **Buna göre 3500 yıl önce yaşadığı düşünülen Lolan Güzeline ait mumyada bulunan Karbon-14 oranını bulunuz.**

47. $100\,000$ TL parası bulunan bir kişi $200\,000$ TL lik bir ev satın alabilmek için bu parayı sürekli bileşik faizle bankaya yatırmak istiyor. **Bu paranın faiz oranı** %12 **olursa bu kişinin isteğini kaç yıl sonra gerçekleştirebileceğini bulunuz.**

48.



Yukarıdaki grafik Dünya nüfusunun yıllara göre değişimini göstermektedir ve $y = n \cdot e^{kt}$ formülüyle hesaplanmaktadır. Bu formülde
n : katsayı,
t : yıl
olarak verilmiştir. **Buna göre**

a) k sabitini bulunuz.

b) Dünya nüfusunun 2017 yılındaki tahminî değerini hesaplayınız.

49. n : Başlangıçtaki madde miktarı,
t : Saat
olmak üzere bir kimyasal maddenin yarılanma ömrü $y = n \cdot e^{k \cdot t}$ denklemi ile modellenmektedir. Bu kimyasal madde 6 saatlik yarılanma ömrüne sahip **olduğuna göre**

a) 18 saat sonra 40 gramlık numuneden kaç gram kalır?

b) Bu numuneden sadece 2 gram kalması için ne kadar zaman geçmesi gerektiğini bulunuz.

50. Ses düzeyi $B = 10 \cdot \log \frac{I}{I_o}$ ve ses şiddeti ($I_o = 10^{-12}$ watt/m^2) formülü ile hesaplanmaktadır. Bir futbol maçında takımları gol attığında taraftarların çıkardığı ses düzeyi 170 dB olarak ölçülmüştür.
Buna göre

a) Taraftarların ses şiddeti kaç watt/m^2 **dir?**

b) Taraftarların çıkardıkları sesin 70 dB olan normal konuşma sesinin kaç katı olduğunu bulunuz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 1

51. Bir çözeltide pH hesabı yapılırken $pH=-\log[H^+]$ formülü kullanılır. Buradaki $[H^+]$ çözeltideki hidrojen iyonu konsantrasyonunu ifade eder. Benzer şekilde pOH hesabı yapılırken $pOH=-\log[OH^-]$ formülü kullanılır. Buradaki $[OH^-]$ çözeltideki hidroksit iyonu konsantrasyonunu ifade eder ve pH+pOH $=14$ olur.
Bir çözeltinin asidik veya bazik olduğu pH değerine bakılarak tespit edilir. Eğer
$pH<7$ ise asidik,
$pH=7$ ise nötr,
$pH>7$ ise baziktir.
Buna göre

a) **Limonun pH değeri 1,5 ise içindeki $[H^+]$ ve $[OH^-]$ iyonlarının konsantrasyonunu bulunuz.**

b) **Bir içme suyu şişesinin üzerinde yazan pH değeri 7,8 olduğuna göre $[H^+]$ iyonu konsantrasyonu bulunuz.**

c) **Bir çözeltideki $[H^+]$ konsantrasyonunu 0,000016 mol/lt ise bu çözeltinin pH değerini bulunuz. Bu çözelti asidik mi yoksa bazik midir? Yorumlayınız.**

52. $T(t)$: Cismin t anındaki sıcaklığı,
T_s : Çevrenin sabit sıcaklığı,
T_0 : $t=0$ anındaki cismin sıcaklığı,
k : Soğuma sabiti
olmak üzere soğuma yasası
$T(t)=T_s+(T_0-T_s)\cdot e^{-k\cdot t}$ denklemi ile modellenir. $90\,°C$ olarak hazırlanmış bir çay, sıcaklığı $12\,°C$ olan dış ortama soğuması için bırakılıyor. 5 dk sonra çayın sıcaklığının $70°C$ düştüğü görülüyor.
Buna göre

a) **Çayın sıcaklığının $90\,°C$ tan $40\,°C$ a düşmesi için ne kadar süre geçmesi gerekir?**

b) **Dışarıya bırakılan çayın 8 dakika sonraki sıcaklığı kaç $°C$ olur?**

53. Bir şehrin nüfus hesaplaması $P=P_o(1+n)^t$ şeklinde modellenmiştir.
P : Son nüfus
P_o : İlk nüfus
n : Nüfustaki yıllık değişim oranı
$\%12=0,12$
t : Zaman
Buna göre aşağıdaki soruları cevaplandırınız.

a) **2000 yılında 24 650 nüfusa sahip bir ilçenin nüfusunun yıllık ortalama %4 artacağı tahmin ediliyor. Buna göre bu ilçenin 2017 yılındaki tahminî nüfusu kaçtır?**

b) **1975 yılında bir köyde nüfus 5 000 olarak belirlenmiştir. Göç nedeniyle nüfusta yıllık ortalama %8 azalma olduğuna göre 2010 yılında bu köydeki kişi sayısını tahmin ediniz.**

54. n : Başlangıçtaki su tüketim miktarı,
y : Son su tüketim miktarı,
t : Geçen sürre (yıl)
olmak üzere su tüketim miktarını gösteren model $y=n\cdot e^{k\cdot t}$ biçiminde verilmiştir.
Dünya su rezervinin ancak $\%2,5$ i tatlı sulardan oluşmaktadır. Artan nüfusa bağlı olarak da su ihtiyacı ortaya çıkmaktadır. 1950 yılında kişi başına düşen su tüketim miktarı 16 800 m^3 tür. 2000 yılında kişi başına düşen su tüketim miktarı 7 300 m^3 tür. **Bu durumda 2025 yılında kişi başına düşen su tüketim miktarının kaç metreküp olacağını tahmin ediniz.**

DEĞERLENDİRME
Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorular ile ilgili konuları veya faaliyetleri tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.

SAYILAR VE CEBİR

2. DİZİLER

2.1. GERÇEK SAYI DİZİLERİ

Matematikte kullanılan dizi sözcüğü ile günlük hayatta kullanılan dizi sözcüğü birbirinden çok farklı değildir. Nesnelerin veya sayıların belirli bir kurala göre dizilimi, dizi olarak adlandırılır. Yukarıda 15 Temmuz 2016 tarihinde darbe girişimine, halkın kahramanca karşı koyduğu yerlerden biri olan 15 Temmuz Şehitler Köprüsü görülmektedir. Bu köprünün kuleleri arasında kullanılan çelik halatlar, zeminine ikizkenar üçgenler oluşturacak şekilde başka çelik halatlarla bağlanmıştır. Çelik halatlarla oluşturulan taban uzunlukları eşit üçgen dizilimlerinin yükseklikleri, köprünün ortasına doğru azalmakta ve kulelere doğru artmaktadır.

Hazırlık Çalışması

1560 m uzunluğundaki köprüde iki kule arasındaki çelik halat parabol şeklinde olup $f(x)=\frac{1}{6084}(x-780)^2+64$ biçiminde modellenmiştir. İkizkenar üçgenlerin tabanı 10 m olduğuna göre köprünün ortasındaki üçgende kaç m çelik halat kullanılmıştır?

2.1. GERÇEK SAYI DİZİLERİ

Bu Bölümde Neler Öğreneceksiniz?

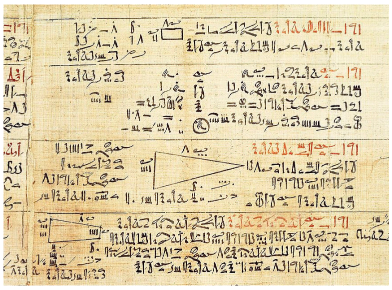
- Dizi, sonlu dizi, sabit dizi ve dizilerin eşitliği kavramları
- Genel terimi veya indirgeme bağıntısı verilen bir sayı dizisinin terimlerini bulma
- Aritmetik ve geometrik dizilerin özellikleri
- Diziler yardımı ile gerçek hayat durumlarında karşılaşılan problemleri çözme

Terimler ve Kavramlar

- Dizi
- Sonlu dizi
- Sabit dizi
- Aritmetik dizi
- Geometrik dizi
- Fibonacci dizisi

Tarım ve ticaretin gelişmesiyle birlikte Mısırlılar ve Sümerler pratik hesap yapabilmek amacıyla sayı dizilişlerini geliştirmişlerdir. Aritmetik ve geometrik dizilerin Mısırlılar tarafından kullanıldığı Ahmes'in yazdığı ve Henry Rhind (Henri Raynd) tarafından bulunan Rhind Papirüsü'ndeki problemlerden anlaşılmaktadır.

Ahmes'in papirüsünden sonra en kapsamlı eser Diophantus' a (Diyofantus) aittir. Bundan başka 6. yüzyılda Çin matematiğinde dizilerdeki gelişmelere en iyi kaynak olan Chang-Ch'iu-chien' in (Çen Sien) "Matematik Sanatı Üzerine 9 Bölüm" adlı eserinde aritmetik dizi ile ilgili problemler mevcuttur.

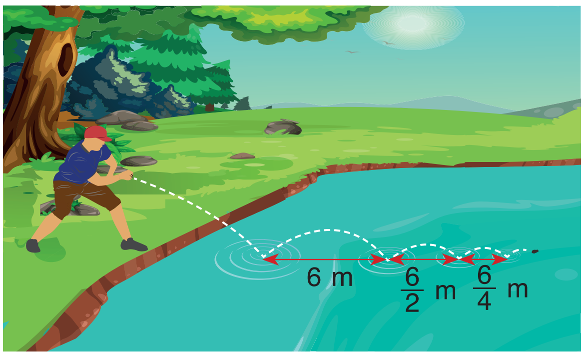


Görsel 2.1: Ahmes'in papirüsü

Gerçek hayatta dizilerin pek çok uygulaması bulunmaktadır. Bir doktorun hastasına ilaçları hangi sıklıkla alması gerektiğini belirtmesi, oyun parkında ilk hızını aldıktan sonra salıncakta sallanan bir çocuğun gidiş ve dönüşündeki hareketi ve belli bir yükseklikten bırakılan esnek bir topun her zıplamasında yüksekliğinin değişimi dizi kavramıyla açıklanabilir.

Dizi Kavramı

Görsel 2.2 de bir çocuğun durgun bir suda sektirdiği taşın su üzerindeki sekme uzunlukları gösterilmiştir.

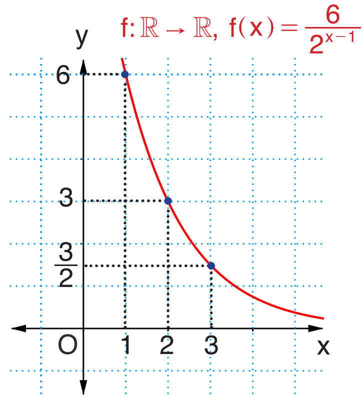


Görsel 2.2

Taş her seferinde bir öncekinin yarısı kadar sekmektedir.

Sekme Sırası	1.	2.	3.	4.	...	n.
Sekme Uzunluğu (m)	6	$\frac{6}{2}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{6}{8}$	...	$\frac{6}{2^{n-1}}$

Tablo 2.1



Örneğin taşın 4. sekmesinin uzunluğu $\frac{6}{2^{4-1}} = \frac{6}{2^3}$ olacaktır. Buradan her sekmenin uzunluğunu veren fonksiyonun $f(x) = \frac{6}{2^{x-1}}$ olduğu görülür.

1. sekme $f(1) = \frac{6}{2^0} = 6$ m

2. sekme $f(2) = \frac{6}{2^1} = 3$ m

3. sekme $f(3) = \frac{6}{2^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ m

4. sekme $f(4) = \frac{6}{2^3} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ m

⋮

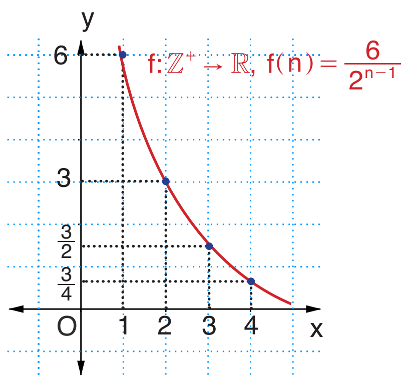
n. sekme $f(n) = \frac{6}{2^{n-1}}$ bulunur.

Bulunan bu değerler grafikte gösterilirse

$f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R},\ f(n) = \frac{6}{2^{n-1}}$

fonksiyonunun grafiği yandaki gibi bulunur.

Dizi, tanım kümesi pozitif tam sayı olan bir fonksiyondur.



TANIM

Pozitif tam sayılar kümesinden gerçek sayılar kümesine tanımlanan her fonksiyona gerçek sayı dizisi veya kısaca dizi denir.

$f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ ve $f(n) = a_n$ olmak üzere $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $f(n) \in \mathbb{R}$ olur.

1. terim $f(1) = a_1$
2. terim $f(2) = a_2$
3. terim $f(3) = a_3$

⋮

n. terim $f(n) = a_n$ şeklinde gösterilir.

n. terim olan a_n terimine dizinin genel terimi, n sayısına dizinin indisi denir. Genel terim dizinin bütün terimlerini üretir. Genel terimi a_n olan dizi (a_n) olarak gösterilir.

Bir a_n dizisi $(a_n)=(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ biçiminde terimleri açık olarak gösterilebilir.

Örneğin $(a_n)=\left(\frac{6}{2^{n-1}}\right)$ dizisi açık olarak yazılırsa

$(a_n)=\left(\frac{6}{1}, \frac{6}{2}, \frac{6}{4}, \frac{6}{8}, ..., \frac{6}{2^{n-1}}\right)$ olur.

I. terim II. terim III. terim IV. terim n. terim

ÖRNEK 1

Aşağıda verilen fonksiyonların $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için bir gerçek sayı dizisi olup olmadığını gösteriniz.

a) $f_1(n)=\frac{n+3}{n+1}$

b) $f_2(n)=\frac{n+4}{n-3}$

c) $f_3(n)=\frac{1}{n^2+1}$

ç) $f_4(n)=\frac{2n-1}{3n-1}$

d) $f_5(n)=\sqrt{n^3-4}$

e) $f_6(n)=\log(n)$

ÇÖZÜM

a) $f_1(n)=\frac{n+3}{n+1}$ fonksiyonunu tanımsız yapan değer $n+1=0 \Rightarrow n=-1$ olur. $-1 \notin \mathbb{Z}^+$ olduğundan f_1 bir gerçek sayı dizisidir.

b) $f_2(n)=\frac{n+4}{n-3}$ fonksiyonunu tanımsız yapan değer $n-3=0 \Rightarrow n=3$ olur. $f_2(3) \notin \mathbb{R}$ olduğundan $f_2(n)$ bir gerçek sayı dizisi değildir.

c) $f_3(n)=\frac{1}{n^2+1}$ fonksiyonunu $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için tanımsız yapan bir değer bulunmadığından $f_3(n)$ bir gerçek sayı dizisidir.

ç) $f_4(n)=\frac{2n-1}{3n-1}$ fonksiyonu $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $f_4(n) \in \mathbb{R}$ olduğundan $f_4(n)$ bir gerçek sayı dizisidir.

d) $f_5(n)=\sqrt{n^3-4}$ fonksiyonunu tanımsız yapan değerler $n^3-4<0$ eşitsizliğini sağlayan değerlerdir. $n=1$ için $f_5(1) \notin \mathbb{R}$ olduğundan $f_5(n)$ gerçek sayı dizisi değildir.

e) $f_6(n)=\log(n)$ fonksiyonu $n>0$ için gerçek sayılar kümesinde tanımlıdır. Buradan $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $f_6(n) \in \mathbb{R}$ olduğundan $f_6(n)$ bir gerçek sayı dizisidir.

ÖRNEK 2

Aşağıdaki dizilerin ilk 5 terimini ve 100. terimini bulunuz.

a) $(a_n)=(3n-1)$

b) $(b_n)=(n^2-1)$

c) $(a_n)=\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)$

ç) $(d_n)=\left(\dfrac{(-1)^n}{3^n}\right)$

d) $(e_n)=\left(\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & n \text{ tek ise}\\ n^2, & n \text{ çift ise}\end{cases}\right)$

e) $(f_n)=(1+2+3+\ldots+n)$

ÇÖZÜM

	n. Terim	İlk 5 Terim n=1, 2, 3, 4, 5	100. Terim n=100
a)	$3n-1$	2, 5, 8, 11, 14	299
b)	n^2-1	0, 3, 8, 15, 24	9999
c)	$\dfrac{n+3}{n+2}$	$\dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{4}, \dfrac{6}{5}, \dfrac{7}{6}, \dfrac{8}{7}$	$\dfrac{103}{102}$
ç)	$\dfrac{(-1)^n}{3^n}$	$-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, -\dfrac{1}{27}, \dfrac{1}{81}, -\dfrac{1}{243}$	$\dfrac{1}{3^{100}}$
d)	$\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & n \text{ tek}\\ n^2, & n \text{ çift}\end{cases}$	$1, 4, \dfrac{1}{3}, 16, \dfrac{1}{5}$	10000
e)	$f(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$	1, 3, 6, 10, 15	5050

$(f_n)=(1+2+3+\ldots+n)$
$=\dfrac{n(n+1)}{2}$

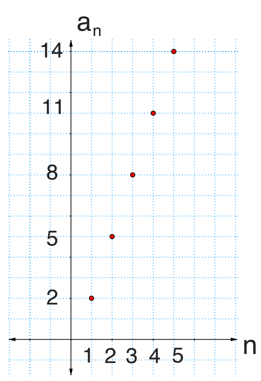
TEKNOLOJİ

$(a_n)=(3n-1)$ ve $(a_n)=\left(\dfrac{(-1)^n}{3^n}\right)$ dizilerinin grafiklerini çizmek için Geogebra programında giriş bölümüne aşağıdaki komutlar yazılır.

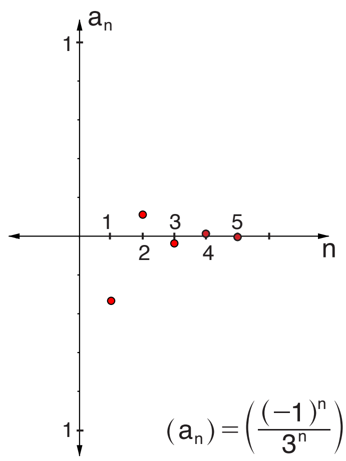
Giriş: Dizi[(n, 3n - 1), n, 1, 5]

Dizi[<ifade>, <değişken>, <başlangıç>, <bitiş>]

Giriş: Dizi[(n, (-1)^n / 3^n), n, 1, 5]



$(a_n)=(3n-1)$



$(a_n)=\left(\dfrac{(-1)^n}{3^n}\right)$

ÖRNEK 3

Aşağıda açık şekilde verilmiş dizilerin genel terimini bulunuz.

a) $(a_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \ldots\right)$

b) $(b_n) = (2, 5, 10, 17, \ldots)$

c) $(c_n) = (-2, 4, -8, 16, -32, \ldots)$

ç) $(d_n) = (1, 5, 2, 5, 3, 5, 4, \ldots)$

ÇÖZÜM

a) (a_n) dizisinin payındaki terimler ardışık tek sayı, paydasındaki terimler ise ardışık çift sayıdır.

Tek sayılar $2n-1$, çift sayılar $2n$ ile gösterilir ise

$(a_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \ldots, \frac{2n-1}{2n}, \ldots\right)$ olur.

Buradan (a_n) dizisinin genel terimi $a_n = \frac{2n-1}{2n}$ bulunur.

b) $(b_n) = (2, 5, 10, 17, \ldots) = (1^2+1, 2^2+1, 3^2+1, 4^2+1, \ldots)$ olduğundan b_n dizisinin genel terimi $b_n = n^2+1$ bulunur.

c) $(c_n) = (-2, 4, -8, 16, -32, \ldots) = (-2^1, 2^2, -2^3, 2^4, -2^5, \ldots)$ olur.

c_n dizisi 2 nin kuvvetleridir ancak dizinin terimleri $(-1)^n$ ile işaret değiştirmektedir.

Buradan c_n dizisinin genel terimi $c_n = (-1)^n \cdot 2^n$ bulunur.

ç) $(d_n) = (1, 5, 2, 5, 3, 5, 4, \ldots)$ dizisinde çift indisli terimler 5 sayısına eşittir. Tek indisli terimler ise $\frac{n+1}{2}$ kuralı ile yazılmıştır.

Buradan d_n dizisinin genel terimi $d_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & n \text{ tek ise} \\ 5, & n \text{ çift ise} \end{cases}$

bulunur.

Sonlu Dizi

$\mathbb{Z}^+$ sonsuz elemanlı olduğundan $f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ biçiminde tanımlanan her fonksiyon sonsuz bir dizidir. Sonsuz dizinin elemanları $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ biçimindedir.

TANIM

$k \in \mathbb{Z}^+$ ve A_k kümeleri $\mathbb{Z}^+$ nın alt kümeleri olmak üzere $A_k = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ kümesinden $\mathbb{R}$ ye tanımlanan her fonksiyona sonlu dizi denir.

$a_n: A_k \to \mathbb{R}$ olmak üzere

a_n sonlu dizisinin elemanları $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$ biçiminde gösterilir.

ÖRNEK 4

$A_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesi veriliyor.

Tanım kümesi A_5 olan ve genel terimi $a_n = \dfrac{n+4}{n+1}$ olarak verilen dizinin terimlerini yazınız.

ÇÖZÜM

$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ olur.

Buradan $(a_n) = \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{6}{3}, \dfrac{7}{4}, \dfrac{8}{5}, \dfrac{9}{6}\right)$ bulunur.

ÖRNEK 5

$(a_n) = \left(\sqrt{36 - n^2}\right)$ sonlu gerçek sayı dizisinin en çok kaç elemanı vardır?

ÇÖZÜM

(a_n) gerçek sayı dizisi ise

$n \in \mathbb{Z}^+$ için $36 - n^2 \geq 0$ koşulunun sağlanması gerekir.

$36 - n^2 \geq 0 \Rightarrow 6 \geq n \geq 1$ olur. Buradan $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ değerleri için (a_n) bir gerçek sayı dizisidir.
O hâlde (a_n) dizisinin en çok 6 elemanı vardır.

Sabit Dizi

TANIM
$c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için genel terimi $a_n = c$ olan a_n dizisine **sabit dizi** denir.

Buradan $a_1 = c, a_2 = c, a_3 = c, ...$ biçimindeki sabit dizi $(a_n) = (c, c, c, ..., c, ...)$ şeklinde gösterilir.

ÖRNEK 6

Genel terimi $a_n = \dfrac{3n+1}{2n+k}$ olan dizi sabit dizi ise k değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

a_n dizisi sabit dizi olduğundan dizinin terimleri
$a_1 = a_2 = ... = a_n = ... = c$ biçimindedir.
Buradan $a_1 = a_2$ olduğundan

$$\frac{3 \cdot 1 + 1}{2 \cdot 1 + k} = \frac{3 \cdot 2 + 1}{2 \cdot 2 + k}$$

$$\frac{4}{2+k} = \frac{7}{4+k}$$

$$16 + 4k = 14 + 7k$$

$3k = 2 \Rightarrow k = \dfrac{2}{3}$ bulunur.

ÖRNEK 7

Genel terimi $a_n = \dfrac{k_1 \cdot n + k_2}{k_3 \cdot n + k_4}$ olan dizi sabit dizi ise $\dfrac{k_1}{k_3} = \dfrac{k_2}{k_4}$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

a_n dizisi sabit dizi olduğundan $a_n = \dfrac{k_1 \cdot n + k_2}{k_3 \cdot n + k_4} = c,\ c \in \mathbb{R}$ olur.

$k_1 \cdot n + k_2 = c \cdot (k_3 n + k_4)$

$k_1 \cdot n + k_2 = c \cdot k_3 n + c \cdot k_4$

Aynı derecedeki terimlerin katsayıları eşit olacağından

$k_1 = c \cdot k_3$

$k_2 = c \cdot k_4$ olur.

Buradan $\dfrac{k_1}{k_3} = \dfrac{k_2}{k_4} = c$ bulunur.

ÖRNEK 8

Genel terimi $a_n = \dfrac{an^2 + bn + c}{dn^2 + en + f}$ olan (a_n) sabit bir dizi ise $\dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{e} = \dfrac{c}{f}$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

$a_1 = a_2 = ... = a_n = k$ olduğundan

$an^2 + bn + c = k \cdot (dn^2 + en + f)$

$$an^2 = k \cdot dn^2 \Rightarrow a = k \cdot d$$
$$bn = k \cdot en \Rightarrow b = k \cdot e$$
$$c = k \cdot f \Rightarrow c = k \cdot f \text{ olur.}$$

Buradan $\dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{e} = \dfrac{c}{f} = k$ bulunur.

ÖRNEK 9

$(a_n) = (a(n^2 + n) + b(n + 1) - 5n^2 - 2a)$ dizisi sabit dizi olduğuna göre a_n dizisinin 30. terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

a_n dizisi sabit dizi olduğundan $n,\ n^2,\ n^3,\ \ldots$ gibi değişken içeren terimler dizide bulunmaz. Buradan a_n dizisinin genel terimi düzenlenirse

$(a_n) = (a(n^2 + n) + b(n + 1) - 5n^2 - 2a)$

$= an^2 + an + bn + b - 5n^2 - 2a$

$= (a - 5)n^2 + (a + b)n + b - 2a$ bulunur.

Buradan n ve n^2 li terimlerin katsayıları 0 a eşitlenerek

$a - 5 = 0 \Rightarrow a = 5$ ve $a + b = 0 \Rightarrow 5 + b = 0 \Rightarrow b = -5$ bulunur.

a_n dizisi $(a_n) = (b - 2a) = (-5 - 10) = (-15)$ olup

$a_{30} = -15$ bulunur.

Eşit Diziler

Aynı indisli terimleri birbirine eşit olan dizilere eşit dizi denir.

Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$a_1 = b_1,$

$a_2 = b_2,$

$\vdots$

$a_n = b_n$ ise (a_n) dizisi (b_n) dizisine eşittir denir ve $(a_n) = (b_n)$ biçiminde gösterilir.

ÖRNEK 10

Genel terimleri $a_n = \left(\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)$ ile $b_n = (-1)^n$ olan diziler eşit midir?

ÇÖZÜM

$n = 1 \Rightarrow a_1 = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

$b_1 = (-1)^1 = -1 \Rightarrow a_1 = b_1$

$n = 2 \Rightarrow a_2 = \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$

$b_2 = (-1)^2 = 1 \Rightarrow a_2 = b_2$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = \sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) = \sin\left(2\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = -1$

$b_3 = (-1)^3 = -1 \Rightarrow a_3 = b_3$

$n = 4 \Rightarrow a_4 = \sin\left(\frac{9\pi}{2}\right) = \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$

$b_4 = (-1)^4 = 1 \Rightarrow a_4 = b_4$

$n = 2k-1 \Rightarrow a_{2k-1} = \sin\left(\frac{4k-1}{2}\right)\pi = \sin\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -1$

$b_{2k-1} = (-1)^{2k-1} = -1 \Rightarrow a_{2k-1} = b_{2k-1}$

$n = 2k \Rightarrow a_{2k} = \sin\left(\frac{(4k+1)\pi}{2}\right) = \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$

$b_{2k} = (-1)^{2k} = 1 \Rightarrow a_{2k} = b_{2k}$

Buradan a_n dizisi açık olarak yazılırsa

$(a_n) = (-1, 1, -1, 1, ..., (-1)^n, ...)$ olur.

b_n dizisi de açık olarak yazılırsa $s(b_n) = (-1, 1, -1, 1, ..., (1)^n, ...)$ bulunur.

O hâlde $(a_n) = (b_n)$ olduğu görülür.

İndirgeme Bağıntısı İle Verilen Diziler (İndirgemeli Diziler)

Bazı dizilerin genel terimi bir genel fonksiyon kuralı olarak verilmeyebilir. Bir terim kendinden önceki bir veya birkaç terim cinsinden verilebilir.

ÖRNEK 11

$a_1 = 1$ ve $n \geq 2$ için $a_n = 3a_{n-1} + 1$ bağıntısı ile verilen dizinin ilk 5 terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

$a_1 = 1$

$a_2 = 3a_1 + 1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$

$a_3 = 3a_2 + 1 = 3 \cdot 4 + 1 = 13$

$a_4 = 3a_3 + 1 = 3 \cdot 13 + 1 = 40$

$a_5 = 3a_4 + 1 = 3 \cdot 40 + 1 = 121$ bulunur.

Yukarıdaki örnekte görüldüğü gibi bir sonraki terim, bir önceki terim bulunarak hesaplanmaktadır.

TANIM
Her terimi kendinden önceki bir veya birkaç terim cinsinden tanımlanabilen dizilere indirgemeli dizi denir. Tanımlama bağıntısına da indirgeme bağıntısı denir.

ÖRNEK 12

$a_1 = 3$ ve $n \geq 2$ için
$a_n - a_{n-1} = n + 1$ biçiminde verilen a_n dizisinin genel terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$
\begin{array}{rl}
& n = 2 \Rightarrow \cancel{a_2} - a_1 = 2 + 1 \\
& n = 3 \Rightarrow \cancel{a_3} - \cancel{a_2} = 3 + 1 \\
& n = 4 \Rightarrow \cancel{a_4} - \cancel{a_3} = 4 + 1 \\
& \vdots \\
+ & n = n \Rightarrow a_n - \cancel{a_{n-1}} = n + 1 \\
\hline
\end{array}
$$

n − 1 tane 1 vardır.

$$a_n - a_1 = (2 + 3 + 4 + \ldots + n) + (1 + 1 + \ldots + 1)$$

$$a_n - 3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) + (n-1) \cdot 1$$

$$a_n = \frac{n^2 + n}{2} + n + 1$$

$$a_n = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 13

$a_1 = 1$, $a_2 = 1$ ve $n > 2$ olmak üzere $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ indirgeme bağıntısı ile verilen dizinin ilk 7 terimini yazınız.

ÇÖZÜM

$a_1 = 1$

$a_2 = 1$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = 2a_2 + a_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

$n = 4 \Rightarrow a_4 = 2a_3 + a_2 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

$n = 5 \Rightarrow a_5 = 2a_4 + a_3 = 2 \cdot 7 + 3 = 17$

$n = 6 \Rightarrow a_6 = 2a_5 + a_4 = 2 \cdot 17 + 7 = 41$

$n = 7 \Rightarrow a_7 = 2a_6 + a_5 = 2 \cdot 41 + 17 = 99$ bulunur.

ÖRNEK 14

$a_1 = 4$ ve $a \geq 2$ için $a_n = 2a_{n-1}$ biçiminde indirgeme bağıntısı ile verilen a_n dizisinin genel terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

Dizinin terimleri alt alta yazılıp çarpılırsa

$$\begin{aligned}
\cancel{a_2} &= 2a_1 \\
\cancel{a_3} &= 2\cancel{a_2} \\
\cancel{a_4} &= 2\cancel{a_3} \\
&\vdots \\
\times \quad a_n &= 2\cancel{a_{n-1}} \\
\hline
a_n &= 2^{n-1} \cdot a_1 = 2^{n-1} \cdot 4 = 2^{n+1}
\end{aligned}$$

bulunur.

ÖRNEK 15

$(a_n) = \left(\dfrac{3n+1}{2n-1}\right)$ dizisinin kaç terimi $\dfrac{9}{5}$ sayısından büyüktür.

ÇÖZÜM

$$\frac{3n+1}{2n-1} > \frac{9}{5}$$

$$\frac{3n+1}{2n-1} - \frac{9}{5} > 0$$

$$\frac{15n+5-18n+9}{10n-5} > 0$$

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $10n - 5 > 0$ olur.

$$-3n + 14 > 0$$

$$3n < 14$$

$$n < \frac{14}{3}$$

$n < 4,67$ olur.

Buradan a_1, a_2, a_3 ve a_4 terimleri $\dfrac{9}{5}$ sayısından büyük olur.

ÖRNEK 16

Genel terimi $a_n = \dfrac{5n+3}{3n-2}$ olan dizinin (2, 6) aralığındaki terimlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

a_n dizisinin $(2,\ 6)$ aralığındaki terimleri $2 < a_n < 6$ biçimindedir.

I. Yol

$$2 < \frac{5n+3}{3n-2} < 6$$

$$2 < \frac{5n+3}{3n-2} \text{ ve } \frac{5n+3}{3n-2} < 6 \text{ olur.}$$

$$\frac{5n+3}{3n-2} - 2 > 0$$

$$\frac{5n+3-6n+4}{3n-2} > 0$$

$$-n+7 > 0$$

$$n < 7 \text{ bulunur.}$$

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $3n-2 > 0$ olur.

$$\frac{5n+3}{3n-2} - 6 < 0$$

$$\frac{5n+3-18n+12}{3n-2} < 0$$

$$-13n+15 < 0$$

$$13n > 15$$

$$n > \frac{15}{13} \text{ bulunur.}$$

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $3n-2 > 0$ olur.

II. Yol

$$2 < \frac{5n+3}{3n-2} < 6$$

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $3n-2 > 0$ olur.

$$6n-4 < 5n+3 < 18n-12$$

$$6n-4 < 5n+3 \Rightarrow n < 7$$

$$5n+3 < 18n-12 \Rightarrow n > \frac{15}{13} \text{ olur.}$$

Buradan $\dfrac{15}{13} < n < 7$ olur.

O hâlde $(2,\ 6)$ aralığında a_2, a_3, a_4, a_5 ve a_6 terimleri vardır.

ÖRNEK 17

Genel terimi $a_n = \dfrac{(n^2-16)(3n+5)}{5n-9}$ olan dizinin hangi terimleri negatiftir?

ÇÖZÜM

a_n dizisinin işaret tablosu yapılırsa

n	$-\infty$ … -4	-4 … $-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$ … $\frac{9}{5}$	$\frac{9}{5}$ … 4	4 … $+\infty$
$\dfrac{(n^2-16)(3n+5)}{5n-9}$	+	−	+	−	+
				Çözüm	

(a_n) dizi olduğundan $n < 0$ olan bölge çözüm kümesine dâhil edilmez.

$n \in \mathbb{Z}^+$ olduğundan $\dfrac{9}{5} < n < 4$ bulunur.

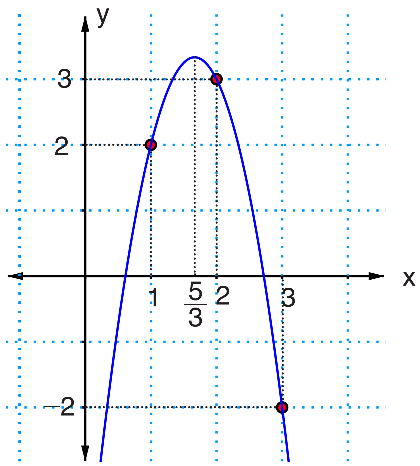
O hâlde a_2 ve a_3 terimleri negatiftir.

ÖRNEK 18

$(a_n) = (-3n^2 + 10n - 5)$ dizisinin en büyük değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$f(x) = -3x^2 + 10x - 5$ fonksiyonunun grafiğinden yararlanılırsa en büyük dereceli teriminin katsayısı -3 olduğundan $f(x)$ fonksiyonu kolları aşağı doğru bir paraboldür. Bu parabolün en büyük değerinin apsisi $r = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{-3 \cdot 2} = \frac{5}{3}$ olur.



$(a_n) = (-3n^2 + 10n - 5)$ dizisi için n pozitif tam sayı olduğundan f fonksiyonun tepe noktasının apsisine en yakın olan pozitif tam sayı değeri bulunur. Bu değer n yerine yazıldığında dizi en büyük değerini alır.

$a_1 = f(1) = -3 + 10 - 5 = 2$

$a_2 = f(2) = -3 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 - 5 = 3$ olur.

O hâlde a_n dizisinin en büyük değeri $a_2 = 3$ bulunur.

ÖRNEK 19

$(a_n) = \left(\frac{n+61}{n+1}\right)$ dizisinin kaç terimi tam sayıdır?

ÇÖZÜM

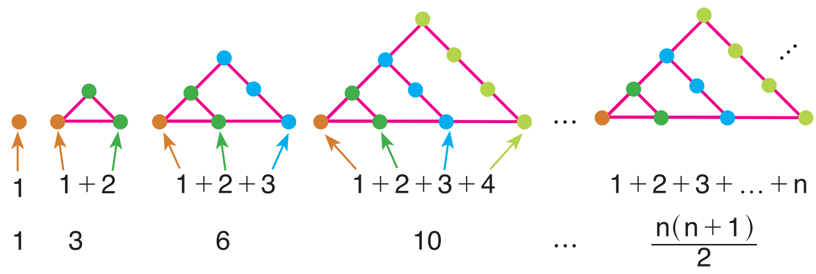
$$\frac{n+61}{n+1} = \frac{n+1+60}{n+1}$$
$$= \frac{n+1}{n+1} + \frac{60}{n+1}$$
$$= 1 + \frac{60}{n+1} \text{ olur.}$$

(a_n) dizisinin tam sayı olan terimleri $\frac{60}{n+1}$ ifadesini tam sayı yapan değerlerdir. Buradan $60 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ sayısının pozitif bölenleri sayısı $(2+1)(1+1)(1+1) = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ tanedir. $n \in \mathbb{Z}^+$ olduğundan $n = 0$ için $\frac{60}{n+1} = \frac{60}{1} = 60$ olduğundan 60 sayısı pozitif bölen olarak alınamaz.

O hâlde a_n dizisinin 11 tane terimi tam sayıdır.

TANIM

1 sayısından başlanıp bir çokgenin köşeleri temel alınarak her adımda çokgenin kenarlarının 1 fazla sayıyla bölünmesi ile elde edilen noktalar toplamının oluşturduğu sayı dizisine çokgensel sayılar denir.

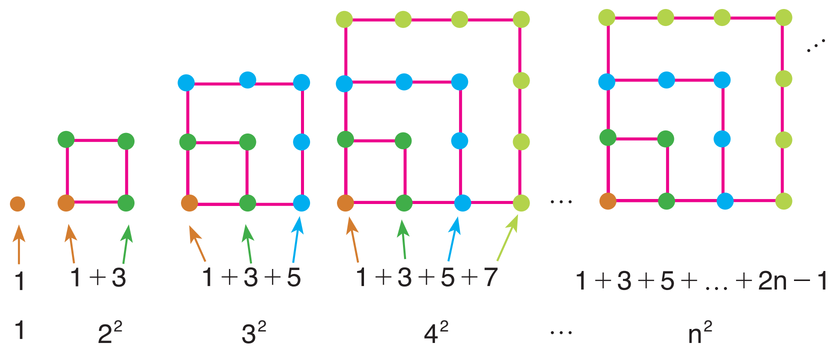


1 den n ye kadar ardışık doğal sayıların toplamı şeklinde yazılan sayılara üçgensel sayılar denir. Bu sayılarla oluşturulmuş diziye ise üçgensel sayı dizisi denir.

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 3 &= 1+2 \\ 6 &= 1+2+3 \\ 10 &= 1+2+3+4 \\ 15 &= 1+2+3+4+5 \\ &\vdots \\ \frac{n(n+1)}{2} &= 1+2+3+\ldots+n \end{aligned}$$

Yukarıdaki üçgensel sayılarla oluşturulan dizi ise

$(a_n) = \left(1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ \ldots,\ \frac{n(n+1)}{2},\ \ldots\right)$ biçimde olacaktır.

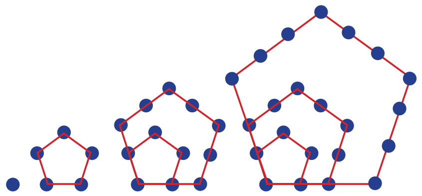


Bir tam sayının karesi şeklinde yazılabilen sayılara kare sayılar denir.

$1+3+5+\ldots+2n-1 = n^2$ olur.

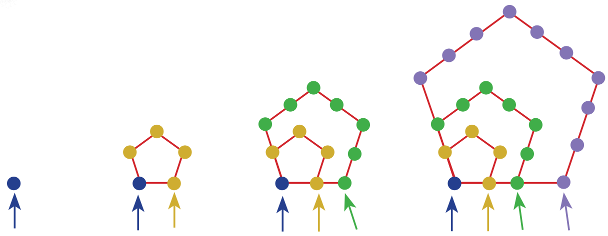
Kare sayılarla oluşturulan diziye ise kare sayı dizisi denir. Kare sayı dizisi $(a_n) = (1,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ \ldots,\ n^2,\ \ldots)$ biçimindedir.

ÖRNEK 20



… biçiminde devam eden beşgensel sayı dizisinin 4. terimini bulunuz.

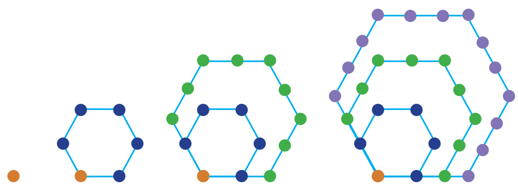
ÇÖZÜM



1	$1+4$	$1+4+7$	$1+4+7+10$
1	5	12	22

$1,\ 1+4,\ 1+4+7,\ 1+4+7+10,\ \ldots$ olduğundan beşgensel sayı dizisinin 4. terimi 22 olur.

ÖRNEK 21



Yukarıdaki şekilde verilen altıgensel sayı dizisinde bir indirgeme bağıntısı bulunuz.

ÇÖZÜM

Şekilde verilen altıgensel sayı dizisi (a_n) olsun.

$a_1 = 1$

$a_2 = 1 + 5$

$a_3 = 1 + 5 + 9$

$a_4 = 1 + 5 + 9 + 13$

$\vdots$

$a_n = 1 + 5 + 9 + \ldots + 4n - 3$ bulunur.

Bir önceki terim bir sonraki terimde yerine yazılırsa

$a_1 = 1$

$a_2 = a_1 + 5$

$a_3 = a_2 + 9$

$a_4 = a_3 + 13$

$\vdots$

$a_n = a_{n-1} + 4n - 3$ elde edilir.

Buradan indirgeme bağıntısı $a_n = a_{n-1} + 4n - 3$ şeklinde bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki fonksiyonların bir gerçek sayı dizisi olup olmadığını bulunuz.

a) $f(x) = \sqrt{3x-1}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2-4} + \sqrt[5]{x-7}$

c) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2-9}$

ç) $f(x) = (-1)^x 2^{x^2-1}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-3}, & x < 3 \text{ ise} \\ \dfrac{x-3}{x+1}, & x \geq 3 \text{ ise} \end{cases}$

2. Aşağıda genel terimleri verilen dizilerin ilk 5 terimi ile 100. terimini bulunuz.

a) $a_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)$

b) $a_n = 1 + (-1)^n$

c) $a_n = \begin{cases} \dfrac{n}{n+1}, & n \text{ tek ise} \\ \dfrac{n+1}{n+2}, & n \text{ çift ise} \end{cases}$

ç) $a_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1$

d) $\dbinom{n}{r} = \dfrac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$ olmak üzere $a_n = \dbinom{2n}{n}$

3. Aşağıdaki dizilerin genel terimlerini bulunuz.

a) $(a_n) = \left(\dfrac{1}{5}, \dfrac{3}{7}, \dfrac{5}{9}, \ldots\right)$

b) $(a_n) = \left(2, \dfrac{2}{10}, \dfrac{2}{100}, \dfrac{2}{1000}, \cdots\right)$

c) $(a_n) = \left(2, \dfrac{1}{2}, 4, \dfrac{1}{4}, 8, \dfrac{1}{8}, \ldots\right)$

ç) $(a_n) = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots\right)$

d) $(a_n) = (1, 3, 6, 10, \ldots)$

4. $\mathbb{A}_4 = \{1, 2, 3, 4\}$
$a_n : \mathbb{A}_4 \to \mathbb{R}, \ (a_n) = (n^2 + n + 1)$
sonlu dizisinin terimleri toplamı kaçtır?

5. $a_n = 3a_{n-1}$ ve $a_1 = 3$ **ise** a_{10} **değerini bulunuz.**

6. Genel terimi

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{5n+k}{n+m}, & n < 3 \text{ ise} \\ 5, & n = 3 \text{ ise} \\ \dfrac{10n+k+1}{2n+3-m}, & n > 3 \text{ ise} \end{cases}$$

ile verilen dizi sabit bir dizi **ise** $m + k$ **değeri kaçtır?**

7. Genel terimi $a_n = \cos n\pi$ **ile verilen dizinin terimlerini açık olarak yazıp buna eşit olan bir dizi bulunuz.**

8. Genel terimi
$a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n}\right)$ **ile verilen dizinin ilk 10 terimini bilimsel hesap makinesi veya GeoGebra programı kullanarak hesaplayınız. Bu diziye ait bir indirgeme bağıntısı bulunuz.**

9. $a_1 = 3$ ve $a_{n+1} - a_n = n + 2$ **ise** (a_n) **dizisinin genel terimini bulunuz.**

10. Genel terimi $a_n = \dfrac{(n^2-81)(n-7)}{(3n+1)}$ **olan dizinin kaç terimi negatiftir?**

11. Genel terimi $a_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$ **olan dizinin kaç terimi** $(2, 5)$ **aralığının dışındadır?**

12. Genel terimi $a_n = -n^2 + 3n + 5$ **olan dizinin en büyük terimi kaçtır?**

13. Genel terimi $a_n = \dfrac{360}{n}$ **olan dizinin kaç terimi tam sayıdır?**

14. Genel terimi $a_n = \dfrac{n^2-3n+5}{n+1}$ **olan dizinin tam sayı olan en küçük terimi kaçtır?**

Bir Dizinin Kısmî Toplamları

TANIM
Bir a_n dizisinin birinci teriminden n. terimine kadar terimlerinin toplamına bu dizinin kısmî toplamı denir ve S_n ile gösterilir.

$S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 + a_2$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$
$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$
$\vdots$
$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ şeklinde bulunur.

ÖRNEK 22

Genel terimi $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ olan dizinin ilk n terim toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

I. Yol

$S_1 = a_1$
$\quad = 1 - \frac{1}{2}$
$S_2 = a_1 + a_2$
$\quad = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$
$\quad = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4}$
$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$
$\quad = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = 1 - \frac{1}{5}$
$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$
$\quad = 1 - \frac{1}{n+1}$ olur.

a_n dizisinin ilk n terim toplamı $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ biçiminde bulunur.

II. Yol

$a_1 = \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}$
$a_2 = \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}$
$a_3 = \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}$
$\vdots$
$+ \quad a_n = \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}$

$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ olur.

ÖRNEK 23

Genel terimi $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ olan dizinin ilk n terimin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$S_1 = a_1 = \frac{1}{2}$

$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

$\vdots$

$S_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$ bulunur.

ÖRNEK 24

Genel terimi $a_n = \frac{1}{(n+2)\cdot(n+3)}$ olan dizinin ilk 20 terim toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$a_n = \frac{1}{(n+2)\cdot(n+3)} = \frac{A}{n+2} + \frac{B}{n+3}$ şeklinde basit kesirlerin toplamı olarak yazılırsa ve

$$\frac{1}{(n+2)\cdot(n+3)} = \frac{A}{n+2} + \frac{B}{n+3}$$
$$1 = (n+3)\cdot A + (n+2)\cdot B$$
$$1 = nA + 3A + nB + 2B$$
$$1 = n(A+B) + 3A + 2B$$

eşit dereceli terimlerin katsayılarının eşitlenmesi ile bulunan
$A + B = 0$ ve $3A + 2B = 1$ denklemleri çözülürse
$A = -B \Rightarrow 3(-B) + 2B = 1 \Rightarrow B = -1$ ve $A = 1$ olur.

Buradan $a_n = \frac{1}{(n+2)\cdot(n+3)} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$ elde edilir. Buna göre

$$a_1 = \frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{4}}$$
$$a_2 = \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{5}}$$
$$a_3 = \cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{6}}$$
$$\vdots$$
$$+\quad a_n = \cancel{\frac{1}{n+2}} - \frac{1}{n+3}$$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}$$ bulunur.

O hâlde a_n dizisinin ilk n terim toplamı $S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}$ olur.

Buradan $n = 20$ için ilk 20 terim toplamı

$S_{20} = \frac{1}{3} - \frac{1}{23} = \frac{20}{69}$ elde edilir.

ÖRNEK 25

Genel terimi $a_n = n \cdot n!$ olan bir dizinin ilk 15 teriminin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$(a_n) = (n \cdot n!)$ dizisinde

$$\begin{aligned} n \cdot n! &= (n+1-1) \cdot n! \\ &= (n+1) \cdot n! - n! \\ &= (n+1)! - n! \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

Bu durumda

$$\begin{array}{rl} a_1 = & \cancel{2!} - 1! \\ a_2 = & \cancel{3!} - \cancel{2!} \\ a_3 = & \cancel{4!} - \cancel{3!} \\ & \vdots \\ + \; a_{15} = & 16! - \cancel{15!} \\ \hline S_{15} = & 16! - 1! \text{ bulunur.} \end{array}$$

Toplam Sembolü

Bir $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ dizisi için ilk n terim toplamı

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ biçiminde yazılabilir. $\sum$ (sigma) sembolü S_n toplamını kısaca göstermek için kullanılan bir semboldür.

$\sum\limits_{k=r}^{n} a_k$, $k = r$ den n ye kadar a_k toplamı şeklinde okunur.

Üst sınır

$$\sum_{k=r}^{n} a_k$$

indis

Alt sınır

k değişkenine toplamın indisi denir. İndis çeşitli harflerle gösterilebilir ve alt sınır değerinden üst sınır değerine kadar ardışık tam sayılar olarak artar.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

ÖRNEK 26

Aşağıdaki toplamları hesaplayınız.

a) $\sum\limits_{k=3}^{8} k$ **b)** $\sum\limits_{k=1}^{4} k^2$ **c)** $\sum\limits_{k=1}^{5} \frac{(-1)^k}{k}$ **ç)** $\sum\limits_{k=1}^{6} 2$

ÇÖZÜM

a) $\sum\limits_{k=3}^{8} k = 3+4+5+6+7+8 = 33$

b) $\sum\limits_{k=1}^{4} k^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2 = 30$

c) $\sum\limits_{k=1}^{5} \frac{(-1)^k}{k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{-47}{60} = -0,78$

ç) $\sum\limits_{k=1}^{6} 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 12$

k = 1 için | k = 2 için | k = 3 için | k = 4 için | k = 5 için | k = 6 için

ÖRNEK 27

Aşağıdaki kısmî toplamları toplam sembolü kullanarak yazınız.

a) $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3$

b) $\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}+...+\sqrt{97}$

c) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+...+\frac{1}{3^{n-1}}$

ç) $2-4+6-8+10-12+14$

ÇÖZÜM

a) $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=\sum_{k=1}^{5}k^3$

b) $\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}+...+\sqrt{97}=\sum_{k=1}^{93}\sqrt{k+4}$ veya başlangıç değeri 5 alınırsa $\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}+...+\sqrt{97}=\sum_{k=5}^{97}\sqrt{k}$ biçiminde yazılabilir.

c) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+...\frac{1}{3^{n-1}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^{k-1}}$

ç) $2-4+6-8+10-12+14=\sum_{k=1}^{7}(-1)^{k+1}\cdot 2k$

Terimler pozitif, negatif, pozitif, ... biçiminde olduğundan $(-1)^k$ veya $(-1)^{k+1}$ terimi olmalıdır. Çift sayılar ise 2k ile gösterilir.

ÖRNEK 28

Bir kovanda 10 kg bal bulunmaktadır. Kovandaki bal miktarı her ay %5 artmakta ve çiftçi bu kovandan her ay 2 kg bal almaktadır.
Buna göre

a) Başlangıçta kovanda 10 kg bal olduğuna göre n. aydaki bal miktarı b_n dizisi ile gösterildiğinde b_n dizisine ait bir indirgeme bağıntısı bulunuz.

b) 4 ay sonra kovandaki bal miktarını hesaplayınız.

ÇÖZÜM

a) 1. ay $b_1=10+10\cdot\frac{5}{100}-2$

2. ay $b_2=b_1+b_1\cdot\frac{5}{100}-2$

3. ay $b_3=b_2+b_2\cdot\frac{5}{100}-2$

$\vdots$

n. ay $b_n=b_{n-1}+b_{n-1}\cdot\frac{5}{100}-2$

Buradan $b_n=b_{n-1}\left(1+\frac{5}{100}\right)-2=b_{n-1}\cdot 1{,}05-2$ bulunur.

b) 4 ay sonra kovandaki bal miktarı

$b_1=b_o\cdot 1{,}05-2=10\cdot 1{,}05-2=8{,}5$
$b_2=b_1\cdot 1{,}05-2=8{,}5\cdot 1{,}05-2=6{,}925$
$b_3=b_2\cdot 1{,}05-2=6{,}925\cdot 1{,}05-2=5{,}27125$
$b_4=b_3\cdot 1{,}05-2=5{,}27125\cdot 1{,}05-2=3{,}5348125$ kg olur.

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıda genel terimleri verilen dizilerin S_1, S_2, S_3, S_4 ve S_n kısmî toplamlarını bulunuz.

a) $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

b) $a_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+4}$

c) $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$

ç) $a_n = \log\left(\frac{n}{n+1}\right)$

d) $a_n = \cos(n\pi)$

e) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

2. Bir (a_n) dizisi verilsin.
B_n dizisi $B_1 = a_1$ ve her $n \geq 2$ için $B_n = B_{n-1} + a_n$ biçiminde tanımlanıyor.
B_n dizisinin genel terimini (a_n) dizisinin terimleri cinsinden yazınız.

3. (a_n) dizisinin genel terimi $a_1 = a_2 = 2$ ve $n \geq 3$ için $a_n = n \cdot a_{n-1}$ bağıntısı ile veriliyor. **(a_n) dizisinin ilk 50 teriminin toplamının birler basamağındaki rakam kaçtır?**

4. Aşağıda toplam sembolü ile verilen ifadeleri açıp toplamları hesaplayınız.

a) $\sum_{k=1}^{5} k^3$

b) $\sum_{j=-2}^{6} (-1)^{j+1} 2^j$

c) $\sum_{k=1}^{9} \log\left(\frac{k}{k+1}\right)$

ç) $\sum_{k=1}^{48} (\sqrt{k} - \sqrt{k+1})$

d) $i^2 = -1$ olmak üzere $\sum_{k=1}^{100} i^k$

e) $\sum_{k=1}^{50} ((-1)^k (3k-2))$

5. Aşağıdaki toplamları toplam sembolü kullanarak yazınız.

a) $5^2 + 6^2 + 7^2 + ... + 100^2$

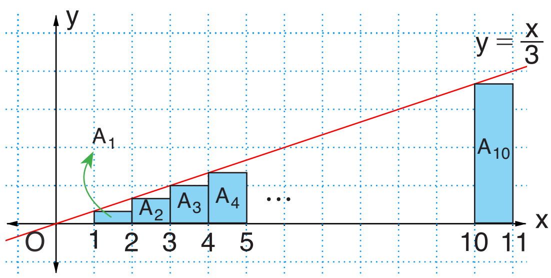
b) $1 - 9 + 27 - 81 + 243 - 729$

c) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + ... + \frac{1}{99 \cdot 100}$

ç) $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 + ... - 100x^{99}$

6. $\sum_{k=1}^{90} \cos^2 k^\circ$ **değerini bulunuz.**

7.



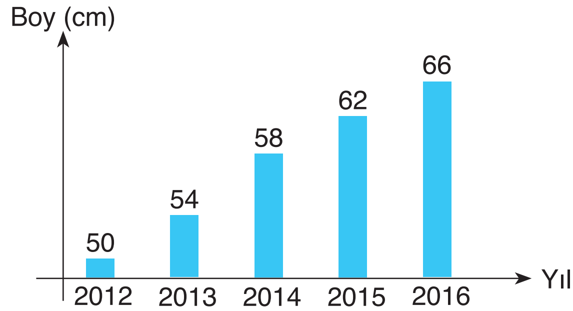
Yukarıdaki grafikte bir köşesi $y = \frac{x}{3}$ doğrusu üzerinde ve taban uzunluğu 1 birim olan dikdörtgenlerin alanları A_1, A_2, A_3, ... biçiminde verilmiştir.

Buna göre $\sum_{k=1}^{10} A_k$ **değerini bulunuz.**

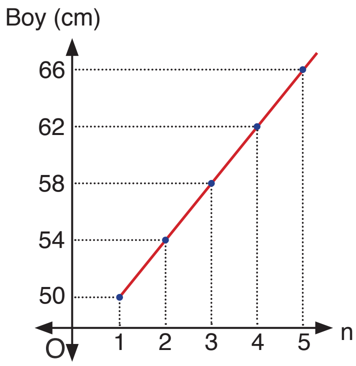
8. Bir hastaya her gün 20 mg ilaç veriliyor. Hasta verilen ilacın %80 ini her gün vücudundan atıyor. S_n, n. gün hastanın vücudunda biriken ilaç miktarı **olduğuna göre** S_6 **değerini bulunuz.**

Aritmetik Dizi


Görsel 2.3
Fidan



Yukarıda 2012 yılında dikilen bir ağacın yıllara göre uzama grafiği verilmiştir. Bu grafikte görüldüğü gibi ağacın boyu doğrusal olarak uzamıştır. Ağacın yıllara göre boy uzunluğunu gösteren dizi analitik düzlemde gösterildiğinde bu dizinin elemanlarının bir doğru üzerinde olduğu görülür.



Doğru denklemi $y=mx+n$ olduğundan genel terimi $a_n=dn+k$ olan bir dizinin ardışık terimleri arasındaki fark

$$a_{n+1}-a_n=d(n+1)+k-(dn+k)$$
$$=dn+d+k-dn-k$$
$$a_{n+1}-a_n=d \text{ şeklinde bulunur.}$$

d sabit bir sayı olduğundan a_n dizisinin terimleri arasındaki fark eşittir.

TANIM
Ardışık her iki terimi arasındaki fark eşit olan diziye aritmetik dizi denir.

$a_1, a_2, a_3, .., a_n, ...$ dizisi bir aritmetik dizi olsun. Bu durumda $a_2-a_1=a_3-a_2=a_4-a_3=...=a_{n+1}-a_n=...=d$ olacak şekilde bir $d\in\mathbb{R}$ sayısı vardır. d sayısına aritmetik dizinin ortak farkı denir.

Aritmetik dizinin terimleri arasındaki fark d olduğundan a_n aritmetik dizisinin terimleri

$$a_2=a_1+d$$
$$a_3=a_1+2d$$
$$a_4=a_1+3d$$
$$\vdots$$
$$a_n=a_1+(n-1)d$$

olur. Buradan a_n aritmetik dizisi
$(a_n)=(a_1,\ a_1+d,\ a_1+2d,\ a_1+3d,\ ...,\ a_1+(n-1)d,\ ...)$
şeklinde yazılabilir.

a_n aritmetik dizisinin genel terimi $a_n=a_1+(n-1)d$ biçiminde bulunur.

ÖRNEK 29

8, 5, 2, −1, −4, ... biçiminde verilen dizinin genel terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

8, 5, 2, −1, −4, ...

−3 −3 −3 −3

Dizinin ardışık terimleri arasındaki fark eşit olduğundan bu dizi aritmetik bir dizidir ve ortak fark $d = -3$ olur.

$a_1 = 8$ olduğundan genel terim

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$= 8 + (n-1)(-3)$$
$$= 8 - 3n + 3 = 11 - 3n \text{ bulunur.}$$

Aritmetik Dizinin Özellikleri

1. a_n bir aritmetik dizi ve $n \neq p$ olmak üzere $a_n = a_p + (n-p)d$ olur.

İspat

$$\begin{array}{rl} & a_n = a_1 + (n-1)d \\ - & a_p = a_1 + (p-1)d \\ \hline & a_n - a_p = (n-1)d - (p-1)d \\ & a_n - a_p = nd - d - pd + d \\ & a_n - a_p = (n-p)d \\ & a_n = a_p + (n-p)d \text{ elde edilir.} \end{array}$$

ÖRNEK 30

$a_2 = 21$ ve $a_5 = 39$ olan bir aritmetik dizide a_{10} kaçtır?

ÇÖZÜM

I. Yol

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_2 = a_1 + (2-1)d$

$21 = a_1 + d$

$a_5 = a_1 + (5-1)d$

$39 = a_1 + 4d$ olur.

$a_1 + d = 21$

$a_1 + 4d = 39$ olduğundan

$$\begin{array}{rl} & -4a_1 - 4d = -84 \\ + & a_1 + 4d = 39 \\ \hline & -3a_1 = -45 \end{array}$$

$a_1 = 15$ ve $15 + d = 21$

$d = 6$ bulunur.

Buradan

$a_{10} = a_1 + 9d = 15 + 9 \cdot 6 = 69$ elde edilir.

II. Yol

$a_n = a_p + (n-p)d$ bağıntısı kullanılırsa

$a_5 = a_2 + (5-2)d$

$39 = 21 + 3d$

$d = 6$ bulunur.

Buradan

$a_{10} = a_2 + (10-2)d$

$a_{10} = 21 + 8 \cdot 6 = 69$ bulunur.

2. Bir $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ sonlu aritmetik dizisinde baştan ve sondan eşit uzaklıktaki terimlerin toplamı birbirine eşittir. (a_n) aritmetik dizisinde $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = ...$ olur.

İspat

$$a_1 + a_n = a_1 + (a_1 + (n-1)d) = 2a_1 + (n-1)d$$
$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_1 + (n-2)d = 2a_1 + (n-1)d$$
$$a_3 + a_{n-2} = a_1 + 2d + a_1 + (n-3)d = 2a_1 + (n-1)d$$

Buradan $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = ...$ olduğu görülür.

ÖRNEK 31

a_n aritmetik dizisinde $a_3 + a_{10} = 20$ ise $a_5 + a_8$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} a_3 + a_{10} &= a_1 + 2d + a_1 + 9d \\ &= 2a_1 + 11d \\ &= 20 \\ a_5 + a_8 &= a_1 + 4d + a_1 + 7d \\ &= 2a_1 + 11d \\ &= 20 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

3. (a_n) aritmetik dizisinde $p \in \mathbb{Z}^+$ ve $1 < p < n$ olmak üzere

$a_n = \dfrac{a_{n-p} + a_{n+p}}{2}$ olur.

İspat

$$\begin{aligned} a_{n-p} + a_{n+p} &= a_1 + (n-p-1)d + a_1 + (n+p-1)d \\ &= 2a_1 + nd - pd - d + nd + pd - d \\ &= 2a_1 + 2nd - 2d \\ &= 2a_1 + 2(n-1)d \\ &= 2(a_1 + (n-1)d) \\ &= 2a_n \text{ olur.} \end{aligned}$$

Buradan $a_n = \dfrac{a_{n-p} + a_{n+p}}{2}$ bulunur.

ÖRNEK 32

$a_4 + a_6 = 8$ ise $\sum_{k=1}^{9} a_k$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$a_5 = \dfrac{a_4 + a_6}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$ olur.

$a_1 + a_9 = a_2 + a_8 = a_3 + a_7 = a_4 + a_6 = 8$ olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{9} a_k &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 \\ &= (a_1 + a_9) + (a_2 + a_8) + (a_3 + a_7) + (a_4 + a_6) + a_5 \\ &= 8 + 8 + 8 + 8 + 4 = 36 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

4. **(a_n) aritmetik dizisinin ilk n terim toplamı**

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ ise

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ olur.

İspat

$$\begin{array}{l} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n \\ + \; S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 \\ \hline 2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + ... + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) \end{array}$$

$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = ... = a_n + a_1$
n tane eşitlik vardır.

$2S_n = n \cdot (a_1 + a_n)$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ olur.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ olduğundan

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ bağıntısı elde edilir.

ÖRNEK 33

50 ile 100 arasında 3 ile bölünebilen tam sayıların toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM

50 ile 100 arasında 3 ile bölünebilen sayılar 51, 54, 57, ... , 99 olduğundan bu dizide ortak fark $d = 3$ olur.

$\text{Terim sayısı} = \frac{\text{Son terim} - \text{İlk terim}}{\text{Artış miktarı}} + 1$

$= \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{99 - 51}{3} + 1 = 17$ bulunur.

Buradan

$S_n = 51 + 54 + 57 + ... + 99$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{17}{2}(51 + 99) = 1275$ elde edilir.

ÖRNEK 34

Genel terimi $a_n = 4n + 2$ olan aritmetik dizinin ilk n terim toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

I. Yol

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ dir.

$$\begin{array}{l} a_1 = 4 \cdot 1 + 2 \\ a_2 = 4 \cdot 2 + 2 \\ a_3 = 4 \cdot 3 + 2 \\ \vdots \\ + \; a_n = 4 \cdot n + 2 \\ \hline S_n = 4 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + n) + 2 \cdot n \end{array}$$

$S_n = 4 \cdot \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + 2n = 2n^2 + 4n$

bulunur.

II. Yol

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ ve

$a_1 = 4 \cdot 1 + 2 = 6$ olmak üzere

$S_n = \frac{n}{2}(6 + 4n + 2)$

$= \frac{n}{2}(4n + 8)$

$= 2n^2 + 4n$ bulunur.

ÖRNEK 35

İlk n terim toplamı $S_n = -n^2 + 2n$ olan bir (a_n) aritmetik dizisinde $a_4 + a_5 + a_6$ toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM

$S_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$S_6 - S_3 = a_4 + a_5 + a_6$ bulunur.

Buradan

$a_4 + a_5 + a_6 = S_6 - S_3 = (-6^2 + 2 \cdot 6) - (-3^2 + 2 \cdot 3)$

$= -24 + 3 = -21$ olur.

ÖRNEK 36

İlk n terim toplamı $S_n = 3n^2 + 5n$ olan bir aritmetik dizinin genel terimi nedir?

ÇÖZÜM

$S_1 = a_1 = 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 = 8$

$S_2 = a_1 + a_2 = 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 = 22$

$a_1 + a_2 = a_1 + a_1 + d \Rightarrow 2a_1 + d = 22$

$2 \cdot 8 + d = 22$

$d = 6$ olur.

Buradan $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$a_n = 8 + (n-1) \cdot 6 = 6n + 2$ bulunur.

ÖRNEK 37

Sonlu bir aritmetik dizinin birinci terimi 5, sonuncu terimi -23 tür. 5 ile -23 arasına aritmetik dizi oluşturacak şekilde 6 tane terim yerleştiriliyor. Buna göre birinci terim ile sonuncu terim arasına yerleştirilen terimlerden dördüncüsü kaçtır?

ÇÖZÜM

Birinci terim ile sonuncu terim arasına 6 terim yerleştirildiğine göre bu sonlu dizi 8 elemanlıdır.

Birinci terim $a_1 = 5$,

sonuncu terim

$a_8 = -23$ ise

$a_1 + 7d = -23$

$5 + 7d = -23$

$7d = -28$

$d = -4$ olur.

Yerleştirilen terimlerden dördüncüsü a_5 olup

$a_5 = a_1 + 4d$

$= 5 + 4 \cdot (-4) = 5 - 16 = -11$ bulunur.

ÖRNEK 38

Yeni eğitim ve öğretim yılına hazırlanan bir okulda her gün bir önceki günden $2\,m^2$ daha fazla duvar boyayan gönüllü bir veli ilk gün $20\,m^2$ duvar boyamıştır. Buna göre 30 gün sonra toplam kaç m^2 duvar boyamış olur?

ÇÖZÜM

1. gün $a_1 = 20$
2. gün $a_2 = 20 + 2 \cdot 1$
3. gün $a_3 = 20 + 2 \cdot 2$

$\vdots$

n. gün $a_n = 20 + 2 \cdot (n-1)$

30. gün $a_{30} = 20 + 2 \cdot 29 = 78\ m^2$ duvar boyar.

Buradan bu boyacının 30 gün sonra boyadığı toplam alan

$$S_{30} = \frac{30}{2}(a_1 + a_{30})$$
$$S_{30} = 15(20 + 78)$$
$$= 15 \cdot 98 = 1470\ m^2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 39

Mehtap ve Sevgi engelliler yararına düzenlenen yardımseverlik koşusuna katılacaktır.

- Mehtap birinci gün 4 km koşmuş ve sonraki her gün bir önceki güne göre 300 m daha fazla koşmuştur.
- Sevgi birinci gün 3 km koşmuş ve sonraki her gün bir önceki güne göre 400 m daha fazla koşmuştur.

Aynı gün koşmaya başlayan Mehtap ile Sevgi kaçıncı gün aynı mesafeyi koşmuş olur?

ÇÖZÜM

Mehtap için

$a_1 = 4\ km = 4000\ m$

$d_1 = 300\ m$ olduğundan

$a_n = 4000 + (n-1) \cdot 300$
$= 3700 + 300n$ olur.

Sevgi için

$b_1 = 3\ km = 3000\ m$

$d_2 = 400\ m$ olduğundan

$b_n = 3000 + (n-1) \cdot 400$
$= 2600 + 400n$ olur.

Bu durumda

$$a_n = b_n$$
$$3700 + 300n = 2600 + 400n$$
$$1100 = 100n$$
$$n = 11 \text{ bulunur.}$$

Mehtap ile Sevgi 11. gün aynı mesafeyi koşmuş olur.

ALIŞTIRMALAR

1. **İlk terimi 5, dördüncü terimi 20 olan aritmetik dizinin kaçıncı terimi 145 tir?**

2. Bir aritmetik dizinin ardışık üç terimi $2x-4,\ x+8,\ 3x-7$ **ise bu dizinin ortak farkı kaçtır?**

3. **5 ile 95 sayıları arasında bu sayılarla aritmetik dizi oluşturacak şekilde 6 tane sayı yerleştirilirse oluşan bu dizinin 5. terimi kaç olur?**

4. $(a_n)=((p-4)n^2+(p+2)n+3p+1)$ bir aritmetik dizi **olduğuna göre** a_4 **kaçtır?**

5. a_n aritmetik bir dizi ve
$a_3+a_4+a_5+...+a_{13}=121$ **ise**
$a_2+a_4+a_6+...+a_{14}$
toplamı kaçtır?

6. **Genel terimi** $a_n=3n-5$ **olan aritmetik dizinin ilk n terim toplamını bulunuz.**

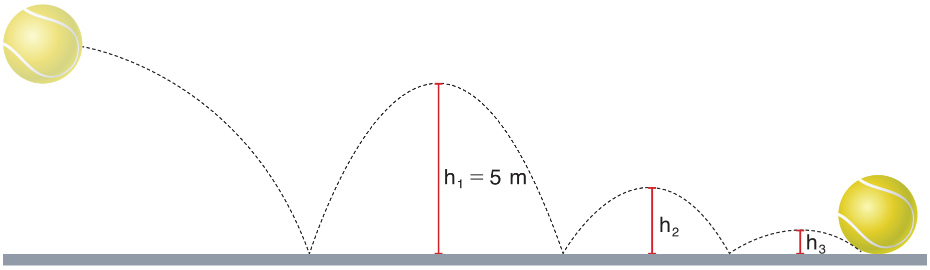
7. **İlk n terim toplamı** $S_n=2n^2+11n$ **olan aritmetik dizinin genel terimini bulunuz.**

8. Bir aritmetik dizinin ilk 40 terim toplamı 120, ilk 80 terim toplamı 400 **ise ilk 50 terim toplamı kaçtır?**

9. Her gün bir önceki günden 5 sayfa fazla kitap okuyan bir öğrenci ilk gün 12 sayfa kitap okumuştur. **Bu öğrenci 20 gün sonra toplam kaç sayfa kitap okumuş olur?**

10. a_n aritmetik bir dizi olmak üzere a_n dizisinin ilk 35 terim toplamı 105 **ise** $a_5+a_9+a_{40}$ **değeri kaçtır?**

Geometrik Dizi



Görsel 2.4

Şekildeki gibi yukarıdan atılan bir elastik top her seferinde bir önceki yüksekliğinin $\frac{1}{3}$ ü kadar zıplamaktadır. (h_n) dizisi bu topun zıpladığı yüksekliklerin oluşturduğu bir dizi olmak üzere

$$h_1 = 5$$
$$h_2 = 5 \cdot \frac{1}{3}$$
$$h_3 = 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$$
$$\vdots$$
$$h_n = 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
$$(h_n) = \left(5, \frac{5}{3}, \frac{5}{3^2}, \frac{5}{3^3}, \dots \frac{5}{3^{n-1}}, \dots\right)$$

dizisi elde edilir.

Bu dizide $\frac{h_2}{h_1} = \frac{h_3}{h_2} = \frac{h_4}{h_3} = \frac{h_{n+1}}{h_n} = \frac{1}{3}$ olduğu görülür.

TANIM
Bir (a_n) dizisinde her n pozitif tam sayısı için $a_n \neq 0$ olmak üzere $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ olacak şekilde bir r gerçek sayısı varsa (a_n) dizisine geometrik dizi, r sayısına da bu dizinin ortak çarpanı veya ortak oranı denir.

$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ geometrik bir dizi olsun.

Bu dizide

$$\frac{a_2}{a_1} = r \Rightarrow a_2 = a_1 \cdot r$$
$$\frac{a_3}{a_2} = r \Rightarrow a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r \cdot r = a_1 \cdot r^2$$
$$\frac{a_4}{a_3} = r \Rightarrow a_4 = a_3 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \cdot r = a_1 \cdot r^3$$
$$\vdots$$
$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = r \Rightarrow a_n = a_{n-1} \cdot r = a_1 \cdot r^{n-1} \text{ olur.}$$

Buradan (a_n) dizisi $(a_n) = (a_1, a_1 \cdot r, a_2 \cdot r^2, \dots, a_1 \cdot r^{n-1}, \dots)$ olur.
(a_n) dizisinin genel terimi $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ şeklinde bulunur.

ÖRNEK 40

5, 15, 45, 135, ... biçiminde verilen dizinin genel terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = ... = \frac{a_n+1}{a_n} = 3$ olduğundan (a_n) dizisi geometrik bir dizidir ve (a_n) dizisinin ortak çarpanı $r = 3$ olur.

Buradan genel terimi

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 r^{n-1} \\ &= 5 \cdot 3^{n-1} \\ &= \frac{5}{3} 3^n \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Geometrik Dizinin Özellikleri

1. (a_n) geometrik dizisinde $1 < k < n$ ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere ortak çarpan r ise $a_n = a_k \cdot r^{n-k}$ bağıntısı vardır.

İspat

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$a_k = a_1 \cdot r^{k-1}$

$\frac{a_n}{a_k} = \frac{a_1 \cdot r^{n-1}}{a_1 \cdot r^{k-1}} = r^{n-k}$

olduğundan

$a_n = a_k r^{n-k}$ bulunur.

ÖRNEK 41

(a_n) geometrik dizisinde $a_4 = 48$ ve $a_7 = 384$ ise a_9 kaçtır?

ÇÖZÜM

I. Yol

$$\begin{aligned} a_n &= a_k \cdot r^{n-k} \\ a_7 &= a_4 \cdot r^{7-4} \\ 384 &= 48 \cdot r^3 \\ 8 &= r^3 \\ r &= 2 \text{ olur.} \\ a_9 &= a_4 \cdot r^5 \\ a_9 &= 48 \cdot 2^5 = 1536 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

II. Yol

$a_7 = a_1 \cdot r^6$

$a_4 = a_1 \cdot r^3$

olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{a_7}{a_4} &= \frac{a_1 \cdot r^6}{a_1 \cdot r^3} = r^3 \\ \frac{384}{48} &= r^3 \\ 8 &= r^3 \\ r &= 2 \text{ bulunur.} \\ a_4 &= a_1 \cdot r^3 \\ 48 &= a_1 \cdot 2^3 \\ a_1 &= 6 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Buradan $a_9 = a_1 \cdot r^8 = 6 \cdot 2^8 = 1536$ bulunur.

2. Bir geometrik dizide her terim kendisine eşit uzaklıktaki terimlerin geometrik ortalamasına eşittir. $k < p$ için $a_p = \sqrt{a_{p-k} \cdot a_{p+k}}$ olur.

İspat

$$a_{p-k} \cdot a_{p+k} = a_1 \cdot r^{p-k-1} \cdot a_1 \cdot r^{p+k-1}$$
$$= a_1^2 \cdot r^{2p-2} \text{ olur.}$$

Buradan

$$\sqrt{a_{p-k} \cdot a_{p+k}} = a_1 \cdot r^{p-1}$$
$$\sqrt{a_{p-k} \cdot a_{p+k}} = a_p \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 42

(a_n) bir geometrik dizi olmak üzere $a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 \cdot a_9 \cdot a_{10} = 128$ ise a_7 kaçtır?

ÇÖZÜM

$$a_7 = \sqrt{a_4 \cdot a_{10}} \Rightarrow a_4 \cdot a_{10} = a_7^2$$
$$a_7 = \sqrt{a_5 \cdot a_9} \Rightarrow a_5 \cdot a_9 = a_7^2$$
$$a_7 = \sqrt{a_6 \cdot a_8} \Rightarrow a_6 \cdot a_8 = a_7^2 \text{ olur.}$$

Buradan

$$a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 \cdot a_9 \cdot a_{10} = (a_4 \cdot a_{10}) \cdot (a_5 \cdot a_9) \cdot (a_6 \cdot a_8) \cdot a_7$$
$$= a_7^2 \cdot a_7^2 \cdot a_7^2 \cdot a_7$$
$$= a_7^7 = 128 \text{ olur.}$$

$a_7^7 = 128 \Rightarrow a_7 = 2$ bulunur.

3. Sonlu bir geometrik dizide baştan ve sondan eşit uzaklıkta bulunan terimlerin çarpımı birbirine eşittir.
$(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ geometrik dizisinde
$a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = ... = a_k \cdot a_{n-k+1} = ...$ bulunur.

İspat

$$a_1 \cdot a_n = a_1 \cdot a_1 \cdot r^{n-1}$$
$$= a_1^2 \cdot r^{n-1}$$
$$a_2 \cdot a_{n-1} = a_1 \cdot r \cdot a_1 \cdot r^{n-2}$$
$$= a_1^2 \cdot r^{n-1}$$
$$a_3 \cdot a_{n-2} = a_1 \cdot r^2 \cdot a_1 \cdot r^{n-3}$$
$$= a_1^2 \cdot r^{n-1}$$
$$\vdots$$
$$a_k \cdot a_{n-k+1} = a_1 \cdot r^{k-1} \cdot a_1 \cdot r^{n-k+1-1}$$
$$= a_1^2 \cdot r^{n-1} \text{ bulunur.}$$

Buradan

$$a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = ... = a_k \cdot a_{n-k+1} = ...$$

elde edilir.

ÖRNEK 43

(a_n) geometrik dizisi $a_n = \left(16,\ a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ \frac{1}{4}\right)$ biçimindedir.
Buna göre $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$$a_n = \left(\underset{a_1}{16},\ \underset{a_2}{a},\ \underset{a_3}{b},\ \underset{a_4}{c},\ \underset{a_5}{d},\ \underset{a_6}{e},\ \underset{a_7}{\frac{1}{4}}\right)$$

$a_4 = \sqrt{a_1 \cdot a_7}$

$c = \sqrt{16 \cdot \frac{1}{4}} = 2$

$a_2 \cdot a_6 = a_3 \cdot a_5 = a_1 \cdot a_7$

$a \cdot e = b \cdot d = 16 \cdot \frac{1}{4}$

Buradan $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e = c \cdot (a \cdot e) \cdot (b \cdot d) = 2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$ olur.

4. Birinci terimi a_1 ve ortak çarpanı r olan bir (a_n) geometrik dizisinin ilk n terim toplamı $r \neq 1$, $S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$ olur.

İspat

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

$S_n = a_1 + a_2 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + \ldots + a_1 \cdot r^{n-1}$

eşitliğinin her iki tarafı r ile genişletilirse

$r \cdot S_n = a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3 + \ldots + a_1 \cdot r^n$ bulunur.

Buradan

$$\begin{array}{rl} & S_n = a_1 + a_1 \cdot r + \ldots + a_1 \cdot r^{n-1} \\ - & r \cdot S_n = a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3 + \ldots + a_1 \cdot r^n \\ \hline & S_n - r \cdot S_n = a_1 - (a_1 r^n) \\ & S_n (1-r) = a_1 (1 - r^n) \\ & S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r} \text{ bulunur.} \end{array}$$

ÖRNEK 44

$2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{10}$ işleminin sonucu kaçtır?

ÇÖZÜM

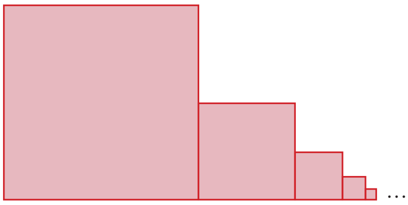
$a_n = 2^n$ geometrik dizi ve $r = 2$ olduğundan

$S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^{10}}{1-r}$

$S_{10} = 2 \cdot \frac{1-2^{10}}{1-2}$

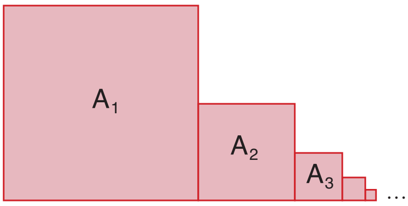
$= 2046$ bulunur.

ÖRNEK 45



Yandaki şekilde verilen karelerin kenarı bir soldakinin yarısı kadardır. En soldaki karenin bir kenarı 10 birim ise bu şekilde sıralanmış 15 tane karenin alanları toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM



A_n karelerin alanı olmak üzere

$S_n = A_1 + A_2 + ... + A_n$ olacaktır.

$A_1 = 10^2 = 100$ birimkare

$A_2 = 5^2 = 25$ birimkare

$r = \dfrac{A_2}{A_1} = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$ olur.

Buradan

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

$$= 100 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{15}}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{400}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{30}}\right) \text{ birimkare bulunur.}$$

ÖRNEK 46

Bir geometrik dizinin ilk 6 teriminin toplamının ilk üç teriminin toplamına oranı 65 ise bu dizinin ortak çarpanı kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\frac{S_6}{S_3} = 65$$

$$\frac{a_1\left(\frac{1-r^6}{1-r}\right)}{a_1\left(\frac{1-r^3}{1-r}\right)} = 65$$

$$\frac{1-r^6}{1-r^3} = 65$$

$$\frac{\cancel{(1-r^3)}(1+r^3)}{\cancel{1-r^3}} = 65$$

$$r^3 = 64$$

$r = 4$ bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1. **Aşağıdaki dizilerin genel terimini bulunuz.**

a) $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \ldots$

b) $0,3,\ 0,09,\ 0,027,\ 0,0081, \ldots$

c) $1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, \ldots$

ç) $-8, -2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, \ldots$

2. (a_n) geometrik bir dizi **olmak üzere** $a_3 = \frac{1}{3}$ ve $a_6 = 9$ ise a_4 **kaçtır?**

3. Bir geometrik dizinin ardışık üç terimi $x-3,\ 2x-1,\ 4x+13$ **ise x kaçtır?**

4. Ardışık üç terimi $x+y,\ 2x-3y,\ 3x-7$ olan dizi hem aritmetik hem geometrik dizi **ise bu dizinin ilk terimi kaçtır?**

5. 2 ile 512 sayıları arasına bu sayılarla geometrik dizi oluşturacak şekilde 3 sayı yazılıyor. **Buna göre bu dizinin üçüncü terimi kaçtır?**

6. **Aşağıdaki toplamları hesaplayınız.**

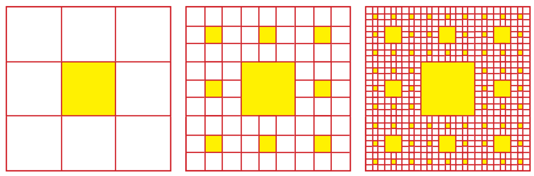
a) $-15 + 30 - 60 + \ldots - 960$

b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots - \frac{1}{512}$

c) $0,0025 + 0,025 + 0,25 + \ldots + 25000$

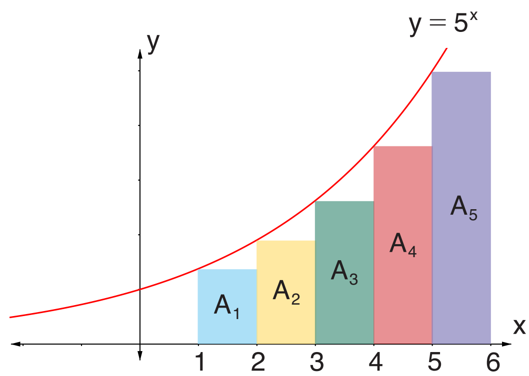
7. (a_n) geometrik dizisinde ilk n terim toplamı S_n olmak üzere $S_8 - S_5 = 32S_3$ **ise bu dizinin ortak çarpanı kaçtır?**

8.



Yukarıdaki şekilde I. adımda bir kenarı 9 birim olan bir kare, 9 tane eş kareye ayrılıp ortadaki kare boyanıyor. II ve III. adımda aynı işlem boyalı olmayan diğer karelerde tekrarlanıyor. **Buna göre III. adım sonunda boyalı karelerin alanları toplamı kaç olur?**

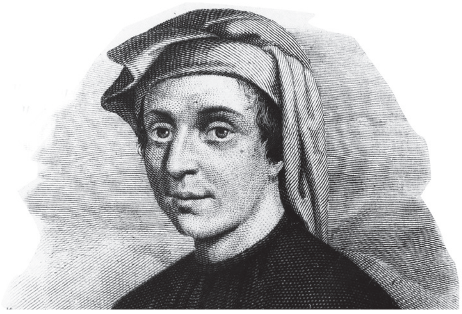
9.



Yukarıdaki grafikte bir köşesi $f(x) = 5^x$ fonksiyonu üzerinde bulunan dikdörtgenlerin alanları A_n **olmak üzere** $S_{10} = \sum_{k=1}^{10} A_k$ **değeri kaçtır?**

Fibonacci Dizisi

Fibonacci Hint-Arap ondalık sayı sistemini, Arap sayılarını kullanan ve bunları tanıtan ilk Avrupalıdır. 1202 yılında basılan kitabı "Liber Abaci" ondalık sistemde aritmetik işlemlerin nasıl yapılacağını anlatır.

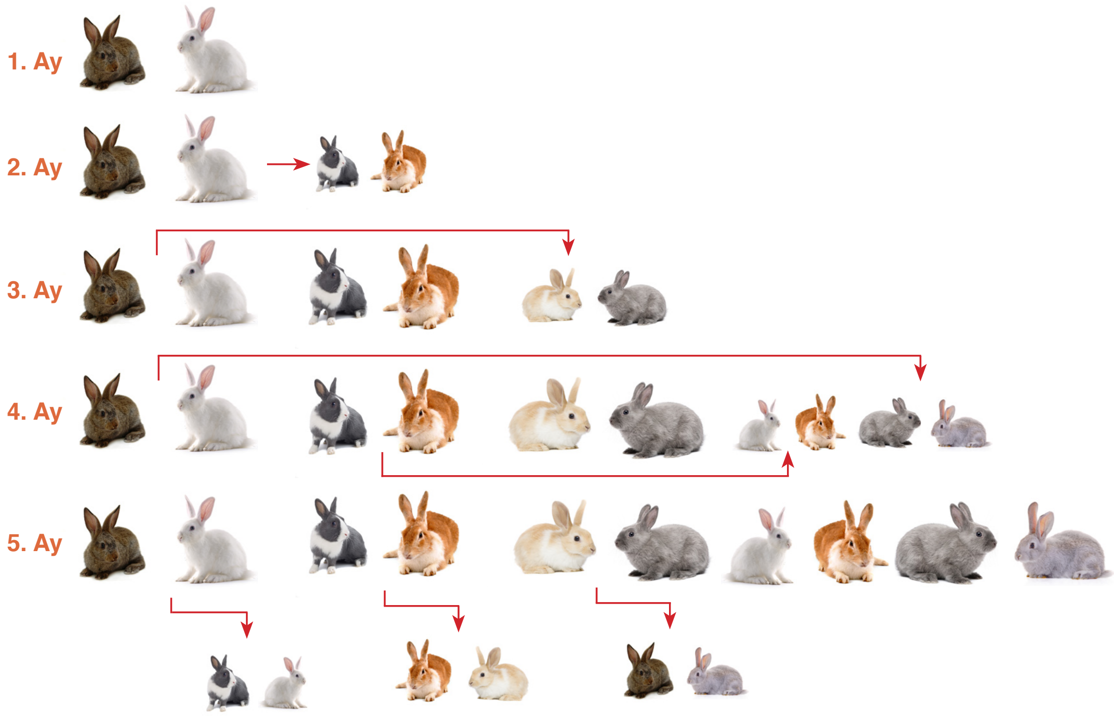

Görsel 2.5: Leonardo Fibonacci

Fibonacci "Liber Abaci"nin 12. bölümünde şu soruyu sormuştur: "Eğer bir tavşan çiftinden her ay yeni bir çift yavru doğarsa ve yeni doğan her çift ikinci ayında doğuracak seviyeye gelirse bir tavşan çiftiyle başlandıktan bir yıl sonra kaç tavşan çifti olur?"

Bu sorunun çözümü için aşağıdaki tablo oluşturulsun.

	Başlangıç	1. Ay	2. Ay	3. Ay	4. Ay	5. Ay
Yetişkin Çift	1	1	1	2	3	5
Bebek Çift	0	0	1	1	2	3
Toplam Çift	1	1	2	3	5	8

Tablo 2.2



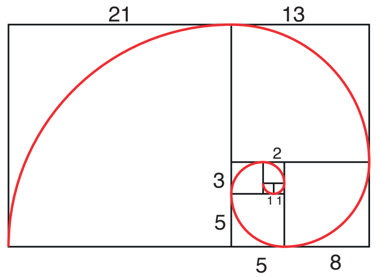
Görsel 2.6

Toplam çift dizisi, bir sonraki terim kendisinden önceki iki terimin toplamı şeklindedir. F_n toplam çift dizisi olmak üzere $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ ve $n > 2$ için $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ indirgeme bağıntısı ile gösterilebilir.

Buradan Fibonacci dizisi

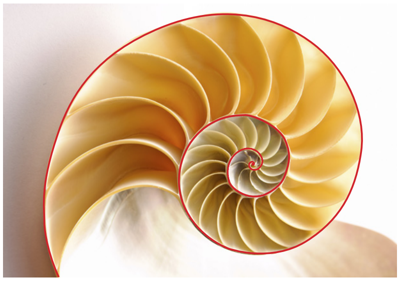
$(F_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...)$ biçiminde

bulunur. O hâlde 1 yıl sonra 233 tavşan çifti olur.



Uzun kenarının kısa kenarına oranı $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,618$ olan dikdörgenden her defasında bir kare çıkarılarak elde edilen karelerin kenar uzunluklarını yarıçap kabul eden çeyrek çemberin her bir karenin içine çizilmesiyle Fibonacci spirali oluşturulur.

Fibonacci dizisi, aritmetik ve geometrik dizi doğada pek çok yerde karşımıza çıkmaktadır.



Görsel 2.7: Deniz kabuğu

Örneğin deniz kabuğunda Fibonacci sayı dizisi vardır. Deniz kabuğu büyüdüğünde oluşan yeni odacıkların büyüklüğü kendinden önceki iki odacığın büyüklükleri toplamı kadardır.

Görsel 2.8: Çam kozalağı

Görsel 2.9: Ayçiçeği

Çam kozalağı ve ayçiçeğinin merkezinden dışarı doğru spiraller oluşturulursa sağdan sola ve soldan sağa doğru taneler sayıldığında ortaya çıkan sayılar Fibonacci dizisinin ardışık terimleridir.

Sadece doğada değil mimaride de Fibonacci dizisi, aritmetik ve geometrik dizi bulunmaktadır.

Görsel 2.10: Selimiye Camisi

Görsel 2.11: Süleymaniye Camisi

Mimar Sinan Süleymaniye ve Selimiye camilerinin minarelerinde Fibonacci dizisini kullanmıştır.

ÖRNEK 47

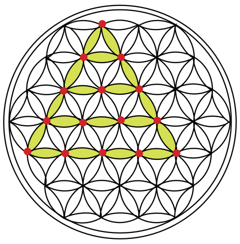
Yaşam Çiçeği

Yaşam çiçeği, iç içe geçmiş aynı yarıçapa sahip çemberlerden oluşan bir geometrik şekildir. Farklı coğrafyalarda yapılan arkeoloji çalışmalarında ortaya çıkan tarihî eserlerde örneklerini görmek mümkündür. Türkiye'de Beyşehir Eşrefoğlu Camisi'nde, Amasya Gök Medrese Camisi'nde, Mimar Sinan'ın Selimiye Camisi'nde yaşam çiçeği sembolleri mevcuttur. Bunun yanında sabun köpüğü, DNA sarmalı ve arı peteğinde de yaşam çiçeği sembolleri mevcuttur.

Amasya Gök Medrese Camisi'nden alınmış yaşam çiçeği motifi

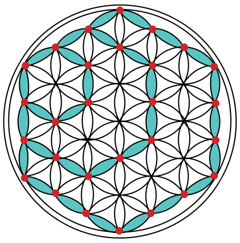
Yaşam çiçeği deseni üzerinde yapılan dizi uygulamaları aşağıda verilmiştir. Buna göre

a) Yandaki şekilde çemberlerin kesişim noktaları üçgensel sayı dizilimini göstermektedir. Buna göre üçgensel sayı dizisinin genel terimini bulunuz.



Mimar Sinan'ın Selimiye Camisi'nden alınmış yaşam çiçeği motifi

b) Yandaki şekilde çemberlerin kesişim noktaları altıgensel sayı dizilimini göstermektedir. Bu dizinin ilk n terim toplamı $S_n = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (4n-1)}{6}$ olduğuna göre a_{10} değerini bulunuz.



Beyşehir Eşrefoğlu Camisi'nden alınmış yaşam çiçeği motifi

ÇÖZÜM

a) Üçgensel sayı dizilimini gösteren şekil incelendiğinde sayı dizileri $1,\ 1+2,\ 1+2+3,\ \ldots,\ 1+2+3+\ldots+n$ şeklinde olup dizinin genel terimi $a_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ şeklinde elde edilir.

b) Altıgensel sayı dizisinin ilk n terim toplamı

$S_n = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (4n-1)}{6}$ olduğuna göre

$$S_9 = \frac{9 \cdot 10 \cdot 35}{6} = 525$$

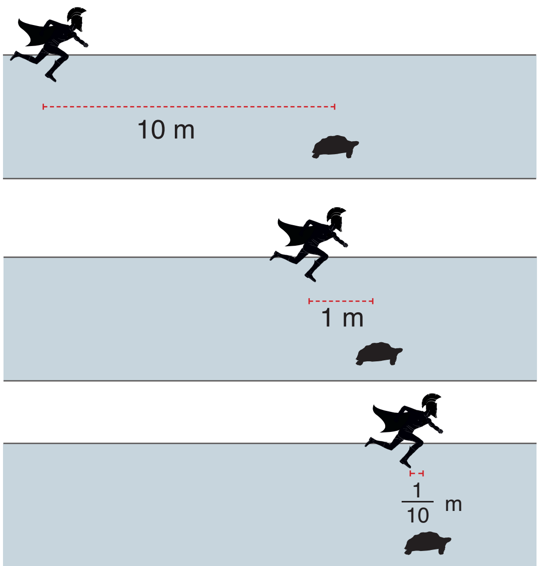
$$S_{10} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 39}{6} = 715 \text{ olur.}$$

Buradan

$$\begin{aligned} a_{10} &= S_{10} - S_9 \\ &= 715 - 525 \\ &= 190 \text{ olarak bulunur.} \end{aligned}$$

ALIŞTIRMALAR

1. Zeno Paradoksu



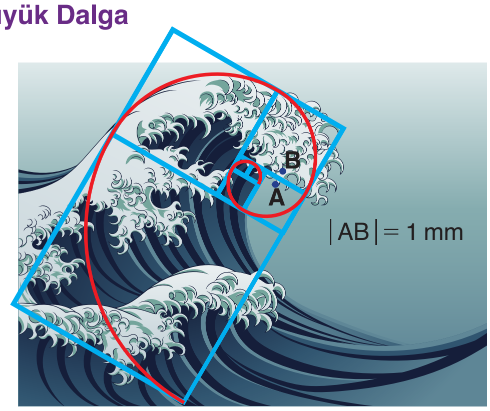
Yunan Felsefeci Zeno'nun geliştirdiği paradokslardan biri olan Achilles (Aşil) ve kablumbağa hikâyesi bir koşucunun gerçekte kaplumbağayı yakalayamacağını anlatır. Kaplumbağanın hızı 1m/sn ve Achilles'in hızı 10 m/sn olsun. Achilles 10 m koştuğunda kaplumbağa 1 m ilerleyecektir. Achilles 1 m koştuğunda kaplumbağa $\frac{1}{10}$ m ilerleyecektir.

Buna göre

a) **Yukarıdaki veriler yardımı ile bir (a_n) dizisi oluşturunuz ve a_5 değerini bulunuz.**

b) **İlk n terim toplamını ifade eden bağıntıyı ve (S_5) değerini bulunuz.**

2. Büyük Dalga

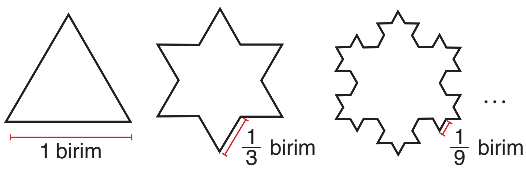


Katsushika Hokusai' ın (Hatışka Hoksay) en tanınan eseri olan "Kanagawa'nın (Hanagava) Büyük Dalgası" okyanusun gücünü anlatmaktadır. Ayrıca bu eserde Fibonacci spirali oluşmaktadır. Bu eser altın orana eşit oranlara göre çizilmiştir.

Buna göre en içteki karenin bir kenar uzunluğu $|AB| = 1$ mm olmak üzere Fibonacci spiralinde oluşan kırmızı yayların toplam uzunluğunu bulunuz.

3. Kar Tanesi

Helge Von Koch (Helge Fon Koh) tarafından 1904 yılında bulunan kar tanesi şeklindeki bölgenin çevre eğrisine Koch kar tanesi eğrisi denir ve bu eğriler fraktal oluşturur.



I. adım II. adım III. adım

Şekilde görüldüğü gibi 1 birim kenar uzunluğuna sahip eşkenar üçgenin her bir kenarı üzerinde kenar uzunluğu $\frac{1}{3}$ birim olan ikinci bir eşkenar üçgen çiziliyor. Bu şekilde 10. adıma kadar devam ediliyor. İlk şeklin çevre uzunluğu $Ç_1$, ikinci şeklin çevre uzunluğu $Ç_2$ olsun ve bu şekilde devam etsin.

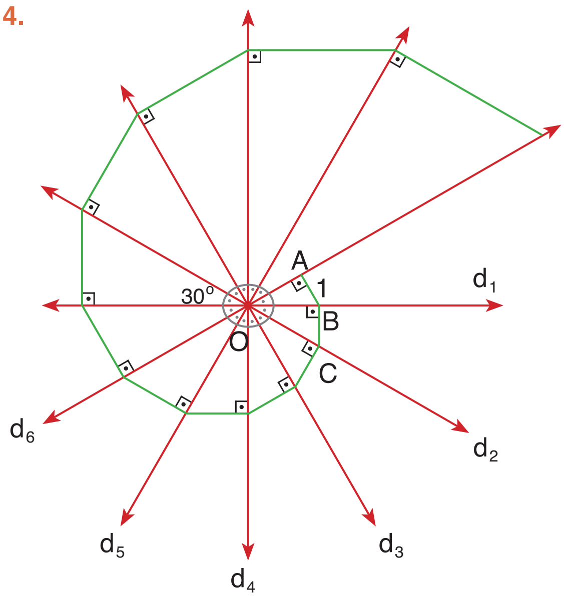
Buna göre

a) $Ç_1$, $Ç_2$, $Ç_3$ ve $Ç_4$ **ün değerlerini bulunuz.**

b) **10. adımda oluşan şeklin çevre uzunluğu olan $Ç_{10}$ değerini ve ilk 10 terim toplamının değerini bulunuz.**

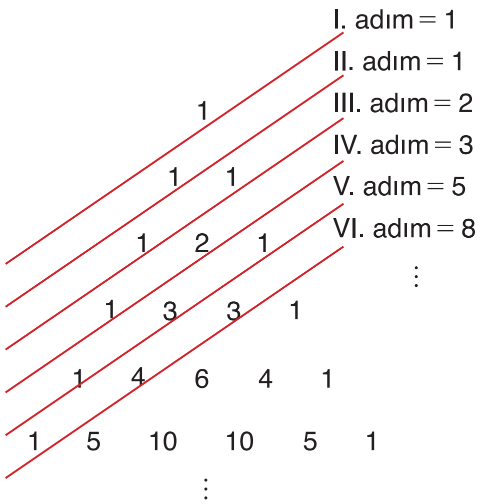
ALIŞTIRMALAR

4.



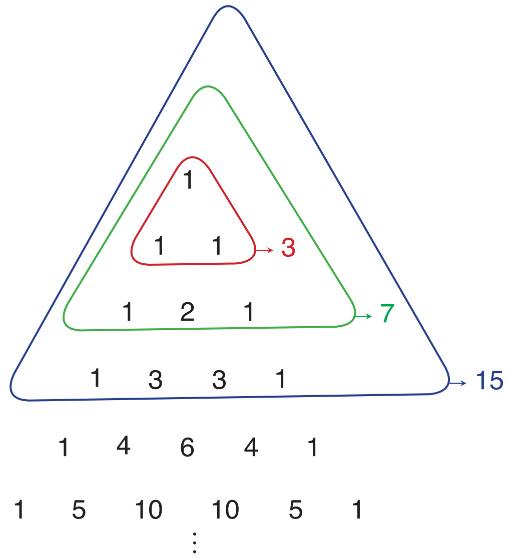
Yukarıdaki şekilde $d_1, d_2, \ldots, d_6$ doğruları 30^0 lik açılarla O noktasında kesişmektedir. $m(\widehat{AOB}) = 30^0$, $[AB] \perp d_6$ ve $[BC] \perp d_1$ olacak şekilde çiziliyor. $|AB| = 1$ birim **olmak üzere yeşil ile çizilen doğru parçalarının toplam uzunluğunu bulunuz.**

5. Pascal üçgeni kullanılarak Fibonacci sayıları bulunabilir. $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ olmak üzere $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ dizisi olarak bilinen Fibonacci dizisi şekildeki gibi çapraz binom sayılarının toplamına eşittir.



Buna göre çaprazlama işleminin 10. adımında hangi değer elde edilir?

6.



Pascal üçgeninin herhangi bir satırının yukarısında kalan üçgendeki sayıların toplamının bir dizi oluşturduğunu gösteriniz. S_n **toplam dizisini bulunuz.**

7.

1	I. adım $2^0 = 1$
1 1	II. adım $2^1 = 2$
1 2 1	III. adım $2^2 = 4$
1 3 3 1	IV. adım $2^3 = 8$
1 4 6 4 1	V. adım $2^4 = 16$
1 5 10 10 5 1	⋮
⋮	

Pascal üçgeninin her bir satırdaki elemanlar toplamının bir dizi oluşturduğunu gösteriniz. S_n **toplam dizisini bulunuz.**

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 2

A) Aşağıda indirgeme bağıntısı ile verilen dizilerin ilk 5 terimini karşılarındaki boşluklara yazınız.

1.

İndirgeme Bağıntısı	İlk 5 Terimi
$a_1 = 5$, $n \geq 2$ için $a_n - a_{n-1} = 3$	
$a_1 = 3$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = n$	
$a_1 = -2$ ve $a_{n+1} = \dfrac{n \cdot a_n}{n+1}$	
$a_1 = 3$, $a_2 = 1$, ve $a_n = a_{n+1} + 2a_{n+2} + 4n$	
$a_8 = 3$ ve $a_{n+2} + a_{n+1} = 3n - 1$	

B) Aşağıdaki diziler ile karşılarında verilen genel terimlerini eşleştiriniz.

2.

Dizi
I. (a_n) aritmetik dizi, $a_5 = 1$ ve ortak fark $d = -4$
II. (a_n) aritmetik dizi $a_7 = 8$ ve $a_{11} = 44$
III. (a_n) geometrik dizi $a_3 = 4$ ve ortak çarpan $r = 3$
IV. (a_n) geometrik dizi $a_5 = 32$ ve $a_2 = 4$
V. (a_n) hem aritmetik hem geometrik dizi $a_9 = 2$

Genel Terim
a) $a_n = 9n - 55$
b) $a_n = \dfrac{4}{27} \cdot 3^n$
c) $a_n = 2^n$
d) $a_n = 21 - 4n$
e) $a_n = 2$

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 2

C) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruları cevaplandırınız.

3. (a_n) dizisinde

$a_1 = -3$

$a_n = a_{n+1} - 2n + 1$

olduğuna göre a_n **dizisinin genel terimi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $n^2 - n - 2$ B) $n^2 - 2n - 1$ C) $n^2 - 2n - 2$

D) $n^2 + 2n - 1$ E) $n^2 + 2n - 2$

4. (a_n) dizisinde

$a_1 = 12$

$a_{n+1} - a_n = 10$

olduğuna göre a_{48} değeri kaçtır?

A) 120 B) 470 C) 480

D) 482 E) 576

5. Genel terimi $(a_n) = 2k(n-1) + 3n - 1$ olan dizi sabit dizi **olduğuna göre** a_5 **değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 2 D) 4 E) 8

6. $(a_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + 15k + 56} \right)$ **dizisinin kaçıncı terimi $\frac{3}{40}$ olur?**

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

7. $(\mathbf{a_n}) = \left(\frac{-n^2 + n + 12}{n^2 + 9} \right)$ **dizisinin kaç terimi pozitiftir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

8. $(\mathbf{a_n}) = \left(\frac{n^2 - 9n + 33}{n + 2} \right)$ **dizisinin kaç terimi 3 ten küçüktür?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9. $(\mathbf{a_n}) = (\log_2 (n + 1))$ **dizisinin kaç terimi $(2, 4]$ aralığındadır?**

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

10. $(\mathbf{a_n}) = (-n^2 + 5n - 4)$ **dizisinin en büyük terimi kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

11. $A_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $a_n : A_5 \to \mathbb{R}$ olmak üzere $(a_n) = \left(\frac{4+n}{n}\right)$ sonlu dizisi tanımlanıyor.
Buna göre (a_n) dizisinin terimleri çarpımı kaçtır?

A) 2 B) 32 C) 60 D) 120 E) 126

12. $(a_n) = \left(\frac{4n^2-9}{2n-k}\right)$

$(b_n) = (2n+3)$

dizileri eşit **olduğuna göre k değeri kaçtır?**

A) 3 B) -3 C) 2 D) -2 E) $\frac{2}{3}$

13. (a_n) bir aritmetik dizidir.

$a_{20} = 119$

$a_{15} = 89$

olduğuna göre a_9 değeri kaçtır?

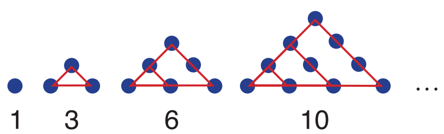
A) 50 B) 53 C) 70 D) 78 E) 81

14. Geometrik bir dizinin ilk n terim toplamı S_n olmak üzere $\frac{S_2}{S_4} = \frac{1}{65}$ **olduğuna göre bu geometrik dizinin ortak çarpanının pozitif değeri kaçtır?**

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

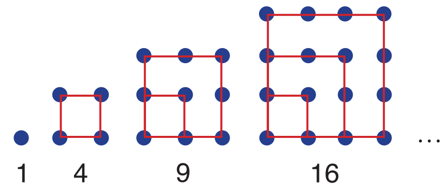
Ç) Aşağıdaki açık uçlu soruları cevaplandırınız.

15.



Yukarıdaki gibi oluşturulan üçgensel sayılardan kaç tanesi 90 dan küçüktür?

16.



Yukarıdaki gibi oluşturulan karesel sayılardan kaç tanesi 120 ile 400 arasındadır?

17. 4 ile 106 sayıları arasına ortak farkı 3 olan ve bu sayılarla birlikte aritmetik dizi oluşturacak şekilde kaç tane terim yerleştirilebilir?

18. Bir aritmetik dizinin ilk üç terimi

$4x+2,\ 2x-4,\ -x-3$ **olduğuna göre bu dizinin 10. terimi kaçtır?**

19. Bir öğrenci her gün bir önceki günde çözdüğü soru sayısından 10 soru daha az çözmektedir. **Son 10 günde toplam 1850 soru çözdüğüne göre son gün kaç soru çözmüştür?**

20. $(a_n) = \left(\frac{k-3n}{4n+2}\right)$ sabit dizi **olduğuna göre**

a) k değerini bulunuz.

b) (a_n) dizisinin ilk 40 terim toplamını bulunuz.

21. Genel terimi $a_n = n+1$ ve $b_n = n^2 - 1$ olan (a_n) ve (b_n) dizileri veriliyor.

$f(x) = \sum_{k=1}^{x} a_k$ ve $g(x) = \sum_{k=1}^{x} b_k$ **olduğuna göre $(fog)(2)$ değerini bulunuz.**

22. $a_1 = -2$ ve $n \geq 2$ olmak üzere $a_n = a_{n-1} + 2$ indirgeme bağıntısı veriliyor. $f(x) = 2x - 1$ **olduğuna göre** $\sum_{k=0}^{2} a_{k+2} \cdot f(k-2)$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

23. Genel terimi $a_n = \dfrac{4}{n^2 + n}$ olan dizi veriliyor.

Buna göre $\sum_{k=1}^{16} a_k$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

24. (a_n) dizisinin genel terimi

$$a_n = \begin{cases} 2n+1, & n \text{ çift ise} \\ 2n-3, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

olduğuna göre (a_n) dizisinin ilk 30 teriminin toplamı kaçtır?

25. (a_n) bir geometrik dizi olmak üzere

$a_1 \cdot a_3 = 144$

$a_2 \cdot a_5 = 1152$

olduğuna göre (a_n) dizisinin ortak çarpanı kaçtır?

26. 3 ile 27 arasına bu sayılarla birlikte geometrik dizi oluşturacak şekilde 5 terim yerleştiriliyor.
Buna göre oluşan yeni dizinin dördüncü terimi kaçtır?

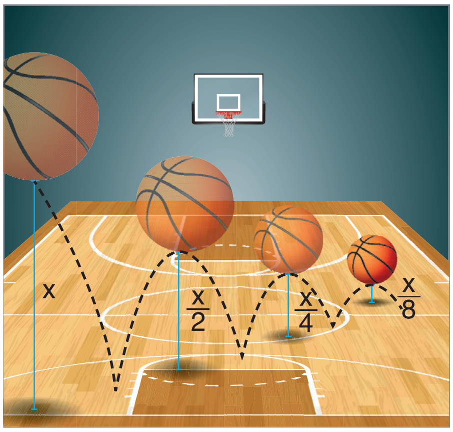
27. Her seferinde 90^0 sola ve yukarı dönerek bir öncekinin yarısı kadar yol alan bir karınca ilk olarak 256 cm sola doğru yol almıştır. Bu karınca 4. defa yukarı hareket ettikten sonra duruyor.
Buna göre

a) **Karıncanın yol haritasını çiziniz.**

b) **Karıncanın katettiği yolun başlangıç noktası ile bitiş noktası arasındaki en kısa mesafe kaç cm dir?**

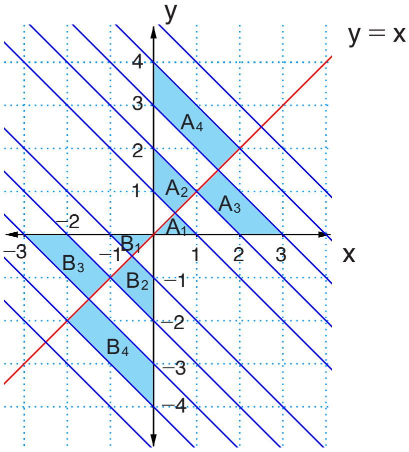
28. Sarkaç salınımı yapan bir cisim ilk salınımında 27 cm yol almıştır. Havanın direnci ve yer çekiminin etkisiyle cisim bir sonraki salınımında önce aldığı yolun $\frac{1}{3}$ ü kadar **yol aldığına göre 5. salınımında toplam kaç cm yol almış olur?**

29.



x metre yükseklikten bırakılan basketbol topu yere her çarptığında bir önceki yüksekliğinin yarısı kadar yükseliyor. Top 6. kez yere değdiğinde düşeyde aldığı toplam yol 19 metre **olduğuna göre topun kaç metre yüksekten bırakıldığını bulunuz.**

30.



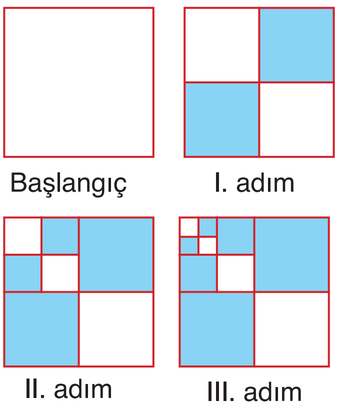
$a \in \mathbb{Z}$ ve $-20 \leq a \leq 20$ olmak üzere analitik düzlemde $x + y = a$ doğruları çiziliyor. Eksenler, $y = x$ ve bu doğrular arasında kalan alanlar yukarıdaki grafikteki gibi boyanıyor ve boyalı alanlar $A_1, A_2, ..., A_{20}, B_1, B_2, ..., B_{20}$ biçiminde gösteriliyor.

Buna göre

a) **$A_{20} + B_{20}$ boyalı bölgesi kaç birimkare olur?**

b) **$\sum_{k=1}^{20} A_k + \sum_{k=1}^{20} B_k$ toplamını bulunuz.**

31.



Kenar uzunluğu 4 birim olan kare I. adımda 4 eş kareye bölünüyor ve yukarıdaki gibi 2 kare boyanıyor. II. adımda sol üstteki kare 4 eş kareye bölünüyor ve iki kare boyanıyor. **Bu işleme devam edildiğinde 15. adımdan sonra boyalı olmayan karelerin alanları toplamı kaç birimkare olur?**

32.

Bir stadyumun C_1 kanadına ait oturma düzeni yukarıya doğru aritmetik bir dizi oluşturacak şekilde artmaktadır. Birinci sırada 50, ikinci sırada 54 koltuk vardır. Stadyumun C_1 kanadında toplam 1760 koltuk **olduğuna göre**

a) **(a_n) dizisine ait kuralı bulunuz.**

b) **Son sırada kaç koltuk vardır?**

c) **S_n toplam dizisini bulunuz.**

DEĞERLENDİRME

Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorular ile ilgili konuları veya faaliyetleri tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.

GEOMETRİ

3. TRİGONOMETRİ

3.1. TOPLAM-FARK VE İKİ KAT AÇI FORMÜLLERİ
3.2. TRİGONOMETRİK DENKLEMLER

Atlı cirit, takımlar halinde at üzerinde oynanan eski bir strateji oyunudur. Türkler bu oyunu Orta Asya'dan günümüze kadar taşımışlardır.

Cirit oyununda iki takım bulunur. Takımlar karşılıklı olarak dizilir ve at üzerinde sırayla birbirlerine yaklaşarak ellerindeki ciriti rakibine atıp puan almaya çalışırlar. Hiçbir spor dalında olmayan rakibini bağışlama seçeneği cirit oyununda puan kazandırmaktadır. Bu davranış sporcular arasındaki sevgi ve saygı bağlarını geliştirmektedir.

Hazırlık Çalışması

Eğik atılan bir cismin gideceği mesafe x, ilk hızı V_0, yatay düzlem ile oluşan açısı α ve yer çekimi ivmesi g $(g = 10)$ olmak üzere $x = \frac{V_0^2}{g}\sin 2\alpha$ biçiminde modellenmektedir. Buna göre ilk hızı 16 m/sn olan ve yatay düzlem ile $15°$ lik açı yaparak atılan bir ciritin gideceği mesafeyi bulunuz.

3.1. TOPLAM-FARK VE İKİ KAT AÇI FORMÜLLERİ

Bu Bölümde Neler Öğreneceksiniz?

- İki açının ölçüleri toplamının ve farkının trigonometrik değerlerini bulma
- İki kat açı formüllerini kullanarak işlem yapma

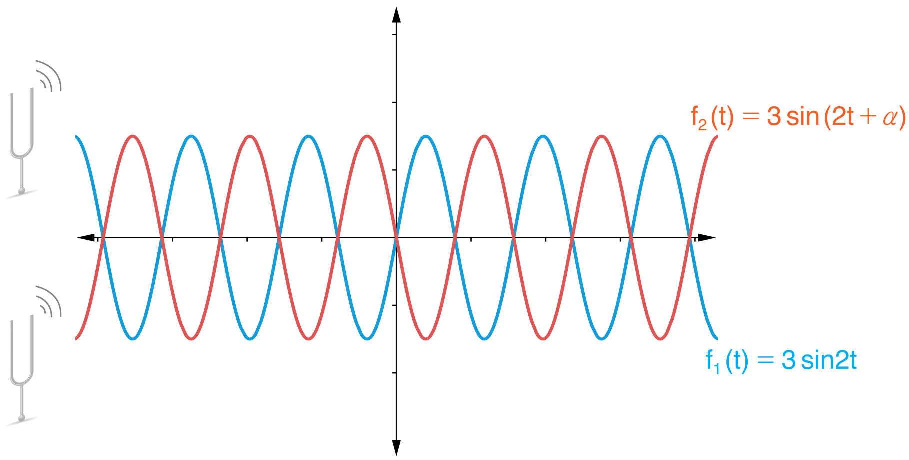
Toplam ve Fark Formülleri


Görsel 3.1: Diyapazon

Diyapazon, titreşince ana seslerden birini veren U şeklinde çelikten yapılmış bir alettir. Genellikle müzik aletlerinin akortlarını yapmak için kullanılır. Bir diyapazona vurulduktan t saniye sonra çıkan ses frekansı $f_1(t) = 3\sin 2t$ biçiminde, başka bir diyapazondan çıkan ses frekansı ise $f_2(t) = 3\sin(2t + \alpha)$ biçiminde modellenmektedir. $f_2(t)$ fonksiyonunda görüldüğü gibi sinüs foksiyonunun içerisinde iki değerin toplamı bulunmaktadır.

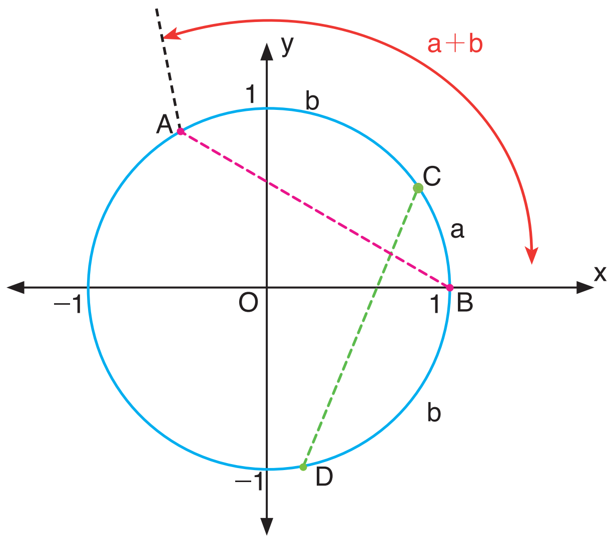
Diyapazondaki ses dalgası denkleminde olduğu gibi birçok gerçek hayat probleminde iki değerin toplamının veya farkının trigonometrik değerlerinin hesaplanmasına ihtiyaç duyulmaktadır.

Toplam veya fark formülleri olarak adlandırılan bu formüller $\sin(\alpha \pm \beta)$, $\cos(\alpha \pm \beta)$, $\tan(\alpha \pm \beta)$ veya $\cot(\alpha \pm \beta)$ biçimindedir.



Kosinüs İçin Toplam ve Fark Formülleri

Birim çember üzerinde $|AB| = |CD|$ olacak biçimde iki kiriş çizilsin.



$|\overset{\frown}{AC}| = |\overset{\frown}{BD}| = b$

$|\overset{\frown}{CB}| = a$

Bu çember üzerinde alınan A, B, C ve D noktalarının koordinatları

$A(\cos(a+b), \sin(a+b))$, $B(1, 0)$, $C(\cos a, \sin a)$ ve

$D(\cos(-b), \sin(-b)) = D(\cos b, -\sin b)$ olarak yazılır.

İki nokta arasındaki uzaklık formülünden

AB kirişinin uzunluğu

$$|AB| = \sqrt{(\cos(a+b)-1)^2 + (\sin(a+b)-0)^2}$$

$$= \sqrt{\cos^2(a+b) - 2\cos(a+b) + 1 + \sin^2(a+b)} \text{ bulunur. (I)}$$

İki nokta arasındaki uzaklık

$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$

$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

CD kirişinin uzunluğu

$$|CD| = \sqrt{(\cos a - \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2}$$

$$= \sqrt{\cos^2 a - 2\cos a \cdot \cos b + \cos^2 b + \sin^2 a + 2\sin a \cdot \sin b + \sin^2 b}$$

$$= \sqrt{\underbrace{\cos^2 a + \sin^2 a}_{1} + \underbrace{\cos^2 b + \sin^2 b}_{1} - 2\cos a \cdot \cos b + 2\sin a \cdot \sin b}$$

$$= \sqrt{2 - 2\cos a \cdot \cos b + 2\sin a \cdot \sin b} \text{ bulunur. (II)}$$

Buradan $|\overset{\frown}{AB}| = |\overset{\frown}{CD}|$ olduğundan (I) ve (II) denklemleri birbirine eşitlenerek her iki tarafın karesi alınırsa

$$\cos^2(a+b) - 2\cos(a+b) + 1 + \sin^2(a+b) = 2 - 2\cos a \cdot \cos b + 2\sin a \cdot \sin b$$

$$2 - 2\cos(a+b) = 2 - 2(\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b)$$

$$-2\cos(a+b) = -2(\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b)$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

kosinüs için toplam formülü elde edilir.

Bu formülde b yerine $-b$ yazılırsa

$$\cos(a+(-b)) = \cos a \cdot \cos(-b) - \sin a \cdot \sin(-b)$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

kosinüs için fark formülü elde edilir.

$\cos(-b) = \cos b$

$\sin(-b) = -\sin b$

Sinüs İçin Toplam ve Fark Formülleri

Sinüs toplam ve fark formülleri için

$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ özdeşliğinden yararlanılarak

$$\sin(a+b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right)$$
$$= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cdot\cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cdot\sin b \text{ bulunur.}$$

Kosinüs fark formülünden açılırsa

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$

Buradan

$\sin(a+b) = \sin a\cdot\cos b + \cos a\cdot\sin b$

sinüs toplam formülü elde edilir.

Sinüs fark formülü ise sinüs toplam formülünde b yerine $-b$ yazılarak

$\sin(a+(-b)) = \sin a\cdot\cos(-b) + \cos a\cdot\sin(-b)$

$\sin(a-b) = \sin a\cdot\cos b - \cos a\cdot\sin b$

şeklinde elde edilir.

Tanjant ve Kotanjant İçin Toplam ve Fark Formülleri

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a\cdot\cos b + \cos a\cdot\sin b}{\cos a\cdot\cos b - \sin a\cdot\sin b}$$

ifadesinde pay ve payda $\cos a\cdot\cos b$ ile bölünürse

$$\tan(a+b) = \frac{\dfrac{\sin a\cdot\cos b + \cos a\cdot\sin b}{\cos a\cdot\cos b}}{\dfrac{\cos a\cdot\cos b - \sin a\cdot\sin b}{\cos a\cdot\cos b}}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin a\cdot\cos b}{\cos a\cdot\cos b} + \dfrac{\cos a\cdot\sin b}{\cos a\cdot\cos b}}{\dfrac{\cos a\cdot\cos b}{\cos a\cdot\cos b} - \dfrac{\sin a\cdot\sin b}{\cos a\cdot\cos b}} = \frac{\dfrac{\sin a}{\cos a} + \dfrac{\sin b}{\cos b}}{1 - \dfrac{\sin a\cdot\sin b}{\cos a\cdot\cos b}}$$

tanjant için toplam formülü

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\cdot\tan b}$$

biçiminde elde edilir.

Tanjant için fark formülü ise tanjant toplam formülünde b yerine $-b$ yazılarak bulunur.

$$\tan(a+(-b)) = \frac{\tan a + \tan(-b)}{1 - \tan a\cdot\tan(-b)}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\cdot\tan b}$$

elde edilir.

$\cot(a+b) = \dfrac{1}{\tan(a+b)}$ ve $\cot(a-b) = \dfrac{1}{\tan(a-b)}$

kotanjant için toplam ve fark formülleridir.

Sonuç olarak toplam ve fark formülleri

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$

$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$

$\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$

$\cot(a+b) = \dfrac{1}{\tan(a+b)}$

$\cot(a-b) = \dfrac{1}{\tan(a-b)}$

şeklinde bulunur.

ÖRNEK 1

Aşağıdaki trigonometrik değerleri hesaplayınız.

a) $\cos\frac{\pi}{12}$

b) $\sin 105^\circ$

c) $\tan 15^\circ$

ç) $\cot 15^\circ$

ÇÖZÜM

a) $\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{6}$ Kosinüs fark formülü

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ bulunur.

b) $\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ)$

$= \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 45^\circ$ Sinüs toplam formülü

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ bulunur.

c) $\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ)$

$= \dfrac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \cdot \tan 30^\circ}$ Tanjant fark formülü

$= \dfrac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{\frac{3-\sqrt{3}}{\cancel{3}}}{\frac{3+\sqrt{3}}{\cancel{3}}}$

$= \dfrac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{\underset{(3-\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}}} = \dfrac{9+3-6\sqrt{3}}{6} = \dfrac{12-6\sqrt{3}}{6} = 2-\sqrt{3}$ bulunur.

ç) $\cot 15^\circ = \dfrac{1}{\tan 15^\circ}$

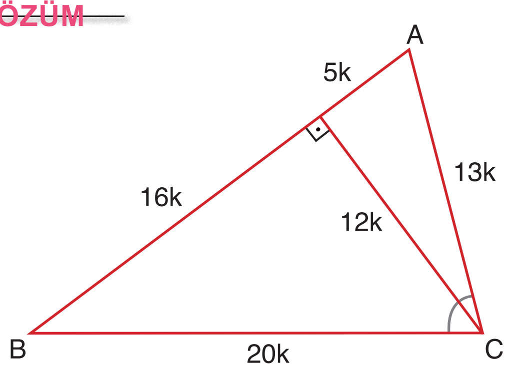
$= \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ $\tan 15^\circ = 2-\sqrt{3}$

$= \dfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3})} = 2+\sqrt{3}$ bulunur.

ÖRNEK 2

Bir ABC üçgeninde $\cos\widehat{A} = \frac{5}{13}$ ve $\sin\widehat{B} = \frac{3}{5}$ ise $\cos\widehat{C}$ kaçtır?

ÇÖZÜM



$\cos\widehat{A} = \frac{5k}{13k} = \frac{5}{13}$ ise $\sin\widehat{A} = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13}$ olur.

$\sin\widehat{B} = \frac{3k}{5k} = \frac{12}{20}$ ise $\cos\widehat{B} = \frac{16k}{20k} = \frac{4}{5}$ bulunur.

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$ olduğundan

$\widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B})$ olur.

Her iki tarafın kosinüsü alınırsa

$$\begin{aligned}
\cos\widehat{C} &= \cos(180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B})) \\
&= -\cos(\widehat{A} + \widehat{B}) \\
&= -(\cos\widehat{A} \cdot \cos\widehat{B} - \sin\widehat{A} \cdot \sin\widehat{B}) \\
&= -\left(\frac{5}{13} \cdot \frac{4}{5} - \frac{12}{13} \cdot \frac{3}{5}\right) \\
&= \frac{16}{65} \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

ÖRNEK 3

$\tan 67^\circ = a$ ise $\tan 44^\circ$ nin a türünden eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\tan 67^\circ = \cot 23^\circ = a$ olur.

$$\begin{aligned}
\tan 44^\circ &= \tan(67^\circ - 23^\circ) \\
&= \frac{\tan 67^\circ - \tan 23^\circ}{1 + \tan 67^\circ \cdot \tan 23^\circ} \\
&= \frac{a - \frac{1}{a}}{1 + a \cdot \frac{1}{a}} \\
&= \frac{\frac{a^2 - 1}{a}}{2} \\
&= \frac{a^2 - 1}{2a} \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

$\cot 23^\circ = a \Rightarrow \tan 23^\circ = \frac{1}{a}$ olur.

ÖRNEK 4

$\dfrac{\sin 25° + \sqrt{3}\cos 25°}{\cos 5°}$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\dfrac{\sin 25° + \sqrt{3}\cos 25°}{\cos 5°}$ ifadesinde $\sqrt{3}$ yerine $\tan 60° = \dfrac{\sin 60°}{\cos 60°}$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\sin 25° + \sqrt{3}\cos 25°}{\cos 5°} &= \frac{\sin 25° + \dfrac{\sin 60°}{\cos 60°}\cdot\cos 25°}{\cos 5°}\\
&= \frac{\sin 25°\cdot\cos 60° + \sin 60°\cdot\cos 25°}{\cos 60°\cdot\cos 5°}\\
&= \frac{\sin(25° + 60°)}{\cos 60°\cdot\cos 5°}\\
&= \frac{\sin 85°}{\dfrac{1}{2}\cdot\cos 5°}\\
&= \frac{\cos 5°}{\dfrac{1}{2}\cdot\cos 5°}\\
&= 2 \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

ÖRNEK 5

$\sin a + \cos b = \dfrac{1}{4}$ ve

$\cos a + \sin b = \dfrac{3}{4}$ ise

$\sin(a+b)$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$\sin a + \cos b = \dfrac{1}{4}$ ve

$\cos a + \sin b = \dfrac{3}{4}$

eşitliklerinde her iki tarafın karesi alınarak taraf tarafa toplandığında

$\sin^2 a + 2\sin a\cdot\cos b + \cos^2 b = \dfrac{1}{16}$

$\cos^2 a + 2\cos a\cdot\sin b + \sin^2 b = \dfrac{9}{16}$ olur.

$$\underbrace{\sin^2 a + \cos^2 a}_{1} + 2(\sin a\cdot\cos b + \cos a\cdot\sin b) + \underbrace{\cos^2 b + \sin^2 b}_{1} = \frac{10}{16}$$

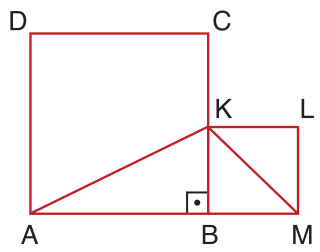
$$2 + 2\sin(a+b) = \frac{5}{8}$$

$$2\sin(a+b) = -\frac{11}{8}$$

$$\sin(a+b) = -\frac{11}{16}$$

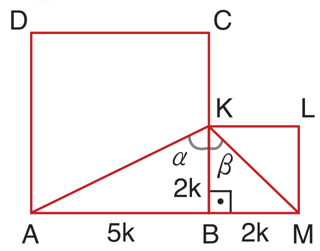
bulunur.

ÖRNEK 6



ABCD ve BMLK birer kare, K noktası BC kenarı üzerinde olmak üzere $2|AB| = 5|BM|$ ise $\tan(\widehat{AKM})$ kaçtır?

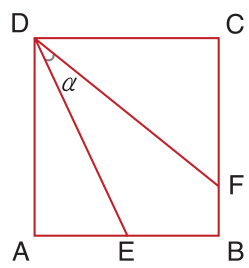
ÇÖZÜM



$\tan\alpha = \frac{5}{2}$ ve $\tan\beta = 1$ olur.

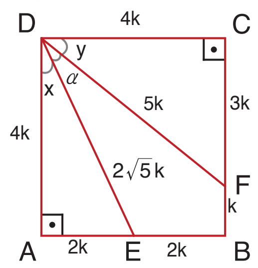
$$\tan(\widehat{AKM}) = \tan(\alpha + \beta)$$
$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$
$$= \frac{\frac{5}{2} + 1}{1 - \frac{5}{2} \cdot 1}$$
$$= \frac{\frac{7}{2}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{7}{3} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 7



ABCD bir kare
$|AE| = |EB|$ ve
$3|FB| = |CF|$ ise
$\cos(\widehat{EDF}) = \cos\alpha$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM



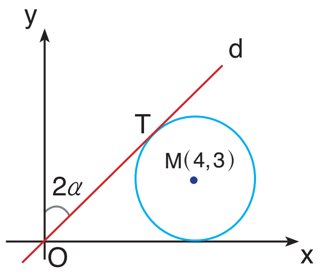
$|FB| = k$, $|CF| = 3k$, $m(\widehat{ADE}) = x$ ve $m(\widehat{FDC}) = y$ olsun.

FCD ve DAE dik üçgenlerinde Pisagor teoreminden $|DE| = 2\sqrt{5}k$ ve $|DF| = 5k$ olur.

Buradan

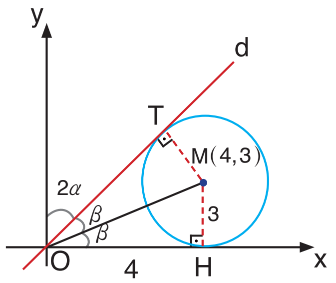
$$x + y + \alpha = 90^\circ$$
$$\alpha = 90^\circ - (x + y)$$
$$\cos\alpha = \cos(90^\circ - (x + y))$$
$$= \sin(x + y)$$
$$= \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$
$$= \frac{2k}{2\sqrt{5}k} \cdot \frac{4k}{5k} + \frac{4k}{2\sqrt{5}k} \cdot \frac{3k}{5k}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 8



Yandaki analitik düzlemde merkezi $M(4,\ 3)$ olan çember, x eksenine ve orijinden geçen d doğrusuna T noktasında teğettir. d doğrusunun y ekseni ile yaptığı dar açının ölçüsü 2α olduğuna göre $\tan\alpha$ kaçtır?

ÇÖZÜM



$$m(\widehat{TOH}) = 2\beta$$

$$2\alpha + 2\beta = 90^\circ$$

$$\alpha + \beta = 45^\circ$$

$$\alpha = 45^\circ - \beta$$

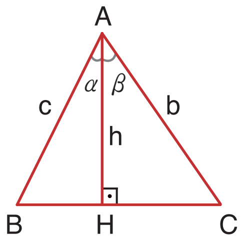
$$\tan\alpha = \tan(45^\circ - \beta)$$

$$= \frac{\tan 45^\circ - \tan\beta}{1 + \tan 45^\circ \cdot \tan\beta}$$

$$= \frac{1 - \frac{3}{4}}{1 + 1 \cdot \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}} = \frac{1}{7} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 9



Şekilde verilen ABC üçgeninde $m(\widehat{BAH}) = \alpha$, $m(\widehat{HAC}) = \beta$ ve $[AH] \perp [BC]$ olduğuna göre

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$

bağıntısının sağlandığını gösteriniz.

ÇÖZÜM

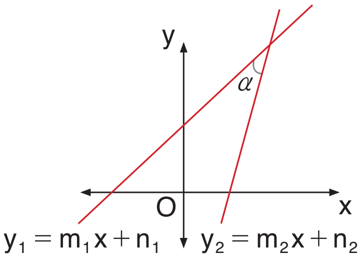
$A(\widehat{ABC}) = A(\widehat{ABH}) + A(\widehat{AHC})$ olduğuna göre

$$\frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2} \cdot h \cdot b \cdot \sin\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{h \cdot \sin\alpha}{b} + \frac{h \cdot \sin\beta}{c} \text{ olur.}$$

AHC dik üçgeninde $\cos\beta = \frac{h}{b}$ ve AHB dik üçgeninde $\cos\alpha = \frac{h}{c}$ değerleri yerine yazılırsa $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$ bulunur.

ÖRNEK 10



Analitik düzlemde

$d_1 : y_1 = m_1x + n_1$ ve

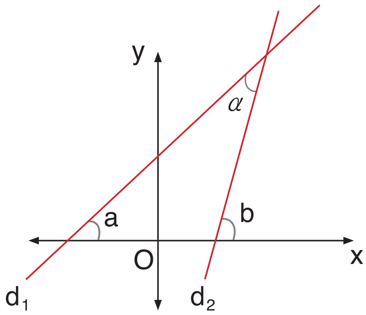
$d_2 : y_2 = m_2x + n_2$

doğruları verilsin.

Buna göre α dar açısı için

$\tan\alpha = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM



d_1 ve d_2 doğrularının eğimleri sırasıyla $m_1 = \tan a$ ve $m_2 = \tan b$ olur.

Buradan

$\alpha + a = b$

$\alpha = b - a$

$$\tan\alpha = \tan(b - a)$$

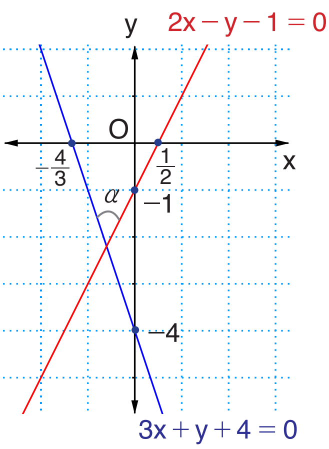
$$= \frac{\tan b - \tan a}{1 + \tan b \cdot \tan a}$$

$$= \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$$ olarak bulunur.

ÖRNEK 11

$2x - y - 1 = 0$ ve $3x + y + 4 = 0$ doğruları arasındaki dar açının ölçüsü kaç derecedir?

ÇÖZÜM



$2x - y - 1 = 0$ doğrusunun eğimi $m_1 = 2$ ve

$3x + y + 4 = 0$ doğrusunun eğimi $m_2 = -3$ olduğuna göre

$$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

$$= \frac{-3 - 2}{1 + 2 \cdot (-3)}$$

$$= \frac{-5}{-5} = 1$$ olur.

Buradan $\alpha = 45^\circ$ bulunur.

ÖRNEK 12

Aşağıdaki özdeşliklerin sağlandığını gösteriniz.

a) $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\cos(n\pi + \theta) = (-1)^n \cos\theta$

b) $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\sin(n\pi + \theta) = (-1)^n \sin\theta$

c) $\cos(x+y) \cdot \cos(x-y) = \cos^2 x - \sin^2 y$

ÇÖZÜM

a)
$$\begin{aligned}\cos(n\pi + \theta) &= \cos n\pi \cdot \cos\theta - \sin n\pi \cdot \sin\theta \\ &= (-1)^n \cdot \cos\theta - 0 \cdot \sin\theta \\ &= (-1)^n \cdot \cos\theta\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\sin(n\pi + \theta) &= \sin n\pi \cdot \cos\theta + \cos n\pi \cdot \sin\theta \\ &= 0 \cdot \cos\theta + (-1)^n \cdot \sin\theta \\ &= (-1)^n \cdot \sin\theta\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\cos(x+y) \cdot \cos(x-y) &= (\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y)(\cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y) \\ &= \cos^2 x \cdot \cos^2 y - \sin^2 x \cdot \sin^2 y \\ &= \cos^2 x \cdot (1 - \sin^2 y) - (1 - \cos^2 x) \cdot \sin^2 y \\ &= \cos^2 x - \cos^2 x \cdot \sin^2 y - \sin^2 y + \cos^2 x \cdot \sin^2 y \\ &= \cos^2 x - \sin^2 y\end{aligned}$$

ÖRNEK 13

Radyo Sinyali

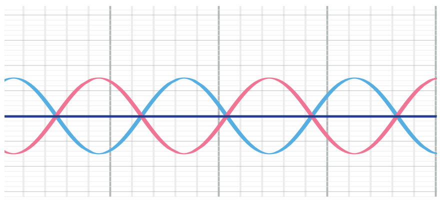
Bir radyoya ulaşan iki sinyalin t zamanına bağlı değişimleri $y_1 = 10\sin(3t + 45^\circ)$ ve $y_2 = 10\sin(3t + 225^\circ)$ biçiminde modellenmiştir. Buna göre bu radyoya ulaşan sinyallerin toplam değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Radyoya ulaşan sinyallerin toplam değeri

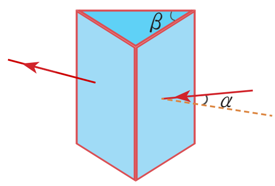
$$\begin{aligned}y_1 + y_2 &= 10\sin(3t + 45^\circ) + 10\sin(3t + 225^\circ) \\ &= 10(\sin 3t \cdot \cos 45^\circ + \cos 3t \cdot \sin 45^\circ) + 10(\sin 3t \cdot \cos 225^\circ + \cos 3t \cdot \sin 225^\circ) \\ &= 10\left[(\sin 3t) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (\cos 3t) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] + 10\left[(\sin 3t) \cdot \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) + (\cos 3t) \cdot \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\right] \\ &= 5\sqrt{2}\sin 3t + 5\sqrt{2}\cos 3t - 5\sqrt{2}\sin 3t - 5\sqrt{2}\cos 3t \\ &= 0 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Radyoya ulaşan sinyallerin toplam değerinin 0 olması radyo dalgalarının birbirini nötrleştirdiğini ve bu radyodan yayının duyulamayacağını gösterir.



ÖRNEK 14

Optik



Bir ışığın, taban açısı β olan bir prizmadan geçerken oluşan kırılma açısı α ve kırılma indisi n olmak üzere

$$n = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

biçiminde modellenmektedir.

Buna göre taban açısı $60°$ olan bir prizmadan geçen ışığın kırılma indisini α açısının trigonometrik oranları cinsinden bulunuz.

ÇÖZÜM

$$n = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)}{\sin\frac{\beta}{2}} \text{ ve } \beta = 60° \text{ ise}$$

$$n = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(\alpha+60°)\right)}{\sin\frac{60°}{2}}$$

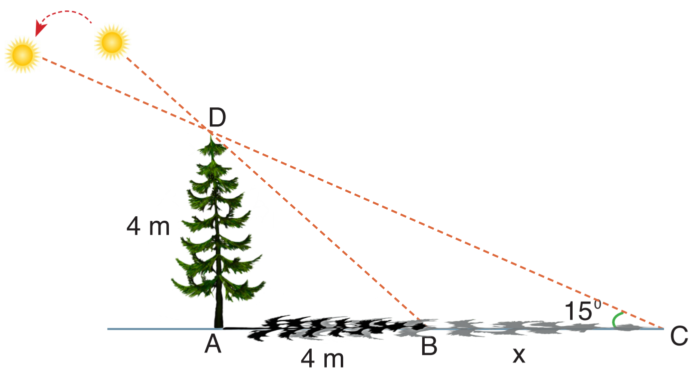
$$= \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+30°\right)}{\sin 30°}$$

$$= \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos 30° + \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin 30°}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{2}}$$

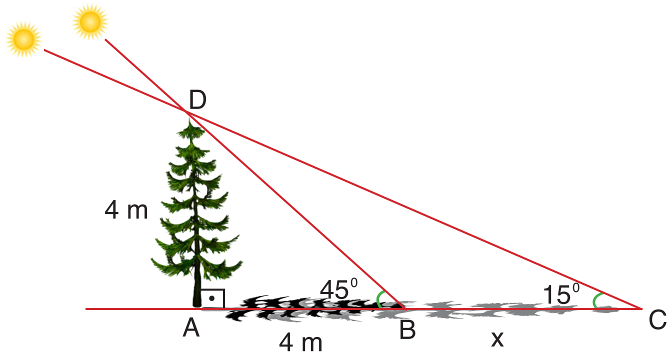
$$= \sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} \text{ olarak bulunur.}$$

ÖRNEK 15



Şekildeki 4 m uzunluğundaki bir ağacın gün içindeki iki farklı gölgesi |AB| ve |AC| olduğuna göre |BC| kaç metredir?

ÇÖZÜM



Şekildeki DAC dik üçgeninden $\tan 15^\circ = \dfrac{4}{4+x}$ olur.

Ayrıca

$$\begin{aligned}
\tan 15^\circ &= \tan(45^\circ - 30^\circ) \\
&= \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \cdot \tan 30^\circ} \\
&= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} \\
&= \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \\
&= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)} \\
&= \frac{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} \\
&= 2 - \sqrt{3} \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

Buradan $\tan 15^\circ = \dfrac{4}{4+x}$ ve $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$ sonuçları birbirine eşitlenirse

$$\begin{aligned}
2 - \sqrt{3} &= \frac{4}{4+x} \\
4 + x &= \frac{4}{2 - \sqrt{3}} \\
4 + x &= \frac{4(2 + \sqrt{3})}{2^2 - \sqrt{3}^2} \\
4 + x &= 8 + 4\sqrt{3} \\
x &= 4 + 4\sqrt{3} \text{ m olarak bulunur.}
\end{aligned}$$

$2 + \sqrt{3}$ ile genişletilir.

ALIŞTIRMALAR

1. **Aşağıdaki trigonometrik değerleri hesaplayınız.**

a) $\sin 15^\circ$

b) $\sin \dfrac{17\pi}{12}$

c) $\cos \dfrac{11\pi}{12}$

ç) $\tan 105^\circ$

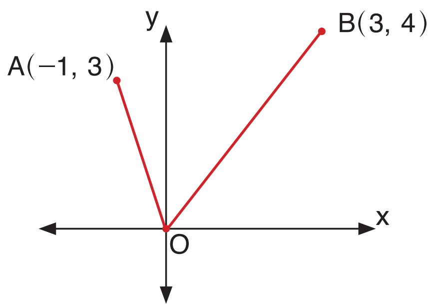
d) $\tan \dfrac{23\pi}{12}$

2. **Aşağıdaki eşitliklerin sağlandığını gösteriniz.**

a) $\tan x - \tan y = \dfrac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y}$

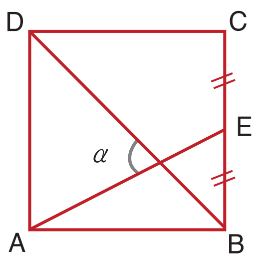
b) $\cot \alpha - \tan \beta = \dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin \alpha \cdot \cos \beta}$

3.



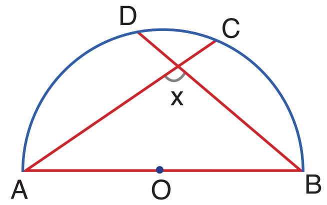
Yukarıdaki analitik düzlemde $A(-1, 3)$ ve $B(3, 4)$ noktaları veriliyor. **Buna göre** $\tan(\widehat{AOB})$ **kaçtır?**

4.



Yukarıda verilen ABCD karesinde $|CE| = |EB|$ olsun. **Buna göre** $\tan\alpha$ **değeri kaçtır?**

5.

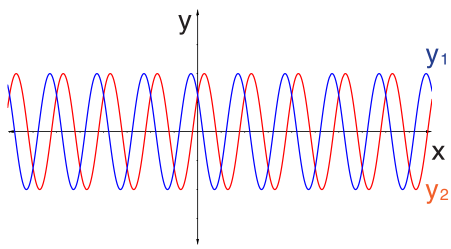


Yukarıda verilen $[AB]$ çaplı yarım çemberde $|AB| = 10$ birim, $|DB| = 6$ birim ve $|AC| = 5\sqrt{3}$ birim **ise** $\tan x$ **değerini bulunuz.**

6. $x - 2y = 5$ ve $x + 3y = 1$ **doğruları arasındaki dar açı kaç derecedir?**

7. $\cot 67^\circ = a$ ise $\tan 22^\circ$ nin **a türünden değerini bulunuz.**

8.



Yukarıdaki şekilde verilen İki ses dalgası

$y_1 = A\cos\left(2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\lambda}\right)\right)$ ve

$y_2 = A\cos\left(2\pi\left(\dfrac{t}{T} + \dfrac{x}{\lambda}\right)\right)$

biçiminde tanımlanıyor.

Burada

A : Ses genliği

T : Periyot

λ : Dalga uzunluğu

t : Zaman

olduğuna göre

$y_1 + y_2 = 2A\cos\dfrac{2\pi t}{T} \cdot \cos\dfrac{2\pi x}{\lambda}$

olduğunu gösteriniz.

İki Kat Açı Formülleri

İki kat açı formülleri bir açının iki katının trigonometrik değeri ile bu açının trigonometrik değerleri arasındaki bağıntıları gösteren formüllerdir. Bu formüller toplam ve fark formüllerinden yararlanılarak elde edilir.

Kosünüs İki Kat Açı Formülleri

$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$ toplam formülünde $y = x$ alınırsa
$\cos(x+x) = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$
iki kat açı formülü bulunur.

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ özdeşliğinden yararlanılarak
$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ve $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ değerleri
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ denkleminde sırasıyla yazılırsa

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) \\ &= 2\cos^2 x - 1\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x \\ &= 1 - 2\sin^2 x\end{aligned}$$ bulunur.

SONUÇ

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

ÖRNEK 16

Aşağıdaki ifadeleri tanımlı oldukları x değerleri için sadeleştiriniz.

a) $\dfrac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$ **b)** $\dfrac{1 + \cos 2x}{\cos x}$

ÇÖZÜM

a) $\dfrac{\cos 2x}{\sin x - \cos x} = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x - \cos x}$

$= \dfrac{\cancel{(\cos x - \sin x)}(\cos x + \sin x)}{\cancel{\sin x - \cos x}} = -(\cos x + \sin x)$ bulunur.

$\dfrac{\cos x - \sin x}{\sin x - \cos x} = -1$

b) $\dfrac{1 + \cos 2x}{\cos x} = \dfrac{1 + 2\cos^2 x - 1}{\cos x}$

$= \dfrac{2\cos^2 x}{\cos x} = 2\cos x$ bulunur.

ÖRNEK 17

$\dfrac{\sqrt{1 - \cos 70^\circ}}{\sin 35^\circ}$ ifadesinin değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$\dfrac{\sqrt{1 - \cos 70^\circ}}{\sin 35^\circ} = \dfrac{\sqrt{1 - (1 - 2\sin^2 35^\circ)}}{\sin 35^\circ}$

$= \dfrac{\sqrt{1 - 1 + 2\sin^2 35^\circ}}{\sin 35^\circ} = \dfrac{\sqrt{2}\sin 35^\circ}{\sin 35^\circ} = \sqrt{2}$ bulunur.

ÖRNEK 18

$\cos x = \frac{1}{3}$ ise $\cos 4x$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$ olur.

Buradan

$$\begin{aligned}\cos 2x &= 2\cos^2 x - 1\\ &= 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1\\ &= \frac{2}{9} - 1\\ &= \frac{-7}{9} \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Bu değer $\cos 4x$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\cos 4x &= 2\cos^2 2x - 1\\ &= 2\cdot\left(\frac{-7}{9}\right)^2 - 1\\ &= 2\cdot\frac{49}{81} - 1\\ &= \frac{17}{81} \text{ elde edilir.}\end{aligned}$$

Sinüs İki Kat Açı Formülleri

$\sin(x+y) = \sin x\cdot\cos y + \cos x\cdot\sin y$ toplam formülünde $y = x$ alınırsa

$$\begin{aligned}\sin(x+x) &= \sin x\cdot\cos x + \cos x\cdot\sin x\\ \sin 2x &= 2\sin x\cdot\cos x\end{aligned}$$

biçiminde iki kat açı formülü elde edilir.

ÖRNEK 19

$\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$ ise $\sin 2x$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$ ifadesinde her iki tarafın karesi alınırsa

$$\begin{aligned}(\sin x + \cos x)^2 &= \left(\frac{1}{3}\right)^2\\ \sin^2 x + 2\sin x\cdot\cos x + \cos^2 x &= \frac{1}{9}\\ \sin 2x + 1 &= \frac{1}{9}\\ \sin 2x &= -\frac{8}{9} \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK 20

$\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x} = \frac{3}{5}$ ise $\cot x$ değerini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$$\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}=\frac{3}{5}$$

$$\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x+2\cdot\sin x\cdot\cos x}=\frac{3}{5}$$

$$\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{3}{5}$$

$$\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}=\frac{3}{5} \text{ olur.}$$

Buradan

$$5\cos x-5\sin x=3\sin x+3\cos x$$

$$2\cos x=8\sin x$$

$$\cot x=4 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 21

$14x=\pi$ olmak üzere $\frac{\sin 5x}{\sin 3x}+\frac{\cos 5x}{\cos 3x}$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{\sin 5x}{\sin 3x}+\frac{\cos 5x}{\cos 3x}=\frac{\sin 5x\cdot\cos 3x+\sin 3x\cdot\cos 5x}{\sin 3x\cdot\cos 3x}$$

$$=\frac{\sin(5x+3x)}{\frac{\sin 6x}{2}}$$

Sinüs toplam formülünden

Sinüs iki kat açı formülünden

$$=\frac{2\sin 8x}{\sin 6x}$$

$$=\frac{2\sin(\pi-6x)}{\sin 6x}$$

$8x+6x=\pi$

$8x=\pi-6x$

$$=\frac{2\cancel{\sin 6x}}{\cancel{\sin 6x}}=2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 22

$\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\sin 20^\circ\cdot\cos 20^\circ=\frac{\sin 40^\circ}{2}$

$$\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ=\frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}\cdot\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ$$

$\sin 20^\circ$ ile genişletilir.

$\sin 40^\circ\cdot\cos 40^\circ=\frac{\sin 80^\circ}{2}$

$$=\frac{\frac{\sin 40^\circ}{2}}{\sin 20^\circ}\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ$$

$\sin 80^\circ\cdot\cos 80^\circ=\frac{\sin 160^\circ}{2}$

$$=\frac{\frac{\sin 80^\circ}{4}\cdot\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}$$

$$=\frac{\frac{\sin 160^\circ}{8}}{\sin 20^\circ}$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{1}{8}\cdot\frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{1}{8} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 23

sin3x ifadesinin sinx türünden eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

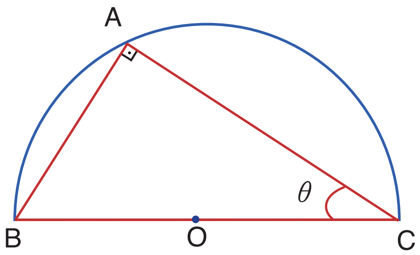
$$\begin{aligned}\sin 3x &= \sin(2x + x)\\ &= \sin 2x \cdot \cos x + \cos 2x \cdot \sin x\\ &= 2\sin x \cdot \cos^2 x + (1 - 2\sin^2 x)\cdot \sin x\\ &= 2\sin x \cdot (1 - \sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x\\ &= 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x\\ &= 3\sin x - 4\sin^3 x \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

ÖRNEK 24



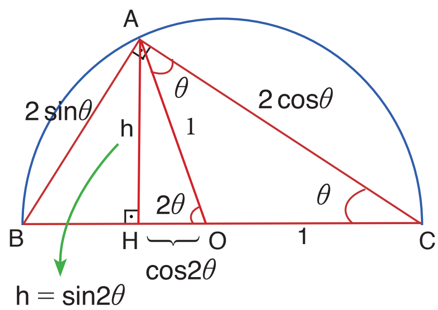
Şekilde O merkezli $[BC]$ çaplı ve $|BC| = 2$ birim olan yarım çember ile çemberin içine çizilen ABC üçgeni verilmiştir. $m(\widehat{ACB}) = \theta$ olduğuna göre

$\sin 2\theta = 2\sin\theta \cdot \cos\theta$ ve

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM



$$\cos\theta = \frac{|AC|}{2} \Rightarrow |AC| = 2\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{|AB|}{2} \Rightarrow |AB| = 2\sin\theta$$

$$\cos 2\theta = \frac{|OH|}{1} \Rightarrow |OH| = \cos 2\theta$$

$$\sin 2\theta = \frac{|AH|}{1} \Rightarrow |AH| = \sin 2\theta$$

olur.

BAC dik üçgeninin alanı

$$A(\widehat{BAC}) = \frac{|AH| \cdot |BC|}{2} = \frac{|AB| \cdot |AC|}{2}$$

$$= \frac{\sin 2\theta \cdot 2}{2} = \frac{2\sin\theta \cdot 2\cos\theta}{2}$$

Buradan

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ elde edilir.

BAC dik üçgeninde Öklid teoreminden

$|AC|^2 = |HC| \cdot |BC|$

$(2\cos\theta)^2 = (1 + \cos 2\theta)\cdot 2$

$4\cos^2\theta = (1 + \cos 2\theta)\cdot 2$

$2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ bulunur.

Tanjant ve Kotanjant İki Kat Açı Formülleri

$\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\cdot\tan y}$ toplam formülünde $y=x$ alınırsa

$$\tan(x+x)=\frac{\tan x+\tan x}{1-\tan x\cdot\tan x}$$

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

tanjant iki kat açı formülü elde edilir.

Buradan kotanjant iki kat açı formülü ise

$\cot 2x=\dfrac{1}{\tan 2x}$ biçiminde olur.

ÖRNEK 25

$\tan 22,5^\circ$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\tan 45^\circ=\tan(2\cdot 22,5^\circ)$

$1=\dfrac{2\tan(22,5^\circ)}{1-\tan^2(22,5^\circ)}$ olur.

Buradan

$1-\tan^2(22,5^\circ)=2\tan(22,5^\circ)$ bulunur.

$\tan(22,5^\circ)=x$ alınırsa

$x^2+2x-1=0$ II. dereceden denklemi elde edilir.

$\triangle=4-4(-1)=8$

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\triangle}}{2a}=\dfrac{-2-\sqrt{8}}{2}=-1-\sqrt{2}<0$

$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\triangle}}{2a}=\dfrac{-2+\sqrt{8}}{2}=-1+\sqrt{2}>0$

kökleri bulunur.

$\tan(22,5^\circ)$ pozitif olduğundan $\tan(22,5^\circ)=\sqrt{2}-1$ olur.

SIRA SİZDE

$\tan 15^\circ$ değerini bulunuz.

ÖRNEK 26

$\cos\theta = -\dfrac{3}{5}$ ve $\pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$

olmak üzere aşağıdaki trigonometrik değerleri hesaplayınız.

a) $\sin 2\theta$

b) $\cos 2\theta$

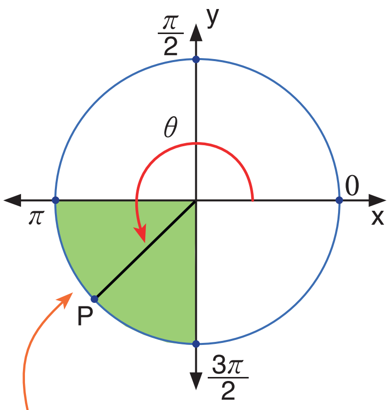
c) $\tan 2\theta$

ç) $\sin\dfrac{\theta}{2}$

d) $\cos\dfrac{\theta}{2}$

e) $\tan\dfrac{\theta}{2}$

ÇÖZÜM

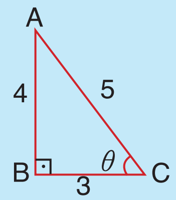


θ açısı III. bölgededir.

a) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$$= 2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$= \frac{24}{25} \text{ olur.}$$



III. bölgede kosinüs ve sinüs değerleri negatiftir.

b) $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$$= 2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^2 - 1$$

$$= \frac{18}{25} - 1$$

$$= -\frac{7}{25} \text{ olur.}$$

c) $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$$= \frac{2\cdot\frac{4}{3}}{1-\left(\frac{4}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{8}{3}}{-\frac{7}{9}} = \frac{8}{3}\cdot\left(-\frac{9}{7}\right) = -\frac{24}{7} \text{ olur.}$$

ç) $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \text{ olur.}$$

$\pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$ ise $\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\theta}{2} < \dfrac{3\pi}{4}$

olduğundan $\dfrac{\theta}{2}$ açısı II. bölgededir. II. bölgede sinüs pozitif değer aldığından $\sin\theta = \sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$ olur.

Buradan

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{8}{10}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ bulunur.}$$

d) $\cos\theta = 2\cos^2\dfrac{\theta}{2} - 1$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \text{ olur.}$$

$\pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$ ise $\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\theta}{2} < \dfrac{3\pi}{4}$

olduğundan $\dfrac{\theta}{2}$ açısı II. bölgededir.

II. bölgede kosinüs fonksiyonu negatif değer aldığından

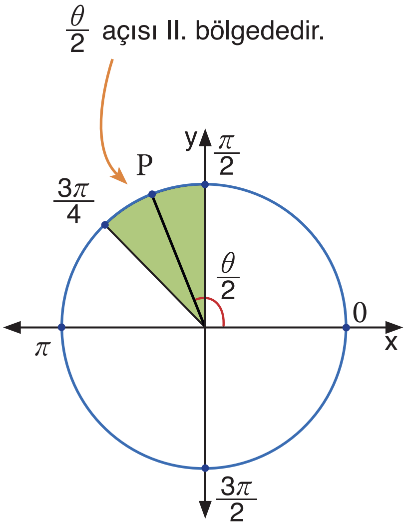
$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{1+\left(\frac{-3}{5}\right)}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$= -\frac{\sqrt{5}}{5} \text{ bulunur.}$$



e)

$$\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$\tan\dfrac{\theta}{2} = x$ olsun.

$$\frac{4}{3} = \frac{2x}{1-x^2}$$

$$2 - 2x^2 = 3x$$

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$(x-2)(2x+1) = 0$$

$x_1 = -2$ ve $x_2 = \dfrac{1}{2}$ olur.

Buradan II. bölgede $\tan\dfrac{\theta}{2}$ negatif olduğundan $\tan\dfrac{\theta}{2} = -2$ bulunur.

SIRA SİZDE

$\tan x = \dfrac{3}{4}$, $\pi < x < \dfrac{3\pi}{4}$ olduğuna göre $\sin\dfrac{x}{2}$, $\cos\dfrac{x}{2}$ ve $\tan\dfrac{x}{2}$ değerlerini hesaplayınız.

ÖRNEK 27

Aşağıdaki eşitliklerin sağlandığını gösteriniz.

a) $\tan^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$

b) $\sin^2\theta \cdot \cos^2\theta = \dfrac{1-\cos 4\theta}{8}$

c) $\cos\theta = \dfrac{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}$

ç) $\cot 2\theta = \dfrac{1}{2}(\cot\theta - \tan\theta)$

d) $\cos^4\theta - \sin^4\theta = \cos 2\theta$

ÇÖZÜM

a) $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ iki kat açı formülü düzenlenirse

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ olur.

Ayrıca $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ olduğundan $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ bulunur.

Buradan

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\dfrac{1-\cos 2x}{2}}{\dfrac{1+\cos 2x}{2}} = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} \text{ bulunur.}$$

b) $$\sin^2\theta \cdot \cos^2\theta = (\sin\theta \cdot \cos\theta)^2 = \left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)^2 = \frac{\sin^2 2\theta}{4} = \frac{\dfrac{1-\cos 4\theta}{2}}{4} = \frac{1-\cos 4\theta}{8} \text{ bulunur.}$$

$\cos 4\theta = 1 - 2\sin^2 2\theta$

$\sin^2 2\theta = \dfrac{1-\cos 4\theta}{2}$

c) $$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \cos^2\frac{\theta}{2} \cdot \frac{\cos^2\dfrac{\theta}{2} - \sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}} = \cos^2\frac{\theta}{2} \cdot \left(1 - \tan^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}} = \frac{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{\dfrac{\sin^2\dfrac{\theta}{2} + \cos^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}} = \frac{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{\tan^2\dfrac{\theta}{2} + 1} = \frac{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}} \text{ bulunur.}$$

İfade $\cos^2\dfrac{\theta}{2}$ ile genişletilir.

ç) $\cot 2\theta = \dfrac{1}{\tan 2\theta}$

$= \dfrac{1}{\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}}$

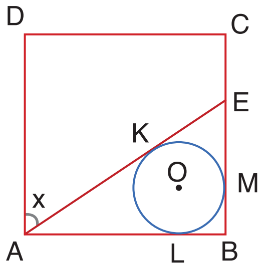
$= \dfrac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta}$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\tan\theta} - \dfrac{\tan^2\theta}{\tan\theta}\right) = \dfrac{1}{2}(\cot\theta - \tan\theta)$ bulunur.

d) $\cos^4\theta - \sin^4\theta = (\cos^2\theta - \sin^2\theta)(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

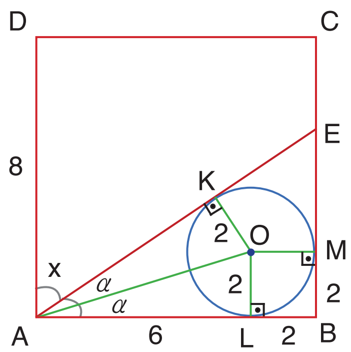
$= \cos 2\theta \cdot 1 = \cos 2\theta$ bulunur.

ÖRNEK 28



Şekildeki O merkezli çember AB doğru parçasına L noktasında, AE doğru parçasına K noktasında ve BC doğru parçasına da M noktasında teğettir. ABCD karesinde $|AB| = 8$ birim ve çemberin yarıçapı 2 birim ise tanx değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



OA doğru parçası çizilsin ve $m(\widehat{OAB}) = m(\widehat{KAO}) = \alpha$ olsun.

Buradan $|AL| = 6$ ve $\tan\alpha = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ olur.

$2\alpha + x = 90°$

$x = 90° - 2\alpha$

$\tan x = \tan(90° - 2\alpha)$

$= \cot 2\alpha$

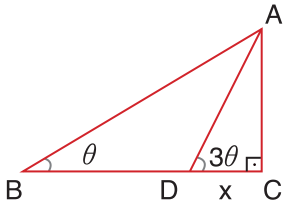
$= \dfrac{1}{\tan 2\alpha}$

$= \dfrac{1}{\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}$

$= \dfrac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha}$

$= \dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}{2\cdot\dfrac{1}{3}} = \dfrac{4}{3}$ elde edilir.

ÖRNEK 29



ACB dik üçgeninde

$m(\widehat{ABC}) = \theta$,

$m(\widehat{ADC}) = 3\theta$,

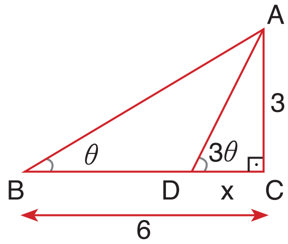
$|AC| = 3$ birim ve

$|BC| = 6$ birim

ise $|DC| = x$ kaç birim olur?

ÇÖZÜM

ACB dik üçgeninde verilenler yerine yazılırsa



$$\tan 3\theta = \frac{3}{x}$$

$$\tan\theta = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned}
\tan 3\theta &= \tan(2\theta + \theta) \\
&= \frac{\tan 2\theta + \tan\theta}{1 - \tan 2\theta \cdot \tan\theta} \\
&= \frac{\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} + \tan\theta}{1 - \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \cdot \tan\theta} \\
&= \frac{\dfrac{2\tan\theta + \tan\theta - \tan^3\theta}{1-\tan^2\theta}}{\dfrac{1-\tan^2\theta - 2\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}} \\
&= \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta} \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

Buradan $\tan\theta = \frac{1}{2}$ değeri üstteki ifadede yerine yazılırsa

$$\tan 3\theta = \frac{3 \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^3}{1 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{x}$$

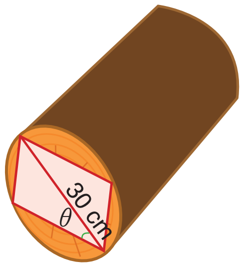
$$\frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{8}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{3}{x}$$

$$\frac{\frac{11}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{x}$$

$$\frac{11}{2} = \frac{3}{x}$$

$$x = \frac{6}{11} \text{ birim elde edilir.}$$

ÖRNEK 30



30 cm çaplı silindir biçimli bir ağaçtan şekildeki gibi bir kereste parçası çıkarılacaktır.

Buna göre

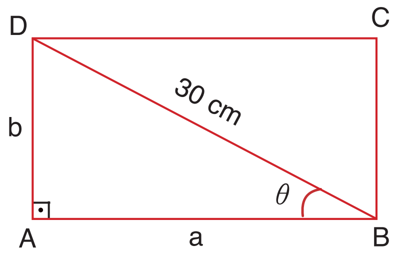
a) Bu kereste parçasının taban alanının θ değişkenine bağlı olarak $A(\theta) = 450\sin 2\theta$ fonksiyonu ile bulunduğunu gösteriniz.

b) Kereste parçasının taban alanının maksimum olması için θ açısı kaç derece olmalıdır?

ÇÖZÜM

ABCD dikdörtgeninde $|AB| = a$ ve $|AD| = b$ olsun.

a)



$$\cos\theta = \frac{a}{30} \Rightarrow a = 30\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{b}{30} \Rightarrow b = 30\sin\theta$$

$$\begin{aligned} \text{Alan}(ABCD) &= a \cdot b \\ &= 30\cos\theta \cdot 30\sin\theta \\ &= 900\sin\theta \cdot \cos\theta \\ &= 900\frac{\sin 2\theta}{2} \\ &= 450\sin 2\theta \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

b) Kereste parçasının dikey yüzey alanı $A(\theta) = 450\sin 2\theta$ olup bu alanın en büyük olması için $\sin 2\theta$ nın en büyük değeri alması gerekir.

$-1 \le \sin 2\theta \le 1$ olduğundan $\sin 2\theta$ değeri en büyük 1 olur.

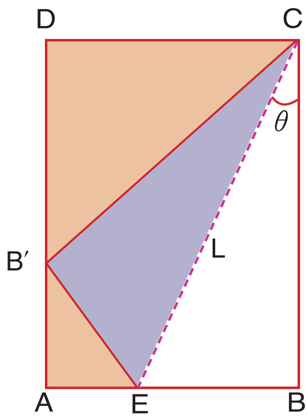
Buradan θ açısı

$\sin 2\theta = 1$

$2\theta = 90°$

$\theta = 45°$ bulunur.

ÖRNEK 31



AB uzunluğu 12 cm olan ve $m(\widehat{ECB})=\theta$ şekildeki dikdörtgende B köşesi AD kenarının üzerine gelecek şekilde katlanıyor.

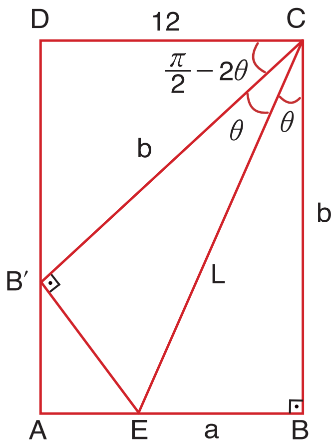
Buna göre

$|EC|=L$ ise $L=\dfrac{6}{\sin\theta\cdot\cos^2\theta}$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

ABCD dikdörtgeninde $m(\widehat{BCE})=m(\widehat{B'CE})=\theta$ olur.



$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)=\frac{12}{b}$$

$$\sin 2\theta=\frac{12}{b}$$

$$2\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{12}{b}$$

$$\cos\theta=\frac{b}{L}\quad\Rightarrow\quad b=L\cos\theta$$

$$2\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{12}{L\cos\theta}$$

$$2L\sin\theta\cdot\cos^2\theta=12$$

$$L=\frac{12}{2\sin\theta\cdot\cos^2\theta}$$

$$L=\frac{6}{\sin\theta\cdot\cos^2\theta}$$ bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1. **Aşağıdaki tirigonometrik değerleri iki kat açı formüllerinden yararlanarak hesaplayınız.**

a) $\sin 22,5^\circ$ **ç)** $\sin 112,5^\circ$

b) $\cos 22,5^\circ$ **d)** $\tan \frac{5\pi}{12}$

c) $\cos 165^\circ$ **e)** $\sin \frac{11\pi}{12}$

2. **Aşağıdaki ifadelerin doğruluğunu gösteriniz.**

a) $\frac{\sin 8^\circ}{1+\cos 8^\circ} = \tan 4^\circ$

b) $\sqrt{\frac{1-\cos 8\theta}{2}} = |\sin 4\theta|$

c) $\tan \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$

3. **Aşağıda verilenlere göre**
$\sin \frac{x}{2}$, $\cos \frac{x}{2}$ ve $\tan \frac{x}{2}$ **değerlerini bulunuz.**

a) $\cos x = \frac{4}{5}, \quad 270^\circ < x < 360^\circ$

b) $\operatorname{cosec} x = 3, \quad 90^\circ < x < 180^\circ$

c) $\cot x = 5, \quad \pi < x < \frac{3\pi}{2}$

ç) $\tan x = -1, \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi$

4. $\cos 3x$ **ifadesinin** $\cos x$ **türünden eşitini bulunuz.**

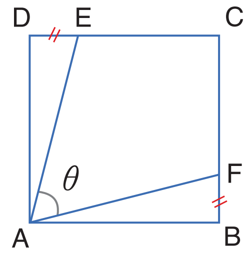
5. **Aşağıdaki eşitliklerin sağlandığını gösteriniz.**

a) $\operatorname{cosec} 2\theta = \frac{\operatorname{cosec}\theta}{2\cos\theta}$

b) $\frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta} = \frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1}$

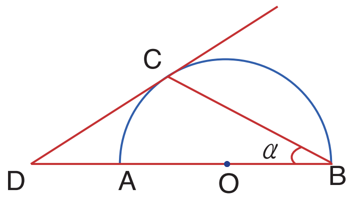
c) $\ln|\cos\theta| = \frac{1}{2}(\ln|1+\cos 2\theta| - \ln 2)$

6.



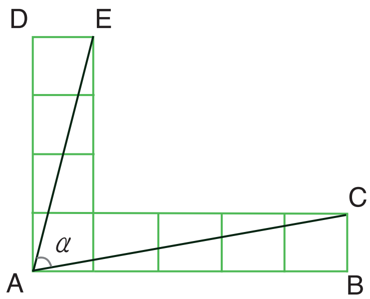
Yakarıdaki şekilde ABCD bir kare,
$m(\widehat{FAE}) = \theta$, $|DE| = |FB|$ ve $|AB| = 4|BF|$
olduğuna göre $\tan\theta$ **değerini bulunuz.**

7.

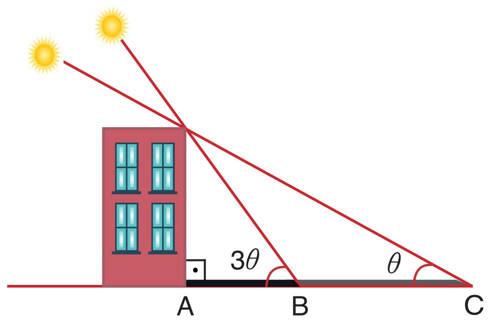


Yakarıdaki şekilde $[DC$, O merkezli $[AB]$ çaplı çembere C noktasında teğet olsun. D, A ve B doğrusal, $|AB| = 12$ birim ve $|AD| = 4$ birim ise $\tan\alpha$ **değerini bulunuz.**

8. **Aşağıda verilen özdeş birim karelere ayrılmış şekle göre** $\tan(\widehat{EAC})$ **değeri kaçtır?**



9.



Yukarıdaki şekilde bir binanın aynı gün içerisinde farklı zamanlarda ölçülmüş gölgeleri verilmiştir. $|AB| = 2$ m ve $|BC| = 10$ m **olduğuna göre binanın yüksekliği kaç m dir?**

3.2. TRİGONOMETRİK DENKLEMLER

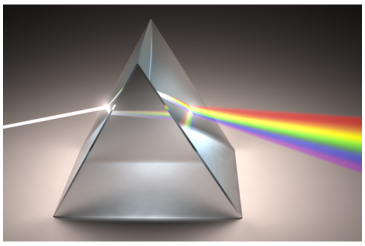
Bu Bölümde Neler Öğreneceksiniz?

- Trigonometrik denklemlerin çözüm kümelerini bulma

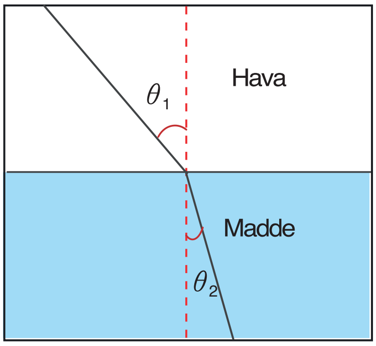
Terimler ve Kavramlar

- Trigonometrik denklem

Işık bir ortamdan başka bir ortama geçerken kırılır. Snell (Snel) yasasına göre v_1 ışığın ilk ortamdaki hızı, v_2 ışığın diğer ortamdaki hızı olmak üzere $\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$ olur.



Görsel 3.2: Işık kırılması



$\frac{v_1}{v_2}$ oranına kırılma indisi denir.

Madde	Hava/Madde Kırılma indisi
Su	1,33
Alkol	1,36
Cam	1,52
Elmas	2,41

Tablo 3.1

Örneğin kırılma indisi 2 olan bir ortamda yüzey ile yüzeye düşen ışın arasında 60° açı olsun. Bu ışının başka bir ortama geçerken oluşturduğu kırılma açısını bulmak için Snell yasası kullanılır.

Snell denkleminde olduğu gibi içerisinde trigonometrik fonksiyonların bulunduğu denklemlere trigonometrik denklemler denir. Birçok gerçek hayat durumu problemleri trigonometrik denklemle ifade edilir. Trigonometrik denklemlerin çözümleri farklı biçimlerde yapılır.

$\sin x = a$, $\cos x = a$ ve $\tan x = a$ Biçimindeki Trigonometrik Denklemler

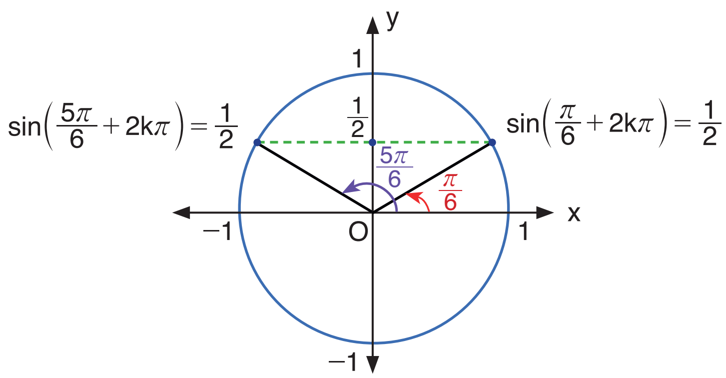
$\sin x = a$ Denkleminin Çözüm Kümesi

ÖRNEK 1

$\sin x = \frac{1}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

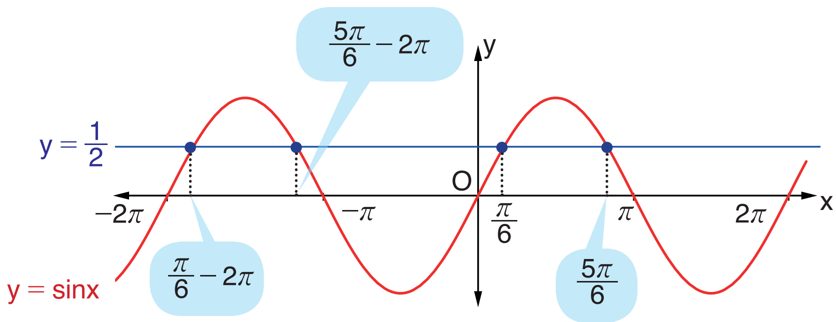
ÇÖZÜM

$\sin x = \frac{1}{2}$ denkleminin $[0, 2\pi)$ aralığında I. bölgede $x = \frac{\pi}{6}$ ve II. bölgede $x = \frac{5\pi}{6}$ biçiminde iki çözümü vardır. Birim çember üzerinde her 2π periyodda aynı değerler tekrarlanır. $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\sin x = \frac{1}{2}$ denkleminin kökleri $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ veya $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ biçiminde elde edilir.



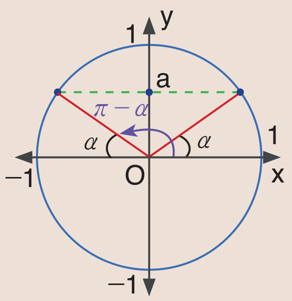
Buradan $Ç = \left\{x \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \lor x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ bulunur.

$\sin x = \frac{1}{2}$ denkleminin çözümü grafiksel olarak incelenirse



$y = \sin x$ fonksiyonu ile $y = \frac{1}{2}$ doğrusunun kesişim noktalarının $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ veya $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ olduğu görülür.



SONUÇ

$-1 \leq a \leq 1$ olmak üzere $\sin x = a$ denkleminin köklerinden biri α olmak üzere bu denklemin çözüm kümesi

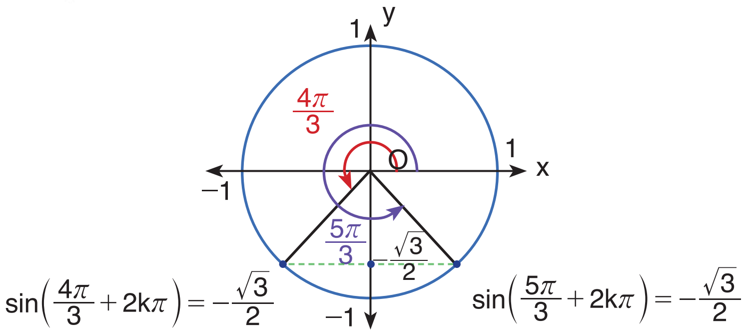
$Ç = \{x \mid x = \alpha + 2k\pi \vee x = (\pi - \alpha) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

olarak bulunur.

ÖRNEK 2

$\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM



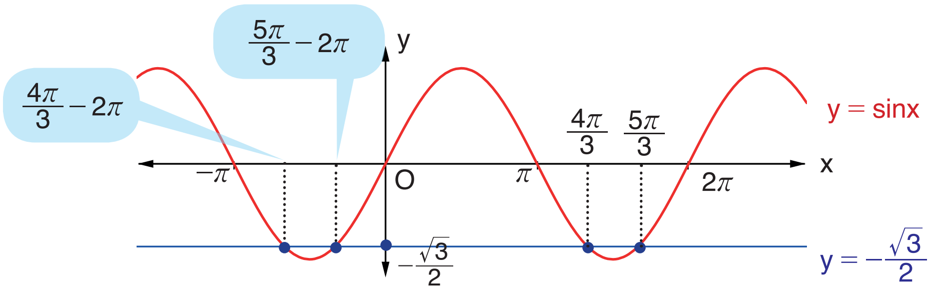
$[0,\ 2\pi)$ aralığında $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ denkleminin biri III. ve biri IV. bölgede olmak üzere iki farklı çözümü vardır.

Bunlar $x = \pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$ ve $x = 2\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3}$ olur.

Buradan çözüm kümesi

$Ç = \left\{x \mid\ x = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ bulunur.

$\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ denkleminin çözümü grafiksel olarak incelenirse



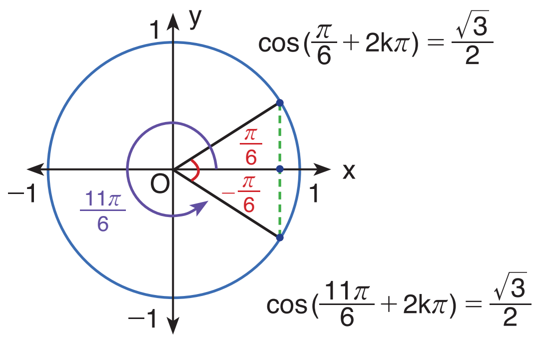
$y = \sin x$ fonksiyonu ile $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ doğrusunun kesişim noktalarının $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$x = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi$ ve $x = \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi$ olduğu görülür.

ÖRNEK 3

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM



$[0, 2\pi)$ aralığında $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ denkleminin biri I. bölgede, biri IV. bölgede olmak üzere iki farklı çözümü vardır.

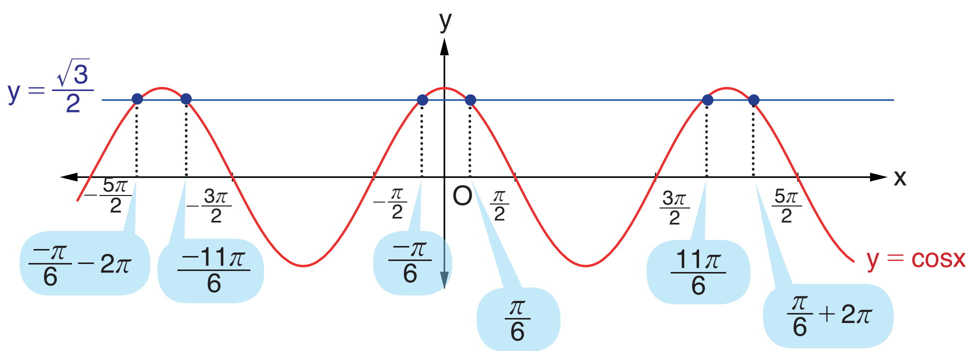
Bunlar $x = \frac{\pi}{6}$ ve $x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$ biçimindedir.

Buradan bütün çözümler $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ veya $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$ şeklinde elde edilir.

Çözüm kümesi

$Ç = \left\{x \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ olur.

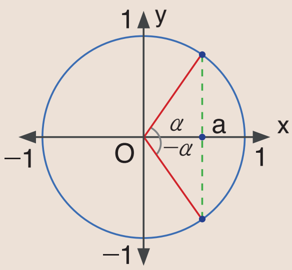
$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ denkleminin çözümü grafiksel olarak incelenirse



$y = \cos x$ fonksiyonu ile $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ doğrusunun kesişim noktalarının

$k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ veya $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$ olduğu görülür.



SONUÇ

$-1 \le a \le 1$ olmak üzere $\cos x = a$ denkleminin köklerinden biri α olmak üzere bu denklemin çözüm kümesi

$Ç = \{x \mid x = \alpha + 2k\pi \ \vee \ x = -\alpha + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$

olarak bulunur.

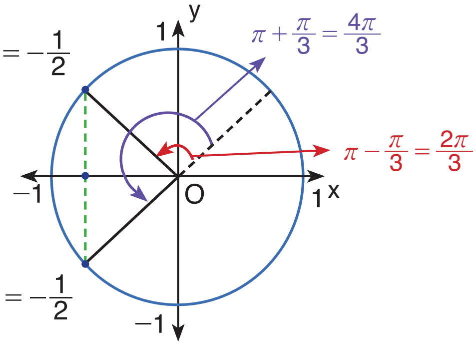
ÖRNEK 4

$\cos x = -\frac{1}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

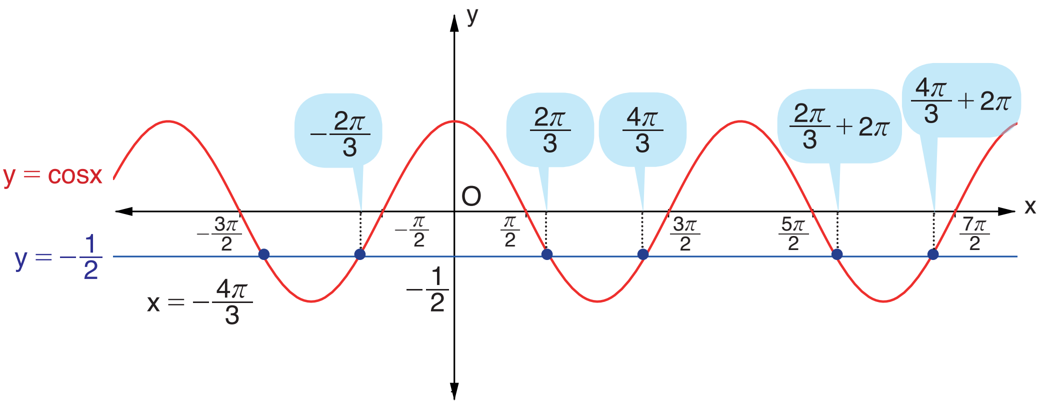
$\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) = -\frac{1}{2}$

$\cos\left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right) = -\frac{1}{2}$



$Ç = \left\{x \mid x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$\cos x = -\frac{1}{2}$ denkleminin çözüm kümesi grafiksel olarak incelenirse



$y = \cos x$ fonksiyonu ile $y = -\frac{1}{2}$ doğrusunun kesişim noktalarının $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ veya $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ olduğu görülür.

ÖRNEK 5

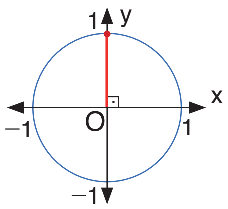
Aşağıdaki trigonometrik denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $\sin x = 1$ **c)** $\cos x = 1$ **d)** $\sin x = -1$

b) $\sin x = 0$ **ç)** $\cos x = 0$ **e)** $\cos x = -1$

ÇÖZÜM

a)

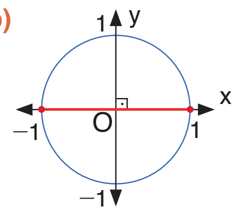


$[0, 2\pi)$ aralığında $\sin x = 1$ denkleminin tek çözümü $x = \frac{\pi}{2}$ şeklinde bulunur.

Bu durumda

$Ç = \left\{x \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ elde edilir.

b)



$[0, 2\pi)$ aralığında $\sin x = 0$ denkleminin kökleri $x = 0$ veya $x = \pi$ şeklinde bulunur.

Bu durumda

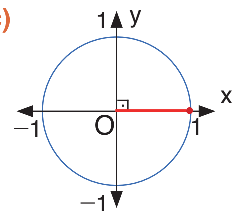
$Ç = \{x \mid x = 2k\pi \vee x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

elde edilir. Buradan $k \in \mathbb{Z}$ olduğu için

$\sin x = 0$ denkleminin çözüm kümesi kısaca

$Ç = \{x \mid x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ biçiminde bulunur.

c)

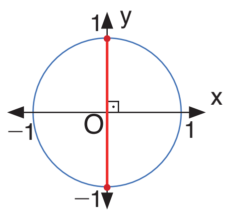


$[0, 2\pi)$ aralığında $\cos x = 1$ denkleminin tek çözümü $x = 0$ şeklinde bulunur.

Bu durumda

$Ç = \{x \mid x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ elde edilir.

ç)



$[0, 2\pi)$ aralığında $\cos x = 0$ denkleminin kökleri $x = \frac{\pi}{2}$ veya $x = \frac{3\pi}{2}$ şeklinde bulunur.

Bu durumda

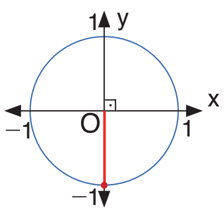
$Ç = \left\{x \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

olur.

Buradan $k \in \mathbb{Z}$ olduğundan

$Ç = \left\{x \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ bulunur.

d)

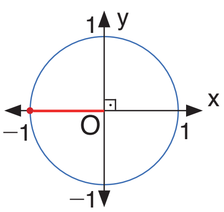


$[0, 2\pi)$ aralığında $\sin x = -1$ denkleminin tek çözümü $x = \frac{3\pi}{2}$ şeklinde bulunur.

Bu durumda

$Ç = \left\{x \mid x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ elde edilir.

e)



$[0, 2\pi)$ aralığında $\cos x = -1$ denkleminin tek çözümü $x = \pi$ şeklinde bulunur.

Bu durumda

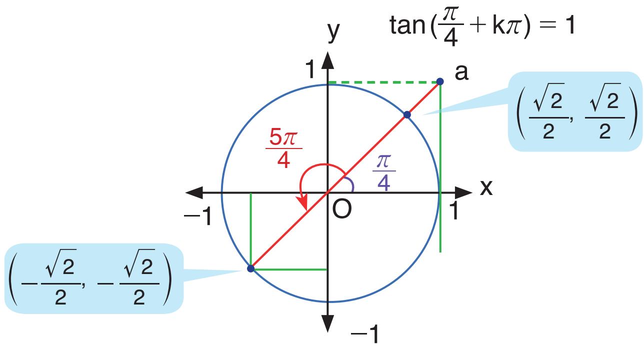
$Ç = \{x \mid x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ biçiminde bulunur.

tanx = a Denkleminin Çözüm Kümesi

ÖRNEK 6

tanx = 1 denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM



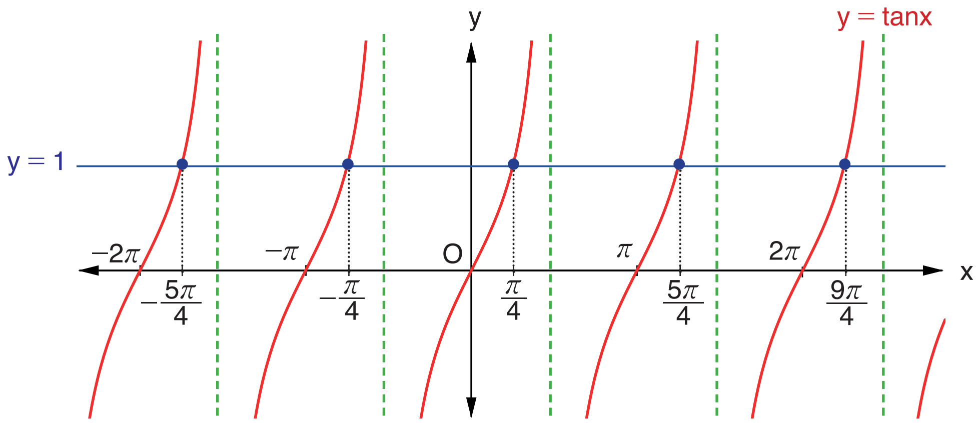
tanx = 1 denkleminin çözümleri

$x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ biçiminde bulunur.

Buradan

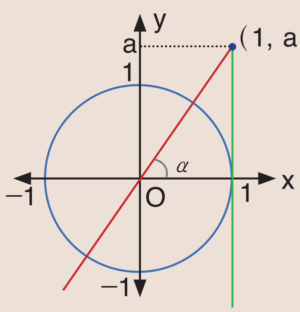
$Ç=\left\{x \mid x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ bulunur.

tanx = 1 denkleminin çözüm kümesi grafiksel olarak incelenirse



y = tanx fonksiyonu ile y = 1 doğrusunun kesişim noktalarının

$k\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ olduğu görülür.



SONUÇ

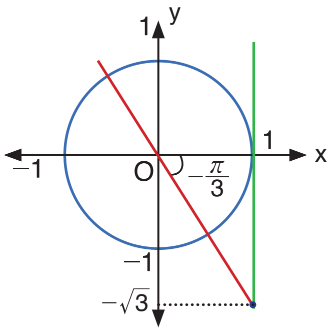
$a\in\mathbb{R}$ olmak üzere $\tan x=a$ denkleminin köklerinden biri α olmak üzere bu denklemin çözüm kümesi

$Ç=\{x \mid x=\alpha+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$ olarak bulunur.

ÖRNEK 7

$\tan x = -\sqrt{3}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM



$\tan x = -\sqrt{3}$ denkleminin çözümleri

$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ biçiminde bulunur.

Buradan $Ç = \left\{x \mid x = -\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ olur.

$\sin f(x) = a$, $\cos f(x) = a$ ve $\tan f(x) = a$ Biçimindeki Trigonometrik Denklemler

$\sin f(x) = a$, $\cos f(x) = a$ veya $\tan f(x) = a$ biçimindeki trigonometrik denklemler $\sin x = a$, $\cos x = a$ veya $\tan x = a$ denklemlerinin çözümüne benzer bir yöntemle çözülür.

ÖRNEK 8

$2\sin 3\theta - 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$2\sin 3\theta - 1 = 0$

$2\sin 3\theta = 1$

$\sin 3\theta = \frac{1}{2}$ olur.

Buradan

$3\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ veya $3\theta = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$\theta = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$

$3\theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$\theta = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$

şeklinde bulunur.

Çözüm kümesi

$Ç = \left\{x \mid x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \ \vee\ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ olur.

ÖRNEK 9

$\sqrt{3}\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)-3=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\sqrt{3}\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)-3=0$$
$$\sqrt{3}\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=3$$
$$\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3} \text{ olur.}$$

Buradan

$$\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+k\pi$$
$$\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{6}+k\pi$$
$$\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi$$
$$Ç=\left\{x \mid x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\} \text{ bulunur.}$$

Trigonometrik Denklemlerin Çarpanlarına Ayırarak Çözümü

Bazı trigonometrik denklemler çarpanlarına ayırma yöntemi ile çözülebilir.

ÖRNEK 10

$2\sin\theta\cdot\cos\theta+\sqrt{3}\cos\theta=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$2\sin\theta\cdot\cos\theta+\sqrt{3}\cos\theta=0$ denklemi $\cos\theta$ parantezine alınırsa

$$\cos\theta(2\sin\theta+\sqrt{3})=0$$
$$\cos\theta=0$$
$$Ç_1=\left\{\theta \mid \theta=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$
$$2\sin\theta+\sqrt{3}=0$$
$$\sin\theta=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$
$$\theta=\pi+\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad \text{veya} \quad \theta=2\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi$$
$$\theta=\frac{4\pi}{3}+2k\pi \qquad\qquad \theta=\frac{5\pi}{3}+2k\pi$$
$$Ç_2=\left\{\theta \mid \theta=\frac{4\pi}{3}+2k\pi \ \vee\ \theta=\frac{5\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Buradan

$$Ç=Ç_1\cup Ç_2=\left\{\theta \mid \theta=\frac{\pi}{2}+k\pi \ \vee\ \theta=\frac{4\pi}{3}+2k\pi \ \vee\ \theta=\frac{5\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

bulunur.

ÖRNEK 11

$2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 2 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\cos\theta = a$ olsun.

$2a^2 - 3a - 2 = 0$

$(2a+1)(a-2) = 0$

$a = \frac{-1}{2}$ veya $a = 2$ olur.

Bu durumda

$\cos\theta = 2$ ise $Ç_1 = \emptyset$ olur.

$\cos\theta = \frac{-1}{2}$ ise

$\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ veya $\theta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ olur.

Buradan

$Ç_2 = \left\{\theta \mid \theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad \theta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ bulunur.

O hâlde çözüm kümesi

$Ç = Ç_1 \cup Ç_2 = \left\{\theta \mid \theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad \theta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ elde edilir.

Trigonometrik Özdeşlikler Yardımı İle Çözülebilen Denklemler

ÖRNEK 12

$\cos 2\theta - \cos 4\theta + 2 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\cos 2\theta - \cos 4\theta + 2 = 0$ denkleminde $\cos 4\theta = 2\cos^2 2\theta - 1$ yazılırsa

$\cos 2\theta - (2\cos^2 2\theta - 1) + 2 = 0$

$-2\cos^2 2\theta + \cos 2\theta + 3 = 0$

$2\cos^2 2\theta - \cos 2\theta - 3 = 0$ olur.

$\cos 2\theta = x$ olsun.

$2x^2 - x - 3 = 0$

$(2x-3)(x+1) = 0$

$x_1 = \frac{3}{2}$ veya $x_2 = -1$ olur.

Buradan

$\cos 2\theta = \frac{3}{2}$ veya $\cos 2\theta = -1$

denklemlerinin çözüm kümeleri

$\cos 2\theta = \frac{3}{2} \Rightarrow Ç_1 = \varnothing$

$\cos 2\theta = -1 \Rightarrow 2\theta = \pi + 2k\pi$

$\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$Ç_2 = \left\{\theta \mid \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$Ç = Ç_1 \cup Ç_2 = \left\{\theta \mid \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ bulunur.

ÖRNEK 13

$\frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = 4$ denkleminin $[0,\ 2\pi)$ aralığındaki köklerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = 4$$
$$\frac{\sin 5x \cdot \cos x - \cos 5x \cdot \sin x}{\sin x \cdot \cos x} = 4$$
$$\frac{2\sin 4x}{\sin 2x} = 4$$
$$\frac{2\sin 2x \cdot \cos 2x}{\sin 2x} = 2$$
$$\cos 2x = 1$$
$$2x = 0 + 2k\pi$$
$$x = k\pi \text{ bulunur.}$$

Buradan denklemin kökleri

$k = 0 \Rightarrow x = 0$

$k = 1 \Rightarrow x = \pi$ olur.

O hâlde çözüm kümesi $Ç = \{0,\ \pi\}$ elde edilir.

$\sin f(x) = \sin g(x)$ Denkleminin Çözüm Kümesi

$\sin x = \sin\alpha$ denkleminin kökleri $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x = \alpha + 2k\pi$ olur. Denklem $\sin x = \sin(\pi - \alpha)$ biçiminde yazılırsa çözüm $x = \pi - \alpha + 2k\pi$ olarak bulunur.

O hâlde $\sin x = \sin\alpha$ denkleminin çözüm kümesi

$Ç = \{x \mid x = \alpha + 2k\pi \ \vee \ x = (\pi - \alpha) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ olur.

SONUÇ

$\sin f(x) = \sin g(x)$ denkleminin çözüm kümesi $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $f(x) = g(x) + 2k\pi$ veya $f(x) = (\pi - g(x)) + 2k\pi$ denklemlerini sağlayan x değerleridir.

ÖRNEK 14

Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $\sin x = \sin\frac{\pi}{15}$

b) $\sin(3x - 40°) = \sin(2x + 30°)$

c) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

ÇÖZÜM

a) $\sin x = \sin\frac{\pi}{15}$ ise

$x = \frac{\pi}{15} + 2k\pi$ veya $x = \left(\pi - \frac{\pi}{15}\right) + 2k\pi = \frac{14\pi}{15} + 2k\pi$ olur.

Buradan çözüm kümesi

$Ç = \left\{x \mid x = \frac{\pi}{15} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{14\pi}{15} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ bulunur.

b) $\sin(3x - 40°) = \sin(2x + 30°)$ ise

$3x - 40° = 2x + 30° + k \cdot 360°$

$x = 70° + k \cdot 360°$

veya

$3x - 40° = 180° - (2x + 30°) + k \cdot 360°$

$3x - 40° = 150° - 2x + k \cdot 360°$

$5x = 190° + k \cdot 360°$

$x = 38° + 72° \cdot k$ bulunur.

Buradan çözüm kümesi

$Ç = \{x \mid x = 70° + k \cdot 360° \quad \vee \quad x = 38° + k \cdot 72°,\ k \in \mathbb{Z}\}$ olur.

c) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ veya $\sin\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi}{4}\right)$

olduğundan

$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi}{4}\right)$

$2x + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi$

$3x = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{5} + 2k\pi$

$3x = \frac{11\pi}{20} + 2k\pi$

$x = \frac{11\pi}{60} + \frac{2k\pi}{3}$

veya

$2x + \frac{\pi}{5} = \pi - \left(\frac{3\pi}{4} - x\right) + 2k\pi$

$2x + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{4} + x + 2k\pi$

$x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{5} + 2k\pi$

$x = \frac{\pi}{20} + 2k\pi$ olur.

Buradan çözüm kümesi

$Ç = \left\{x \mid x = \frac{11\pi}{60} + \frac{2k\pi}{3} \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{20} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ elde edilir.

$\cos f(x) = \cos g(x)$ Denkleminin Çözüm Kümesi

$\cos x = \cos\alpha$ denkleminin kökleri $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x = \alpha + 2k\pi$ veya denklem $\cos x = \cos(-\alpha)$ biçiminde yazılırsa çözüm $x = -\alpha + 2k\pi$ olarak bulunur.

O hâlde $\cos x = \cos\alpha$ denkleminin çözüm kümesi
$Ç = \{x \mid x = \alpha + 2k\pi \quad \vee \quad x = -\alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ şeklinde bulunur.

SONUÇ

$\cos f(x) = \cos g(x)$ denkleminin çözüm kümesi $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $f(x) = g(x) + 2k\pi$ veya $f(x) = -g(x) + 2k\pi$ denklemlerini sağlayan x değerleridir.

ÖRNEK 15

Aşağıdaki denklemlerin $[0°, 360°)$ aralığındaki çözüm kümesini bulunuz.

a) $\cos x = \cos 70°$

b) $\cos(2x + 70°) = \cos(x - 10°)$

c) $\cos(2x + 20°) = \sin 80°$

ÇÖZÜM

a) $\cos x = \cos 70°$ ise

$x = 70° + k \cdot 360°$ veya $x = -70° + k \cdot 360°$ olur.

Buradan $Ç = \{70°, 290°\}$ olarak bulunur.

b) $\cos(2x + 70°) = \cos(x - 10°)$

$2x + 70° = x - 10° + k \cdot 360°$ veya $2x + 70° = -x + 10° + k \cdot 360°$

$x = -80° + k \cdot 360°$ $\qquad$ $3x = -60° + k \cdot 360°$

$x = -20° + k \cdot 120°$

$k = 1 \Rightarrow x = -80° + 360° = 280°$ veya $x = -20° + 120° = 100°$
$k = 2 \Rightarrow x = -80° + 720° = 640°$ veya $x = -20° + 240° = 220°$
$k = 3 \Rightarrow x = -80° + 1080° = 1000°$ veya $x = -20° + 360° = 340°$

bulunur.

Buradan $Ç = \{100°, 220°, 280°, 340°\}$ olarak bulunur.

c) $\cos(2x + 20°) = \sin 80°$

$\cos(2x + 20°) = \cos 10°$

$2x + 20° = 10° + k \cdot 360°$ veya $2x + 20° = -10° + k \cdot 360°$

$2x = -10° + k \cdot 360°$ $\qquad$ $2x = -30° + k \cdot 360°$

$x = -5° + k \cdot 180°$ $\qquad$ $x = -15° + k \cdot 180°$

$k = 1 \Rightarrow x = -5 + 180° = 175°$ veya $x = -15° + 180° = 165°$
$k = 2 \Rightarrow x = -5 + 360° = 355°$ veya $x = -15° + 360° = 345°$

bulunur.

Buradan $Ç = \{165°, 175°, 345°, 355°\}$ olarak bulunur.

$\tan f(x) = \tan g(x)$ veya $\cot f(x) = \cot g(x)$ Denkleminin Çözüm Kümesi

$\tan x = \tan \alpha$ veya $\cot x = \cot \alpha$ denkleminin kökleri $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x = \alpha + k\pi$ olur. O hâlde çözüm kümesi

$Ç = \{x \mid x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ biçiminde bulunur.

SONUÇ

$\tan f(x) = \tan g(x)$ veya $\cot f(x) = \cot g(x)$ denkleminin çözüm kümesi $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $f(x) = g(x) + k\pi$ denklemini sağlayan x değerleridir.

ÖRNEK 16

Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $\tan x = \tan \frac{\pi}{5}$

b) $\tan\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

c) $\tan(3x - 10°) \cdot \tan(7x + 20°) = 1$

ÇÖZÜM

a) $\tan x = \tan \frac{\pi}{5}$ denkleminin kökleri $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x = \frac{\pi}{5} + k\pi$ olur.

Buradan $Ç = \left\{x \mid x = \frac{\pi}{5} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ bulunur.

b) $\tan\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$$3x + \frac{\pi}{5} = x + \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{5} + k\pi$$

$$2x = \frac{\pi}{20} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{40} + \frac{k\pi}{2} \text{ bulunur.}$$

Buradan çözüm kümesi

$Ç = \left\{x \mid x = \frac{\pi}{40} + \frac{\pi}{2}k,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ biçiminde bulunur.

c) $\tan(3x - 10°) \cdot \tan(7x + 20°) = 1$

$$\begin{aligned} \tan(3x - 10°) &= \frac{1}{\tan(7x + 20°)} \\ &= \cot(7x + 20°) \\ &= \tan(90° - (7x + 20°)) \\ &= \tan(70° - 7x) \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned} 3x - 10° &= 70° - 7x + k \cdot 180° \\ 10x &= 80° + k \cdot 180° \\ x &= 8° + k \cdot 18° \text{ olur.} \end{aligned}$$

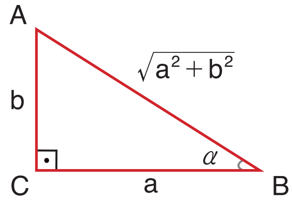
$\tan x = \tan\alpha \Rightarrow x = \alpha + k\pi$

Denklemin çözüm kümesi

$Ç = \{x \mid x = 8° + k \cdot 18°,\ k \in \mathbb{Z}\}$ biçiminde elde edilir.

$a\sin f(x)+b\cos f(x)=c$ Biçimindeki Denklemlerin Çözüm Kümesi

a, b, c sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere $a\sin f(x)+b\cos f(x)=c$ biçimindeki denklemlere $\sin f(x)$ ve $\cos f(x)$ e göre lineer (doğrusal) denklemler denir.



$\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$

$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$
\begin{aligned}
c &= a\sin f(x)+b\cos f(x)\\
&= a\left(\sin f(x)+\frac{b}{a}\cos f(x)\right)\\
&= a(\sin f(x)+\tan\alpha\cdot\cos f(x))\\
&= a\left(\sin f(x)+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos f(x)\right)\\
&= a\left(\frac{\sin f(x)\cdot\cos\alpha+\sin\alpha\cdot\cos f(x)}{\cos\alpha}\right)\\
&= a\left(\frac{\sin(f(x)+\alpha)}{\cos\alpha}\right)\\
&= a\left(\frac{\sin(f(x)+\alpha)}{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}\right)\\
&= \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(f(x)+\alpha) \text{ bulunur.}
\end{aligned}
$$

$\dfrac{b}{a}=\tan\alpha$ olsun.

$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Ayrıca $-1\le\sin(f(x)+\alpha)\le 1$ olduğundan eşitsizlik $\sqrt{a^2+b^2}$ ile genişletilirse

$$-\sqrt{a^2+b^2}\le\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(f(x)+\alpha)\le\sqrt{a^2+b^2}$$
$$-\sqrt{a^2+b^2}\le c\le\sqrt{a^2+b^2} \text{ olur.}$$

Buradan

$$c\le\sqrt{a^2+b^2}$$
$$c^2\le a^2+b^2 \text{ elde edilir.}$$

O hâlde $a\sin f(x)+b\cos f(x)=c$ denkleminin çözülmesi için $c^2\le a^2+b^2$ koşulu sağlanmalıdır.

SONUÇ

$a\sin f(x)+b\cos f(x)=c$ denklemi $c^2\le a^2+b^2$ koşulunu sağlıyorsa her bir terim a ya veya b ye bölünür ve $\dfrac{a}{b}=\tan\alpha$ veya $\dfrac{b}{a}=\tan\alpha$ dönüşümü yapılarak denklemlerin kökleri bulunur.

ÖRNEK 17

$\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$a=1,\ b=\sqrt{3}$ ve $c=1$ olup denklemin çözülebilmesi için $a^2+b^2\geq c^2$ koşulunun sağlanması gerekir.

Bu denklem

$$a^2+b^2\geq c^2$$
$$1^2+(\sqrt{3})^2\geq 1^2$$

koşulu sağlandığı için çözülebilir.

$\tan60^\circ=\sqrt{3}$ eşitliği denklemde $\sqrt{3}$ yerine yazılırsa

$$\cos2x+\tan60^\circ\cdot\sin2x=1$$
$$\cos2x+\frac{\sin60^\circ}{\cos60^\circ}\cdot\sin2x=1$$
$$\frac{\cos2x\cdot\cos60^\circ+\sin60^\circ\cdot\sin2x}{\cos60^\circ}=1$$
$$\cos(2x-60^\circ)=\cos60^\circ \text{ olur.}$$

$2x-60^\circ=60^\circ+k\cdot360^\circ$ veya $2x-60^\circ=-60^\circ+k\cdot360^\circ,\ k\in\mathbb{Z}$

$2x=120^\circ+k\cdot360^\circ$ $\qquad 2x=k\cdot360^\circ$

$x=60^\circ+k\cdot180^\circ$ $\qquad x=k\cdot180^\circ$ olur.

Çözüm kümesi

$Ç=\{x\mid x=60^\circ+180^\circ k \ \vee\ x=180^\circ k,\ k\in\mathbb{Z}\}$ olur.

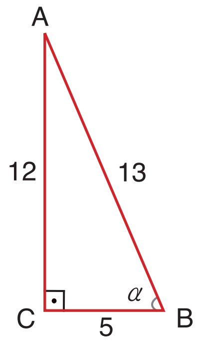
ÖRNEK 18

$f(x)=5\cos x+12\sin x$ fonksiyonunun en büyük ve en küçük değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\tan\alpha=\frac{12}{5}$ olsun.

$$f(x)=5\left(\cos x+\frac{12}{5}\sin x\right)$$
$$f(x)=5(\cos x+\tan\alpha\cdot\sin x)$$
$$=5\left(\cos x+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin x\right)$$
$$=5\left(\frac{\cos x\cdot\cos\alpha+\sin\alpha\cdot\sin x}{\cos\alpha}\right)$$
$$=5\left(\frac{\cos(x-\alpha)}{\frac{5}{13}}\right)=13\cdot\cos(x-\alpha) \text{ bulunur.}$$



$\tan\alpha=\frac{12}{5}$

$\cos\alpha=\frac{5}{13}$

$-1\leq\cos(x-\alpha)\leq1$ olduğundan

$-13\leq13\cos(x-\alpha)\leq13$

$-13\leq f(x)\leq13$ bulunur.

Buradan $f(x)$ fonksiyonunun en büyük değeri 13 ve en küçük değeri -13 olur.

SONUÇ

$f(x)=a\cos x+b\sin x$ fonksiyonunun en büyük değeri $\sqrt{a^2+b^2}$, en küçük değeri $-\sqrt{a^2+b^2}$ olur.

$a \sin f(x) + b \cos f(x) = 0$ Biçimindeki Denklemlerin Çözüm Kümesi

a ve b sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere $a \sin f(x) + b \cos f(x) = 0$ biçimindeki denklemlere birinci dereceden homojen denklemler denir.

$$a \sin f(x) + b \cos f(x) = 0$$
$$\frac{a \sin f(x)}{\cos f(x)} + b = 0$$
$$a \tan f(x) = -b$$
$$\tan f(x) = \frac{-b}{a} \text{ elde edilir.}$$

Her terim $\cos f(x) \neq 0$ ile bölünür.

ÖRNEK 19

$\sqrt{3}\cos 3x - \sin 3x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\sqrt{3}\cos 3x - \sin 3x = 0$$
$$\sqrt{3}\cos 3x = \sin 3x$$
$$\sqrt{3} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x}$$
$$\tan 3x = \sqrt{3} \text{ bulunur.}$$

Buradan

$3x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$ olur.

O hâlde çözüm kümesi

$Ç = \left\{ x \mid x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$ olarak bulunur.

$a\cos^2 x + b\cos x \cdot \sin x + c\sin^2 x = 0$ Biçimindeki Denklemlerin Çözüm Kümesi

a, b, c sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere
$a\cos^2 x + b\cos x \cdot \sin x + c\sin^2 x = 0$ denklemine ikinci dereceden homojen denklem denir.

Bu denklemleri çözmek için her bir terim $\cos^2 x \neq 0$ ile bölünür.

$$\frac{a\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{b\cos x \cdot \sin x}{\cos^2 x} + \frac{c\sin^2 x}{\cos^2 x} = 0$$
$$a + b\tan x + c\tan^2 x = 0$$

denklemi bulunur. Buradan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem çözümü yapılarak çözüm kümesi oluşturulur.

ÖRNEK 20

$\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Her bir terim $\cos^2 x$ e bölünürse

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} - \frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x}$$

$\tan^2 x - \tan x - 2 = 0$ bulunur.

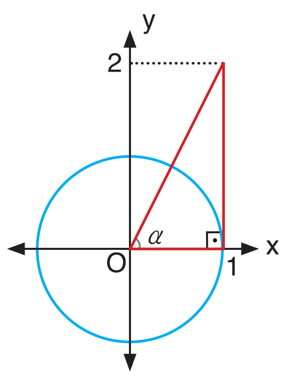
$\tan x = a$ ise

$a^2 - a - 2 = 0$

$(a-2)(a+1) = 0$

$a = 2$ veya $a = -1$ olur.

$\tan x = 2$ ise $x = \alpha + k\pi$ veya $\tan x = -1$ ise $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ olur.



Çözüm kümesi $Ç = \left\{ x \mid x = \alpha + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$ bulunur.

ÖRNEK 21

$6\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 4$ denkleminin $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ndaki çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen denklemin $a\sin^2 x + b\sin x \cdot \cos x + c\cos^2 x = 0$ biçimine dönüştürülmesi için denklem $6\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 4(\sin^2 x + \cos^2 x)$ şeklinde yazılır.

Buradan

$2\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x = 0$ homojen denklemi elde edilir.

Her terim $\cos^2 x$ e bölünürse $2\tan^2 x + \tan x - 3 = 0$ olur.

$(2\tan x + 3)(\tan x - 1) = 0$

$\tan x = \frac{-3}{2}$ veya $\tan x = 1$ bulunur.

Tanjant fonksiyonu I. bölgede pozitif olduğundan $\tan x = 1$ denkleminden $x = \frac{\pi}{4}$ olur.

Buradan çözüm kümesi $Ç = \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$ elde edilir.

Görsel 3.3: Battani

Battani (858-929)

Yaşadığı dönemin önemli matematikçilerinden biri olan Battani astronomi ve matematik alanında çok önemli çalışmalara imza atmıştır. Battani, çalışmaları sırasında bazı temel trigonometrik bağıntılara ulaşmış ve bunları astronomik hesaplamalarda kullanmıştır.

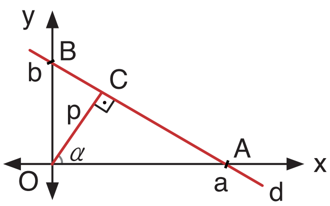
Batı'da bu konuyla ilgili bilgiler Battani'ye ait olduğu için Batı'ya trigonometriyi onun öğretttiği söylenir. Sinüs ve kosinüs teoremlerini tam olarak ilk defa Battani kullandığı için haklı olarak Batılılar ve Doğulular Battani'yi trigonometriyi bulan adam olarak görmüşlerdir.

Yıldızların enlemlerinin bulunması ve trigonometriyle ilgili "Risâle fî akdâri'l-ittisâlât (Yıldızların Yan Yana Gelmelerinin Ölçümleri Kitabı)" en önemli eserlerindendir.

Trigonometrik Denklem Uygulamaları

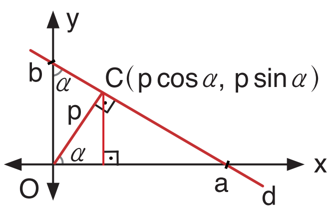
Bir çok alanda olduğu gibi günlük hayatta da karşılaşılan problemlerin çözümlerinde trigonometrik denklemler kullanılır. Aşağıdaki örneklerde bazı uygulama alanları ve günlük hayat problemleri modellenmiştir.

ÖRNEK 22



Yanda verilen d doğrusu, eksenleri $A(a, 0)$ ve $B(b, 0)$ noktalarında kesmektedir. C noktası d doğrusu üzerinde bir nokta, $m(\widehat{COA}) = \alpha$, $[OC] \perp d$ ve $|OC| = p$ olmak üzere d doğrusunun $y \sin\alpha + x\cos\alpha = p$ biçiminde yazılabileceğini gösteriniz.

ÇÖZÜM



$\cot\alpha = \frac{b}{a}$ olduğundan d doğrusunun eğimi

$m = -\frac{b}{a} = -\cot\alpha$ olur.

Eğim ve $C(p\cos\alpha, p\sin\alpha)$ noktası $y - y_1 = m(x - x_1)$ doğru denkleminde yerine yazılırsa

$$y - p\sin\alpha = -\cot\alpha(x - p\cos\alpha)$$

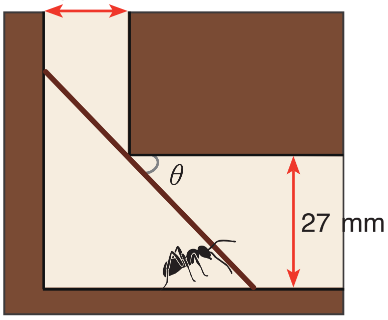
$$y - p\sin\alpha = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}(x - p\cos\alpha)$$

$$y\sin\alpha - p\sin^2\alpha = -x\cos\alpha + p\cos^2\alpha$$

$$y\sin\alpha + x\cos\alpha = p\underbrace{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}_{1}$$

$y\sin\alpha + x\cos\alpha = p$ şeklinde bulunur.

ÖRNEK 23



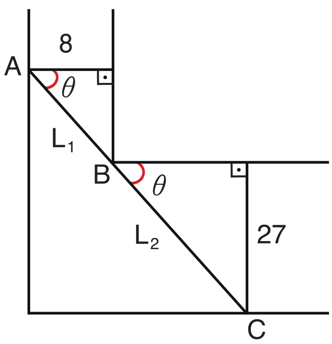
Yandaki karınca, şekildeki L mm uzunluğundaki çubuğu yuvasına taşımıştır.
Yuvanın üst bölümü 8 mm ve yuvanın içi 27 mm genişliğinde olduğuna göre

a) Çubuğun boyunun $L(\theta) = 27\,\mathrm{cosec}\theta + 8\sec\theta$ ile modellendiğini gösteriniz.

b) L uzunluğunun alabileceği en büyük değer için θ değerinin $8\sec\theta \cdot \tan\theta - 27\,\mathrm{cosec}\theta \cdot \cot\theta = 0$ denklemini sağlayan değer olduğu bilindiğine göre karıncanın yuvasına taşıyabileceği en uzun çubuk kaç milimetre olur?

ÇÖZÜM

a)



$L = |AC| = |AB| + |BC|$

$L = L_1 + L_2$ olsun.

$\cos\theta = \dfrac{8}{L_1} \Rightarrow L_1 = \dfrac{8}{\cos\theta}$

$\sin\theta = \dfrac{27}{L_2} \Rightarrow L_2 = \dfrac{27}{\sin\theta}$

$L(\theta) = L_1 + L_2 = \dfrac{8}{\cos\theta} + \dfrac{27}{\sin\theta}$

$L(\theta) = 8\sec\theta + 27\,\mathrm{cosec}\theta$

bulunur.

b) $8\sec\theta \cdot \tan\theta - 27\,\mathrm{cosec}\theta \cdot \cot\theta = 0$

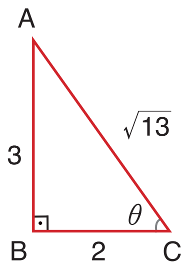
$\dfrac{8}{\cos\theta} \cdot \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} - 27\dfrac{1}{\sin\theta} \cdot \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = 0$

$\dfrac{8\sin\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{27\cos\theta}{\sin^2\theta}$

$8\sin^3\theta = 27\cos^3\theta$

$\tan^3\theta = \dfrac{27}{8}$

$\tan\theta = \dfrac{3}{2}$ bulunur.



$\tan\theta = \dfrac{3}{2}$

$\cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$

$\sin\theta = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$

Buradan

$L = \dfrac{8}{\cos\theta} + \dfrac{27}{\sin\theta}$

$= \dfrac{8}{\frac{2}{\sqrt{13}}} + \dfrac{27}{\frac{3}{\sqrt{13}}}$

$= 4\sqrt{13} + 9\sqrt{13} = 13\sqrt{13}$ mm olur.

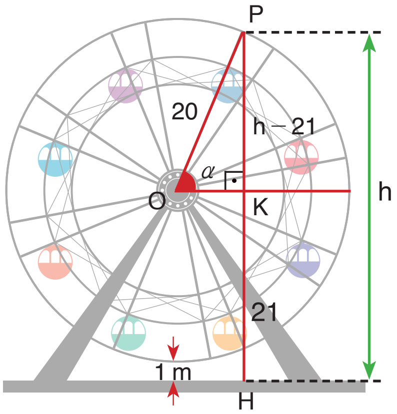
ÖRNEK 24

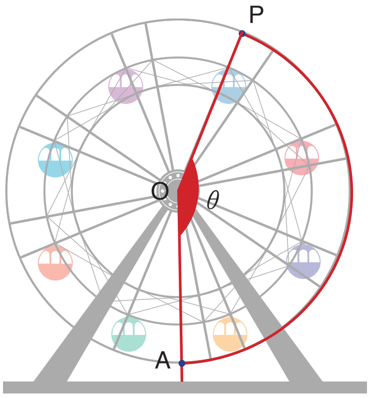
Şekildeki dönme dolabın yarıçapı 20 m ve yerden yüksekliği 1 m dir. Bu dönme dolap dakikada 1,5 tur attığına göre

a) t anında en alt noktadan dönme dolaba binen birisinin yerden yüksekliğinin $h(t) = 21 - 20\cos 3\pi t$ denklemi ile bulunduğunu gösteriniz.

b) t anında en alt noktadan dönme dolaba binen birisinin yerden 11 m yüksekliğe çıkması için en az kaç saniye geçmesi gerekir?

ÇÖZÜM





$$|\widehat{AP}| = 2\pi r \cdot \frac{\theta}{2\pi}$$

$$= 2\pi r \cdot \frac{\frac{\pi}{2} + \alpha}{2\pi}$$

a) $|PH| = h$ ve $|PK| = |h - 21|$ olmak üzere

$$\sin\alpha = \frac{h-21}{20}$$

$$20\sin\alpha = h - 21$$

$h = 21 + 20\sin\alpha$ bulunur.

Dönme dolap dakikada 1,5 tur attığına göre 1 dakikada alınan yol

$$\text{Yol} = 2\pi r + \frac{2\pi r}{2}$$

$$= 2\pi \cdot 20 + \frac{2\pi \cdot 20}{2} = 60\pi \text{ olur.}$$

$\text{hız} = \dfrac{\text{yol}}{\text{zaman}}$ olduğundan hız $= \dfrac{60\pi}{1}$ m/dk. bulunur.

t zamanda alınan yol = hız · zaman

$$|AP| = 60\pi \cdot t$$

$$2\pi r \cdot \frac{\frac{\pi}{2} + \alpha}{2\pi} = 60\pi \cdot t$$

$$20 \cdot \frac{\pi}{2} + 20\alpha = 60\pi t$$

$$\pi + 2\alpha = 6\pi t$$

$$2\alpha = 6\pi t - \pi$$

$$\alpha = 3\pi t - \frac{\pi}{2} \text{ olur.}$$

Bu değer $h = 21 + 20\sin\alpha$ denkleminde yerine yazılırsa

$$h(t) = 21 + 20\sin\left(3\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 21 - 20\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3\pi t\right)$$

$$= 21 - 20\cos 3\pi t$$

şeklinde bulunur.

b)

$$h(t) = 21 - 20\cos 3\pi t$$
$$11 = 21 - 20\cos 3\pi t$$
$$20\cos 3\pi t = 10$$
$$\cos 3\pi t = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

$3\pi t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ veya $3\pi t = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$3t = \frac{1}{3} + 2k$

$t = \frac{1}{9} + \frac{2k}{3}$ veya $3t = \frac{-1}{3} + 2k$

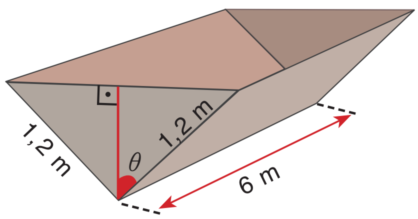
$t = -\frac{1}{9} + \frac{2k}{3}$ olur.

En küçük t değeri $k = 0$ ise $t = \frac{1}{9}$ dk. bulunur.

$t = \frac{60}{9} = \frac{20}{3}$ sn. de yerden 11 m yukarı çıkılır.

ÖRNEK 25

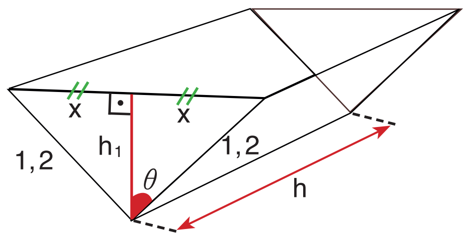
6 m uzunluğundaki bir su kanalının kenarları 1,2 m olan ikizkenar üçgenlerden oluşmaktadır. Su kanalının hacmini θ ya bağlı bir fonksiyon olarak $V(\theta) = 4{,}32\sin 2\theta$ şeklinde ifade ediniz. Su kanalının hacminin $2{,}16\ m^3$ olması için $0 \le \theta < \pi$ aralığındaki θ değerlerini bulunuz.



ÇÖZÜM

$\text{Hacim} = \frac{1}{2} \cdot \text{Taban} \cdot \text{Yükseklik} \cdot \text{Uzunluk}$

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot h_1 \cdot h \\ &= x \cdot h_1 \cdot 6 \\ &= 1{,}2\sin\theta \cdot 1{,}2\cos\theta \cdot 6 \\ &= 1{,}44 \cdot 6\sin\theta \cdot \cos\theta \\ &= 1{,}44 \cdot 3\sin 2\theta \\ &= 4{,}32\sin 2\theta \text{ olur.} \end{aligned}$$



$\cos\theta = \frac{h_1}{1{,}2} \Rightarrow h_1 = (1{,}2)\cos\theta$

$\sin\theta = \frac{x}{1{,}2} \Rightarrow x = (1{,}2)\sin\theta$

Buna göre

$2{,}16 = 4{,}32\sin 2\theta$

$\frac{1}{2} = \sin 2\theta$ bulunur.

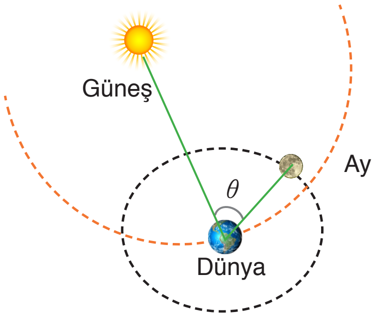
Buradan

$2\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ veya $2\theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$\theta = \frac{\pi}{12} + k\pi$ $\quad \theta = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ elde edilir $(k \in \mathbb{Z})$.

O hâlde $\theta = \frac{\pi}{12}$ ve $\theta = \frac{5\pi}{12}$ değerlerini alır.

ÖRNEK 26



Ay Dünya etrafında dönerken Güneş'in aydınlattığı bölümün bir kısmı Dünya'dan görülür. θ açısı Güneş, Dünya ve Ay arasındaki açı olmak üzere Dünya'dan Ay'ın görünen aydınlık kısmının oranı $F=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)$ denklemi ile modellenmiştir.

Örnek olarak $F=0$ ise yeni ay, $F=0,25$ ise hilal, $F=0,5$ ise ilk ve son dördün, $F=1$ ise dolunay olur.

Buna göre Ay'ın yeni ay, hilal, dolunay, ilk ve son dördün durumlarında θ açısını bulunuz.

ÇÖZÜM

$F=0 \Rightarrow 0=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)$

$\cos\theta=1$

$\theta=0^\circ+2k\pi$

$k=0 \Rightarrow \theta=0^\circ$ bulunur.

Buradan Ay'ın yeni ay döneminde $\theta=0$ bulunur.

$F=0,25 \Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)$

$\frac{1}{2}=1-\cos\theta$

$\cos\theta=\frac{1}{2}$

$\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ veya $\theta=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ olur.

$k=0 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{3}$

$k=1 \Rightarrow \theta=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$ bulunur.

Buradan Ay'ın hilal döneminde θ açıları $\frac{\pi}{3}$ ve $\frac{5\pi}{3}$ olur.

$F=0,5 \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)$

$\cos\theta=0$

$\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ veya $\theta=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

$k=0 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$

$k=1 \Rightarrow \theta=2\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$ bulunur.

Buradan Ay'ın ilk ve son dördün döneminde θ açıları $\frac{\pi}{2}$ ve $\frac{3\pi}{2}$ olur.

$F=1 \Rightarrow 1=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)$

$2=1-\cos\theta$

$\cos\theta=-1$

$\theta=\pi+2k\pi$ olur.

$k=0 \Rightarrow \theta=\pi$ bulunur.

Bu durumda Ay'ın dolunay döneminde $\theta=\pi$ olur.

Yeni Ay

Hilal

İlk Dördün

Dolunay

Son Dördün

ALIŞTIRMALAR

1. **Aşağıdaki trigonometrik denklemlerin $\mathbb{R}$ deki çözüm kümelerini bulunuz.**

   a) $\sqrt{3}\,\text{cosecx} - 2 = 0$

   b) $\sin^2 x = 3\cos^2 x$

   c) $\cos x + 1 = -\cos x$

   ç) $4\cos^2 x - 1 = 0$

2. **Aşağıdaki trigonometrik denklemlerin $[0, 2\pi]$ aralığındaki çözüm kümelerini bulunuz.**

   a) $\tan 2\theta = -1$

   b) $\sec\left(\frac{3\theta}{2}\right) = -2$

   c) $2\cos\frac{x}{2} - \sqrt{2} = 0$

   ç) $2\sin 5x = 1$

3. **Aşağıdaki trigonometrik denklemlerin $\mathbb{R}$ deki çözüm kümelerini bulunuz.**

   a) $\sin^2 3x - \sin 3x - 2 = 0$

   b) $2\cos^2 x - 2\cos x + \sin^2 x - 4 = 0$

   c) $x \in [0, \pi]$ olmak üzere
   $\sqrt{1 - \cos 2x} + \sqrt{2}\cos x = 1$

   ç) $\tan 2x + \cot 2x = 2$

   d) $4 + 4\sin\theta = \cos^2\theta$

4. **Aşağıdaki trigonometrik denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.**

   a) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

   b) $\tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$

   c) $\sec(2x + 10°) = \text{cosec}(x - 10°)$

5. **Aşağıdaki trigonometrik denklemlerin $\mathbb{R}$ deki çözüm kümelerini bulunuz.**

   a) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$

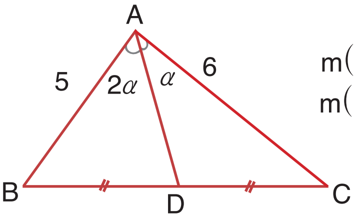
   b) $\sqrt{2}\sin x - \sqrt{6}\cos x = 2$

   c) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$

6. **Aşağıdaki denklemlerin $[0, 2\pi)$ aralığında kaç tane kökü vardır?**

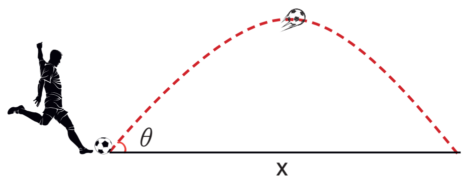
   a) $\sin^2 x + \sin 2x - 3\cos^2 x = 0$

   b) $3\sin^2 + 3\sin x \cdot \cos x - 4\cos^2 x = 1$

7. 

   $m(\widehat{BAD}) = 2\alpha$
   $m(\widehat{DAC}) = \alpha$

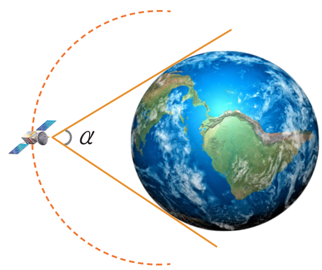
   Yukarıdaki şekilde $|AB| = 5$ birim, $|AC| = 6$ birim ve $|BD| = |DC|$ **ise** $A(\widehat{ABC})$ **kaçtır?**

8. 

   Yukarıda bir futbolcunun vurduğu topun aldığı mesafe $x(\theta) = 100\sin 2\theta$ denklemi ile veriliyor.
   Buna göre

   a) **Futbolcu topu 50 m ileriye atabilmek için topa kaç derecelik açı ile vurmalıdır?**

   b) **Futbolcu topu en uzağa atabilmek için topa kaç derecelik açı ile vurmalıdır?**

9. 

   Dünya'nın bir küre olduğu varsayıldığı, yukarıda verilen şekildeki gibi bir iletişim uydusunun Dünya'dan uzaklığı d ve Dünya'nın yarıçapı r olsun. Uydunun kapsama alanının gördüğü yayın ölçüsü α **olmak üzere**

   a) **d uzaklığını α ve r türünden yazınız.**

   b) $d < r$ ve
   $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1\right)r = d$
   bağıntısı varsa α açısı kaç derece olur?

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 3

A) Aşağıdaki trigonometrik ifadelerin değerlerini karşılarında verilen boşluklara yazınız.

1.

$\cot\left(\frac{\pi}{12}\right)$	
$\cos 105^{\circ}$	
$\tan 75^{0}$	
$\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$	
$\sin\frac{23\pi}{12}$	
$\cot\frac{11\pi}{12}$	

B) Aşağıdaki trigonometrik denklemlerin belirtilen aralıktaki çözüm kümelerini eşleştiriniz.

2. a) $\cot 3x + \sqrt{3} = 0 \quad [0, \pi)$

b) $\tan 2x + 1 = 0 \quad [0, 2\pi)$

c) $4\sin^2 x + 8\cos x = 7 \quad [0, 2\pi)$

ç) $\sec\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{2} = 0 \quad [0, 2\pi)$

d) $2\cos 4x = \sqrt{2} \quad [0, \pi)$

I. $Ç = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$

II. $Ç = \left\{\frac{\pi}{16}, \frac{9\pi}{16}\right\}$

III. $Ç = \left\{\frac{5\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}\right\}$

IV. $Ç = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

V. $Ç = \left\{\frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}\right\}$

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 3

C) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruları cevaplandırınız.

3. α ve β birer dar açı olmak üzere

$\cot\alpha = 3$ ve $\tan\beta = \frac{1}{2}$ **olduğuna göre**
$\alpha + \beta$ **toplamı kaç derecedir?**

A) 30° B) 45° C) 60°
D) 75° E) 90°

4. $\tan 43° = x$ ve $\cot 14° = y$ **olduğuna göre** $\tan 33°$ **ifadesinin x ve y cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{1+xy}{x-y}$ B) $\frac{x-y}{1+xy}$ C) $\frac{1-xy}{x+y}$
D) $\frac{1+xy}{x-y}$ E) $\frac{y-x}{1+xy}$

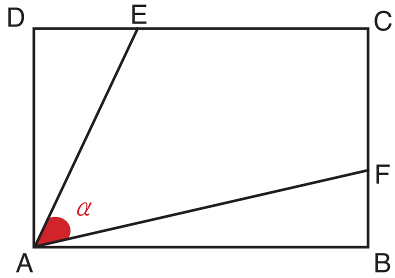
5. $$\frac{\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)}{\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)} = 2$$
olduğuna göre tanx değeri kaçtır?

A) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{11}$ B) $\frac{5\sqrt{3}-8}{11}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) $\sqrt{3}$ E) $\frac{2-\sqrt{3}}{11}$

6. $\tan\left(x+\frac{\pi}{5}\right) = A$ **olduğuna göre**
$\cos\left(\frac{3\pi}{10}-x\right)$ **değerinin A türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{1}{A}$ B) $\frac{A}{A^2+1}$ C) $\frac{1}{\sqrt{A^2-1}}$
D) $\frac{1}{\sqrt{A^2+1}}$ E) $\frac{A}{\sqrt{A^2+1}}$

7.



Yukarıdaki ABCD dikdörgeninde
$2|FB| = |FC|$
$3|EC| = 5|DE|$
$4|AD| = 3|AB|$
$m(\widehat{EAF}) = \alpha$ olsun.

Bu durumda $\sin\alpha$ **değeri kaçtır?**

A) $\frac{7}{\sqrt{85}}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
D) $\frac{1}{\sqrt{85}}$ E) 1

8. $\sin x - \cos y = \frac{1}{5}$

$\cos x + \sin y = \frac{4}{5}$

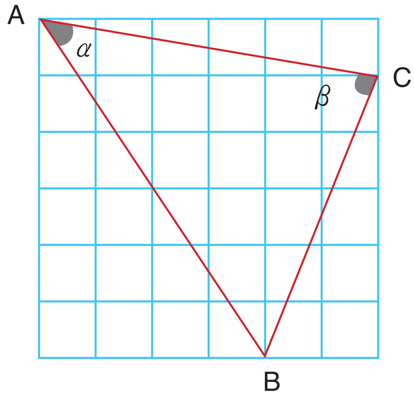
olduğuna göre $\sin(x-y)$ **değeri kaçtır?**

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{-1}{50}$ C) $\sqrt{3}$
D) $\frac{4}{25}$ E) $\frac{33}{50}$

9. $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ve $\tan x + \cot x = a$
olduğuna göre $\tan 2x$ **in a cinsinden değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{2}{\sqrt{a^2-4}}$ B) $\frac{a}{\sqrt{a^2-4}}$ C) $\frac{2}{a}$
D) $\frac{a}{2}$ E) $\frac{\sqrt{a^2-4}}{2}$

10.



Yukarıda birim karelere ayrılmış düzlemdeki ABC üçgeninde

$m(\widehat{BAC}) = \alpha$ ve

$m(\widehat{BCA}) = \beta$

olduğuna göre $\tan(\alpha+\beta)$ **değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B) $-\sqrt{3}$ C) $-\frac{16}{11}$

D) $-\frac{1}{11}$ E) 1

11. $\dfrac{\cot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1}{\cot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\cot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B) $-\sqrt{3}$ C) $\sqrt{3}$

D) -1 E) 1

12. $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $\sqrt{1-\sin 2x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **olduğuna göre** $\sin x + \cos x$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{4}{5}$

13. $\cot 118° = x$ **olduğuna göre** $\cot 326°$ **nin x cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{1-x^2}{2x}$ B) $\frac{2x}{1+x^2}$ C) $\frac{2x}{1-x^2}$

D) $\frac{1-x}{1+x}$ E) $\frac{1-x^2}{1+x^2}$

14. $\cos 15° - \sqrt{3}\sin 15°$ **ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}+\sqrt{6}$

15. $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8}$ **denklemini sağlayan x in en küçük pozitif değeri kaçtır?**

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{6}$ D) $\frac{\pi}{8}$ E) $\frac{\pi}{12}$

16. $x,\ y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ olmak üzere

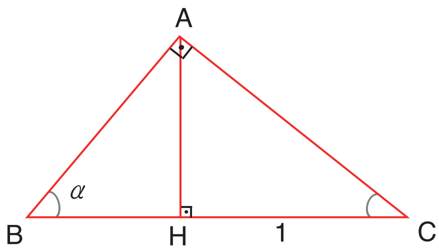
$\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = 3$ ve $\tan y = \frac{1}{4}$

olduğuna göre $\cot(x+y)$ **nin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{7}{6}$ B) $\frac{9}{2}$ C) $\frac{6}{7}$

D) $\frac{2}{9}$ E) $\frac{7}{9}$

17.



Yukarıda şekildeki ABC dik üçgeninde
$[AB] \perp [AC]$ ve $[AH] \perp [BC]$
$m(\widehat{ABC}) = \alpha$
$|HC| = 1$ birim
olduğuna göre $|AC|$ **kaç birimdir?**

A) $\sec\alpha$ B) $\operatorname{cosec}\alpha$ C) $\tan\alpha$
D) $\cot\alpha$ E) $\sin\alpha$

18. $2\sin^2 x - 5\sin x \cdot \cos x = 1$, $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$
olmak üzere $\cot 4x$ **in değerlerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-\frac{21}{20}$ B) $\frac{21}{20}$ C) $\frac{20}{21}$
D) $-\frac{20}{21}$ E) $\frac{21}{5}$

19. $\sin\frac{\pi}{8} \cdot \cos\frac{3\pi}{8}$ **çarpımının değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{1-\sqrt{2}}{4}$
D) $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$

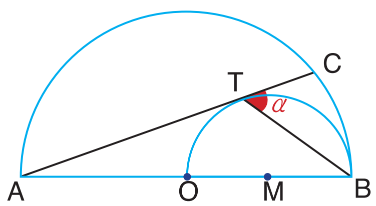
20. $\tan 20° = x$ **olduğuna göre** $\cot 65°$ **in x türünden değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{x-1}{x+1}$ B) $\frac{x+1}{x-1}$ C) $\frac{1-x}{1+x}$
D) $\frac{x}{x+1}$ E) $\frac{x+1}{x}$

21. $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$ **denkleminin köklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir**?

A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{4}$ D) $\frac{\pi}{5}$ E) $\frac{\pi}{6}$

22.

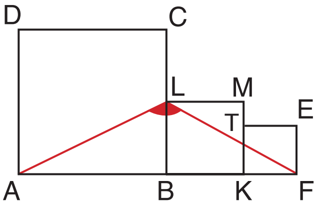


Şekilde $[AB]$ ve $[OB]$ çaplı yarım çemberler B noktasında birbirine içten teğettir. O noktası $[AB]$ çaplı çemberin merkezi ve M noktası $[OB]$ çaplı çemberin merkezidir. $[AC]$, T noktasında M merkezli çembere teğet olup $m(\widehat{BTC}) = \alpha$ **olduğuna göre** $\sin\alpha$ **değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

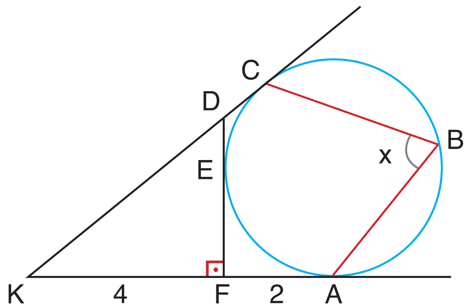
Ç) Aşağıdaki açık uçlu soruları cevaplandırınız.

23.



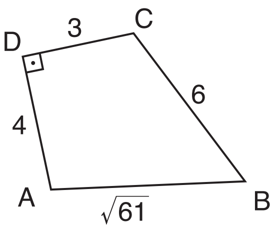
Şekilde ABCD, BKML ve KFET birer kare, $|AB| = 2|CL| = 3|TE|$ **olduğuna göre** $\cot(\widehat{ALF})$ **değerini bulunuz.**

24.



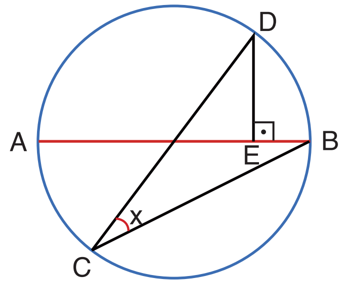
Şekilde
$[DF] \perp [KA]$
$[KD$, C noktasında
$[KF$, A noktasında
$[DF]$, E noktasında
çembere teğet olup
$m(\widehat{CBA}) = x$, $|KF| = 4$ birim ve
$|FA| = 2$ birimdir.
Buna göre tanx değerini bulunuz.

25.



Şekildeki ABCD dörtgeninde $[AD] \perp [DC]$ **olduğuna göre** $\sin(\widehat{DAB})$ **kaçtır?**

26.



Şekildeki $[AB]$ çaplı çemberde
$[DE] \perp [AB]$, $|AE| = 4$ birim,
$|EB| = 1$ birim, $m(\widehat{DCB}) = x$ ise
$\sin 2x$ **değerini bulunuz.**

27. $\cos 2x = \frac{1}{4}$ **bilgisini kullanarak aşağıda verilen trigonometrik ifadelerin değerlerini bulunuz.**

a) $\sin^4 x$ **b)** $\cos^6 x$

28. $\cos 50° = x$, $\sin 10° = y$ **olduğuna göre** $\cos 10° \cdot \cos 20°$ **nin x ve y cinsinden eşitini bulunuz.**

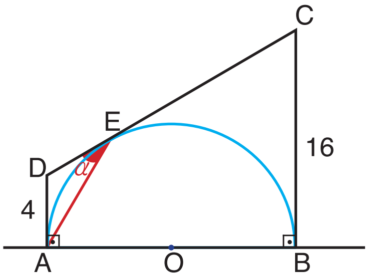
29. $\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ **olduğuna göre** $\sin 3x$ **değerini bulunuz.**

30. $\frac{\sin 3a}{\sin a} - \frac{\cos 3a}{\cos a}$ **işleminin sonucu kaçtır?**

31. $3\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 2$ **olduğuna göre** $\tan x$ **ifadesinin alabileceği farklı değerlerin toplamı kaçtır?**

32. $\sqrt[3]{5\sin 2x + 4\cos 3y + 12\cos 2x + 10}$
ifadesinin alabileceği kaç tam sayı değeri vardır?

33.



Şekildeki O merkezli $[AB]$ çaplı yarım çemberde

$[DC]$, E noktasında çembere teğettir.

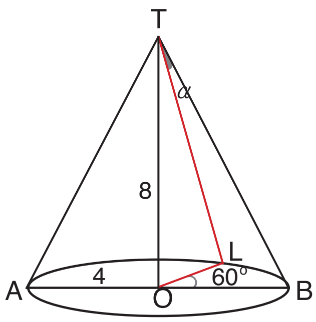
$|AD| = 4$ cm,

$|CB| = 16$ cm ve

$m(\widehat{DEA}) = \alpha$

olduğuna göre $\cos\alpha$ **değerini bulunuz.**

34.



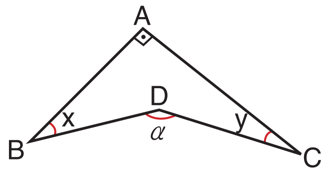
Şekildeki dik koninin tepesi T, taban merkezi O, yüksekliği 8 birim ve taban yarıçapı 4 birimdir.

$m(\widehat{BOL}) = 60°$

$m(\widehat{BTL}) = \alpha$

olduğuna göre $\cos\alpha$ **değeri kaçtır?**

35.



Yukarıdaki şekilde

$[AB] \perp [AC]$

$m(\widehat{BDC}) = \alpha$

$m(\widehat{ABD}) = x$

$m(\widehat{ACD}) = y$

$\cos(x+y) = \dfrac{2}{3}$

olduğuna göre $\cot\alpha$ **nın değerini bulunuz.**

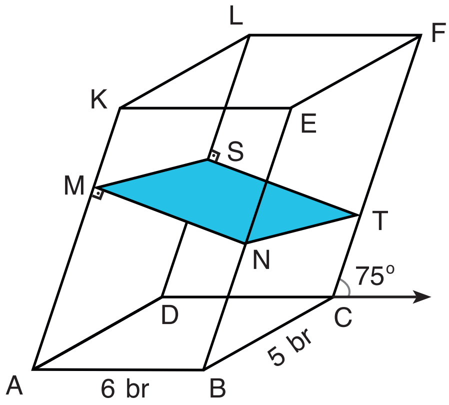
36. $\dfrac{1}{1-\cos^2 x} + \dfrac{1}{1-\sin^2 x} = 4$ **olduğuna göre** $\sin 2x$ **in pozitif değerini bulunuz.**

37. $0 < x < \dfrac{\pi}{8}$ olmak üzere $\tan 4x = \dfrac{4}{3}$ **olduğuna göre** $\cot x$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

38. $(1+\tan 1°)\cdot(1+\tan 2°)\cdot \ldots \cdot(1+\tan 44°)$
ifadesinin değeri kaçtır?

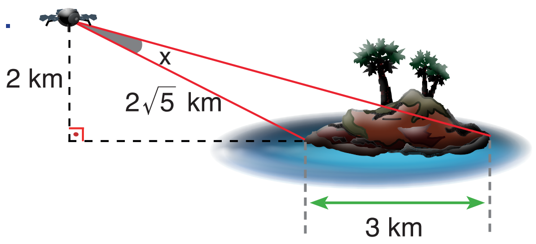
39. $\dfrac{\sin 5°}{\cos 0° \cdot \cos 5°} + \dfrac{\sin 5°}{\cos 5° \cdot \cos 10°} + \ldots + \dfrac{\sin 5°}{\cos 40° \cdot \cos 45°}$
ifadesinin değeri kaçtır?

40.



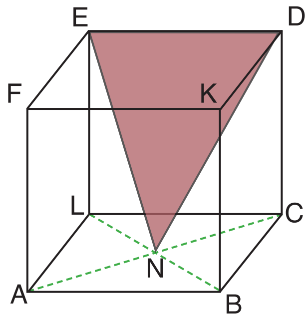
Eğik prizmalarda dik kesit alanını bulmak için taban alanını prizmanın düzlemle yaptığı açının sinüs değeri ile çarpmak gerekir. $A_{Kesit} = A_{Taban} \cdot \sin\alpha$ olur.
Yukarıdaki şekilde tabanı dikdörtgen olan eğik prizmanın ayrıtları 5 br ve 6 br dir. Yan yüzünün taban düzlemi ile yaptığı açı $75°$ **olduğuna göre prizmanın dik kesitinin alanı kaç birimkaredir?**

41.



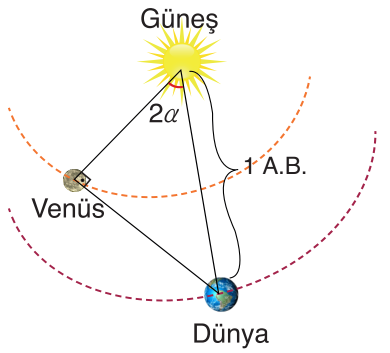
Resimdeki insansız hava aracı 3 km uzunluğundaki bir adayı 2 km yüksekten ve $2\sqrt{5}$ km uzaktan gözlemlemektedir.
Buna göre $\tan x$ **değerini bulunuz.**

42.



Şekildeki ABCLEFKD küpünde $|AB| = 1$ birim ve N noktası ABCL karesinin köşegenlerinin kesim noktasıdır. **Bu durumda** $\cos(\widehat{END})$ **değeri kaçtır?**

43. Astronomi Birimi

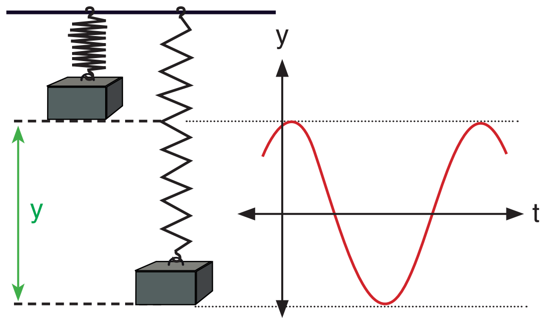


1 astronomi birimi $(1 \text{ A.B.}) = 1{,}5 \cdot 10^8$ km

Astronomi birimi, gök biliminde kullanılan bir uzaklık birimidir. Bir astronomi birimi Güneş'in merkezi ile Dünya'nın merkezi arasındaki uzaklıktır. Bu değer yaklaşık 150 000 000 km dir.
Yukarıda verilen şekildeki gibi Venüs, Güneş ve Dünya arasındaki açı 2α ve Dünya, Venüs ve Güneş arasındaki açı $90°$ olsun. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{10}$ **olduğuna göre Güneş ile Venüs arasındaki uzaklık kaç astronomi birimidir?**

44. Harmonik Hareket

Sürekli olarak kendini tekrar eden harekete harmonik hareket denir. Bir cismin harekete başladığı noktaya dönmesi bir salınım, bu hareket sırasında geçen süreye periyot denir.



Şekildeki cisim y ekseni boyunca basit harmonik hareket yapıyor.

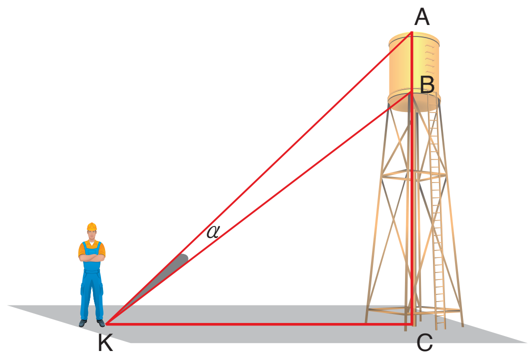
Buna göre

a) **Genel olarak** $y = a\sin kt + b\cos kt$ **biçiminde ifade edilen harmonik hareket denklemi için** $\tan c = \frac{b}{a}$ **olmak üzere** $y = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(kt+c)$ **olduğunu gösteriniz.**

b) $y = \frac{1}{8}\sin 2t + \frac{1}{6}\cos 2t$ **harmonik denkleminin en sade şeklini bulunuz.**

c) **Frekans, periyodun tersidir ve parçacığın birim zamanda yaptığı salınım sayısını gösterir.** $f = \frac{1}{T} = \frac{b}{2\pi}$ **devir/sn olduğuna göre şekildeki ağırlığın salınım frekansını bulunuz.**

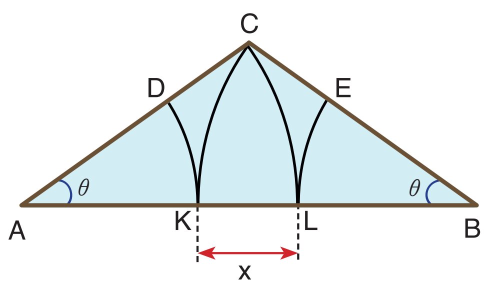
45.



Şekildeki su deposu için A, B ve C noktaları doğrusal olmak üzere BC uzunluğunun $\frac{1}{4}$ ü $|AB|$ ye eşittir. K noktasında bulunan bir kişinin C noktasına olan uzaklığı ile AC uzunluğu birbirine eşittir.

Buna göre $\tan\alpha$ **değerini bulunuz.**

46.



Yukarıdaki üçgen şeklindeki pencerede A merkezli DK ve CL çember yayları, B merkezli CK ve EL çember yayları çizilmiştir.

$|CA| = |CB| = a$

$m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{CBA}) = \theta$

$|KL| = x$

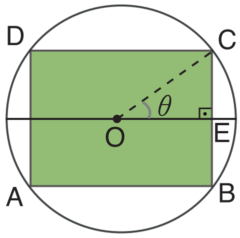
Buna göre

a) θ **ile a arasındaki bağıntının** $\cos\theta = \frac{2a-x}{2a}$ **olduğunu gösteriniz.**

b) $\sin\frac{\theta}{2}$ **nin x ve a türünden eşitini bulunuz.**

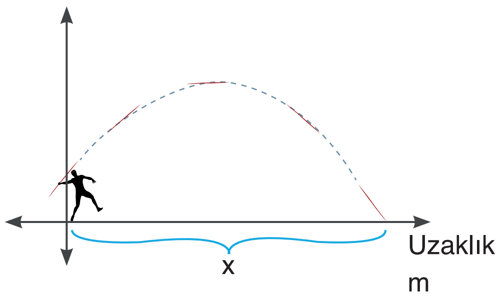
c) $\theta = 60^\circ$ **olduğunda x ile a arasındaki bağıntıyı bulunuz.**

47.



Yarıçapı 1 birim olan bir çemberin içine şekildeki gibi bir dikdörtgen yerleştiriliyor. $|OE| = x$ birim, $|CE| = y$ birim **ise dikdörtgenin alanının θ ya bağlı olarak** $A(\theta) = 2\sin 2\theta$ **olduğunu gösteriniz.**

48. Cirit Atma



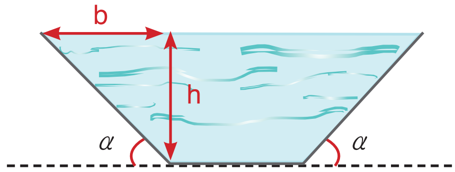
Bir cirit atma müsabakasında bir yarışmacı yukarıda verilen şekildeki gibi ciriti 21 m/sn hızla 45 m uzağa atıyor. Ciritin atıldığı yerden saplandığı yere olan uzaklığı x ve ilk hızı V_0 olsun. Cirit yatay ile θ açısıyla atıldığında aldığı mesafe

$$x = \frac{V_0^2 \sin 2\theta}{g}, \quad g = 9{,}8\,\text{m/sn}^2$$

olarak modelleniyor. Burada g yer çekimi ivmesidir.

Buna göre yarışmacı kaç derecelik bir açı ile ciritini fırlatmıştır?

49. Yağmur Oluğu



27 cm eninde metal bir levhanın kenarları 3 cm eninde ve yatay ile α açısı yapacak şekilde kıvrılarak kesit alanı yukarıdaki gibi görünen yağmur oluğu yapılmak isteniyor.

Buna göre

a) **Oluğun enine kesit alanını α açısının trigonometrik oranları cinsinden bulunuz.**

b) $\alpha = \frac{\pi}{3}$ **için kesit alanını hesaplayınız.**

c) $\alpha = 90°$ **olduğunda kesit alanı nasıl değişir?**

50. Ses kayıt cihazına iki farklı sesi kaydeden bir kişinin cihazdaki seslere ait sinyaller t saniye olmak üzere

$$y_1 = 3\sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$y_2 = 3\sin\left(2t + \frac{7\pi}{6}\right)$$

bağıntısıyla verilmektedir.

Buna göre bu iki sinyalin toplamını bulunuz.

DEĞERLENDİRME

Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorular ile ilgili konuları veya faaliyetleri tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.

GEOMETRİ

4. DÖNÜŞÜMLER

4.1. ANALİTİK DÜZLEMDE TEMEL DÖNÜŞÜMLER

Topkapı Sarayı'nın kapısında kullanılan süslemeler geometrik şekillerden oluşmaktadır. Dikdörtgen şeklindeki kapının merkezinde bir tam ve köşelerinde de çeyrek on kollu yıldız bulunmaktadır. Yıldız düzgün beşgenin içine yerleştirilmiştir. Kapıdaki kaplama yatay ve dikey yönde tekrar ettirilerek periyodik olarak tamamlanmıştır. Kapının üzerindeki süslemede hem dikey hem de yatay doğrultuda simetri bulunmaktadır. Bu süslemenin benzerleri Tokat Hatuniye Camisi ve Kayseri Hatun Camisi'nde de kullanılmıştır.

Hazırlık Çalışması

Anadolu kilimlerinin birçoğunda geometrik şekillerin oluşturduğu desenler kullanılmıştır. Bu desenlerde halıyı dokuyan; sevgi, aşk, özlem gibi ruh hallerini halıya yansıtır. Bazı yörelerde yeni evlenen çiftlere bindallı kilimi hediye edilir. Bindallı kiliminin içindeki motiflerin nasıl oluşturulduğunu ve ne anlama geldiğini biliyor musunuz?

4.1. ANALİTİK DÜZLEMDE TEMEL DÖNÜŞÜMLER

Bu Bölümde Neler Öğreneceksiniz?

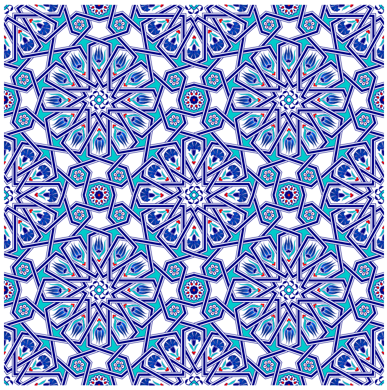
- Analitik düzlemde koordinatları verilen bir noktanın öteleme, dönme ve simetri dönüşümleri altındaki görüntüsünün koordinatlarını bulma
- Temel dönüşümler ve temel dönüşümlerin bileşkeleri ile ilgili problem çözme

Terimler ve Kavramlar

- Dönüşüm
- Öteleme
- Dönme
- Simetri dönüşümleri
- Dönme merkezi
- Dönme açısı
- Simetri
- Simetri merkezi
- Simetri ekseni

Temel Dönüşümler

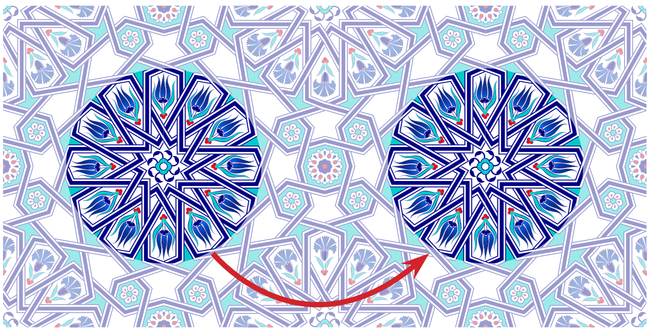
Anadolu Selçukluları ve Osmanlılarda kullanılan süsleme motifleri temel dönüşümlerin en güzel örneklerindendir.



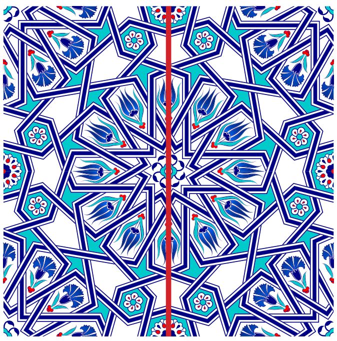
Görsel 4.1: Dönüşümler

Yandaki yıldız geçme Osmanlı çini motifi, analitik düzlemde öteleme, simetri ve dönme dönüşümleri kullanılarak oluşturulmuştur.

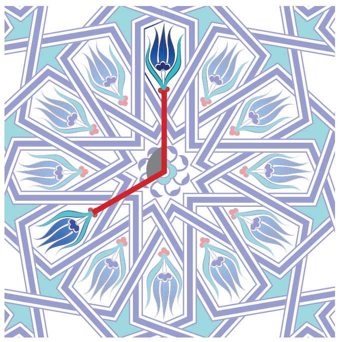
Aşağıdaki dönüşümler incelenirse I. dönüşümün öteleme, II. dönüşümün simetri ve III. dönüşümün dönme dönüşümü olduğu görülür.



Görsel 4.2: Öteleme



Görsel 4.3: Simetri

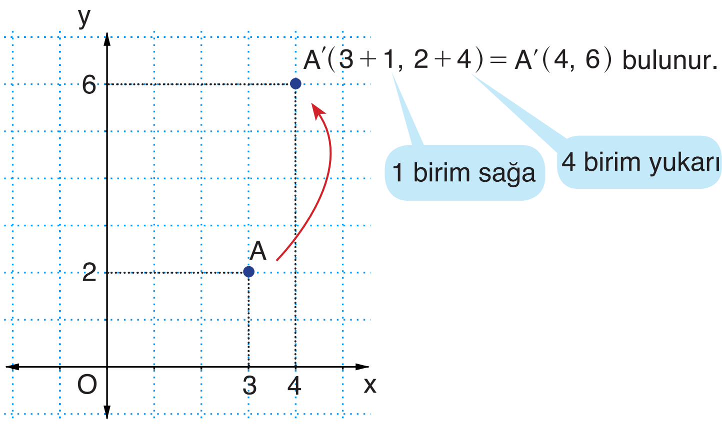


Görsel 4.4: Dönme

Öteleme Dönüşümü

Analitik düzlemde bir şeklin belirli bir doğrultuda veya yönde yer değiştirmesine öteleme denir.

Örneğin $A(3, 2)$ noktası x ekseni doğrultusunda 1 birim sağa, y ekseni doğrultusunda 4 birim yukarı ötelensin.



Yukarıdaki örnekte de görüldüğü gibi noktanın apsisi, nokta x ekseni boyunca sağa öteleniyorsa artar, sola öteleniyorsa azalır.

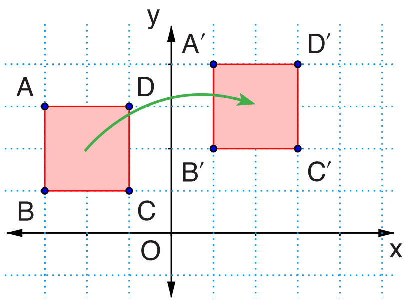
Noktanın ordinatı, nokta y ekseni boyunca yukarı öteleniyorsa artar, aşağı öteleniyorsa azalır.

TANIM

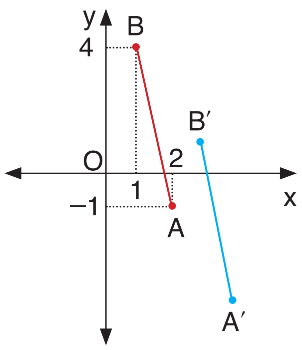
$A(x_1, y_1)$ noktasının x ekseni doğrultusunda a birim, y ekseni doğrultusunda b birim ötelenmesiyle elde edilen nokta $A'(x_2, y_2)$ olmak üzere $A'(x_2, y_2) = A(x_1, y_1) + (a, b) = (x_1 + a, y_1 + b)$ olur.

Ötelenen şeklin tüm noktaları aynı doğrultuda ve aynı uzaklıkta ötelenir. Öteleme dönüşümü ile şeklin konumu değişir ancak biçimi, yönü ve boyutu değişmez.

Aşağıda analitik düzlemdeki ABCD karesi x ekseni doğrultusunda 4 birim sağa ve y ekseni doğrultusunda 1 birim yukarı ötelenerek $A'B'C'D'$ karesi elde edilmiştir.



ÖRNEK 1



$A(2, -1)$ ve $B(1, 4)$ olmak üzere AB doğru parçasının x ekseni doğrultusunda 2 birim sağa, y ekseni doğrultusunda 3 birim aşağı ötelenmesi ile elde edilen $A'B'$ doğru parçasının uç noktalarının koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

$A'(x_2, y_2) = A(2, -1) + (2, -3)$

$x_2 = 2 + 2 = 4$

$y_2 = -1 - 3 = -4$ olur.

Buradan $A'(4, -4)$ bulunur.

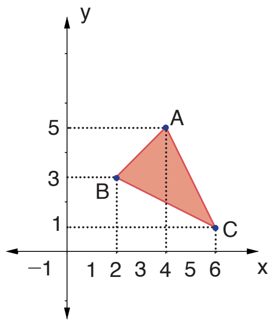
$B'(x_2, y_2) = B(1, 4) + (2, -3)$

$x_2 = 1 + 2 = 3$

$y_2 = 4 - 3 = 1$ olur.

Buradan $B'(3, 1)$ bulunur.

ÖRNEK 2



Yandaki şekilde köşe koordinatları $A(4, 5)$, $B(2, 3)$ ve $C(6, 1)$ olan üçgen x ekseni doğrultusunda 3 birim sola ve y ekseni doğrultusunda 2 birim yukarı ötelenerek $A'B'C'$ üçgeni elde ediliyor.
Buna göre $A'B'C'$ üçgenini analitik düzlemde çiziniz.

ÇÖZÜM

$A'(x_2, y_2) = A(4, 5) + (-3, 2)$

$x_2 = 4 - 3 = 1$

$y_2 = 5 + 2 = 7$ olur.

Buradan $A'(1, 7)$ bulunur.

$B'(x_2, y_2) = B(2, 3) + (-3, 2)$

$x_2 = 2 - 3 = -1$

$y_2 = 3 + 2 = 5$ olur.

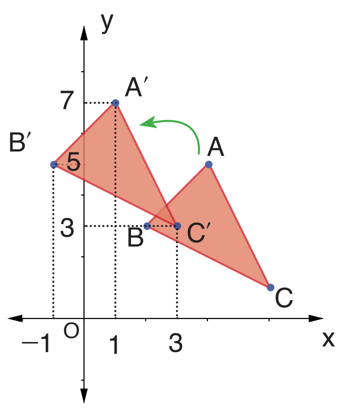
Buradan $B'(-1, 5)$ bulunur.

$C'(x_2, y_2) = C(6, 1) + (-3, 2)$

$x_2 = 6 - 3 = 3$

$y_2 = 1 + 2 = 3$ olur.

Buradan $C'(3, 3)$ bulunur.



ÖRNEK 3

$d: 2x+3y-4=0$ doğrusu x ekseni doğrultusunda 3 birim sağa, y ekseni doğrultusunda 4 birim aşağı ötelendiğinde oluşan doğrunun denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

$2x+3y-4=0$ doğrusunun üzerindeki herhangi bir nokta $A(x_1, y_1)$ olsun. Bu doğru x ekseni doğrultusunda 3 birim sağa, y ekseni doğrultusunda 4 birim aşağı ötelendiğinde A noktasının yeni konumu $A'(x_2, y_2)$ olsun.

Bu durumda $A'(x_2, y_2) = A(x_1, y_1) + (3, -4)$ olur.

$x_2 = x_1 + 3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 - 3$

$y_2 = y_1 - 4 \quad \Rightarrow \quad y_1 = y_2 + 4$ bulunur.

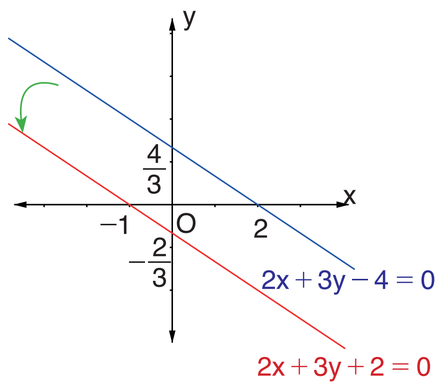
$A(x_1, y_1)$ noktası $2x+3y-4=0$ doğrusu üzerinde olduğu için $2x_1+3y_1-4=0$ denklemi sağlanır.

Buradan $x_1 = x_2 - 3$ ve $y_1 = y_2 + 4$ değerleri doğru denkleminde yerlerine yazılırsa

$2(x_2-3)+3(y_2+4)-4=0$

$2x_2-6+3y_2+12-4=0$

$2x_2+3y_2+2=0$ elde edilir.



Öteleme sonucunda elde edilen yeni doğrunun denklemi $2x+3y+2=0$ olarak bulunur.

ÖRNEK 4

$a, b \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $3x+2y+4=0$ doğrusu x ekseni doğrultusunda a birim sağa, y ekseni doğrultusunda b birim yukarı ötelenerek $3x+2y-8=0$ doğrusu elde ediliyor. Buna göre (a, b) ikilisini bulunuz.

ÇÖZÜM

$3x+2y-8=0$ doğrusu üzerindeki noktalar $A'(x, y)$ olsun.
$3x+2y+4=0$ doğru denkleminde x yerine $x-a$ ve y yerine $y-b$ yazılırsa

$3(x-a)+2(y-b)+4=0$

$3x-3a+2y-2b+4=0$ bulunur.

Bu denklem ile $3x+2y-8=0$ doğrusu birbirine eşit olduğundan

$3x-3a+2y-2b+4=3x+2y-8$

$-3a-2b=-12$

$3a+2b=12$ olur.

Buradan $a, b \in \mathbb{Z}^+$ koşulunu sağlayan (a, b) ikilisi $(2,3)$ biçiminde elde edilir.

ÖRNEK 5

$y = x^2 - 2x + 3$ biçiminde verilen parabol x ekseni doğrultusunda 3 birim sağa ve y ekseni doğrultusunda 2 birim aşağı ötelendiğinde oluşan yeni parabolün denklemini bulunuz.

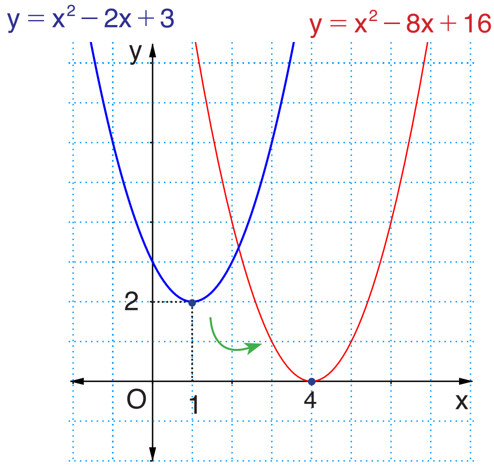
ÇÖZÜM

Parabol üzerinde alınan herhangi bir nokta $A(x_1, y_1)$ ve ötelenmiş nokta $A'(x_2, y_2)$ olsun.

$A'(x_2, y_2) = A(x_1, y_1) + (3, -2)$

$x_2 = x_1 + 3 \Rightarrow x_1 = x_2 - 3$

$y_2 = y_1 - 2 \Rightarrow y_1 = y_2 + 2$ olur.



$A(x_1, y_1)$ noktası parabolün üzerinde olduğu için

$y_1 = x_1^2 - 2x_1 + 3$ denklemi sağlanır.

Buradan $x_1 = x_2 - 3$ ve $y_1 = y_2 + 2$ değerleri denklemde yerlerine yazılırsa

$y_2 + 2 = (x_2 - 3)^2 - 2(x_2 - 3) + 3$

$y_2 + 2 = x_2^2 - 6x_2 + 9 - 2x_2 + 6 + 3$

$y_2 = x_2^2 - 8x_2 + 16$ olur.

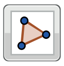
O hâlde $y = x^2 - 2x + 3$ parabolünün ötelenmesiyle oluşan yeni parabolün denklemi $y = x^2 - 8x + 16$ şeklinde bulunur.

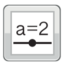
SIRA SİZDE

Aşağıdaki tabloda sol sütundaki ifadeler x ekseni doğrultusunda 4 birim sağa ve y ekseni doğrultusunda 2 birim aşağı ötelenerek sağ sütuna yazılmıştır. Buna göre boşlukları doldurunuz.

İfade	Ötelenmiş İfade
$A(-1, 4)$	
	$B'(2, -1)$
$3x - y - 5 = 0$	
	$x - 2y - 3 = 0$
$y = x^2$	
	$y = x^2 - x$
$y = x^3$	

GeoGebra programını kullanarak düzlemde herhangi bir çokgenin x veya y ekseni doğrultusunda ötelenmesini inceleyiniz.

I.  GeoGebra programının “grafik” bölümünde herhangi bir ABC üçgeni oluşturunuz.

II. 

a ve b biçiminde iki tane sürgü oluşturunuz.

III. Giriş bölümüne ötelenmiş olan çokgenin köşelerini oluşturunuz.

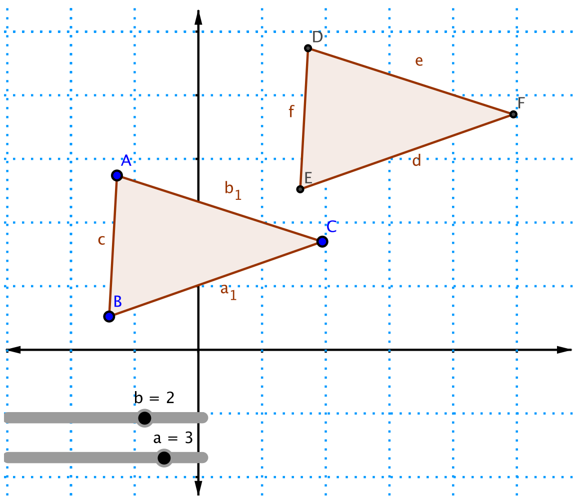
Giriş: A + (a, b)

Giriş: B + (a, b)

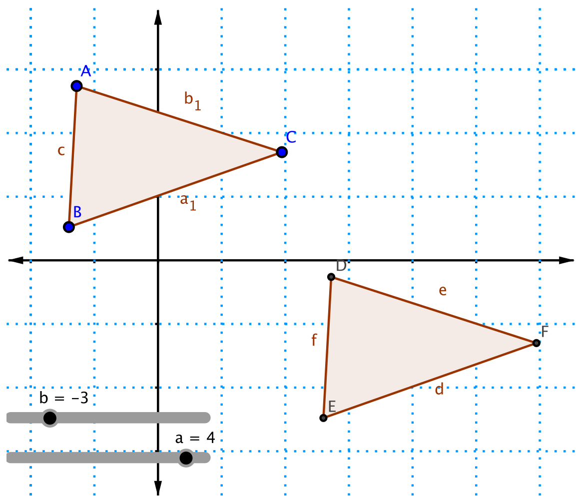
Giriş: C + (a, b)

IV. Giriş bölümünde köşeleri D, E ve F olan çokgeni oluşturunuz.
Giriş: Çokgen(D, E, F)

V. Sürgüleri ve ABC çokgeninin köşelerini hareket ettirerek öteleme dönüşümünü test ediniz.



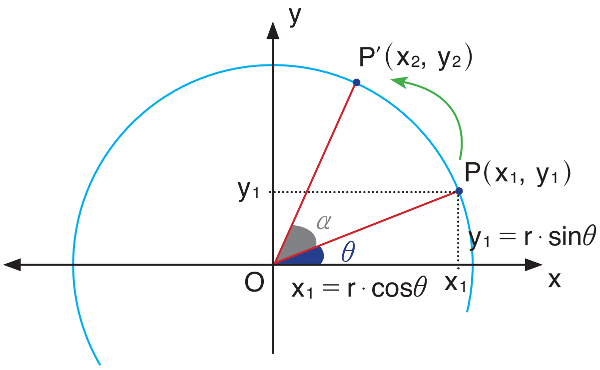
ABC üçgeni x ekseni doğrultusunda 3 birim sağa, y ekseni doğrultusunda 2 birim yukarı ötelenmiştir.



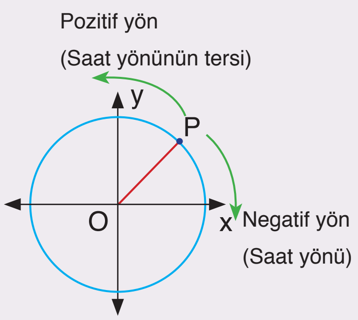
ABC üçgeni x ekseni doğrultusunda 4 birim sola, y ekseni doğrultusunda 3 birim aşağı ötelenmiştir.

Dönme Dönüşümü

Bir noktanın sabit bir noktaya olan uzaklığı değişmeden bu sabit nokta etrafında hareket etmesine dönme denir.



HATIRLATMA



Düzlemde bir P noktası verilsin. OP doğru parçasının x ekseni ile yaptığı açının ölçüsü θ olsun. P noktasının pozitif yönde orijin etrafında α derece döndürülmesi ile bulunan nokta P' noktası olsun.

$P(x_1, y_1)$ noktası için $x_1 = r \cdot \cos\theta$ ve $y_1 = r \cdot \sin\theta$ olduğundan

$P'(x_2, y_2)$ noktası

$x_2 = r \cdot \cos(\alpha + \theta)$

$y_2 = r \cdot \sin(\alpha + \theta)$ biçiminde olur.

Toplam formüllerinden

$x_2 = r(\cos\theta \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\theta)$

$y_2 = r(\sin\alpha \cdot \cos\theta + \cos\alpha \cdot \sin\theta)$ bulunur.

Bu denklemler düzenlenirse

$x_2 = r \cdot \cos\theta \cdot \cos\alpha - r \cdot \sin\theta \cdot \sin\alpha$

$x_2 = x_1 \cdot \cos\alpha - y_1 \cdot \sin\alpha$

$y_2 = r \cdot \cos\theta \cdot \sin\alpha + r \cdot \sin\theta \cdot \cos\alpha$

$y_2 = x_1 \cdot \sin\alpha + y_1 \cdot \cos\alpha$ elde edilir.

Buradan P' noktası $P'(x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha,\ x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha)$ biçiminde elde edilir.

TANIM

$P(x, y)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde α açısı kadar döndürülmesi ile elde edilen P' noktası

$P' = R_\alpha(P) = (x\cos\alpha - y\sin\alpha,\ x\sin\alpha + y\cos\alpha)$ biçiminde bulunur.

Burada R_α ya dönme dönüşümü, α ya ise dönme açısı denir.

$P(x, y)$ noktasının orijin etrafında negatif yönde α açısı kadar döndürülmesi ile elde edilen P' noktası

$P' = R_{-\alpha}(P)$

$= (x\cos(-\alpha) - y\sin(-\alpha),\ x\sin(-\alpha) + y\cos(-\alpha))$

$= (x\cos\alpha + y\sin\alpha,\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha)$ biçiminde bulunur.

Dönme dönüşümü esnasında konumu değişmeyen noktaya dönme merkezi denir.

Özel olarak $P(x, y)$ noktasının

I. Orijin etrafında pozitif yönde $90°$ döndürülmesi ile

$R_{90°}(P) = (x\cos 90° - y\sin 90°,\ x\sin 90° + y\cos 90°)$

$R_{90°}(x, y) = (-y, x)$ bulunur.

II. Orijin etrafında $180°$ döndürülmesi ile

$R_{180°}(P) = (x\cos 180° - y\sin 180°,\ x\sin 180° + y\cos 180°)$

$= (-x, -y)$ bulunur.

III. Orijin etrafında pozitif yönde $270°$ döndürülmesi ile

$R_{270°}(P) = (x\cos 270° - y\sin 270°,\ x\sin 270° + y\cos 270°)$

$= (y, -x)$ bulunur.

Sonuç olarak herhangi bir (x, y) noktasının orijin etrafında pozitif yönde $90°$, $180°$ ve $270°$ döndürülmesi ile elde edilen noktalar aşağıdaki gibi ifade edilir.

$R_{90°}(x, y) = (-y, x)$
$R_{180°}(x, y) = (-x, -y)$
$R_{270°}(x, y) = (y, -x)$

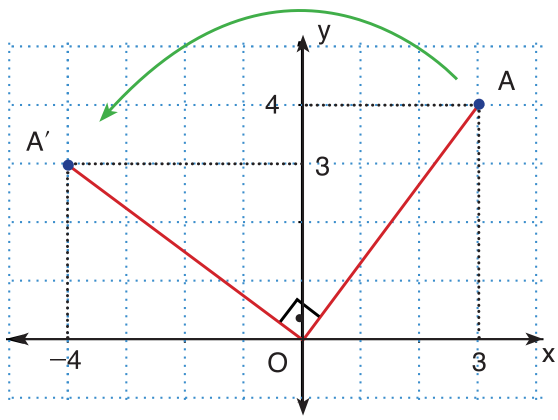
ÖRNEK 6

$A(3, 4)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde $90°$ döndürülmesi ile elde edilen noktayı bulunuz.

ÇÖZÜM

$A(x, y)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde $90°$ döndürülmesi ile elde edilen nokta A' olmak üzere

$A' = R_\alpha(A) = (x\cos\alpha - y\sin\alpha,\ x\sin\alpha + y\cos\alpha)$
$A' = R_\alpha(3, 4) = (3\cos 90° - 4\sin 90°,\ 3\sin 90° + 4\cos 90°)$
$= (-4, 3)$ bulunur.



ÖRNEK 7

$A(2, \sqrt{3})$ noktasının orijin etrafında saat yönünde 60° döndürülmesi ile elde edilen noktayı bulunuz.

ÇÖZÜM

A noktası orijin etrafında saat yönünde 60° döndürüldüğünde $R_\alpha(A)$ dönme dönüşümünde $\alpha = -60^\circ$ olarak alınır.

$$\begin{aligned} R_\alpha(2, \sqrt{3}) &= (2\cos(-60^\circ) - \sqrt{3}\sin(-60^\circ),\ 2\sin(-60^\circ) + \sqrt{3}\cos(-60^\circ)) \\ &= (2\cos 60^\circ + \sqrt{3}\sin 60^\circ,\ -2\sin 60^\circ + \sqrt{3}\cos 60^\circ) \\ &= \left(2 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},\ -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{5}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

A noktasının orijin etrafında saat yönünde 60° döndürüldüğünde elde edilen nokta $A'\left(\frac{5}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ olur.

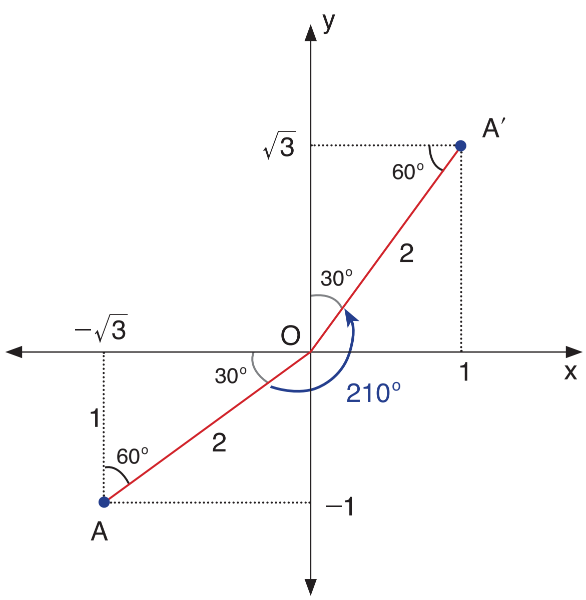
ÖRNEK 8

$A(-\sqrt{3}, -1)$ noktası orijin etrafında pozitif yönde α derece döndürülerek $A'(1, \sqrt{3})$ noktası elde ediliyor. Buna göre α açısı kaç derecedir?

ÇÖZÜM

I. Yol

Noktalar analitik düzlemde gösterilirse α açısının 210° olduğu görülür.



II. Yol

$A'(1, \sqrt{3}) = R_{\alpha}(A) = (-\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha,\ -\sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha)$ olur.

Buradan

$-\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha = 1$

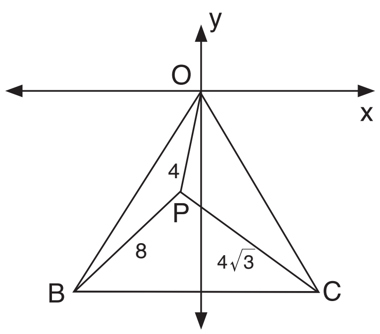
$-\sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{3}$ bulunur.

Buradan ilk denklem $\sqrt{3}$ ile genişletilir ve ifadeler taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{array}{rl} & -3\cos\alpha + \cancel{\sqrt{3}\sin}\alpha = \sqrt{3} \\ + & -\cancel{\sqrt{3}\sin}\alpha - \cos\alpha = \sqrt{3} \\ \hline & -4\cos\alpha = 2\sqrt{3} \\ & \cos\alpha = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \text{ olur.} \end{array}$$

$\alpha = 150^\circ$ veya $\alpha = 210^\circ$ bulunur. $\alpha = 150^\circ$ denklemi sağlamadığı için $\alpha = 210^\circ$ elde edilir.

ÖRNEK 9



Yanda verilen OBC eşkenar üçgeninde

$|OP| = 4$ birim

$|BP| = 8$ birim

$|PC| = 4\sqrt{3}$ birim

$m(\widehat{OPB}) = \alpha$

ise α kaç derecedir?

ÇÖZÜM

OPB üçgeninin orijin etrafında pozitif yönde 60° derece döndürülmesi ile $OP'C$ üçgeni elde edilir. Dönme dönüşümünde uzunluklar değişmediğinden OPB üçgeni ile $OP'C$ üçgeni eş üçgenlerdir.

Buradan $|OP'| = 4$ birim ve $|P'C| = 8$ birim bulunur.

$m(\widehat{POP'}) = 60^\circ$ olduğundan OPP' eşkenar üçgen olur ve

$|PP'| = 4$ birim bulunur.

$PP'C$ üçgeninin kenarları

$4,\ 4\sqrt{3}$ ve 8 birim olduğundan

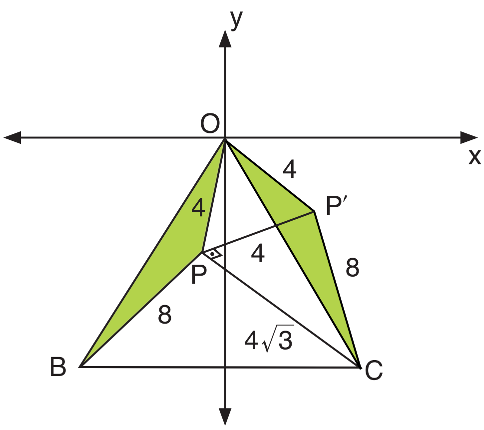
$m(\widehat{PP'C}) = 90^\circ$, $m(\widehat{PCP'}) = 30^\circ$ ve $m(\widehat{CP'P}) = 60^\circ$

bulunur.

Buradan

$m(\widehat{OP'C}) = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$ elde

edilir.

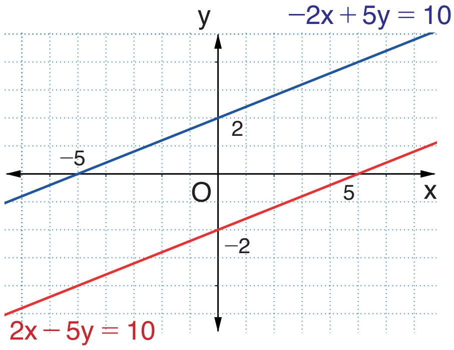


ÖRNEK 10

$2x - 5y = 10$ doğrusunun orijin etrafında pozitif yönde $180°$ döndürülmesiyle elde edilen doğrunun denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

I. Yol



$2x - 5y = 10$ doğrusu üzerinde herhangi bir nokta $A(x_1, y_1)$ biçiminde olsun. $A(x_1, y_1)$ noktasının orijin etrafında $180°$ döndürülmesi ile elde edilen nokta $A'(x_2, y_2)$ olmak üzere

$$A'(x_2, y_2) = R_{180°}(A(x_1, y_1))$$
$$= (x_1 \cos 180° - y_1 \sin 180°,\ x_1 \sin 180° + y_1 \cos 180°)$$
$$= (-x_1, -y_1) \text{ bulunur.}$$

Buradan

$x_2 = -x_1 \ \Rightarrow\ x_1 = -x_2$

$y_2 = -y_1 \ \Rightarrow\ y_1 = -y_2$ olur.

$A(x_1, y_1)$ noktaları $2x - 5y = 10$ doğrusunun üzerinde olduğu için $2x_1 - 5y_1 = 10$ denklemi sağlanır.

$x_1 = -x_2$ ve $y_1 = -y_2$ değerleri yerine yazılırsa

$$2(-x_2) - 5(-y_2) = 10$$
$$-2x_2 + 5y_2 = 10 \text{ olur.}$$

Buradan $-2x + 5y = 10$ doğrusu elde edilir.

II. Yol

$2x - 5y = 10$ doğrusu üzerinde A ve B şeklinde herhangi iki nokta alınır. Bu noktalar orijin etrafında $180°$ döndürülerek A' ve B' noktaları elde edilir. A' ve B' noktaları ile eğimi ve bir noktası verilen doğrunun denklemi $y - y_1 = m(x - x_1)$ bağıntısı kullanılarak bulunur.

$2x - 5y = 10$ doğrusu üzerinde

$x = 0 \ \Rightarrow\ y = -2 \ \Rightarrow\ A(0, -2)$

$y = 0 \ \Rightarrow\ x = 5 \ \Rightarrow\ B(5, 0)$

noktaları alınsın.

$A' = R_{180°}(0, -2) = (0, 2)$

$B' = R_{180°}(5, 0) = (-5, 0)$ bulunur.

A' ve B' noktalarından geçen doğrunun eğimi

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 2}{-5 - 0} = \frac{2}{5} \text{ olur.}$$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ doğru denkleminde $A'(0, 2)$ noktası ve $m = \frac{2}{5}$ eğimi yerine yazılırsa

$$y - 2 = \frac{2}{5}(x - 0)$$
$$5y - 10 = 2x$$
$$-2x + 5y - 10 = 0 \text{ doğrusu elde edilir.}$$

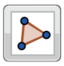
SIRA SİZDE

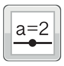
Aşağıdaki tablodaki ifadeleri verilen açı değerlerine göre orijin etrafında pozitif yönde döndürüp bulduğunuz değerleri boşluklara yazınız.

	Dönme Açısı					
İfade	30°	45°	60°	90°	180°	270°
$A(-1, -3)$						
$B(4, 0)$						
$C(0, -2)$						
$y = 2$						
$y = x$						
$x - y - 4 = 0$						

TEKNOLOJİ

GeoGebra programını kullanarak düzlemde herhangi bir çokgenin orijine göre dönme dönüşümünü inceleyiniz.

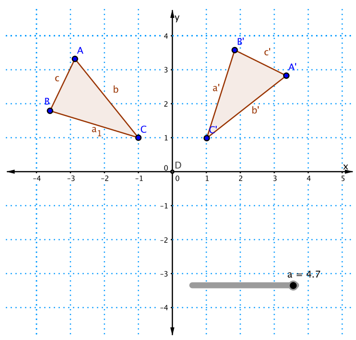
I.  GeoGebra programının “grafik” bölümünde herhangi bir ABC üçgeni oluşturunuz ve orijinde bir $D(0, 0)$ noktası oluşturunuz.

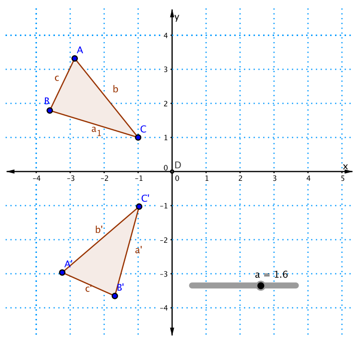
II. 

a biçiminde bir sürgü oluşturunuz.

III.  “Nesneyi bir nokta etrafında döndür” düğmesine basıp önce ABC üçgeninin içine basınız. Daha sonra D noktasına tıklayıp açılan pencerede açı bölümüne a yazınız.

IV. Sürgüyü ve ABC üçgeninin köşelerini hareket ettirerek dönme dönüşümünü test ediniz





ALIŞTIRMALAR

1. **Aşağıdaki noktaları x ekseni doğrultusunda 3 birim sağa, y ekseni doğrultusunda 4 birim aşağı öteleyiniz.**

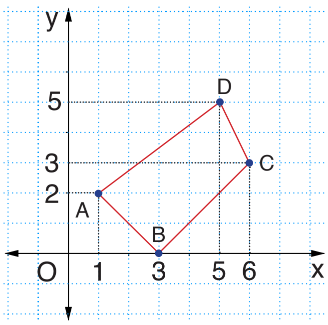
   a) $A(-1, 2)$

   b) $O(0, 0)$

   c) $C(-3, 4)$

2. $A(a, b)$ noktası analitik düzlemde 3 birim sağa ve 2 birim aşağı ötelenerek $A'(-1, 4)$ noktası bulunuyor. **A noktasının koordinatlarını bulunuz.**

3.



Yukarıdaki ABCD dörtgeninin x ekseni doğrultusunda 3 birim sola ve y ekseni doğrultusunda 2 birim yukarı ötelenmesi ile oluşan $A'B'C'D'$ dörtgenini çiziniz.

4. **Aşağıdaki doğruları x ekseni doğrultusunda 2 birim sağa ve y ekseni doğrultusunda 3 birim aşağı öteleyerek oluşan doğruların denklemini bulunuz.**

   a) $4x - 3y - 5 = 0$ c) $y = 2$

   b) $y = 3x$ ç) $x = 1$

5. **GeoGebra programını kullanarak a ve b biçiminde iki tane sürgü oluşturup aşağıdaki fonksiyonların x ekseni doğrultusunda a birim ve y ekseni doğrultusunda b birim ötelemelerini oluşturunuz.**

   a) $2x + 3y = 4$ c) $y = \ln(2x + 1)$

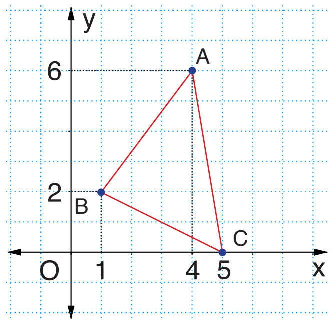
   b) $y = 3x^2 - 1$ ç) $y = \sin(3x + 5)$

6. **Aşağıdaki noktaları orijin etrafında pozitif yönde** $30°$, $45°$ ve $60°$ **döndürerek oluşan yeni noktaların koordinatlarını bulunuz.**

   a) $A(-2, 1)$ c) $C(-3, -4)$

   b) $B(2, -2)$ ç) $D(0, -3)$

7.



Yukarıda verilen ABC üçgeninin orijin etrafında $90°, 180°$ ve $270°$ **döndürülmesiyle oluşan yeni üçgenleri analitik düzlemde gösteriniz.**

8. **Aşağıdaki noktaları orijin etrafında pozitif yönde** $90°, 180°$ ve $270°$ **döndürerek oluşan yeni noktaların koordinatlarını bulunuz.**

   a) $A(3, -3)$ c) $C(-1, 2)$

   b) $B(4, 0)$ ç) $D(0, -3)$

9. $3x + y - 6 = 0$ **doğrusunun orijin etrafında** $90°, 180°$ ve $270°$ **derece döndürülmesi ile elde edilen doğruları bulunuz.**

10. $A(1, 1)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde α derece döndürülmesi ile

    $A'\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ noktası elde ediliyor.

    Buna göre α açısı kaç derecedir?

11. **Geogebra programı yardımı ile aşağıdaki fonksiyonları orijin etrafında pozitif yönde** $30°$, $45°$ ve $60°$ **döndürerek fonksiyonların dönme dönüşümlerini bulunuz.**

    a) $3x - 5y = 6$ c) $y = \ln(x + 3)$

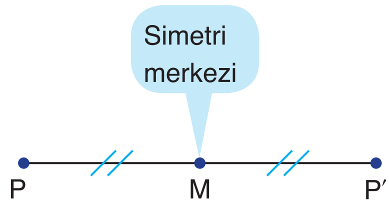
    b) $y = x^2 - x + 1$ ç) $\cos(2x - 1)$

Simetri Dönüşümü

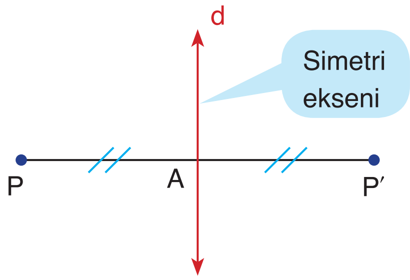
Simetri dönüşümü bir şeklin bütün noktalarının bir noktaya veya bir doğruya göre eşit uzaklıkta görüntülerinin alınması ile oluşan bir dönüşümdür.

Düzlemde P noktasının M noktasına göre simetriği P' noktası olsun. M noktasına simetri merkezi denir ve S_M ile gösterilir.

Eğer simetri dönüşümü bir d doğrusuna göre yapılıyor ise bu doğruya simetri ekseni denir ve S_d ile gösterilir.



$|PM| = |MP'|$



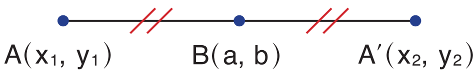
$|PA| = |AP'|$

Düzlemdeki bir nokta ile simetriği olan noktanın simetri eksenine uzaklıkları birbirine eşittir.

Simetri dönüşümü noktanın noktaya, noktanın doğruya, doğrunun noktaya veya doğrunun doğruya göre simetriği gibi farklı biçimlerde yapılabilir.

Bir Noktanın Noktaya Göre Simetriği

Bir A noktasının B noktasına göre simetriği A' olsun.



$|AB| = |BA'|$ olduğunda B orta noktasının koordinatları

$$a = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow 2a = x_1 + x_2 \Rightarrow x_2 = 2a - x_1$$

$$b = \frac{y_1 + y_2}{2} \Rightarrow 2b = y_1 + y_2 \Rightarrow y_2 = 2b - y_1$$ biçiminde elde edilir.

A' noktasının koordinatları $A'(2a - x_1, 2b - y_1)$ biçiminde bulunur.

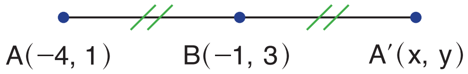
Özel olarak $A(x_1, y_1)$ noktasının orijine göre simetriği ise $A'(-x_1, -y_1)$ noktası olur.

ÖRNEK 11

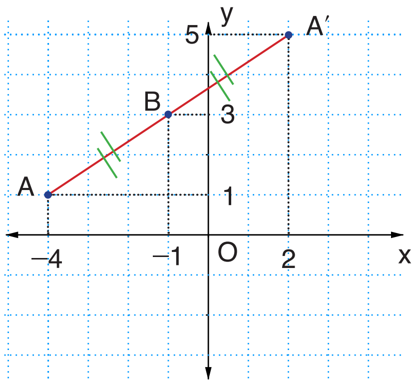
A(−4, 1) noktasının B(−1, 3) noktasına göre simetriği olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

I. Yol



A noktasının B noktasına göre simetriği A′ noktası olsun.



A′ noktasının koordinatları

$$-1=\frac{-4+x}{2} \Rightarrow -2=-4+x \Rightarrow x=2$$

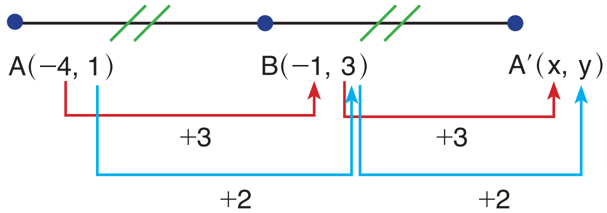
$$3=\frac{1+y}{2} \Rightarrow 6=1+y \Rightarrow y=5$$

A′(2, 5) olarak bulunur.

O hâlde simetri dönüşümü $S_B(A)=A'$ olduğundan $S_{(-1,\,3)}(-4,\,1)=(2,\,5)$ elde edilir.

II.Yol

$|AB|=|BA'|$ olduğundan A ve B noktalarının apsis ve ordinatlarının artma miktarları eşittir.



$x=-1+3=2$
$y=3+2=5$

A′(2, 5) noktası bulunur.

O hâlde simetri dönüşümü

$S_B(A)=A'$ olduğundan $S_{(-1,\,3)}(-4,\,1)=(2,\,5)$ biçiminde gösterilir.

ÖRNEK 12

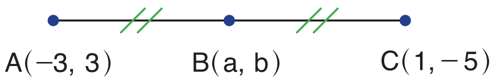
A(−3, 3) noktasının B(a, b) noktasına göre simetriği C noktasıdır. C noktasının orijine göre simetriği D(−1, 5) noktası ise B noktasının koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

$C(x, y)$ noktasının orjine göre simetriği $D(-1, 5)$ ise $C(1, -5)$ olur.
B noktası A ile C noktasının orta noktası olduğundan

$a = \frac{-3+1}{2} = -1$, $b = \frac{3-5}{2} = -1$

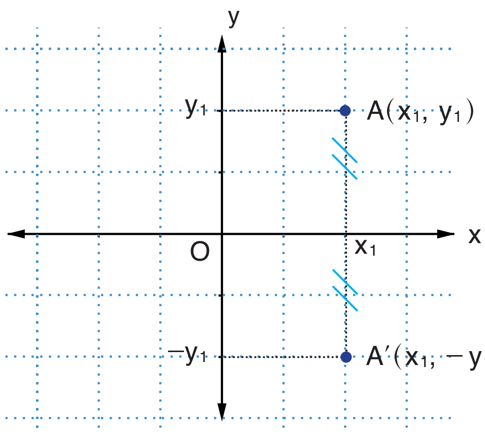
$B(-1, -1)$ noktası bulunur.



Bir Noktanın Eksenlere Göre Simetriği

a) Bir Noktanın x Eksenine Göre Simetriği

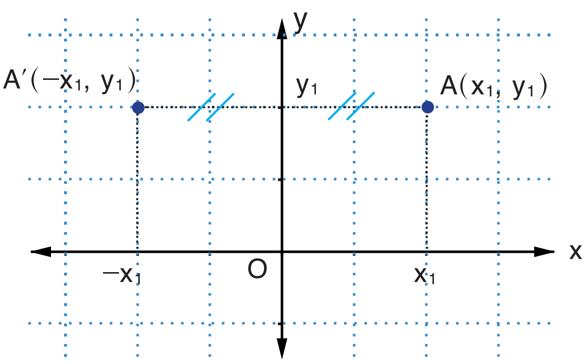
Bir $A(x_1, y_1)$ noktasının x eksenine göre simetriği A' noktası olsun.



Buradan $A(x_1, y_1)$ noktasının x eksenine göre simetriğinin $A'(x_1, -y_1)$ noktası olduğu görülür.

b) Bir Noktanın y Eksenine Göre Simetriği

Bir $A(x_1, y_1)$ noktasının y eksenine göre simetriği A' noktası olsun.



Buradan $A(x_1, y_1)$ noktasının y eksenine göre simetriğinin $A'(-x_1, y_1)$ noktası olduğu görülür.

Bir A noktasının x eksenine ve daha sonra y eksenine göre simetriği alındığında A noktasının orijine göre simetriği elde edilir.

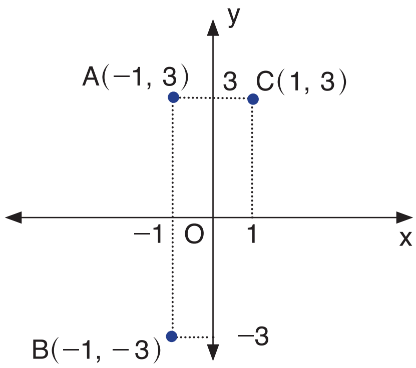
ÖRNEK 13

$A(-1, 3)$ noktasının x eksenine ve y eksenine göre simetriği olan noktaları bulunuz.

ÇÖZÜM

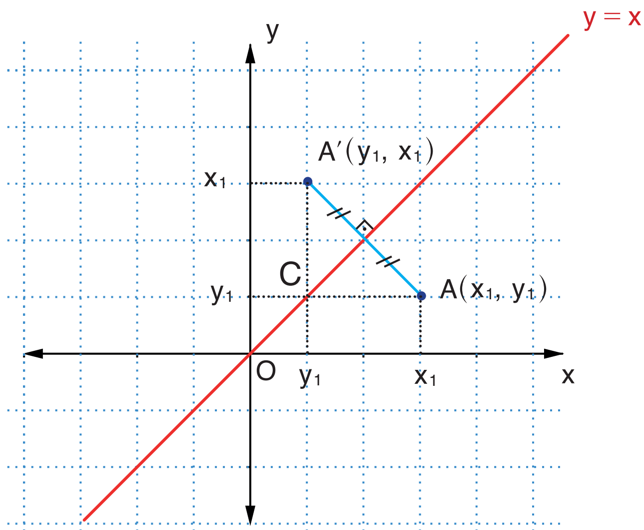
$A(x_1, y_1)$ noktasının x eksenine göre simetriği $B(x_1, -y_1)$ olduğundan $A(-1, 3)$ noktasının x eksenine göre simetriği $B(-1, -3)$ olur.

$A(x_1, y_1)$ noktasının y eksenine göre simetriği $C(-x_1, y_1)$ olduğundan $A(-1, 3)$ noktasının y eksenine göre simetriği $C(1, 3)$ olur.



Bir Noktanın $y = x$ Doğrusuna Göre Simetriği

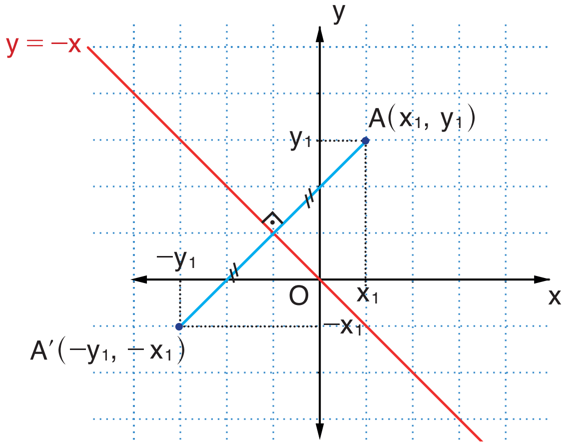
Bir $A(x_1, y_1)$ noktasının $y = x$ doğrusuna göre simetriği A' noktası olsun.



C noktası $y = x$ doğrusu üzerinde olduğundan $C(y_1, y_1)$ olur. $A'CA$ üçgeni ikizkenar dik üçgen olduğundan $|A'C| = |AC| = x_1 - y_1$ bulunur. Buradan A noktasının $y = x$ doğrusuna göre simetriği olan nokta $A'(y_1, x_1)$ biçiminde elde edilir.

Bir Noktanın $y = -x$ Doğrusuna Göre Simetriği

Bir $A(x_1, y_1)$ noktasının $y = -x$ doğrusuna göre simetriği A' noktası olsun.



Buradan $A(x_1, y_1)$ noktasının $y = -x$ doğrusuna göre simetriğinin $A'(-y_1, -x_1)$ olduğu görülür.

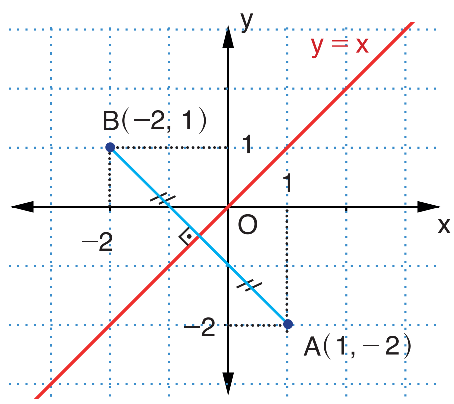
ÖRNEK 14

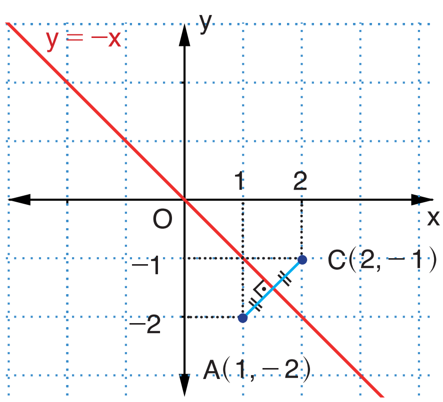
$A(1, -2)$ noktasının $y = x$ ve $y = -x$ doğrularına göre simetriği olan noktaları bulunuz.

ÇÖZÜM

$A(x_1, y_1)$ noktasının $y = x$ doğrusuna göre simetriği $B(y_1, x_1)$ noktası olduğundan $A(1, -2)$ noktasının $y = x$ doğrusuna göre simetriği $B(-2, 1)$ olur.

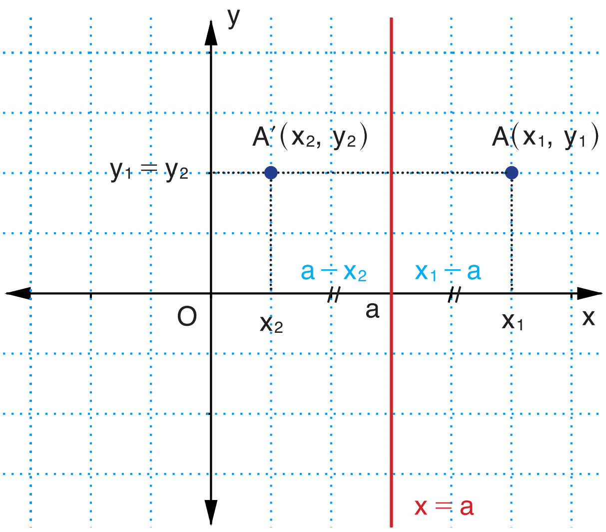
$A(x_1, y_1)$ noktasının $y = -x$ doğrusuna göre simetriği $C(-y_1, -x_1)$ noktası olduğundan $A(1, -2)$ noktasının $y = -x$ doğrusuna göre simetriği $C(2, -1)$ olur.





Bir Noktanın $x = a$ Doğrusuna Göre Simetriği

Bir $A(x_1, y_1)$ noktasının $x = a$ doğrusuna göre simetriği A' noktası olsun.

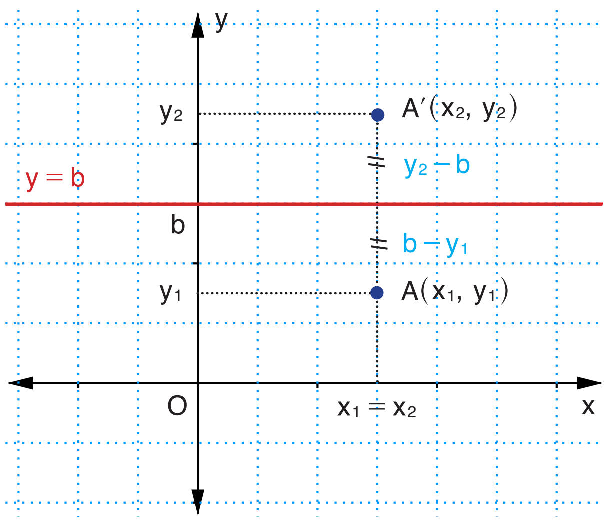


$a - x_2 = x_1 - a$ olduğundan $x_2 = 2a - x_1$ bulunur.

Buradan $A'(2a - x_1, y_1)$ biçiminde elde edilir.

Bir noktanın $y = b$ doğrusuna göre simetriği

Bir $A(x_1, y_1)$ noktasının $y = b$ doğrusuna göre simetriği A' noktası olsun.



$y_2 - b = b - y_1$ olduğundan

$y_2 = 2b - y_1$ bulunur.

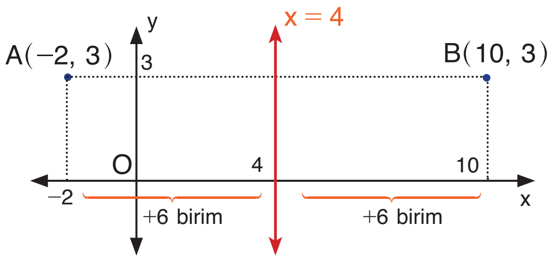
Buradan $A'(x_1, 2b - y_1)$ biçiminde elde edilir.

ÖRNEK 15

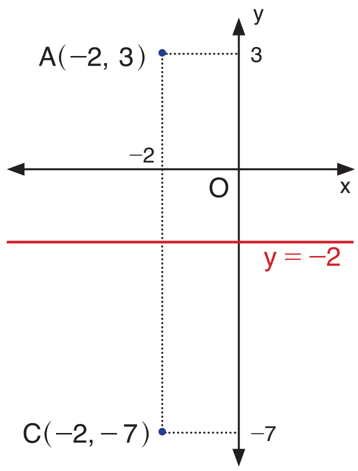
$A(-2, 3)$ noktasının $x = 4$ ve $y = -2$ doğrularına göre simetriği olan noktaları bulunuz.

ÇÖZÜM

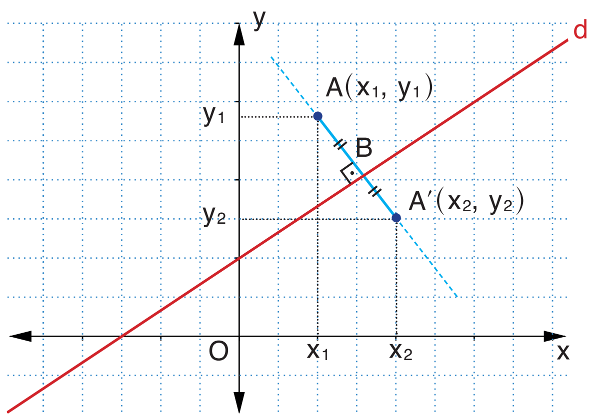
$A(x_1, y_1)$ noktasının $x = a$ doğrusuna göre simetriği $B(2a - x_1, y_1)$ olduğundan $A(-2, 3)$ noktasının $x = 4$ doğrusuna göre simetriği $B(2 \cdot 4 - (-2), 3)$ olur.
Buradan $B(10, 3)$ noktası elde edilir.



$A(x_1, y_1)$ noktasının $y = b$ doğrusuna göre simetriği $C(x_1, 2b - y_1)$ olduğundan $A(-2, 3)$ noktasının $y = -2$ doğrusuna göre simetriği $C(-2, 2 \cdot (-2) - 3)$ olur. Buradan $C(-2, -7)$ noktası elde edilir.



Bir Noktanın Herhangi Bir Doğruya Göre Simetriği



Düzlemde herhangi bir $A(x_1, y_1)$ noktası ve eğimi m_1 olan d doğrusu alınsın. A noktasının d doğrusuna göre simetriği A' noktası olmak üzere AA' doğrusu d doğrusuna diktir.

AA' doğrusunun eğimi m_2 olarak alınırsa birbirine dik olan doğruların eğimleri çarpımı -1 olacağı için $m_1 \cdot m_2 = -1$ olur.

A noktasının simetriği olan A' noktası aşağıdaki işlem basamakları takip edilerek bulunur.

I. A noktasından geçen ve d doğrusuna dik olan d_1 doğrusunun denklemi $y - y_1 = m_2(x - x_1)$ bağıntısı ile elde edilir.

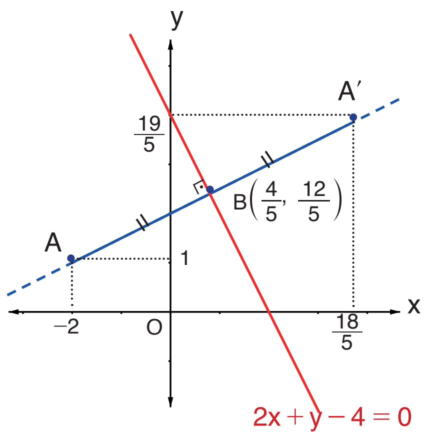
II. d ve d_1 doğrularının ortak çözümü yapılarak bu doğruların kesişim noktası olan B noktası bulunur.

III. A noktasının B noktasına göre simetriği olan A' noktası elde edilir.

ÖRNEK 16

$A(-2, 1)$ noktasının $2x + y - 4 = 0$ doğrusuna göre simetriği olan noktayı bulunuz.

ÇÖZÜM



$2x + y - 4 = 0$ doğrusunun eğimi $m_2 = -2$ olur.
AA' doğrusunun eğimi ise

$m_1 \cdot m_2 = -1$

$(-2)m_2 = -1$

$m_2 = \frac{1}{2}$ olur.

$A(-2, 1)$ noktasından geçen ve eğimi $\frac{1}{2}$ olan doğru denklemi

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 1 = \frac{1}{2}(x + 2)$

$2y - 2 = x + 2$

$2y - x - 4 = 0$ olur.

Buradan $2y - x - 4 = 0$ ve $2x + y - 4 = 0$ doğru denklemleri ortak çözülürse

$$\begin{array}{rr} & 4y - 2x - 8 = 0 \\ + & 2x + y - 4 = 0 \\ \hline & 5y - 12 = 0 \end{array}$$

$2y - x - 4 = 0$ denklemi 2 ile genişletilir.

$y = \frac{12}{5}$ ve $2x + \frac{12}{5} - 4 = 0 \Rightarrow 2x = \frac{8}{5} \Rightarrow x = \frac{4}{5}$

$B\left(\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right)$ bulunur.

A' noktasının koordinatları

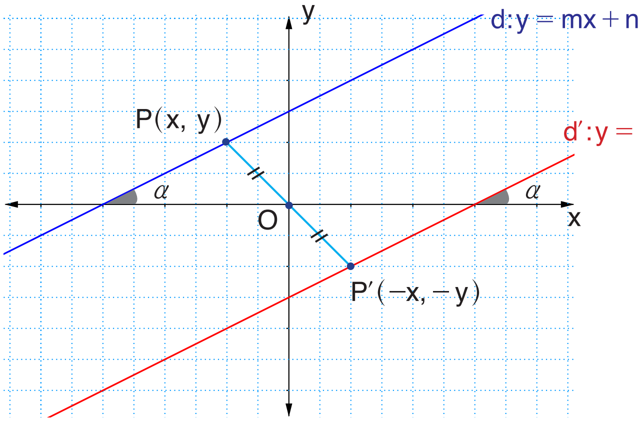
$\frac{a - 2}{2} = \frac{4}{5} \Rightarrow a = \frac{18}{5}$

$\frac{b + 1}{2} = \frac{12}{5} \Rightarrow b = \frac{19}{5}$ olur.

Buradan $A(-2, 1)$ noktasının $2x + y - 4 = 0$ doğrusuna göre simetriği olan nokta $A'\left(\frac{18}{5}, \frac{19}{5}\right)$ olarak elde edilir.

Bir Doğrunun Bir Noktaya Göre Simetriği

a) Bir Doğrunun Orijine Göre Simetriği Olan Doğru



$d \parallel d'$

d doğrusu üzerinde herhangi bir $P(x,\ y)$ noktasının orijine göre simetriği olan $P'(-x,\ -y)$ noktası d doğrusunun simetriği olan d' doğrusu üzerindedir.

O hâlde $y = mx + n$ doğrusunun orijine göre simetriğini bulmak için doğru denkleminde x yerine $-x$, y yerine $-y$ yazılır.

Buradan $y = mx + n$ doğrsunun orijine göre simetriği

$-y = m(-x) + n$

$-y = -mx + n$

$y = mx - n$ olur.

d doğrusu ile orijine göre simetriği olan d' doğrusunun eğimleri birbirine eşit olduğundan $d \parallel d'$ olur.

ÖRNEK 17

$-2x + y = 6$ doğrusunun orijine göre simetriği olan doğruyu bulunuz.

ÇÖZÜM

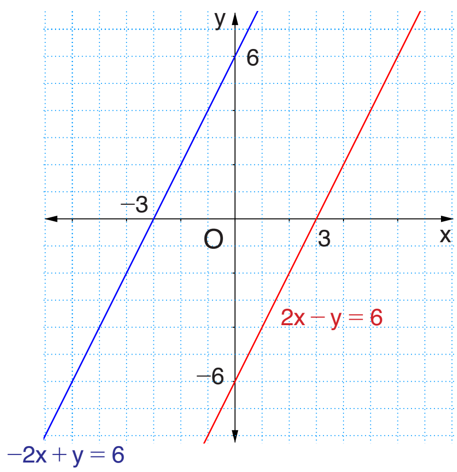
$-2x + y = 6$ doğrusunda x yerine $-x$, y yerine $-y$ yazılırsa

$-2(-x) + (-y) = 6$

$2x - y = 6$

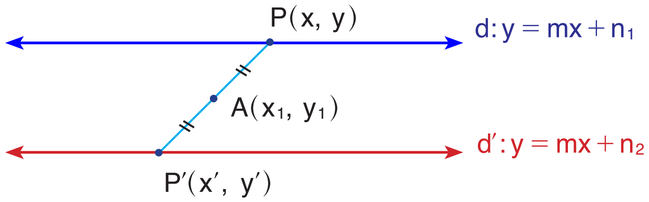
doğrusu bulunur.

O hâlde $-2x + y = 6$ doğrusunun orijine göre simetriği olan doğru $2x - y = 6$ doğrusudur.



b) Bir d Doğrusunun Herhangi Bir $A(x_1, y_1)$ Noktasına Göre Simetriği Olan Doğru

I. Yol



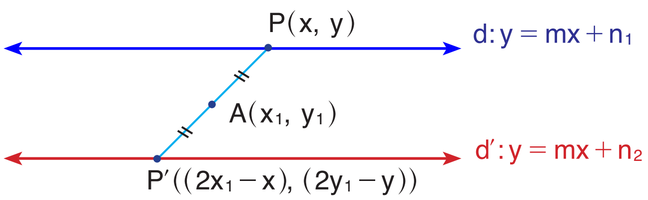
d doğrusu üzerinde alınan herhangi $P(x, y)$ noktalarının A noktasına göre simetriği olan noktalar, d doğrusuna paralel olan d' doğrusu üzerinde olacaktır.

$P(x, y)$ noktalarının $A(x_1, y_1)$ noktasına göre simetriği olan noktalar $P'(x', y')$ olsun. Orta nokta formülünden

$$x_1 = \frac{x + x'}{2} \Rightarrow 2x_1 = x + x' \Rightarrow x' = 2x_1 - x$$

$$y_1 = \frac{y + y'}{2} \Rightarrow 2y_1 = y + y' \Rightarrow y' = 2y_1 - y \text{ bulunur.}$$

Buradan $P'(x', y')$ noktası $P'(2x_1 - x, 2y_1 - y)$ biçiminde elde edilir.



P' noktasından geçen ve eğimi m olan doğru denklemi

$$y - y' = m(x - x')$$
$$y - (2y_1 - y) = m(x - (2x_1 - x))$$
$$y - 2y_1 + y = 2mx - 2mx_1$$
$$2y_1 - y = m(2x_1 - x) + y - mx$$
$$2y_1 - y = m(2x, - x) + n$$

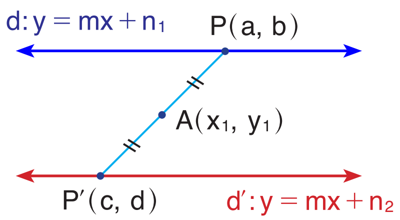
şeklinde bulunur.

O hâlde $y = mx + n$ doğrusunun $A(x_1, y_1)$ noktasına göre simetriğini bulmak için

x yerine $2x_1 - x$

y yerine $2y_1 - y$ yazılır.

II. Yol



$y = mx + n$ doğrusunun $A(x_1, y_1)$ noktasına göre simetriğini bulmak için d doğrusunun üzerinde herhangi bir $P(a, b)$ noktası alınır.

P noktasının A noktasına göre simetriği olan $P'(c, d)$ noktası, d doğrusunun simetriği olan ve d doğrusuna paralel olan d' doğrusu üzerindedir. P' noktası d' doğrusu üzerinde yazılarak n_2 değeri hesaplanır.

ÖRNEK 18

$x+4y-8=0$ doğrusunun $A(-1,\ 1)$ noktasına göre simetriği olan doğruyu bulunuz.

ÇÖZÜM

I. Yol

$x+4y-8=0$ doğrusu üzerindeki herhangi bir nokta $P(x,\ y)$ olsun. P noktasının $A(-1,\ 1)$ noktasına göre simetriği olan nokta $P'(x',\ y')$ olsun. Orta nokta formülünden

$$-1=\frac{x+x'}{2} \Rightarrow x'=-2-x$$

$$1=\frac{y+y'}{2} \Rightarrow y'=2-y$$

elde edilir. Buradan $P'(x',\ y')=P'(-2-x,\ 2-y)$ bulunur.

$x+4y-8=0$ doğru denkleminde x yerine $-2-x$, y yerine $2-y$ yazılırsa

$$(-2-x)+4\cdot(2-y)-8=0$$
$$-2-x+8-4y-8=0$$
$$x+4y+2=0 \text{ bulunur.}$$

II.Yol

$x+4y-8=0$ doğrusu üzerinde herhangi bir nokta P olmak üzere

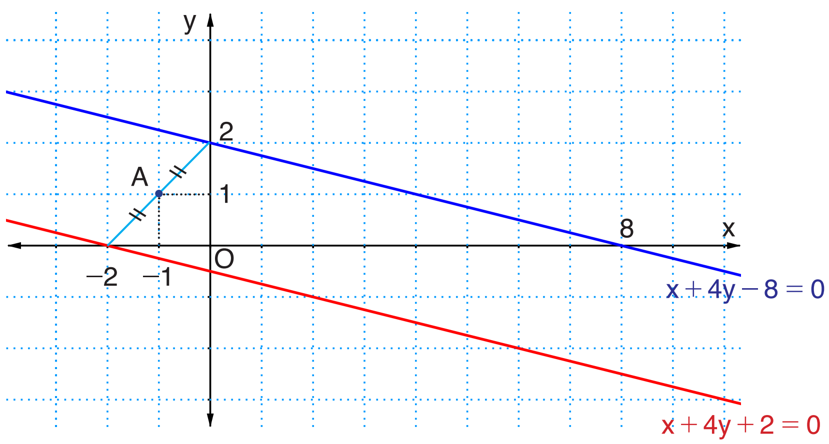
$x=0 \Rightarrow y=2$ olduğundan $P(0,\ 2)$ noktası alınsın.

$P(0,\ 2)$ noktasının $A(-1,\ 1)$ noktasına göre simetriği $P'(-2,\ 0)$ noktası $x+4y+n=0$ doğrusu üzerinde olacağı için bu doğruyu sağlar.

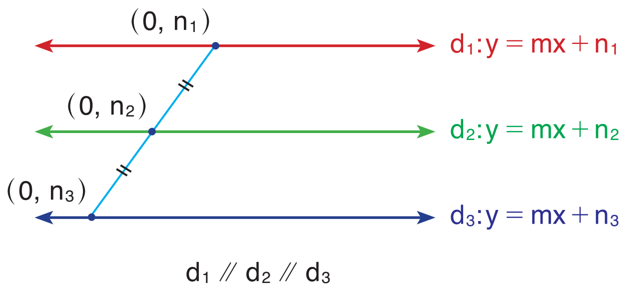
$(-2)+4\cdot 0+n=0$

$n=2$ olur.

O hâlde $x+4y-8=0$ doğrusunun $A(-1,\ 1)$ noktasına göre simetriği olan doğru $x+4y+2=0$ bulunur.



Bir Doğrunun Kendisine Paralel Bir Doğruya Göre Simetriği



Şekilde d_1 doğrusunun d_2 doğrusuna göre simetriği d_3 doğrusu olur. d_1 üzerinde $(0, n_1)$ noktası, d_2 üzerinde $(0, n_2)$ noktası ve d_3 üzerinde $(0, n_3)$ noktası alınırsa, $(0, n_2)$ orta nokta olduğundan

$$n_2 = \frac{n_1 + n_3}{2}$$

$$2n_2 = n_1 + n_3$$

$n_3 = 2n_2 - n_1$ bulunur.

Bir doğrunun kendisine paralel bir doğruya göre simetriği d_3 doğrusunun denkleminde n_3 yerine $2n_2 - n_1$ yazılarak bulunur.

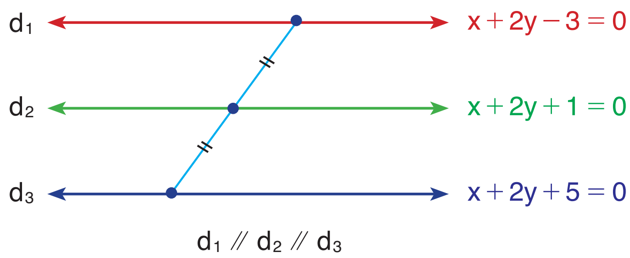
ÖRNEK 19

$x + 2y - 3 = 0$ doğrusunun $x + 2y + 1 = 0$ doğrusuna göre simetriği olan doğru denklemini bulunuz.

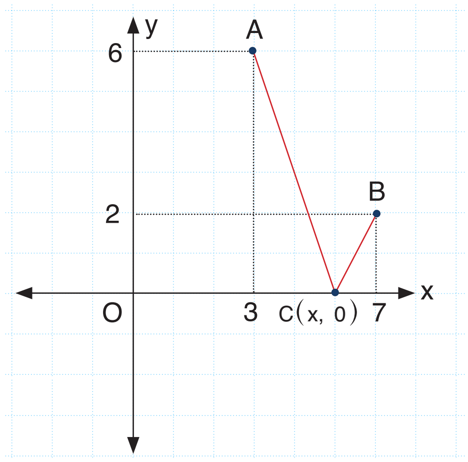
ÇÖZÜM

$1 = \frac{-3 + n}{2} \Rightarrow n = 5$ olur.

Buradan $x + 2y - 3 = 0$ doğrusunun kendisine paralel $x + 2y + 1 = 0$ doğrusuna göre simetriği $x + 2y + 5 = 0$ doğrusu olarak bulunur.

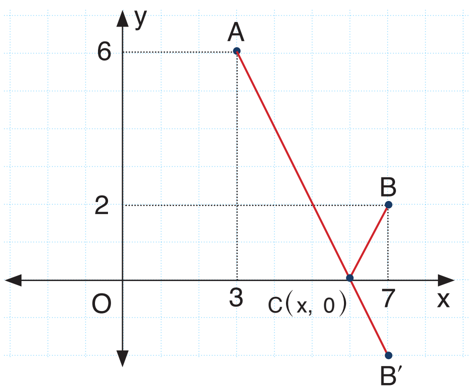


ÖRNEK 20



A(3, 6), B(7, 2) ve C(x, 0) olmak üzere |AC|+|BC| toplamının en küçük olması için x kaç olmalıdır?

ÇÖZÜM



B noktasının x eksenine göre simetriği alınırsa B′(7, −2) noktası elde edilir. |CB|=|CB′| olur. Buradan |AC|+|BC|=|AC|+|B′C| elde edilir. Bu toplamın en küçük olması için A, B ve C′ noktalarının doğrusal olması gerekir. A, B ve C′ noktalarından geçen doğrunun eğimi m olmak üzere

$$m_{AB'} = m_{AC}$$

$$\frac{6-(-2)}{3-7} = \frac{0-(-2)}{x-7}$$

$$\frac{8}{-4} = \frac{2}{x-7}$$

$$-2 = \frac{2}{x-7}$$

$$-2x + 14 = 2$$

$x = 6$ bulunur.

SIRA SİZDE

Aşağıdaki tabloda verilen ifadelerin simetri dönüşümü altındaki görüntülerini bulunuz.

Nokta	Simetri Dönüşümü			
	$A(2, 1)$ Noktasına Göre	x Eksenine Göre	y Eksenine Göre	Orijine Göre
$A(-7, 1)$				
$B(-\sqrt[3]{2}, -\sqrt[3]{2})$				
$C(0, 5)$				
$D(-2, 0)$				

Nokta	Simetri Dönüşümü				
	$y=x$ Doğrusuna Göre	$y=-x$ Doğrusuna Göre	$x=2$ Doğrusuna Göre	$y=-3$ Doğrusuna Göre	$x+y+4=0$ Doğrusuna Göre
$A(2, -5)$					
$B(-3, -3)$					
$C(0, 4)$					
$D(-3, 0)$					

Doğru	Simetri Dönüşümü				
	Orijine Göre	$A(2, 1)$ Noktasına Göre	$x-2y+1=0$	$x-2y-3=0$	$x=2y$
$x-2y+5=0$					

TEKNOLOJİ

1. Düzlemde verilen $A(2, -1)$ noktasının

a) $B(3, 2)$ noktasına göre

b) Eksenlere göre, $y = x$, $y = -x$, $x = 3$, $y = -3$ doğrularına göre

c) $4x - 2y = 25$ doğrusuna göre simetriği olan noktaları GeoGebra programı yardımı ile bulunuz.

2. $2x + 3y = 6$ doğrusunun

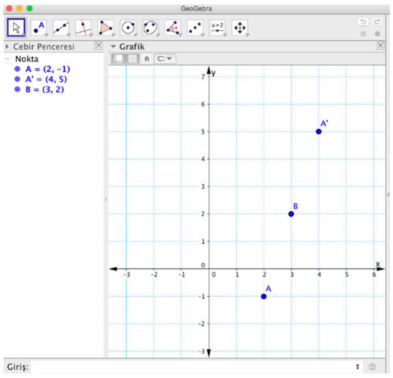
a) $A(3, 4)$ noktasına göre

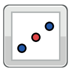
b) $2x + 3y = 1$ doğrusuna göre simetriği olan noktaları GeoGebra programı yardımı ile bulunuz.

GeoGebra programında

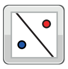
Giriş: $A = (2, -1)$ yazarak A noktası oluşturunuz.

a) Giriş: $B = (3, 2)$ yazarak B noktası oluşturunuz.





"Noktada yansıt" düğmesine, A noktasına ve sonra B noktasına tıklandığında $A'(4, 5)$ noktası elde edilir.

b) 

"Doğruda yansıt" düğmesine, A noktasına ve daha sonra eksenlere tıklandığında A noktasının x eksenine göre simetriği $A'(2, 1)$, y eksenine göre simetriği $A_1'(-2, -1)$ noktaları elde edilir.

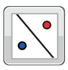
Giriş: $y = x$

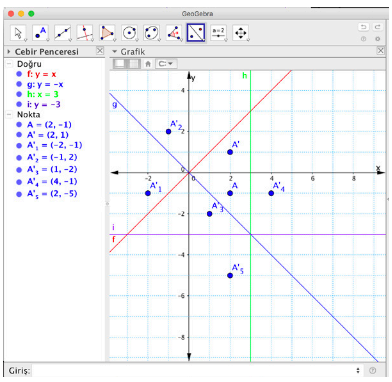
Giriş: $y = -x$

Giriş: $x = 3$

Giriş: $y = -3$

doğruları giriş bölümüne yazılarak oluşturulur.





"Doğruda yansıt" düğmesine, A noktasına ve daha sonra doğrulara tıklandığında A noktasının doğruya göre simetriği olan noktalar elde edilir.

$A(2, -1)$ noktasının

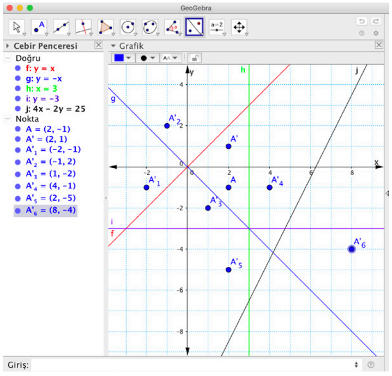
$y = x$ doğrusuna göre simetriği $A_2'(-1, 2)$

$y = -x$ doğrusuna göre simetriği $A_3'(1, -2)$

$x = 3$ doğrusuna göre simetriği $A_4'(4, -1)$

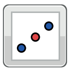
$y = -3$ doğrusuna göre simetriği $A_5'(2, -5)$ noktasıdır.

c) Giriş: $4x - 2y = 25$ yazarak doğru oluşturunuz.
"Doğruda yansıt" düğmesine basılarak önce A noktasına ve sonra $4x - 2y = 25$ doğrusuna tıklandığında $A_6'(8, -4)$ noktası elde edilir.

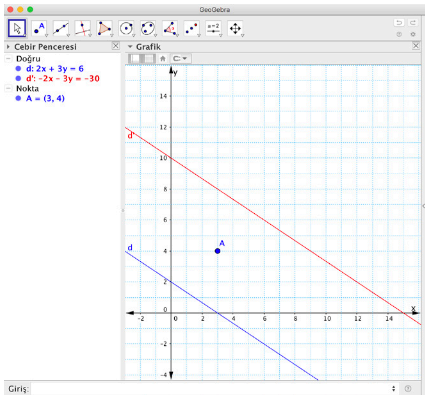


2. Giriş: $2x + 3y = 6$ yazarak doğru oluşturunuz.

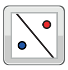
a) Giriş: $A = (3, 4)$ yazarak $A(3, 4)$ noktası oluşturunuz.



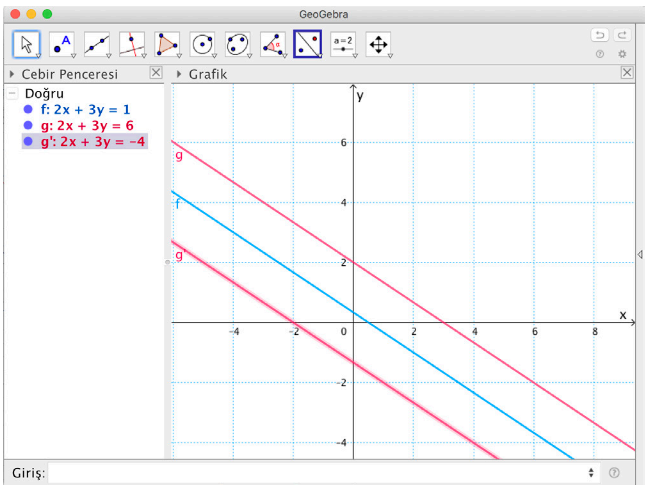
"Nokta yansıt" düğmesine, doğru üzerine ve daha sonra A noktasına tıklayarak d' doğrusunu bulunuz.
A noktasının koordinatlarını değiştirerek d doğrusunun A noktasına göre simetriği olan d' doğrusunun değişimini test ediniz.



b) Giriş: $2x + 3y = 1$ yazarak doğru oluşturunuz.



"Doğruda yansıt" düğmesine, $2x + 3y = 6$ doğrusuna ve daha sonra $2x + 3y = 1$ doğrusuna tıklandığında $2x + 3y = -4$ doğrusu elde edilir.



ALIŞTIRMALAR

1. $A(-3, 2)$ **noktasının**

a) $B(1, -2)$ **noktasına göre**

b) **Orijine, x ve y eksenlerine göre**

c) $y = x$ ve $y = -x$ **doğrularına göre**

ç) $x = 3$ ve $y = -2$ **doğrularına göre**

d) $2x + 3y = 12$ **doğrusuna göre simetriği olan noktayı bulunuz.**

2. $A(2, 1)$ noktasının $3x - 4y - 12 = 0$ doğrusuna göre simetriği B noktası **ise** $|AB|$ **değeri kaçtır?**

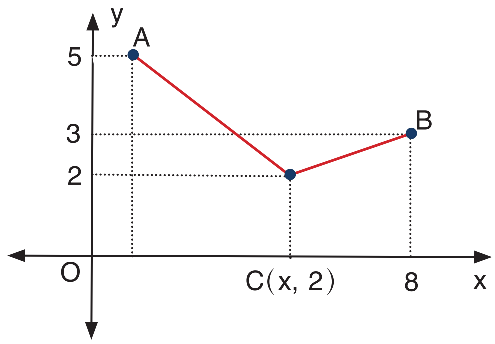
3. $A(-2, 3)$ noktasının d doğrusuna göre simetriği $A'(4, -1)$ noktası **olduğuna göre d doğrusunun denklemini bulunuz.**

4. $-x + y - 2 = 0$ **doğrusunun** $A(3, -1)$ **noktasına göre simetriği olan doğruyu bulunuz.**

5. $A(1, -2)$ noktasının $ax + 3y - 1 = 0$ doğrusuna göre simetriği kendisi **ise a değeri kaçtır?**

6. $3x - y - 6 = 0$ **doğrusunun** $3x - y + 1 = 0$ **doğrusuna göre simetriği olan doğruyu bulunuz.**

7.



$A(1, 5)$, $B(8, 3)$ ve $C(x, 2)$ **olmak üzere** $|AC| + |BC|$ **toplamının en küçük olması için x kaç olmalıdır?**

8. Aşağıdaki soruları GeoGebra programı yardımı ile çözünüz.

a) $A(-1, 4)$ noktasının $B(-3, 2)$ noktasına göre, orijine göre, eksenlere göre; $y = x$, $y = -x$, $x = -2$ ve $y = 3$ doğrularına göre simetriği olan noktaları bulunuz.

b) $B(5, -2)$ noktasının $x + 2y - 4 = 0$ doğrusuna göre simetriği olan noktayı bulunuz.

c) $3x - 4y = 1$ doğrusunun orijine göre simetriği olan doğruyu bulunuz.

ç) $3x - 4y = 1$ doğrusunun $3x - 4y = -5$ doğrusuna göre simetriği olan doğruyu bulunuz.

Temel Dönüşümlerin Bileşkesi

Dönüşümlerde bileşke işlemi fonksiyonlardaki gibi yapılır. Bu bölümde dönüşümlerde ele alınan öteleme, dönme ve simetri dönüşümlerinin bileşkelerini içeren uygulamalar yapılacaktır.

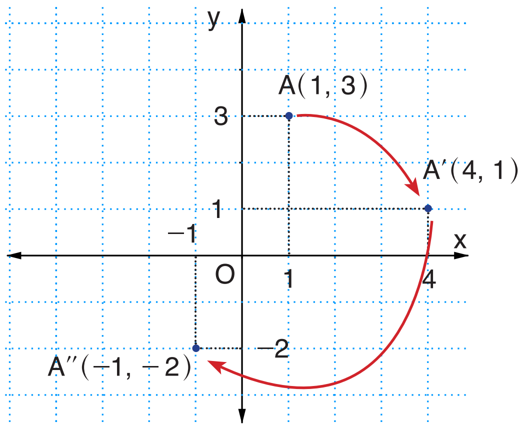
Öteleme Dönüşümünün Bileşkesi

Bir noktanın iki veya daha fazla ötelemesinin bileşkesi altındaki görüntüsü, bu noktanın koordinatları ile öteleme miktarlarının toplamıdır.

ÖRNEK 21

$A(1, 3)$ noktası, x ekseni doğrultusunda 3 birim sağa ve y ekseni doğrultusunda 2 birim aşağı ötelendikten sonra tekrar x ekseni doğrultusunda 5 birim sola ve y ekseni doğrultusunda 3 birim aşağı ötelenmektedir. $A(1, 3)$ noktasının bu iki dönüşümden sonraki koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM



$A(1, 3)+(3, -2)+(-5, -3)$

$A''(x_2, y_2)$ noktası

$x_2 = 1+3-5=-1$

$y_2 = 3-2-3=-2$

$A''(-1, -2)$

noktası bulunur.

ÖRNEK 22

$A(2a+1, 3b-2)$ noktası, x ekseni doğrultusunda 2 birim sola ve y ekseni doğrultusunda 1 birim yukarı ötelendikten sonra tekrar x ekseni doğrultusunda 3 birim sola ve y ekseni doğrultusunda 4 birim yukarı ötelenerek $A'(a-3, b-1)$ noktası elde ediliyor. Buna göre A' noktasının koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

$A(2a+1, 3b-2)+(-2, 1)+(-3, 4) = A'(a-3, b-1)$

$2a+1+(-2)+(-3) = a-3$ ve $3b-2+1+4 = b-1$

$a = 1$ $\qquad$ $2b = -4$

$b = -2$ olur.

Bu durumda A' noktasının koordinatları $(-2, -3)$ olarak bulunur.

Dönme Dönüşümünün Bileşkesi

R_α ve R_β biçiminde iki tane dönme dönüşümünün bileşkesi $(R_\alpha)o(R_\beta)(x, y) = R_{\alpha+\beta}(x, y)$ şeklinde olur. Burada dönme dönüşümünün bileşkesi, dönme dönüşümlerinin açılarının toplamı olan bir dönüşümdür.

ÖRNEK 23

$A(1, 2)$ noktası orijinin etrafında pozitif yönde önce $23°$, daha sonra $67°$ döndürülüyor. İki dönüşümden sonra oluşan noktaların koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$A'(x', y') = R_{23°} \text{ o } R_{67°}(x, y) = R_{90°}(x, y)$$
$$= (x\cos 90° - y\sin 90°,\ x\sin 90° + y\cos 90°)$$
$$x' = x\cos 90° - y\sin 90°$$
$$= 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1$$
$$= -2$$
$$y' = x\sin 90° + y\cos 90°$$
$$= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0$$
$$= 1$$

$A(1, 2)$ noktasının dönme dönüşümünün bileşkesinin koordinatları

$A'(-2, 1)$ olarak bulunur.

ÖRNEK 24

$A(3, -2)$ noktası x ekseni doğrultusunda 3 birim sağa ve y ekseni doğrultusunda 2 birim yukarı ötelendikten sonra orijin etrafında pozitif yönde $30°$ döndürülüyor. Oluşan yeni noktanın koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

Önce öteleme dönüşümü uygulanırsa

$$A'(a, b) = A(3, -2) + (3, 2)$$
$$a = 3 + 3 = 6$$
$$b = -2 + 2 = 0$$

$A'(6, 0)$ noktası bulunur.

Bu nokta orijin etrafında pozitif yönde $30°$ döndürülürse

$$A''(x, y) = R_{30}(6, 0) = (6\cos 30° - 0\sin 30°,\ 6\sin 30° + 0\cos 30°)$$
$$x = 6 \cdot \cos 30° - 0 \cdot \sin 30° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$
$$y = 6 \cdot \sin 30° + 0 \cdot \cos 30° = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

$A''(3\sqrt{3}, 3)$ noktası elde edilir.

ÖRNEK 25

$A(-1, 3)$ noktasının $y = x - 1$ doğrusuna göre simetri dönüşümü altındaki görüntüsü B noktası, B noktasının 1 birim sağa ve 2 birim yukarı öteleme dönüşümü altındaki görüntüsü C noktası olsun.
C noktasının orijin etrafına pozitif yönde $90°$ lik dönme dönüşümü altındaki görüntüsü D noktası olduğuna göre D noktasının koordinatlarını bulunuz.

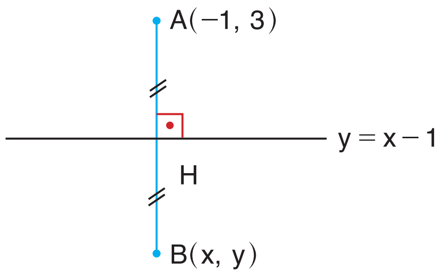
ÇÖZÜM

$A(-1, 3)$ noktasının $y = x - 1$ doğrusuna göre simetriği B noktası olsun. AB doğrusunun eğimi $m_{AB} = -1$ olur. $A(-1, 3)$ noktasından geçen ve eğimi $m_{AB} = -1$ olan doğrunun denklemi

$y - 3 = -1(x + 1)$
$\quad y = -x + 2$ olarak bulunur.

$y = x - 1$ ile $y = -x + 2$ doğrularının ortak çözümü ile H noktası bulunur.

$$\begin{array}{rl} & y = -x + 2 \\ + & y = x - 1 \\ \hline & 2y = 1 \\ & y = \frac{1}{2} \\ & y = x - 1 \text{ ve } x = \frac{3}{2} \text{ olur.} \end{array}$$



Buradan $H\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ noktası bulunur.

Orta nokta teoreminden

$\frac{x-1}{2} = \frac{3}{2}$ ve $\frac{y+3}{2} = \frac{1}{2}$
$x - 1 = 3 \qquad y + 3 = 1$
$x = 4 \qquad y = -2$ olur.

B noktası $B(4, -2)$ şeklinde bulunur. B noktasının 1 birim sağa, 2 birim yukarı ötelenmesi ile oluşan C noktası

$C(x, y) = B(4, -2) + (1, 2)$
$\qquad = (5, 0)$ olur.

C noktasının orijin etrafında $90°$ döndürülmesiyle elde edilen D noktası $D = R_{90°}(5, 0) = (0, 5)$ biçiminde bulunur.

ÖRNEK 26

$d_1: 2x - y + 3 = 0$ doğrusunun orijin etrafında pozitif yönde $90°$ döndürülmesiyle d_2 ve d_2 doğrusunun 2 birim sağa ötelenmesiyle d_3 doğrusu elde ediliyor. Buna göre d_3 doğrusunun denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

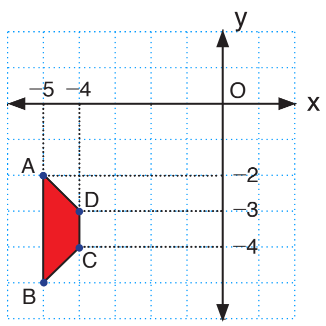
$d_1: 2x - y + 3 = 0$ doğrusu üzerinde alınan iki nokta $A(0, 3)$ ve $B(1, 5)$ olsun. Bu noktaların orijin etrafında pozitif yönde döndürülmesiyle oluşan noktalar $A'(-3, 0)$ ve $B'(-5, 1)$ olur.

İki noktası verilen doğru denklemi kullanılarak A' ve B' noktalarından geçen d_2 doğrusunun denklemi $d_2 = 2y + x + 3 = 0$ olarak bulunur.

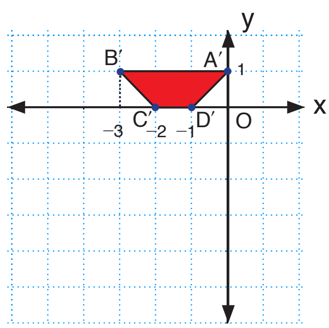
$d_2: 2y - x + 3 = 0$ doğrusunun 2 birim sağa ötelenmesi durumunda doğru üzerinde alınan noktalarda 2 birim sağa ötelenecektir. d_2 doğrusu üzerindeki iki nokta $A'(-3, 0)$ ve $B'(-5, 1)$ olsun. Bu durumda $A''(-3+2, 0) = A''(-1, 0)$ ve $B''(-5+2, 1) = (-3, 1)$ bulunur.

İki noktası verilen doğru denklemi kullanılarak A'' ve B'' noktalarından geçen doğrunun denklemi $d_3: 2y + x + 1 = 0$ olarak bulunur.

ÖRNEK 27



Şekil I



Şekil II

Şekil I deki ABCD dörtgeninin konumu şekil II deki konuma dönüştürülmek isteniyor. Buna göre şekil I deki dörtgene hangi dönüşümler uygulanırsa şekil II deki dörtgen elde edilir?

ÇÖZÜM

$A(-5, -2)$ noktası orijin etrafında saat yönünde $90°$ döndürülürse $K(-2, 5)$ noktası elde edilir. Bu nokta 2 birim sağa, 4 birim aşağı ötelenirse $A'(0, 1)$ elde edilir.

Temel Dönüşümler ve Bileşkelerini İçeren Uygulamalar

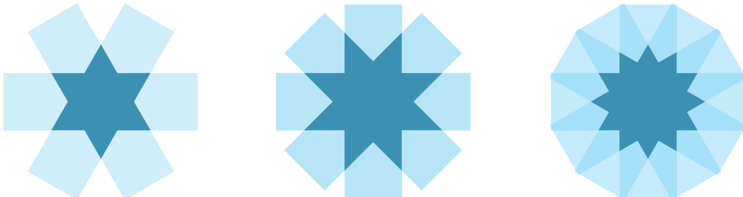
Temel dönüşümler ve bu dönüşümlerin bileşkesi sadece geometride değil aynı zamanda mimaride, sanatta ve doğada da görülmektedir.

Görsel 4.5: Kelebek

Görsel 4.6
Antandros (Balıkesir)

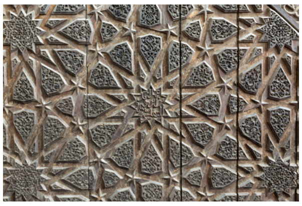
Görsel 4.7
Anadolu kilimi

Çokgensel bir bölge, bir nokta etrafında 360° den küçük açı ile döndürüldüğünde bölgenin kendisi ile çakışıyorsa dönme simetrisi oluşur. Dönme simetrisi sayısı 360° nin simetri açısına bölünmesiyle bulunur. Bir dikdörtgenin simetri merkezi etrafında 60°, 45° ve 30° lik açılarla döndürülmesiyle bileşik yıldız modelleri oluşturulur.

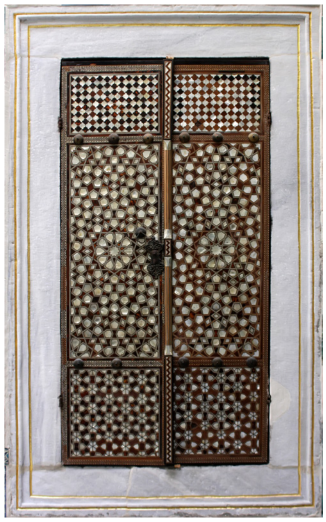


60° 45° 30°

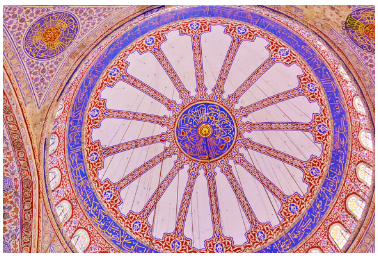
Selçuklu ve Osmanlı Dönemi ustaları dönme simetrisi ile oluşturulan yıldız modellerini büyük bir ustalıkla kullanmışlardır.



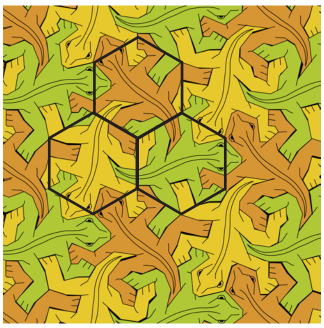
Görsel 4.8
Ulu Cami (Sivas)



Görsel 4.9
Topkapı Sarayı (İstanbul)



Görsel 4.10
Sultan Ahmet Camisi (İstanbul)



Görsel 4.11
Escher’a ait bir çalışma

Temel dönüşüm ve bileşkesini sanatla birleştiren Hollandalı Maurits Cornells Escher (Mavrits Korneylis Eşır) bu alanda birçok eser vermiştir. Escher’a ait yandaki çalışmada işaretli alanlara 180° lik dönme, simetri ve ötelemeli simetri işlemleri uygulanmıştır.

ÖRNEK 28

Yanda kenar uzunluğu 1 birim olan bir kare üzerindeki Osmanlı lalesi, deseninin 4 kopyası alınarak bir kenar uzunluğu 2 birim olan bir kare içerisine aşağıdaki kodlama ile yerleştiriliyor.

$R_\alpha = \alpha$ derecelik pozitif yönde dönme
$S_x = x$ eksenine göre simetri
$S_y = y$ eksenine göre simetri
$D =$ Desen

D	S_x
R_α	S_y

(D, S_x, R_α, S_y)

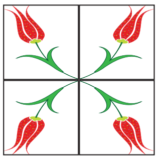
Buna göre $(S_y, D, R_{180^\circ}\ S_x)$ kodlaması ile oluşan şekli bulunuz.

ÇÖZÜM

S_y	D
R_{180°	S_x

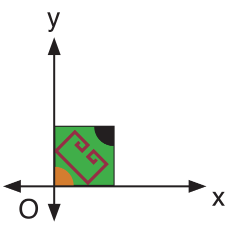
$(S_y, D, R_{180^\circ}\ S_x)$

$\Rightarrow$



şeklinde bulunur.

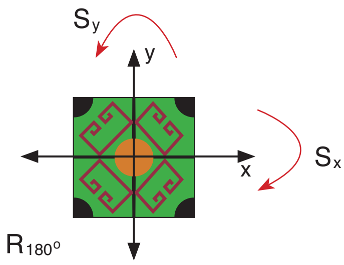
ÖRNEK 29



Yanda verilen desenin $(S_x, S_y, R_{180^\circ})$ sıralamasına göre oluşturulan dönüşümün görüntüsünü bulunuz.

ÇÖZÜM

Örnekte verilen şekle uygulanan dönüşümlerin görüntüsü aşağıdaki gibidir.



ALIŞTIRMALAR

1. $A(-2, 6)$ noktası x ekseni doğrultusunda 3 birim sağa ve y ekseni doğrultusunda 2 birim yukarı öteleniyor. Elde edilen A' noktası x ekseni doğrultusunda 4 birim sola ve y ekseni doğrultusunda 2 birim aşağı öteleniyor.
Buna göre

   a) **Oluşan A'' noktasının koordinatlarını bulunuz.**

   b) **A'' noktasının $y = -x$ doğrusuna göre simetriği olan noktayı bulunuz.**

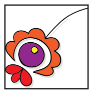
2. $A(-1, -2)$ noktasının orijin etrafında negatif yönde önce 32° ve sonra 58° döndürülmesi ile elde edilen A' noktası, x ekseni doğrultusunda 3 birim sola ve y ekseni doğrultusunda 2 birim aşağı ötelenmiştir. **Oluşan A'' noktasının koordinatlarını bulunuz.**

3. $A(a, 4)$ noktasının $x = 3$ ve $x = -2$ doğrularına göre simetriği $A''(-6, 4)$ olarak bulunuyor.
Buna göre a noktasının değerini bulunuz.

4. $A(-1, 4)$ **noktasının** $2x - y + 3 = 0$ **ve** $x + 2y - 1 = 0$ **doğrularına göre simetriği olan noktayı bulunuz.**

5. $A(x, y)$ noktasının orijin etrafında önce pozitif yönde 100° ve sonra pozitif yönde 125° döndürülmesiyle $A'(\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ noktası elde ediliyor.
Buna göre $A(x, y)$ noktasının $y = -1$ ve $y = 3$ doğrularına göre simetriği olan A'' noktasının koordinatlarını bulunuz.

6. $A(3, -2)$ **noktasının** $y = x + 1$ **ve** $y = -x + 1$ **doğrularına göre simetriği olan A' noktasının orijine olan uzaklığını bulunuz.**

7.  $\Rightarrow$

D	S_x
R_α	S_y

(D, S_x, R_α, S_y)

Kenar uzunluğu 1 birim olan desenin 3 kopyası alınarak $(D, S_x, R_{90^\circ}, S_y)$ sıralamasına sahip dönüşüm görüntüsü, kenar uzunluğu 2 birim olan karenin içine yerleştiriliyor.
Oluşan dönüşüm görüntüsünü bulunuz.

8. 

Pıtrak, Anadolu kilimlerinde kullanılan bir motif olup bolluğu sembolize eder.

Yukarıdaki kilim motifi yandaki model kullanılarak elde edilmiştir.
Buna göre

   a) **Kilim motifinin elde edilmesi için bu modele hangi dönüşümler uygulanmıştır?**

   b) **Bu motifin kaç simetri ekseni vardır?**

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 4

A) Aşağıda 1 ve 2. sorularda verilen tablolardaki boşlukları uygun şekilde doldurunuz.

1. **Aşağıda verilen noktaların orijin etrafında tabloda belirtilen yön ve açılarla döndürülmesiyle elde edilen noktaların koordinatlarını tabloya yerleştiriniz.**

	Saatin Tersi Yönünde			Saat Yönünde		
	90°	180°	270°	90°	180°	270°
$(-4, -2)$						
$\left(\frac{1}{2}, -3\right)$						
$(0, -4)$						

2. **Aşağıda verilen noktaların simetri dönüşümü altındaki görüntülerini tabloya yerleştiriniz.**

Simetri / Nokta	$(-3,4)$ noktasına göre	Orijine göre	x eksenine göre	y eksenine göre	$x=-2$ doğrusuna göre	$y=-3$ doğrusuna göre	$y=x$ doğrusuna göre	$y=-x$ doğrusuna göre	$y=-3x$ doğrusuna göre	$y=2x+4$ doğrusuna göre
$(-1, -3)$										
$(-3, 1)$										
$(3, 0)$										
$(0, -6)$										

B) $-2x+y-5=0$ **doğrusunun aşağıda verilen açılarla orijin etrafında dönme dönüşümü altındaki görüntülerini karşılarındaki boşluklara yazıp eş olan dönüşümleri eşleştiriniz.**

3.

	R_α	Doğru
I.	90°	
II.	180°	
III.	270°	

	R_α	Doğru
a)	-90°	
b)	-180°	
c)	-270°	

C) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruları cevaplandırınız.

4. Analitik düzlemde $A(-1,\ 3)$ noktasının m birim sağa, n birim aşağı ötelenmesiyle $A'(4,\ -1)$ noktası elde ediliyor. **Buna göre** $m \cdot n$ **kaçtır?**

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

5. Analitik düzlemde $A(a,\ a^2)$ noktasının 4a birim sağa, 6 birim yukarı ötelenmesiyle elde edilen noktanın koordinatları eşit **ise a nın alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6. Denklemi $y = 3x + n$ olan d_1 doğrusu üzerindeki tüm noktalar 1 birim sola ve 3 birim aşağı ötelendiğinde d_2 doğrusu elde ediliyor. d_2 **doğrusu** $A(n,\ 4)$ **noktasından geçtiğine göre n kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7. **Analitik düzlemde** $5x = 12y$ **doğrusunun 20 birim aşağı ötelenmesiyle elde edilen doğrunun eksenler arasında kalan parçasının uzunluğu kaç birimdir?**

A) 12 B) 25 C) 32 D) 40 E) 52

8. Analitik düzlemde $A(4,\ -3)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde $90°, 180°$ ve $270°$ döndürülmesiyle elde edilen noktalar sırasıyla B, C ve D dir. **Buna göre ABCD dörtgenin alanı kaçtır?**

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

9. Analitik düzlemde $A(\sqrt{2},\ -1)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde $63°$ döndürülmesiyle B, negatif yönde $57°$ döndürülmesiyle C noktası elde ediliyor.
Buna göre $|BC|$ **kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

10. Analitik düzlemde $A(3,\ -1)$ noktasının orijin etrafında saat yönünde $90°$ döndürülmesiyle elde edilen nokta C dir. **Buna göre AOC üçgeninin alanı kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

11. Analitik düzlemde $A(-1,\ 3)$ noktasının $ax + 2y - b = 0$ doğrusuna göre simetri dönüşümü altındaki görüntüsü $A'(5,\ -1)$ **ise** $a \cdot b$ **değeri kaçtır?**

A) 10 B) 12 C) 15 D) 20 E) 30

12. Analitik düzlemde $A(x,\ y)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde $120°$ döndürülmesiyle $A'(0,\ -4)$ noktası elde ediliyor. **Buna göre $x \cdot y$ kaçtır?**

A) $-4\sqrt{3}$ B) $-2\sqrt{3}$ C) $-\sqrt{3}$ D) $4\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3}$

13. Analitik düzlemde $A(2,\ -3)$ noktasının $d: 3x - 4y + 2 = 0$ doğrusuna göre simetriği A' noktasıdır. d doğrusu üzerinde alınan B ve C noktaları da kullanılarak oluşturulan $ABA'C$ dörtgeninin alanı 20 birimkare **ise** $|BC|$ **uzunluğu kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

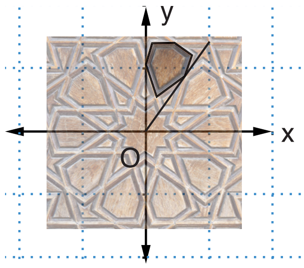
14. Analitik düzlemde $2x - 3y + a = 0$ doğrusunun üzerindeki her noktanın orijin etrafında negatif yönde $270°$ döndürülmesiyle elde edilen doğru $(-2,\ 5)$ noktasından geçiyorsa **a değeri kaçtır?**

A) -1 B) -2 C) -3 D) -4 E) -5

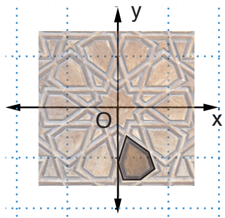
15. $5x + 2y - 6 = 0$ **doğrusunun** $A(-2k,\ 5k)$ **noktasına göre simetri dönüşümü altındaki görüntüsü olan doğrunun y eksenini kestiği noktanın ordinatı kaçtır?**

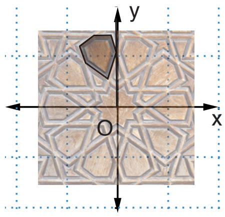
A) -1 B) -2 C) -3 D) -4 E) -5

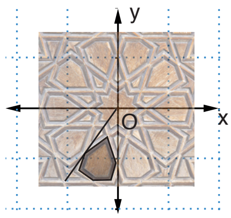
16.

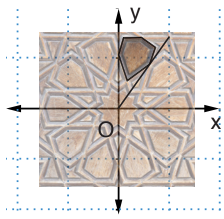


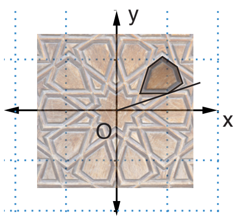
Kündekâri, Anadolu Selçukluları ve Osmanlı zamanında kullanılan bir ahşap oyma tekniğidir. Şekilde Edirne Selimiye Camisi'nden günümüze ulaşmış bir kündekâri örneği verilmiştir.
Dik koordinat düzleminde merkezi O noktası olan şekil pozitif yönde $216°$ döndürülüyor. **Buna göre döndürme sonrası elde edilen şeklin x eksenine göre simetriği aşağıdakilerden hangisidir?**

A)


B)


C)


D)


E)


17.

$\Rightarrow$

R_{180°	D
S_x	S_y

$(R_{180^\circ}, D, S_x, S_y)$

Yukarıdaki desenin verilen kodlamaya göre dönüşümleri uygulandığında aşağıdakilerden hangisi elde edilir?

A) 

B) 

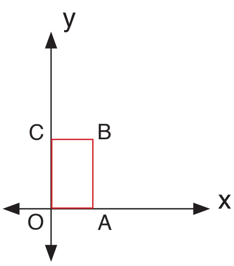
C) 

D) 

E) 

Ç) Aşağıdaki açık uçlu soruları cevaplandırınız.

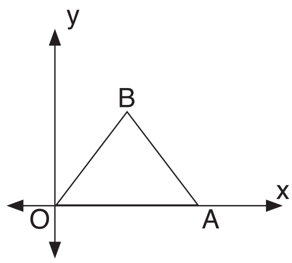
18.



Yukarıda verilen OABC dikdörtgeni orijin etrafında saat yönünde 180° döndürülüp 2 birim sola, 3 birim aşağı ötelenerek $O'A'B'C'$ dikdörtgeni elde ediliyor.

$2 \cdot |OA| = |AB|$ ve $|CC'| = 5\sqrt{5}$ birim **olduğuna göre OABC dikdörtgeninin alanını hesaplayınız.**

19.



Şekilde verilen OAB eşkenar üçgeni orijin etrafında pozitif yönde 120° döndürülerek $O'AB'$ üçgeni elde ediliyor. $B(a, 2\sqrt{3})$ **olduğuna göre B' noktasının koordinatlarını hesaplayınız.**

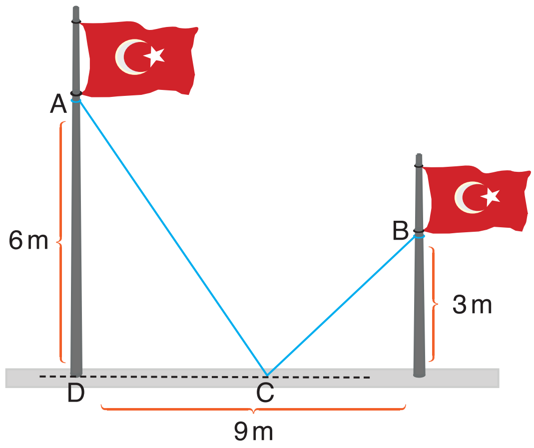
20. **Analitik düzlemde** $3x - 5y - 3 = 0$ **doğrusunun** $A(1, -2)$ **noktasına göre simetriği olan doğrunun denklemini yazınız.**

21. Analitik düzlemde simetri eksenleri $2x - y + 2 = 0$ ve $x + 2y - 9 = 0$ doğruları olan OABC dikdörtgeni çiziliyor.
Buna göre

a) **B noktasının koordinatlarını bulunuz.**

b) **OABC dikdörtgeninin alanını hesaplayınız.**

22.



Yukarıdaki şekilde verilen bayrak direkleri üzerindeki A ve B noktalarından C noktasına bir tel bağlanmıştır. Bayrak direkleri arasındaki mesafe 9 m dir. Bu bağlama işleminde en az miktarda tel kullanmak için C noktasının D noktasına olan uzaklığı ne kadar olmalıdır?

23. Analitik düzlemde $A(m, n)$ noktasının orijin etrafında $270°$ döndürlmesiyle $A'(3-2n, m-4)$ noktası elde ediliyor. **Bu durumda** $B(m+n, m-n)$ **noktasının orijine göre simetri dönüşümü altındaki görüntüsünü bulunuz.**

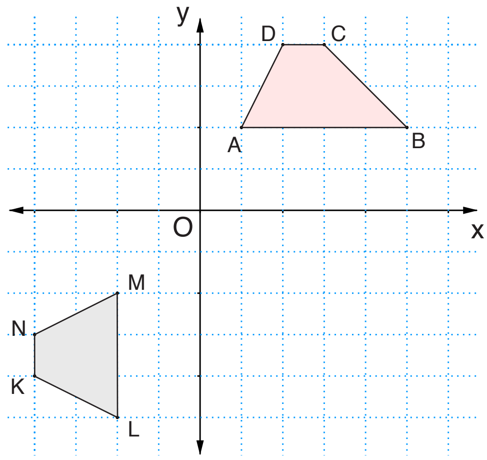
24. Analitik düzlemde $A(1, 6)$, $B(3, 2)$ noktaları veriliyor. **Buna göre**

a) $x=6$ **doğrusu üzerinde alınan P noktası için** $|AP|+|BP|$ **toplamının en küçük değerini bulunuz.**

b) $y=-1$ **doğrusu üzerinde alınan T noktası için** $|AT|+|BT|$ **toplamının en küçük değerini bulunuz.**

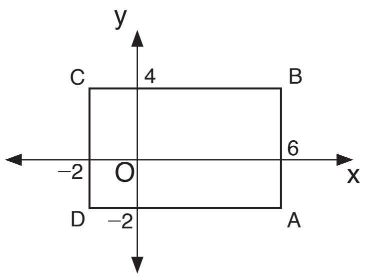
25. **Denklemi** $3x-y+6=0$ **olan d doğrusu üzerindeki tüm noktalar 3 birim sola ve 2 birim yukarı ötelendiğinde oluşan yeni doğrunun denklemini bulunuz.**

26.



Yukarıdaki şekilde
ABCD dikdörtgeni orijin etrafında saat yönünde $90°$ döndürülünce $A'B'C'D'$ dörtgeni elde ediliyor. KLMN dörtgeninin y eksenine göre simetri dönüşümü altındaki görüntüsü $K'L'M'N'$ çiziliyor.
Buna göre $A'B'C'D'$ **ve** $K'L'M'N'$ **dörtgenlerinde ortak olan bölgelerin alanını hesaplayınız.**

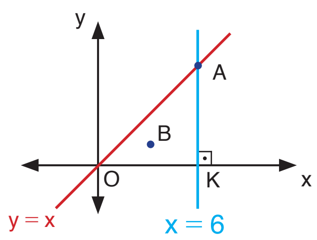
27.



Analitik düzlemde kenarları eksenlere paralel olarak verilen şekildeki ABCD dikdörtgenin orijine göre simetri dönüşümü altındaki görüntüsü $A'B'C'D'$ dikdörtgenidir.
Buna göre ABCD ve $A'B'C'D'$ dörtgenlerinde ortak bölgenin alanı kaç birimkaredir?

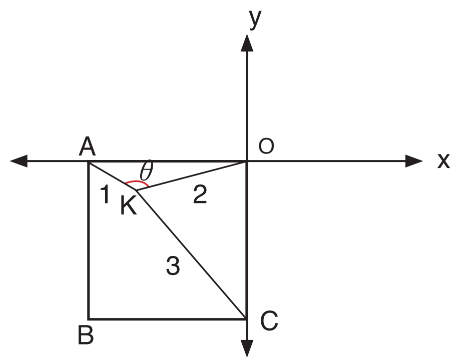
28. Analitik düzlemde $A(3, 4)$ noktasının $y = x$ doğrusuna göre simetri dönüşümü altındaki görüntüsü B ve B noktasının $y = -x$ doğrusuna göre simetri dönüşümü altındaki görüntüsü C noktasıdır.
Buna göre, B noktasının AC doğrusuna uzaklığını hesaplayınız.

29.



Yukarıdaki şekilde $y = x$ doğrusu ile $x = 6$ doğrusunun kesim noktası A ve OAK üçgeninin iç bölgesinde bir B noktası alınıyor.
B noktasının $y = x$ doğrusuna göre simetri dönüşümü altındaki görüntüsü C ve $x = 6$ doğrusuna göre simetri dönüşümü altındaki görüntüsü D noktasıdır. $|AB| = 2$ birim **olduğuna göre** ACD **üçgeninin alanını hesaplayınız.**

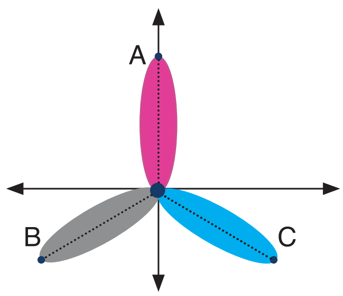
30.



Yukarıda analitik düzlemde OABC karesi verilmiştir.
$|KA| = 1$ birim, $|KC| = 3$ birim,
$|KO| = 2$ birim ve $m(\widehat{OKA}) = \theta$
olduğuna göre θ açısı kaç derecedir?

31. Analitik düzlemde verilen verilen $A(1, 3)$ noktasının $B(t-2, 2t+4)$ noktalarına göre simetri dönüşümü altındaki görüntülerinin denklemini bulunuz.

32.



Yukarıdaki şekilde bir pervanenin kanatlarının konumu görülmektedir. Bu pervane saat yönünün tersine saniyede 4 tur atmaktadır. Pervanenin taradığı alanın çapı 20 cm **olduğuna göre 30 sn sonra A, B ve C noktalarının koordinatları ne olur?**

DEĞERLENDİRME
Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorular ile ilgili konuları veya faaliyetleri tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.

SAYILAR VE CEBİR

5. TÜREV

5.1. LİMİT VE SÜREKLİLİK
5.2. ANLIK DEĞİŞİM ORANI VE TÜREV
5.3. TÜREVİN UYGULAMALARI

Matematikte teğetin eğiminin bulunması, fonksiyon grafiklerinin çizilmesi, fizikte hız ve ivme denklemlerinin bulunması, kimyada bir reaksiyon hızının hesaplanması, biyolojide büyüme hızının hesaplanması, meteoroloji tahminleri, ekonomide marjinal gelir, marjinal fiyat hesaplamaları gibi birçok alanda türevden yararlanılır.

Hazırlık Çalışması

Doğrusal yolda konum zaman denklemi $s(t) = 20t + 2t^2$ km/sa. ile verilen bir aracın 2. saat ile 4. saat arasında aldığı toplam yolu ve bu saatler arasındaki ortalama hızını bulunuz.

5.1. LİMİT VE SÜREKLİLİK

Bu Bölümde Neler Öğreneceksiniz?

- Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti, soldan limit ve sağdan limit kavramları
- Limit ile ilgili özellikler
- Genişletilmiş gerçek sayılar kümesinde sonsuz için limit ve sonsuz limit
- Limitte belirsizlik durumları
- Bir fonksiyonun bir noktadaki sürekliliği

Terimler ve Kavramlar

- Bir noktada limit
- Sağdan limit
- Soldan limit
- Süreklilik

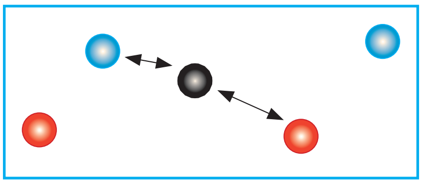
Limit

Bocce, geçmişi milattan önceye dayanan Anadolu'da bilinen ve oynanan bir oyundur.

Bu spor 1984 yılında paralimpik olimpiyatlara alınmıştır. Bedensel engellilerin de sabırlı ve azimli bir şekilde çalışarak bu sporda başarılı oldukları görülmüştür.

Görsel 5.1: Bocce sporu

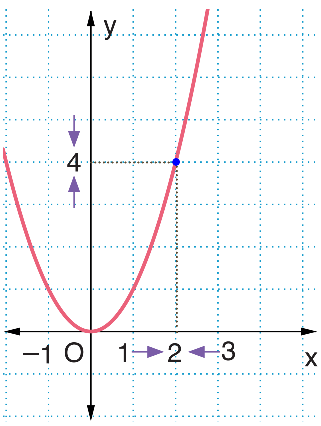
Bocce sporunda amaç atılan topun hedefe en yakın olmasını sağlamaktır. Oyun başlarken oyun sahası içerisinde herhangi bir yere bir top atılır. Oyuncular sırayla bu topa en yakın topu atmaya çalışır.



Görsel 5.2: Bocce topları

Örnek olarak bir oyunda yandaki durum oluştuğunda siyah olan hedef topa en yakın mavi top olduğundan mavi takım oyunu kazanır.

$f(x) = x^2$ fonksiyonu üzerinde $A(2, 4)$ noktası alınsın. Apsisi 2 ye yakın olan noktalarda fonksiyonun aldığı değerleri gösteren tablo aşağıdaki gibidir.



x, 2 ye soldan yaklaşıyor. → ← x, 2 ye sağdan yaklaşıyor.

x	1,5	1,7	1,98	1,99	$\rightarrow 2 \leftarrow$	2,01	2,05	2,2	2,5
$f(x) = x^2$	2,25	2,89	3,92	3,96	$\rightarrow 4 \leftarrow$	4,04	4,2	4,84	6,25

Yukarıdaki tabloda görüldüğü gibi x, 2 den küçük değerler ile 2 ye yaklaştığında fonksiyon 4 e yaklaşmakta, 2 den büyük değerlerle 2 ye yaklaştığında fonksiyon yine 4 e yaklaşmaktadır.

TANIM

x değişkeni a gerçek sayısına a dan küçük değerlerle yaklaşıyorsa bu tür yaklaşmaya soldan yaklaşma denir ve $x \to a^-$ biçiminde gösterilir.
x değişkeni a gerçek sayısına a dan büyük değerlerle yaklaşıyorsa bu tür yaklaşmaya sağdan yaklaşma denir ve $x \to a^+$ biçiminde gösterilir.

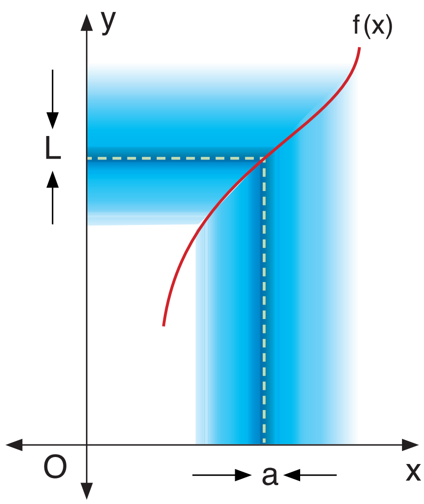
$f(x) = x^2$ fonksiyonunda x, 2 ye soldan yaklaştığında fonksiyonun yaklaştığı 4 sayısına $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki soldan limiti denir ve $\lim\limits_{x \to 2^-} (x^2) = 4$ biçiminde gösterilir.

$f(x) = x^2$ fonksiyonunda x, 2 ye sağdan yaklaştığında fonksiyonun yaklaştığı 4 sayısına $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki sağdan limiti denir ve $\lim\limits_{x \to 2^+} (x^2) = 4$ biçiminde gösterilir.

TANIM

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ya da $f : \mathbb{R} - \{a\} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ şeklinde tanımlı bir f fonksiyonunda x değişkeni a ya soldan yaklaştığında $f(x)$ fonksiyonu L_1 gerçek sayısına yaklaşıyorsa $f(x)$ in $x = a$ daki soldan limiti L_1 dir denir ve $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L_1$ biçiminde gösterilir.

x değişkeni a ya sağdan yaklaştığında $f(x)$ fonksiyonu L_2 gerçek sayısına yaklaşıyorsa $f(x)$ in $x = a$ daki sağdan limiti L_2 dir denir ve $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_2$ biçiminde gösterilir.



Bir fonksiyonun sağdan limiti soldan limitine eşit olsun ve L gerçek sayı değerini alsın. Bu durumda fonksiyonun limiti vardır ve x, a ya yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonunun limiti L dir denir.

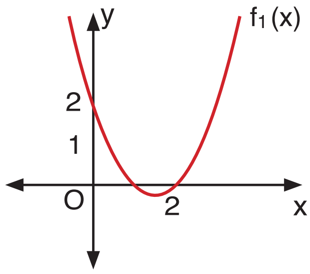
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ ise $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ olur.

Sağdan ve soldan limitleri eşit değil ise fonksiyonun bu noktada limiti yoktur. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ ise $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ yoktur.

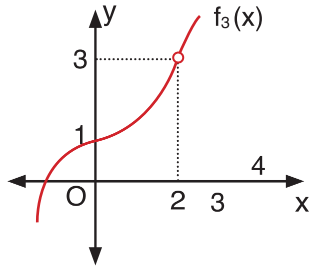
ÖRNEK 1

Aşağıdaki fonksiyonların $x = 2$ noktasındaki sağdan ve soldan limitlerini bulunuz. Limiti olan fonksiyonların limit değerini hesaplayınız.

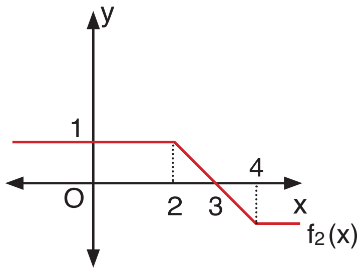
a)



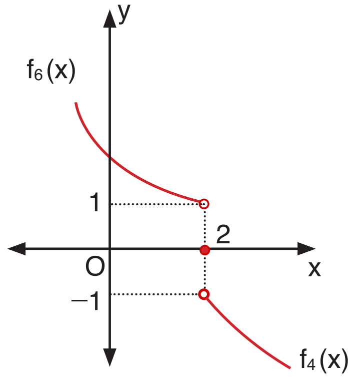
c)



b)



ç)

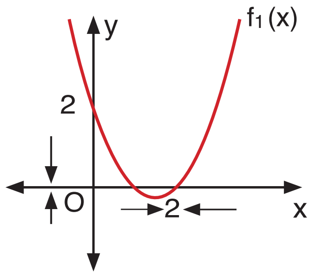


ÇÖZÜM

a) $\lim\limits_{x \to 2^-} f_1(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f_1(x) = 0$

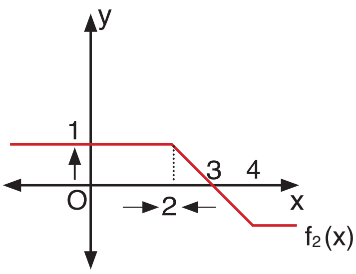
olduğundan $f_1(x)$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasında limiti vardır ve $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$ olur.



b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f_2(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f_2(x) = 1$

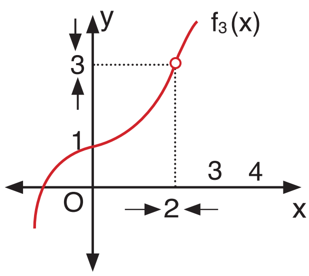
olduğundan $f_2(x)$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasında limiti vardır ve $\lim\limits_{x \to 2} f_2(x) = 1$ olur.



c) $\lim\limits_{x \to 2^-} f_3(x) = 3$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f_3(x) = 3$

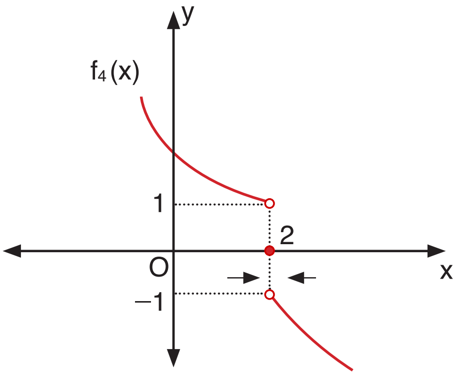
olduğundan $f_3(x)$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasında limiti vardır ve $\lim\limits_{x \to 2} f_3(x) = 3$ olur.



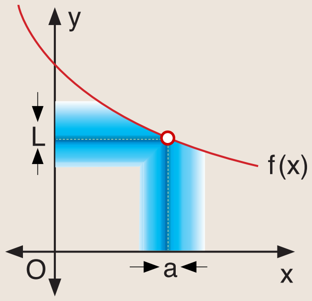
ç) $\lim\limits_{x \to 2^-} f_4(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f_4(x) = -1$ olur.

Sağdan ve soldan limit değerleri farklı olduğundan $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ yoktur.

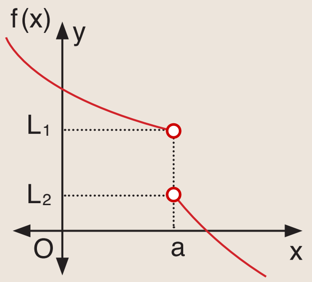


SONUÇ



$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ olduğundan

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ olur.



$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L_1$

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_2$

ve $L_1 \neq L_2$ ise $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ yoktur.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Görsel 5.2

A. L. Cauchy

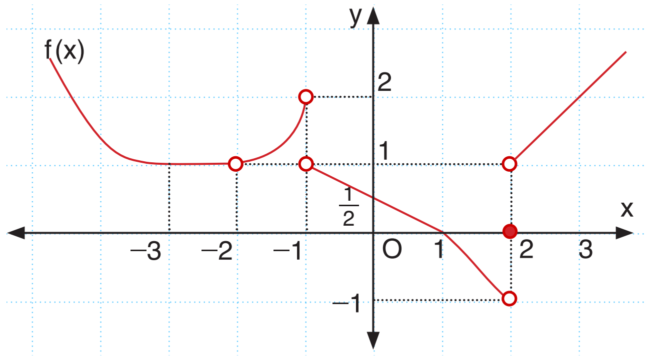
Fransız Matematikçi Augustin Louis Cauchy (Agusto Lui Kuşi) kendi adıyla bilinen teoremiyle ve üretken bir matematikçi olmasıyla tanınır.

Elde ettiği sonuçları hemen yayımlamak ve ders kitapları hazırlamak suretiyle büyük kitleler üzerinde hızlı ve faydalı etkiler bırakmıştır. Teorik ve uygulamalı matematiğin birçok alanında tanımlamalar yapmıştır.

Limitleri ele alış şekli, fonksiyonların sürekliliği ile ilgili yeni teorisiyle diferansiyel analizin temel ilkelerini büyük oranda geliştirmiştir. Daha sonra gelen matematikçiler Cauchy'nin yöntemini kullanmışlardır.

ÖRNEK 2

Aşağıdaki grafikte verilen $y = f(x)$ fonksiyonunda apsisleri $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1$ ve 2 olan noktaların hangilerinde fonksiyonun limiti yoktur?



ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = 1$ olduğundan $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = 1$ olur.

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 1$ olduğundan $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 1$ olur.

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 2$ ve $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 1$ olduğundan $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ yoktur.

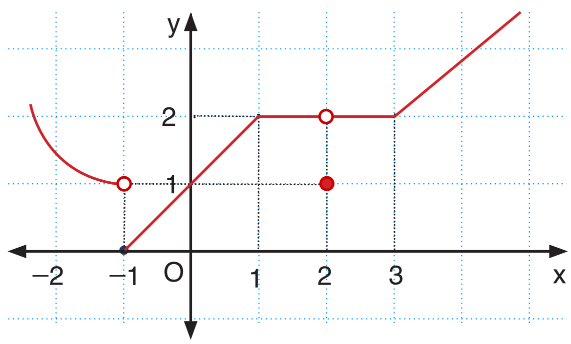
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \dfrac{1}{2}$ olduğundan $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$ olur.

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$ olduğundan $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$ olur.

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -1$ ve $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1$ olduğundan $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ yoktur.

O hâlde $f(x)$ fonksiyonunun apsisi -1 ve 2 olan noktalarda yoktur.

SIRA SİZDE



Yukarıdaki grafikte verilen $y = f(x)$ fonksiyonunda apsisleri $-1,\ 0,\ 1$ ve 2 olan noktaların hangilerinde fonksiyonun limiti yoktur?

$f(x) = x^2 - x + 4$ fonksiyonu verilsin. GeoGebra programını kullanarak aşağıdaki tabloyu doldurup $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4$ olduğunu gösteriniz.

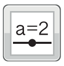
x	0,5	0,8	0,9	0,99	→ 1 ←	1,01	1,05	1,2	1,5
$f(x) = x^2 - x + 4$									

I. GeoGebra programında Giriş: bölümüne $f(x) = x \wedge 2 - x + 4$ yazarak $f(x) = x^2 - x + 4$ fonksiyonunu oluşturunuz.

II.

Giriş: $f(0.5)$ Giriş: $f(1.01)$
Giriş: $f(0.8)$ Giriş: $f(1.05)$
Giriş: $f(0.9)$ Giriş: $f(1.2)$
Giriş: $f(0.99)$ Giriş: $f(1.5)$

biçiminde yazıp tabloda verilen değerleri cebir penceresinde bulunuz.

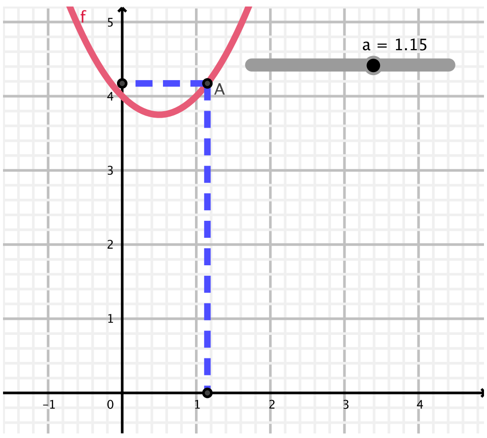
III. 

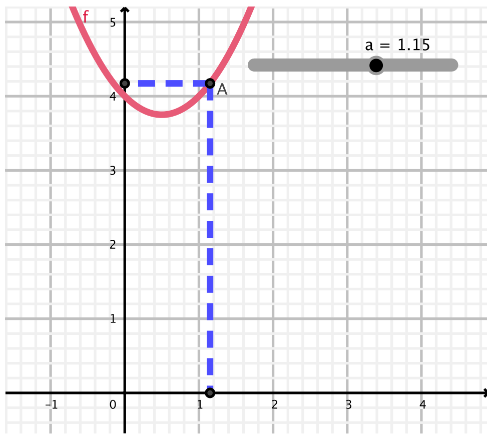
Artış: 0.001 olacak şekilde a sürgüsü oluşturunuz. Giriş: bölümüne $(a, f(a))$ yazarak bir A noktası oluşturunuz.

IV. Giriş: bölümüne $(a, 0)$ yazıp bu nokta ile A noktasını doğru parçası aracı ile birleştiriniz.

V. Giriş: bölümüne $(a, f(a))$ yazıp bu nokta ile A noktasını doğru parçası aracı ile birleştiriniz ve doğru parçalarının rengini ve stilini kendi isteğinize göre değiştiriniz.

VI. Sürgüyü hareket ettirerek 1 değerine yaklaşıldığında fonksiyonun aldığı değerin 4 e yaklaştığını test ediniz.





ALIŞTIRMALAR

1. **Aşağıdaki tabloda verilen değerleri hesap makinesi kullanarak istenen limit değerlerini hesaplayınız.**

a)

x	2,9	2,99	→3←	3,01	3,001
$f(x) = 2x^3$					

$\lim\limits_{x \to 3}(2x^3)$

b)

x	−0,02	−0,01	→0←	0,01	0,02
$f(x) = \dfrac{x+3}{2x-1}$					

$\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{x+3}{2x-1}\right)$

2. **Aşağıda verilen tabloları GeoGebra programı yardımı ile doldurup verilen noktalara göre fonksiyonların limitini bulunuz.**

a)

x	4,9	4,99	→5←	5,01	5,03
$f(x) = \dfrac{x^2-25}{x+5}$					

$f(x) = \lim\limits_{x \to 5}\left(\dfrac{x^2-25}{x+5}\right)$

b)

x	−0,02	−0,01	→ 0 ←	0,01	0,02
$f(x) = \dfrac{e^x+1}{x-1}$					

$f(x) = \lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{e^x+1}{x-1}\right)$

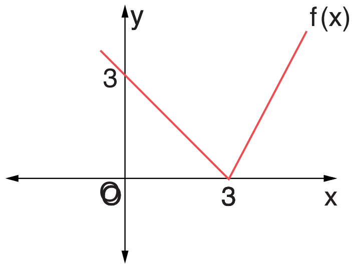
c)

x	−0,02	−0,01	→0←	0,01	0,02
$f(x) = \dfrac{\sin 4x}{\sin 2x + 1}$					

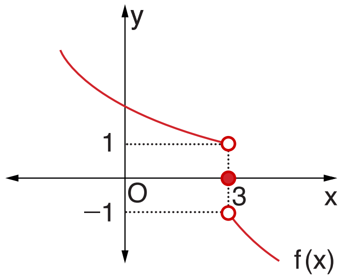
$f(x) = \lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\sin 4x}{\sin 2x+1}\right)$

3. **Aşağıdaki grafiklerde verilen fonksiyonların varsa $x = 3$ noktasındaki limitini bulunuz.**

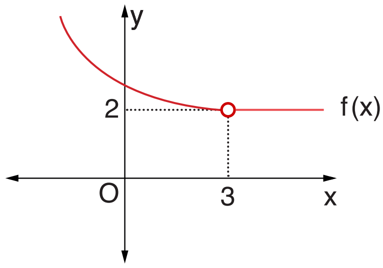
a)



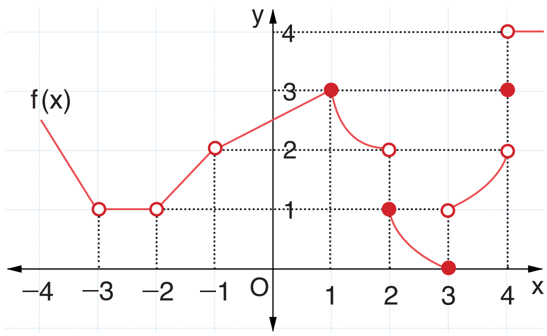
b)



c)



4.

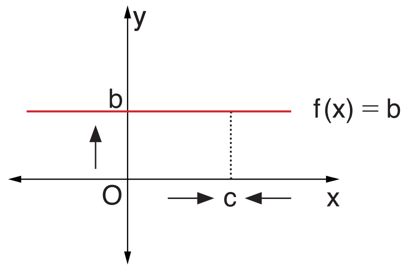


Yukarıda grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun hangi değerler için limiti yoktur?

Limit Alma Kuralları

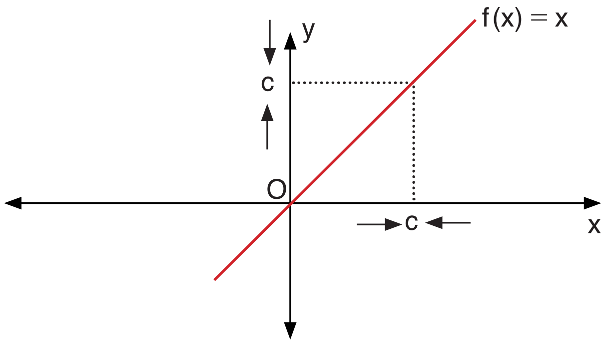
Sabit Bir Gerçek Sayının Limiti

Sabit bir gerçek sayının limiti yine kendisidir. b ve c birer gerçek sayı olmak üzere $\lim\limits_{x \to c} b = b$ biçiminde ifade edilir.



$f(x) = x$ Fonksiyonunun Limiti

$f(x) = x$ birim fonksiyonun limiti $\lim\limits_{x \to c} x = c$ olur.



ÖRNEK 3

Aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x \to 3} 2$

b) $\lim\limits_{x \to -1} (-3)$

c) $\lim\limits_{x \to -2} x$

ç) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} x$

ÇÖZÜM

a) $\lim\limits_{x \to 3} 2 = 2$

b) $\lim\limits_{x \to -1} (-3) = -3$

c) $\lim\limits_{x \to -2} x = -2$

ç) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} x = \frac{1}{2}$

İki Fonksiyonun Toplamının ve Farkının Limiti

$A \subseteq \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ ve $f, g: A \to \mathbb{R}$ c noktasında limiti olan iki fonksiyon olsun.

a) $\lim\limits_{x \to c}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x)$

b) $\lim\limits_{x \to c}(f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x)$ olur.

ÖRNEK 4

Aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x \to -1} (x+3)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2} (5-x)$

ÇÖZÜM

a) $\lim\limits_{x \to -1} (x+3) = \lim\limits_{x \to -1} x + \lim\limits_{x \to -1} 3$
$= -1 + 3 = 2$

b) $\lim\limits_{x \to 2} (5-x) = \lim\limits_{x \to 2} 5 - \lim\limits_{x \to 2} x$
$= 5 - 2 = 3$ bulunur.

İki Fonksiyonun Çarpımının Limiti

$A \subseteq \mathbb{R}$, b, c $\in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ ve f, $g: A \to \mathbb{R}$ c noktasında limiti olan iki fonksiyon olsun.

a) $\lim\limits_{x \to c} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to c} g(x)$

b) $\lim\limits_{x \to c} (b \cdot f(x)) = b \cdot \lim\limits_{x \to c} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to c} (f(x))^n = \left(\lim\limits_{x \to c} f(x)\right)^n$ olur.

ÖRNEK 5

Aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x \to 3} (x^2)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -3} (-4x)$ **c)** $\lim\limits_{x \to -1} (4x^3)$ **ç)** $\lim\limits_{x \to 1} (2x^3 - 5x + 2)$

ÇÖZÜM

a) $\lim\limits_{x \to 3} (x^2) = \lim\limits_{x \to 3} (x \cdot x)$
$= \left(\lim\limits_{x \to 3} x\right) \cdot \left(\lim\limits_{x \to 3} x\right)$
$= 3 \cdot 3 = 9$

b) $\lim\limits_{x \to -3} (-4x) = \lim\limits_{x \to -3} (-4) \cdot \lim\limits_{x \to -3} x$
$= (-4) \cdot (-3) = 12$

c) $\lim\limits_{x \to -1} (4x^3) = \lim\limits_{x \to -1} 4 \cdot \lim\limits_{x \to -1} x^3$
$= 4 \cdot (-1)^3 = -4$

ç) $\lim\limits_{x \to 1} (2x^3 - 5x + 2) = \lim\limits_{x \to 1} 2x^3 - \lim\limits_{x \to 1} 5x + \lim\limits_{x \to 1} 2$
$= 2 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1 + 2$
$= -1$ bulunur.

Polinom Fonksiyonların Limiti

$P(x)$ polinom fonksiyonunun $x = c$ noktasındaki limiti $P(c)$ olur.

$\lim\limits_{x \to c} P(x) = P(c)$ biçiminde gösterilir.

ÖRNEK 6

$P(x) = 3x^4 - 5x^3 + 2x - 6$ polinom fonksiyonu için aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x \to -1} P(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 0} P(x)$

ÇÖZÜM

a) $\lim\limits_{x \to -1} P(x) = \lim\limits_{x \to -1} (3x^4 - 5x^3 + 2x - 6)$

$= 3 \cdot (-1)^4 - 5(-1)^3 + 2 \cdot (-1) - 6 = 3 + 5 - 2 - 6 = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 0} P(x) = \lim\limits_{x \to 0} (3x^4 - 5x^3 + 2x - 6)$

$= 3 \cdot 0^4 - 5 \cdot 0^3 + 2 \cdot 0 - 6 = -6$ bulunur.

İki Fonksiyonun Bölümünün Limiti

$A \subseteq \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ c noktasında limiti olan iki fonksiyon,

$g(x) \neq 0$ ve $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$ olmak üzere $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$ olur.

ÖRNEK 7

Aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 9}{x - 1}$ b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^2 - x + 1}{x + 2}$

ÇÖZÜM

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 9}{x - 1} = \dfrac{2^2 - 9}{2 - 1} = -5$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^2 - x + 1}{x + 2} = \dfrac{3(-1)^2 - (-1) + 1}{-1 + 2}$

$= \dfrac{5}{1} = 5$ bulunur.

Köklü İfadelerin Limiti

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ ve n çift ise $f(x) \geq 0$ olmak üzere

$\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$ olur.

ÖRNEK 8

Aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt[3]{5x^2 - 4x + 1}$ b) $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x + 2}}$ c) $\lim\limits_{x \to 1} (x^4 + 6x + 1)^{\frac{4}{3}}$

ÇÖZÜM

a) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt[3]{5x^2 - 4x + 1} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x \to 2} (5 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1)} = \sqrt[3]{5 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1} = \sqrt[3]{13}$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{x + 2}} = \sqrt{\dfrac{(-1)^2 + 1}{-1 + 2}} = \sqrt{2}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} (x^4 + 6x + 1)^{\frac{4}{3}} = (1^4 + 6 \cdot 1 + 1)^{\frac{4}{3}} = 8^{\frac{4}{3}} = 2^4 = 16$ bulunur.

Üstel Fonksiyonların Limiti

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}^{+}$ ve $a\neq 1$ olmak üzere $a^{f(x)}$ fonksiyonunun $x=c$ noktasındaki limiti $\lim\limits_{x\to c} a^{f(x)}=a^{\lim\limits_{x\to c} f(x)}$ olur.

ÖRNEK 9

Aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x\to 1} 3^{x^2-x+1}$ **b)** $\lim\limits_{x\to -2} 4^{x^3-x}$

ÇÖZÜM

a) $\lim\limits_{x\to 1} 3^{x^2-x+1}=3^{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-x+1)}$

$=3^{1^2-1+1}$

$=3$

b) $\lim\limits_{x\to -2} 4^{x^3-x}=4^{\lim\limits_{x\to -2}(x^3-x)}$

$=4^{(-2)^3-(-2)}$

$=4^{-8+2}=4^{-6}=2^{-12}$

Logaritma Fonksiyonunun Limiti

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^{+}$, $a\in\mathbb{R}^{+}$, $a\neq 1$ ve $f(x)>0$ olmak üzere $\log_a f(x)$ fonksiyonunun $x=c$ noktasındaki limiti $\lim\limits_{x\to c}[\log_a f(x)]=\log_a\left(\lim\limits_{x\to c} f(x)\right)$ olur.

ÖRNEK 10

Aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x\to 2}\left[\log_7(x^3-x+1)\right]$ **b)** $\lim\limits_{x\to 1}[\ln(3x-1)]$

ÇÖZÜM

a) $\lim\limits_{x\to 2}\left[\log_7(x^3-x+1)\right]=\log_7\left[\lim\limits_{x\to 2}(x^3-x+1)\right]$

$=\log_7(2^3-2+1)=\log_7 7=1$ bulunur.

b) $\lim\limits_{x\to 1}[\ln(3x-1)]=\ln\left[\lim\limits_{x\to 1}(3x-1)\right]$

$=\ln(3\cdot 1-1)=\ln 2$ bulunur.

Trigonometrik Fonksiyonların Limiti

$A\subseteq\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$ ve $f:A\rightarrow\mathbb{R}$ olsun.

$\lim\limits_{x\to c}(\sin f(x))=\sin\left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right]$

$\lim\limits_{x\to c}(\cos f(x))=\cos\left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right]$

$\lim\limits_{x\to c}(\tan f(x))=\tan\left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right]$

$\lim\limits_{x\to c}(\cot f(x))=\cot\left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right]$ olur.

ÖRNEK 11

Aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x \to 30^\circ} [\sin(2x - 15^\circ)]$ **b)** $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{1 + 2\cos x}{1 + \tan x}$

ÇÖZÜM

a)
$$\lim_{x \to 30^\circ} [\sin(2x - 15^\circ)] = \sin\left[\lim_{x \to 30^\circ}(2x - 15^\circ)\right]$$
$$= \sin[2 \cdot 30^\circ - 15^\circ]$$
$$= \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b)
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{1 + 2\cos x}{1 + \tan x} = \frac{1 + 2 \cdot \cos\frac{\pi}{6}}{1 + \tan\frac{\pi}{6}}$$
$$= \frac{1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}$$
$$= \frac{1 + \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} \text{ bulunur.}$$

Parçalı Fonksiyonların Limiti

$A, B \subseteq \mathbb{R}$ ve $f: A \to B$ iken

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x < a \text{ ise} \\ c, & x = a \text{ ise} \\ h(x), & x > a \text{ ise} \end{cases}$$

parçalı fonksiyonu verilsin. $f(x)$ fonsiyonunun $x = a$ noktasına fonksiyonun kritik noktası denir. Kritik noktada fonksiyonunun limiti incelenirken fonksiyonun sağdan ve soldan limitine bakılır.

x	$-\infty$	a	$+\infty$
f(x)	g(x)	c	h(x)

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^-} g(x) = L_1$$
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} h(x) = L_2 \text{ olsun.}$$

Buradan

$L_1 = L_2$ ise $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ vardır ve $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x)$ olur.

$L_1 \neq L_2$ ise $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ limiti yoktur.

Kritik nokta dışındaki noktalarda limit incelenirken o noktanın bulunduğu aralıktaki fonksiyon parçasının limiti incelenir.

$x_0 \in \mathbb{R}$ ve $x_0 < a$ ise $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ olur.

$x_0 > a$ ise $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x)$ bulunur.

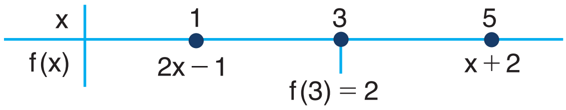
ÖRNEK 12

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olmak üzere $f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x<3 \text{ ise} \\ 2, & x=3 \text{ ise} \\ x+2, & x>3 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor. Buna göre aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

ÇÖZÜM



$f(x)$ fonksiyonunun kritik noktası $x=3$ olur.

a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=2\cdot 1-1=1$

b) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(x+2)=3+2=5$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(2x-1)=2\cdot 3-1=5$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ olduğundan $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=5$ bulunur.

c) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=\lim\limits_{x\to 5}(x+2)=5+2=7$ bulunur.

ÖRNEK 13

$a, b\in\mathbb{R}$ olmak üzere $f(x)=\begin{cases} x^2-ax+1, & x<2 \text{ ise} \\ 3x+1, & x\geq 2 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=b$ olduğuna göre $a+b$ toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM

$b\in\mathbb{R}$ ve $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=b$ olduğundan $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=b$ olur.
Buradan $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(3x+1)=3\cdot 2+1=7$ olduğundan $b=7$ olur.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-ax+1)$

$=2^2-a\cdot 2+1=-2a+5$ bulunur.

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=b$ olduğundan

$7=-2a+5$

$a=-1$ bulunur.

Buradan $a+b=-1+7=6$ elde edilir.

ÖRNEK 14

Mutlak değerli bir ifadenin kritik noktalardaki limiti incelenirken bu noktalarda ifadenin sağdan ve soldan limitine bakılır.

Kritik nokta olmayan noktalarda ise parçalı fonksiyonlarda olduğu gibi o aralıktaki fonksiyonun limiti incelenir.

$f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

ÇÖZÜM

$|x|$ aşağıdaki gibi parçalı bir fonksiyon olarak gösterilir.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\lvert x\rvert$	$-x$		x

a) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{-x}{x}$
$=\lim\limits_{x\to -2}(-1)=-1$

b) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}$
$=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}$
$=\lim\limits_{x\to 0^+}(1)=1$

Bu durumda $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ limiti yoktur.

c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 3}(1)=1$ bulunur.

ÖRNEK 15

$f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}$ ve $f(x)=\dfrac{|x^2-2x-3|}{x+1}$ fonksiyonu veriliyor.

Buna göre $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ limit değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

x	$-\infty$ $\quad$ -1	3	$+\infty$
x^2-2x-3	$+$	$-$	$+$
$f(x)=\dfrac{\lvert x^2-2x-3\rvert}{x+1}$	$\dfrac{x^2-2x-3}{x+1}$ $=\dfrac{(x-3)(x+1)}{x+1}$ $=x-3$	$\dfrac{-(x^2-2x-3)}{x+1}$ $=\dfrac{-(x-3)(x+1)}{x+1}$ $=-x+3$	$\dfrac{x^2-2x-3}{x+1}$ $=\dfrac{(x-3)(x+1)}{x+1}$ $=x-3$

Buradan $f(x)=\begin{cases} x-3, & x<-1 \text{ ise} \\ -x+3, & -1<x\le 3 \text{ ise} \\ x-3, & x>3 \text{ ise}\end{cases}$

biçiminde bulunur. Buradan

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(x-3)=-1-3=-4$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(-x+3)=-(-1)+3=4$ olur.

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)\ne\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ olduğundan $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ limiti yoktur.

ALIŞTIRMALAR

1. **Aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.**

a) $\lim\limits_{x \to 2}(3x^2 - 4x + 5)$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - x + 5}{x^2 + 2}$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{5x^2 - 41}}{x - 2}$

ç) $\lim\limits_{x \to 0} 3^{x^2 - x}$

d) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\log_5(x + 4)}{\log_5(x - 2)}$

e) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\log_5(x + 4)}{\log_5(x - 2)}$

2. $$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 1, & x > 2 \text{ ise} \\ x - 3, & x = 2 \text{ ise} \\ x^2 + 4, & x < 2 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor. **Buna göre aşağıdaki limitleri hesaplayınız.**

a) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

3. $$f(x) = \begin{cases} ax + 2, & x < 1 \text{ ise} \\ 3x - b, & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4$ **ise** $a + b$ **değeri kaçtır?**

4. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{|x^2 - 4|}{x - 2}$

limitinin varsa değerini bulunuz.

5. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$ **ve** $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = -1$ **ise**

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{e^{f(x)} - 1}{\sin\left(\pi g(x) - \frac{\pi}{6}\right)}$ **değeri kaçtır?**

6. $f(x) = x^2 - x + 2$ **olmak üzere**

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ **değerini bulunuz.**

7. Albert Ainstein (Albırt Aynştayn), dışarıdan bir gözlemciye göre hareket eden bir cismin hızına bağlı olarak boyunun kısaldığını söylemektedir.

L_0 : Cismin ilk boyu
L : Cismin V hızındaki gözlenen boyu
C : Işık hızı olmak üzere

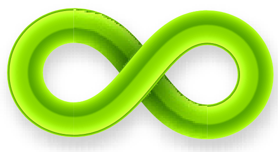
$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}$$

biçiminde modellenmektedir.
Buna göre cismin hızı ışık hızına yaklaştığında cismin gözlenen boyu ne olur?

$\lim\limits_{V \to C} L_0 \sqrt{1 - \dfrac{V^2}{C^2}}$ **değerini hesaplayınız.**

Genişletilmiş Gerçek Sayılar Kümesinde Limit

Matematikte sonsuz, sonlu olmayan demektir. Daha açık olarak adına sonsuz denilen bir nesne yoktur. Ancak sonsuz olan matematiksel nesneler vardır. Sonsuz elemanlı küme, sonsuz terimli dizi gibi.



Görsel 5.3: Sonsuz işareti

Sonsuz, değişkenin değerleri sürekli büyüdüğünde veya küçüldüğünde oluşan bir durum olarak ifade edilebilir.

Eğer bir x değişkeni sınırsız olarak sürekli artıyorsa $x \to +\infty$ veya azalıyorsa $x \to -\infty$ şeklinde ifade edilir.

$\infty + 1 = \infty$ olur. Ancak bu durum "sonsuz artı bir eşittir sonsuz" demek değildir. Sürekli büyüyen bir değişkene 1 eklendiğinde elde edilen değişken de sürekli büyür anlamı taşır.

TANIM
Gerçek sayılar kümesine $+\infty$ veya $-\infty$ eklenmesiyle elde edilen kümeye genişletilmiş gerçek sayılar kümesi denir.

Genişletilmiş gerçek sayılar kümesinde aşağıdaki işlemler yapılabilir.

1. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$

2. $a + \infty = +\infty$
$a - \infty = -\infty$

3. $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
$(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$

4. $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $(+\infty)^n = +\infty$
$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $(-\infty)^n = \begin{cases} -\infty, & n \text{ tek ise} \\ +\infty, & n \text{ çift ise} \end{cases}$

5. $a \in \mathbb{R}^+$ için
$a \cdot (+\infty) = +\infty$
$a \cdot (-\infty) = -\infty$
$a \in \mathbb{R}^-$ için
$a \cdot (+\infty) = -\infty$
$a \cdot (-\infty) = +\infty$

6. $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $\sqrt[n]{+\infty} = +\infty$

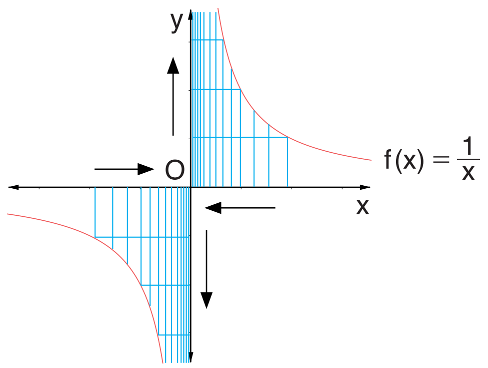
ÖRNEK 16

$f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x}$

fonksiyonu veriliyor. Buna göre aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$ **ç)** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

ÇÖZÜM



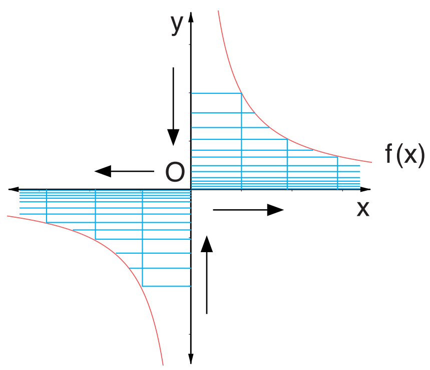
$f(x)=\dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiğinde görüldüğü gibi x, 0 a sağdan yaklaştığında $f(x)$ değeri sınırsız olarak büyümektedir. x, 0 a soldan yaklaştığında ise $f(x)$ değeri sınırsız olarak küçülmektedir.

Bu durumda

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x}=-\infty$ olur.

c)



Yukarıdaki grafikte görüldüğü gibi x sonsuz olarak arttığında $f(x)$ değeri 0 a yaklaşmaktadır. Bu durumda $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{+\infty}=0$ olur.

ç) Benzer şekilde x sonsuz olarak azaldığında $f(x)$ değeri 0 a yaklaşmaktadır.

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{-\infty}=0$ biçiminde ifade edilir.

ÖRNEK 17

Aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{1}{x-5}$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2^x + \dfrac{1}{x^4}\right)$

c) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x+1}{(x-3)^2}$

ç) $\lim\limits_{x \to 2^-} 5^{\frac{1}{x-2}}$

ÇÖZÜM

a) $\lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{1}{x-5} = \dfrac{1}{5^- - 5}$

$= -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2^x + \dfrac{1}{x^4}\right) = 2^{-\infty} + \dfrac{1}{(-\infty)^4}$

$= \dfrac{1}{2^\infty} + \dfrac{1}{\infty}$

$= \dfrac{1}{\infty} + \dfrac{1}{\infty}$

$= 0 + 0 = 0$

c) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x+1}{(x-3)^2} = \dfrac{3+1}{(3^- - 3)^2}$

$= +\infty$

ç) $\lim\limits_{x \to 2^-} 5^{\frac{1}{x-2}} = 5^{\frac{1}{2^- - 2}}$

$= 5^{-\infty}$

$= \dfrac{1}{5^\infty}$

$= \dfrac{1}{\infty} = 0$ olur.

Belirsizlikler

Limit hesaplamalarında karşılaşılan $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ biçimindeki ifadelere belirsiz ifadeler denir.

$\dfrac{0}{0}$ Belirsizliği

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ ve $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ olmak üzere

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ ifadesinde $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ rasyonel ifadesi çarpanlarına ayrılarak ifade düzenlenir ve sadeleştirme yapılarak belirsizlik durumu ortadan kaldırılır. Belirsizlik durumunun ortadan kaldıralamadığı durumlarda sadeleştirme işlemi tekrarlanır.

ÖRNEK 18

Aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-x-6}{x^2-4}$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-x}{\sqrt{2}-\sqrt{x}}$ c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$

ÇÖZÜM

a) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-x-6}{x^2-4} = \dfrac{(-2)^2-(-2)-6}{(-2)^2-4} = \dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-x-6}{x^2-4} = \lim_{x\to -2} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to -2} \frac{x-3}{x-2} = \frac{-2-3}{-2-2} = \frac{5}{4}$$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-x}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{2+2}-2}{\sqrt{2}-\sqrt{2}} = \dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-x}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} &= \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x+2}-x)(\sqrt{x+2}+x)(\sqrt{2}+\sqrt{x})}{(\sqrt{2}-\sqrt{x})(\sqrt{2}+\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+x)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(x+2-x^2)(\sqrt{2}+\sqrt{x})}{(2-x)(\sqrt{x+2}+x)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(x^2-x-2)(\sqrt{2}+\sqrt{x})}{(x-2)(\sqrt{x+2}+x)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+1)(\sqrt{2}+\sqrt{x})}{(x-2)(\sqrt{x+2}+x)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)(\sqrt{2}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+2}+x)} = \frac{(2+1)(\sqrt{2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{2+2}+2)} = \frac{3\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2x}{\sin x-\cos x} = \dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x-\cos x} &= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x-\cos x} \\
&= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{-(\cos x-\sin x)} \\
&= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (-\cos x-\sin x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

ÖRNEK 19

a, b $\in \mathbb{R}$ olmak üzere $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+ax-6}{x-2} = b$ olduğuna göre $a+b$ kaç olmalıdır?

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+ax-6}{x-2} = \dfrac{2^2+a\cdot 2-6}{2-2} = \dfrac{2a-2}{0}$ olur. Buradan

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+ax-6}{x-2}$ limitinin bir gerçek sayı olması için $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği olmalıdır. $2a-2=0 \Rightarrow a=1$ bulunur.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+3) = 5$$

$b=5$ elde edilir. Buradan $a+b=1+5=6$ olur.

Sıkıştırma Teoremi

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = L$ olsun.

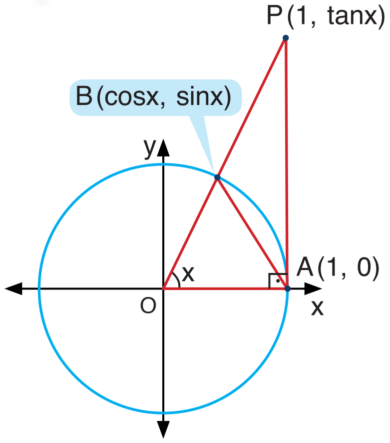
$\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \le h(x) \le g(x)$ ise $\lim\limits_{x \to a} f(x) \le \lim\limits_{x \to a} h(x) \le \lim\limits_{x \to a} g(x)$ olur.

Buradan $\lim\limits_{x \to a} h(x) = L$ elde edilir.

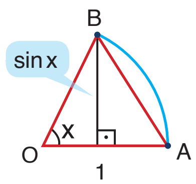
ÖRNEK 20

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$ ve $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ olduğunu gösteriniz.

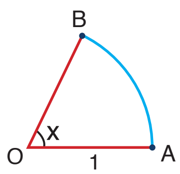
ÇÖZÜM



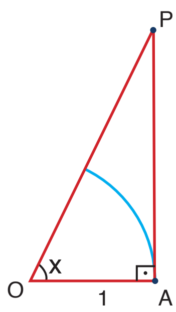
Yandaki POA üçgeninin alanı BOA daire diliminin alanından büyüktür. BOA daire diliminin alanı da BOA üçgeninin alanından büyüktür.



BOA üçgeninin alanı $\le$



BOA daire diliminin alanı $\le$



POA üçgeninin alanı

Buradan

$$\frac{1 \cdot \sin x}{2} \le \pi \cdot 1^2 \frac{x}{2\pi} \le \frac{1 \cdot \tan x}{2}$$

$$\sin x \le x \le \tan x$$

$$\frac{\sin x}{\sin x} \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x} \Rightarrow 1 \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x} \text{ bulunur.}$$

Her üç tarafın $x \to 0$ için limiti alınırsa

$$\lim_{x \to 0} 1 \le \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} \le \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} \Rightarrow 1 \le \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} \le 1 \text{ olur.}$$

Bu durumda $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$ bulunur.

Benzer şekilde $1 \le \dfrac{x}{\sin x} \le \dfrac{1}{\cos x}$ eşitsizliği

$1 \ge \dfrac{\sin x}{x} \ge \cos x$ biçiminde yazılır.

$x \to 0$ için her üç tarafın limiti alınırsa

$$\lim_{x \to 0} 1 \ge \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \ge \lim_{x \to 0} \cos x \Rightarrow 1 \ge \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \ge 1 \text{ bulunur.}$$

Buradan sıkıştırma teoreminden $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ elde edilir.

ÖRNEK 21

Aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\tan 2x}$ **ç)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\tan 4x}$

ÇÖZÜM

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}=\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin 2x}{x}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2}{2}\cdot\frac{\sin 2x}{x}$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=\frac{2}{3}$$

$2x=h$ olsun.

$x\to 0 \;\Rightarrow\; h\to 0$ olur.

Buradan

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h}=1$ bulunur.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x\cdot x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\cdot 1=1$$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\tan 2x}=\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\tan 2x}=3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan 2x}$$
$$=3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2}{2}\cdot\frac{x}{\tan 2x}$$
$$=\frac{3}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\tan 2x}$$
$$=\frac{3}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}}=\frac{3}{2}\cdot\left[\lim_{x\to 0}\cos 2x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}\right]=\frac{3}{2}$$

ç) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\tan 4x}=\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\tan 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\dfrac{\sin 4x}{\cos 4x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\cos 4x\cdot\frac{\sin 5x}{\sin 4x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\cos 4x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}\cdot\frac{\sin 5x}{\sin 4x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\cos 4x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 4x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=1\cdot\frac{1}{4}\cdot 5=\frac{5}{4}\text{ bulunur.}$$

SONUÇ

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{bx}=\dfrac{a}{b}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\dfrac{a}{b}$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx}{\sin ax}=\dfrac{b}{a}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\tan bx}=\dfrac{a}{b}$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{bx}=\dfrac{a}{b}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{\sin bx}=\dfrac{a}{b}$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx}{\tan ax}=\dfrac{b}{a}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{\tan bx}=\dfrac{a}{b}$

ÖRNEK 22

Aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan^2 3x}{5x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x + \tan 3x}{5x}$

ç) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sin(x+1)}{\tan(x^3+1)}$

d) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{2x}$

ÇÖZÜM

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x-1} = \dfrac{\sin(1-1)}{1-1} = \dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$x-1 = h$ olsun. Bu durumda $x \to 1 \Rightarrow h \to 0$ olur.

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sinh}{h} = 1$ bulunur.

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan^2 3x}{5x^2} = \dfrac{\tan^2(3 \cdot 0)}{5 \cdot 0^2} = \dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan^2 3x}{5x^2} = \lim_{x \to 0}\left(\frac{\tan 3x}{5x} \cdot \frac{\tan 3x}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\tan 3x}{5x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\tan 3x}{x} = \frac{3}{5} \cdot 3 = \frac{9}{5} \text{ bulunur.}$$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x + \tan 3x}{5x} = \dfrac{\sin 4 \cdot 0 + \tan 3 \cdot 0}{5 \cdot 0} = \dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x + \tan 3x}{5x} = \lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin 4x}{5x} + \frac{\tan 3x}{5x}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin 4x}{5x} + \lim_{x \to 0} \frac{\tan 3x}{5x} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5} \text{ bulunur.}$$

ç) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sin(x+1)}{\tan(x^3+1)} = \dfrac{\sin(-1+1)}{\tan((-1)^3+1)} = \dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sin(x+1)}{\tan(x^3+1)} = \lim_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x^3+1} \cdot \frac{\sin(x+1)}{\tan(x^3+1)}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{x^3+1}{\tan(x^3+1)} \cdot \lim_{x \to -1} \frac{\sin(x+1)}{(x+1) \cdot (x^2-x+1)}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{x^3+1}{\tan(x^3+1)} \cdot \lim_{x \to -1} \frac{\sin(x+1)}{(x+1)} \cdot \lim_{x \to -1} \frac{1}{(x^2-x+1)}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{(-1)^2-(-1)+1} = \frac{1}{3} \text{ bulunur.}$$

d) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{2x} = \dfrac{\sqrt{1-\cos 2 \cdot 0}}{2 \cdot 0} = \dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{2x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{1-(1-2\sin^2 x)}}{2x}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{2\sin^2 x}}{2x}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{2} \cdot |\sin x|}{2x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{2} \cdot (-\sin x)}{2x}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ bulunur.}$$

$\frac{\infty}{\infty}$ Belirsizliği

$f(x)$ ve $g(x)$ iki fonksiyon ve $g(x) \neq 0$ olmak üzere $\lim\limits_{x \to \mp\infty} f(x) = \mp\infty$

ve $\lim\limits_{x \to \mp\infty} g(x) = \mp\infty$ olsun.

Bu durumda $\lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to \mp\infty} f(x)}{\lim\limits_{x \to \mp\infty} g(x)} = \mp\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

Ayrıca $P(x)$ ve $Q(x)$ iki polinom ve $Q(x) \neq 0$ olmak üzere

a) $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının dereceleri birbirine eşit ise

$\lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ limiti en büyük dereceli terimlerinin katsayıları oranı olur.

ÖRNEK 23

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 + 8x + 1}{5x^2 + 3x - 2}$ limitinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 8x + 1}{5x^2 + 3x - 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2\left(3 + \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(5 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{3 + \frac{8}{\infty} + \frac{1}{\infty^2}}{5 + \frac{3}{\infty} - \frac{2}{\infty^2}} = \frac{3 + 0 + 0}{5 + 0 - 0} = \frac{3}{5} \text{ bulunur.}$$

b) Payın derecesi paydanın derecesinden büyük ise

$(\text{der}(P(x)) > \text{der}(Q(x))$ ise$)$

$\lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \mp\infty$ olur.

ÖRNEK 24

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^4 + 5x^2 + 4}{x^2 + 3x - 1}$ limitinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^4\left(3 + \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^4}\right)}{x^2\left(1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right)} = \infty^2 \cdot \left(\frac{3 + \frac{5}{\infty^2} + \frac{4}{\infty^4}}{1 + \frac{3}{\infty} - \frac{1}{\infty^2}}\right)$$

$$= \infty^2 \cdot \left(\frac{3 + 0 + 0}{1 + 0 - 0}\right)$$

$$= \infty \cdot 3 = \infty \text{ bulunur.}$$

c) Payın derecesi paydanın derecesinden küçük ise

$(\text{der}(P(x)) < \text{der}(Q(x))$ ise$)$

$\lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0$ olur.

ÖRNEK 25

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3+x+1}{x^4-1}$ limitinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3+x+1}{x^4-1} = \dfrac{-\infty}{\infty} = -\dfrac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3\left(2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^4\left(1+\frac{1}{x^4}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^4}} \right)$$

$$= \frac{1}{-\infty} \cdot \left(\frac{2+\frac{2}{(-\infty)^2}+\frac{1}{(-\infty)^3}}{1+\frac{1}{(-\infty)^4}} \right)$$

$$= \frac{1}{-\infty} \cdot \left(\frac{2+0+0}{1+0} \right) = -0 \cdot 2 = 0 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 26

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(a-2)x^3-(b+1)x^2+3x-2}{5x^2+7x-1} = 4$ ise a+b değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$x \to \infty$ iken bu limitin $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır. Limitin değeri 4 olduğundan payın derecesi paydanın derecesine eşit olmalıdır. Buradan

$a-2=0 \Rightarrow a=2$ bulunur.

En büyük dereceli terimlerin katsayıları oranı limitin değeri olduğundan

$$\frac{-(b+1)}{5} = 4$$

$$-b-1 = 20$$

$$b = -21 \text{ olur.}$$

$$a+b = 2-21$$

$$= -19 \text{ bulunur.}$$

SONUÇ

$P(x)$ ve $Q(x)$ iki polinom olsun.

$der(P(x)) = n$ ve $der(Q(x)) = m$ olmak üzere

a) $n = m \Rightarrow \lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + ... + b_0} = \dfrac{a_n}{b_n}$

b) $n > m \Rightarrow \lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_0} = \mp\infty$

c) $n < m \Rightarrow \lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_0} = 0$ bulunur.

TEOREM

$a \in \mathbb{R}$ ve $0 < a < 1$ olmak üzere

$\lim\limits_{x \to \infty} a^x = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ olur.

$a \in \mathbb{R}$ ve $a > 1$ olmak üzere

$\lim\limits_{x \to \infty} a^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ olur.

ÖRNEK 27

Aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2 \cdot 3^x + 3 \cdot 5^x}{2^x + 7 \cdot 5^x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3 \cdot 2^x + 5 \cdot 7^x}{5^x + 2^x}$

ÇÖZÜM

a)
$$\lim_{x \to \infty} \frac{2 \cdot 3^x + 3 \cdot 5^x}{2^x + 7 \cdot 5^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{5^x\left(2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x + 3\right)}{5^x\left(\left(\frac{2}{5}\right)^x + 7\right)}$$
$$= \frac{2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{\infty} + 3}{\left(\frac{2}{5}\right)^{\infty} + 7} = \frac{2 \cdot 0 + 3}{0 + 7} = \frac{3}{7}$$

b)
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3 \cdot 2^x + 5 \cdot 7^x}{5^x + 2^x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2^x\left(3 + 5 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^x\right)}{2^x\left(\left(\frac{5}{2}\right)^x + 1\right)}$$
$$= \frac{3 + 5 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^{-\infty}}{\left(\frac{5}{2}\right)^{-\infty} + 1} = \frac{3 + \left(\frac{2}{7}\right)^{\infty}}{\left(\frac{2}{5}\right)^{\infty} + 1} = \frac{3 + 0}{0 + 1} = 3$$

ÖRNEK 28

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x + 3} - 3x}{2x + 1}$ limitinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 3} - 3x}{2x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)} - 3x}{x\left(2 + \frac{1}{x}\right)}$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{|x|\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} - 3x}{x\left(2 + \frac{1}{x}\right)}$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x(\sqrt{1} - 3)}{x(2 + 0)}$$
$$= -\frac{2}{2} = -1 \text{ bulunur.}$$

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x+3}{x-3}$

b) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+2}{(x-2)^2}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x+2}$

ç) $\lim\limits_{x\to 3^-}5^{\frac{1}{x-3}}$

2. Aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

3. Aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\tan x}{\sin 2x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 4x}{3x\tan 2x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$

ç) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x^3-8)}{x-2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\sin 9x}}{\tan\sqrt{3x}}$

4. Aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-4x+1}{2x^4+1}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-1}{x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{3x^2+1}$

ç) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\pi^x+e^x+3^{\frac{1}{x}}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x-2\cdot 5^x}{7^x+5^x}$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3\cdot 2^x+3\cdot 5^x+4\cdot 7^x}{5\cdot 2^x+7^x}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(a+3)x^3-(b+1)x^2+3x-1}{4x^2+2x+4}=5$

ise a + b kaçtır?

6. Aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}+5x}{\sqrt[4]{16x^4-x^3}-1}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+\sqrt{x^2+1}}{5x+3}$

Süreklilik

TANIM

$A \subseteq \mathbb{R}$ ve $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $a \in A$ olmak üzere

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ ise f fonksiyonu $x = a$ noktasında süreklidir denir.

Eğer f fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekli ise fonksiyon A üzerinde süreklidir denir.

Yukarıdaki tanıma göre bir f fonksiyonunun $x = a$ noktasında sürekli olması için

a) f fonksiyonu $x = a$ noktasında tanımlı olmalıdır.

b) f fonksiyonunun a noktasında limiti olmalıdır.

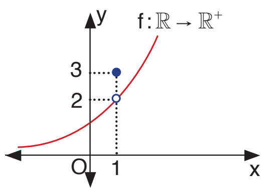
c) Fonksiyonun a noktasındaki limiti a noktasındaki fonksiyon değerine eşit olmalıdır.

Bir $f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $a \in \mathbb{R}$ noktasında sürekli değil ise fonksiyona bu noktada süreksizdir denir.

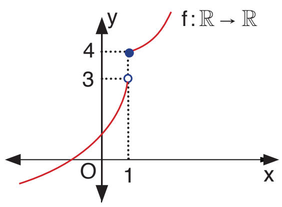
ÖRNEK 29

Aşağıda grafikleri verilen fonksiyonların $x = 1$ noktasında sürekli olup olmadığını inceleyiniz.

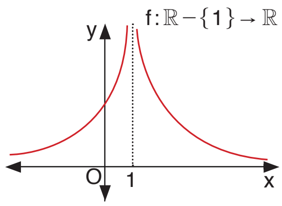
a)



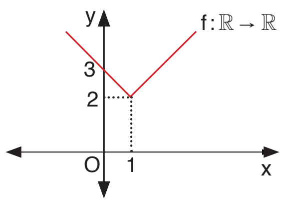
b)



c)



ç)



ÇÖZÜM

a) Verilen grafiğe göre $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$ ve $f(1) = 3$ bulunur.

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$ olduğundan f fonksiyonu $x = 1$ apsisli noktada sürekli değildir.

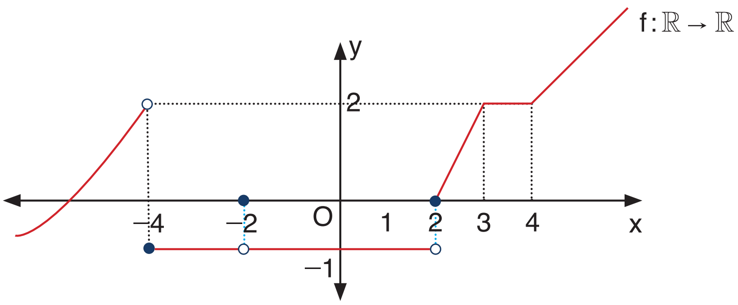
b) Verilen grafiğe göre $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3$ ve $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4$ olduğundan

$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ limiti yoktur. Bu durumda f fonksiyonu $x = 1$ de sürekli değildir.

c) f fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R} - \{1\}$ olduğu için $x = 1$ noktasında sürekliliğe bakılmaz.

ç) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = 2$ olduğundan f fonksiyonu $x = 1$ apsisli noktada süreklidir.

ÖRNEK 30



Yukarıda grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaların apsislerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = 2$ ve $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = -1$ olduğundan $\lim\limits_{x \to -4} f(x)$ limiti yoktur.
O hâlde fonksiyon $x = -4$ apsisli noktada süreksizdir.
$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -1$ ve $f(-2) = 0$ olur.
Buradan $\lim\limits_{x \to -2} f(x) \neq f(-2)$ olduğundan fonksiyon $x = -2$ apsisli noktada süreksizdir.

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -1$ ve $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 0$ olduğundan $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ limiti yoktur.
O hâlde fonksiyon $x = 2$ apsisli noktada süreksizdir.
Buradan f fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaların apsisleri
$x = -4$, $x = -2$ ve $x = 2$ bulunur.

TEOREM
$A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ ve $g : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $a \in A$ noktasında sürekli fonksiyonlar olsun. Bu durumda

a) $f + g$ fonksiyonu $x = a$ da süreklidir.

b) $f - g$ fonksiyonu $x = a$ da süreklidir.

c) $f \cdot g$ fonksiyonu $x = a$ da süreklidir.

ç) $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $k \cdot f$ fonksiyonu $x = a$ da süreklidir.

d) $g(a) \neq 0$ olmak üzere $\dfrac{f}{g}$ fonksiyonu $x = a$ da süreklidir.

ÖRNEK 31

$f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 4x + 1$ fonksiyonunun gerçek sayılar kümesinde sürekli olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = 3a^4 - 5a^3 + 4a + 1$ ve $f(a) = 3a^4 - 5a^3 + 4a + 1$ olur.
Buradan $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ olduğundan
$\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 4x + 1$ fonksiyonu süreklidir.

TEOREM
Polinom fonksiyonlar gerçek sayılar kümesinde süreklidir.

ÖRNEK 32

$f(x)=\dfrac{x^3+3x-1}{x^2-1}$ fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş kümeyi bulunuz.

ÇÖZÜM

Pay ve payda polinom fonksiyon olduğundan süreklidir.
Paydayı 0 yapan değerler, fonksiyonu tanımsız yaptığından tanım kümesinden çıkarılır.

$x^2-1=0$

$x_1=1$

$x_2=-1$ olur.

Buradan fonksiyonun en geniş tanım kümesi $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ olur.
$y=f(x)$ fonksiyonu tanım kümesindeki her noktada sürekli olduğundan bu fonksiyonun sürekli olduğu en geniş küme $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ olur.

ÖRNEK 33

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x+1}, & x<1 \text{ ise}\\ ax+2, & x=1 \text{ ise}\\ x+2b, & x>1 \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonu $x=1$ noktasında sürekli ise a ve b değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

f fonksiyonu $x=1$ noktasında sürekli olduğundan $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$ olmalıdır. $x=1$ noktası kritik nokta olduğundan

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\left(\frac{3}{x+1}\right)=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(x+2b)=1+2b \text{ olur.}$$

Buradan

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^-}f(x)$$

$$1+2b=\frac{3}{2}$$

$$b=\frac{1}{4} \text{ bulunur.}$$

$y=f(x)$ fonksiyonu sürekli olduğundan $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$ olur.

$$\frac{3}{2}=a\cdot1+2$$

$$a=-\frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 34

$f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x^2-ax+1}$ fonksiyonu gerçek sayılar kümesinde sürekli ise a hangi aralıkta değer alır?

ÇÖZÜM

f fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R}$ için sürekli olduğundan fonksiyonun en geniş tanım kümesi $\mathbb{R}$ olur. O hâlde fonksiyonu tanımsız yapan x değeri yoktur.
Buradan $\forall x \in \mathbb{R}$ için $x^2-ax+1 \neq 0$ olduğundan $\triangle < 0$ olur.
$\triangle = a^2-4\cdot 1\cdot 1 < 0$

a	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$\triangle = a^2-4$	$+$	○	$-$	○	$+$
			Çözüm		

Buradan $a \in (-2,\ 2)$ olur.

SIRA SİZDE

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+3}{x^2-25}, & x<1 \text{ ise} \\ 4, & x=1 \text{ ise} \\ \dfrac{x}{x^2-x-6}, & x>1 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş kümeyi bulunuz.

Görsel 5.4
Salih Zeki

Salih Zeki (1864-1921)

17. yy. matematikçileri Dünya üzerindeki veya Dünya'nın yakınındaki cisimlerin yanı sıra gezegen ve yıldızların hareketleriyle ilgili çalışmalarla yakından ilgiliydi. Hareket eden bir cismin süratinin ve bir eğrinin teğetinin bulunması limit kavramının esasını oluşturmuştur. Newton, Leibniz, Cauchy gibi matematikçiler limit ve süreklilik konusunda çalışmışlar ve bugün kullanılan tanımların birçoğunu yapmışlardır.

Ülkemizde ise bu alanda Salih Zeki'nin birçok makalesi ve 30 civarında kitabı bulunmaktadır. Bunlardan bir kısmı ilkokullar, ortaokullar ve liseler için yazdığı matematik, fizik ve gök bilimi ders kitaplarıdır. Diğer kitapları ise cebir, geometri ve fizik alanlarında üniversite ders kitaplarıdır.

Bunlardan başlıcaları Mizan-ı Tefekkür (mantık kitabı), Âsâr-ı Bâkiye (bilim tarihi kitabı) ve Kâmûs-ı Riyaziyât'tır (matematik bilimleri sözlüğü).

TANIM

$A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun.

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a) \Leftrightarrow$ f fonksiyonu sağdan süreklidir.

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a) \Leftrightarrow$ f fonksiyonu soldan süreklidir.

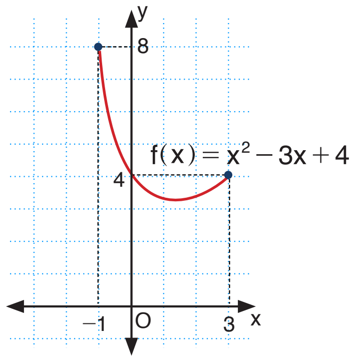
$[a, b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon aralığın iç noktalarında sürekli, a noktasında sağdan sürekli, b noktasında soldan sürekli ise f fonksiyonu $[a, b]$ de süreklidir.

ÖRNEK 35

$f:[-1, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 4$ fonksiyonunun $[-1, 3]$ aralığında sürekli olup olmadığını araştırınız.

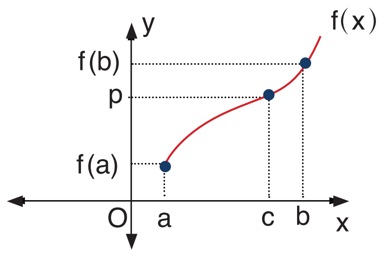
ÇÖZÜM

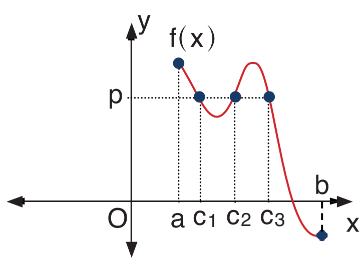
Verilen fonksiyonun grafiği yandaki gibidir. Grafikte de görüldüğü gibi $\forall x \in (-1, 3)$ için fonksiyon süreklidir. Bunun yanında $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) = 8$ ve $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = f(3) = 4$ olduğundan f fonksiyonu $[-1, 3]$ aralığında süreklidir.



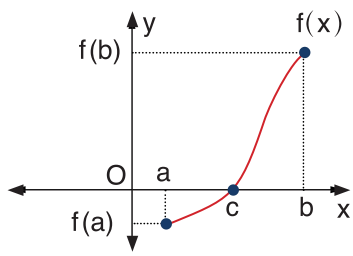
Ara Değer Teoremi

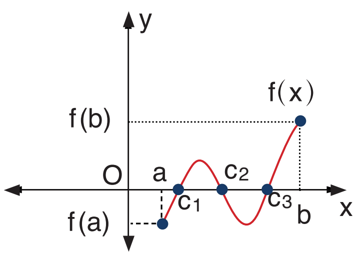
f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli olsun. p, $f(a)$ ve $f(b)$ arasında herhangi bir sayı ise $[a, b]$ aralığında $f(c) = p$ olacak şekilde en az bir c noktası vardır.





f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli olsun.
$f(a)$ ile $f(b)$ zıt işaretli ise a ile b arasında $f(c) = 0$ olacak şekilde en az bir c noktası vardır.





ÖRNEK 36

$f:[-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 4x + 1$ fonksiyonu veriliyor.

a) f fonksiyonunun $(0, 1)$ ve $(1, 2)$ aralıklarında en az bir köke sahip olduğunu gösteriniz.

b) $f(c) = 3$ olacak şekilde en az bir $c \in [-1, 2]$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

Polinom fonksiyonlar gerçek sayılarda sürekli fonksiyonlardır. O hâlde f fonksiyonu için ara değer teoremi uygulanabilir.

a) $f(x) = x^3 - 4x + 1$ fonksiyonunda

$f(0) = 1$

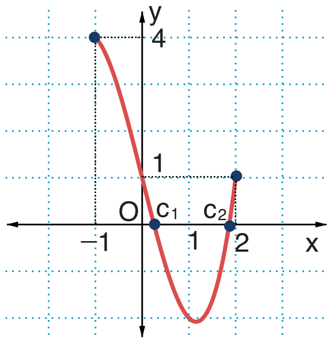
$f(1) = 1 - 4 + 1 = -2$ olur.

$f(0)$ ve $f(1)$ zıt işaretli olduğundan ara değer teoremine göre $f(c_1) = 0$ olacak şekilde en az bir $c_1 \in (0, 1)$ vardır.

Benzer şekilde

$f(1) = -2$

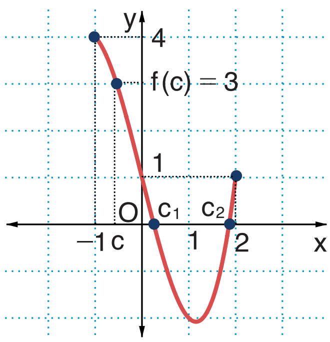
$f(2) = 2^3 - 4 \cdot 2 + 1 = 1$ olur.



$f(1)$ ve $f(2)$ zıt işaretli olduğundan $f(c_2) = 0$ olacak şekilde en az bir $c_2 \in (1, 2)$ vardır.

b) $f(-1) = (-1)^3 - 4 \cdot (-1) + 1 = 4$

$f(2) = 2^3 - 4 \cdot 2 + 1 = 1$ olur.



$f(2) < f(c) < f(-1)$

olduğundan ara değer teoremine göre $f(c) = 3$ olacak şekilde en az bir $c \in [-1, 2]$ vardır.

TEKNOLOJİ

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x^2-4}, & x \le 1 \text{ ise}\\[4pt] \dfrac{x-2}{x^2-9}, & x > 1 \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonunun süreksiz olduğu noktalar GeoGebra programı ile bulunacaktır.

Bilgisayarınızdan programı açıp "giriş" bölümüne

$f(x) =$ eğer $(x <= 1, (x+1)/(x^2-4), (x-2)/(x^2-9))$ yazarak f fonksiyonunu oluşturunuz.

a=2 Bir a sürgüsü oluşturup artış: 0.1 olarak belirleyiniz.

"Giriş" bölümüne

Giriş: $A = (a, f(a))$ — $A(x_1, f(x_1))$ noktasıdır.

Giriş: $b = f(a)$ — $b = f(x)$ noktasıdır.

Giriş: $c = \lim(f, a)$ — $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$

değerlerini yazınız.

Sürgüyü sağa ve sola hareket ettirerek fonksiyonunun sürekli olduğu noktalarda

$f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$

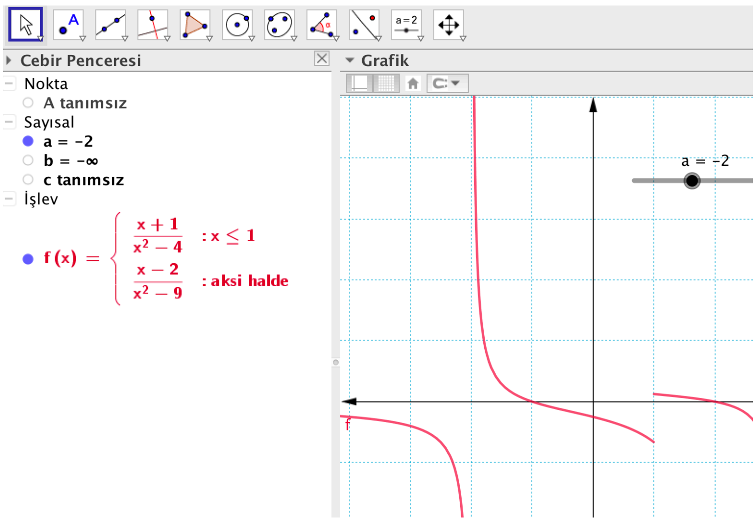
$b = c$

olduğunu test ediniz.

Sürgüyü $a = -2$ konumuna getirdiğinizde $x = -2$ noktasında $f(2) = -\infty$ ve $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ in tanımsız olduğunu, $b = -\infty$ ve c tanımsız değerlerini cebir penceresinden tespit ediniz.

Sürgüyü $a = 1$ konumuna getirdiğinizde $f(1) = -0,67$ ve $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ in tanımsız olduğunu $b = -0,67$ c tanımsız değerlerini cebir penceresinden tespit ediniz.

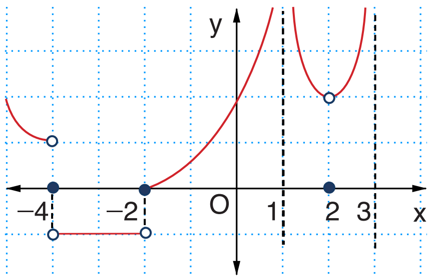
Sürgüyü $a = 3$ konumuna getirdiğinizde $f(3) = \infty$ ve $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ in tanımsız olduğunu $b = \infty$ ve c tanımsız değerlerini cebir penceresinden tespit ediniz.



Buradan fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaların apsisleri $x = -2$, $x = 1$ ve $x = 3$ olur.

ALIŞTIRMALAR

1.



Yukarıda grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş kümeyi bulunuz.

2. **Aşağıdaki fonksiyonların sürekli olduğu en geniş kümeyi bulunuz.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x^2 - 9}$

b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x + 3}}$

c) $f(x) = \dfrac{\sin 2x - 1}{2\cos x - 1}$

ç) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{x+1}, & x < 0 \text{ ise} \\ -3, & x = 0 \text{ ise} \\ \dfrac{x+1}{x-2}, & x > 0 \text{ ise} \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{|x-2|}, & x > 2 \text{ ise} \\ 3a + 1, & x = 2 \text{ ise} \\ 2x + b, & x < 2 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R}$ için sürekli ise $a + b$ kaçtır?

4. $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2 - (a+1) + a + 4}$

fonksiyonu sadece bir noktada sürekli değil **ise $a \in \mathbb{R}^+$ değeri kaçtır?**

5. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x+1}, & x < 2 \text{ ise} \\ \dfrac{x+1}{x+2}, & x \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu $[1, 3]$ aralığında sürekli midir?

6. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ **fonksiyonu veriliyor.**

a) $y = f(x)$ **fonksiyonunun** $(-1, 0)$, $(0, 2)$ ve $(2, 3)$ **aralıklarında birer kökü olduğunu gösteriniz.**

b) **Fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

c) **GeoGebra programında fonksiyonun grafiğini çizip program kullanmadan çizdiğiniz grafik ile karşılaştırınız.**

5.2. ANLIK DEĞİŞİM ORANI VE TÜREV

Bu Bölümde Neler Öğreneceksiniz?

- Türev kavramı
- Bir fonksiyonun bir noktada ve bir aralıkta türevlenebilirliği
- İki fonksiyonun toplamı, farkı, çarpımı ve bölümünün türevleri
- İki fonksiyonun bileşkesinin türevi
- Yüksek mertebeden türevler

Terimler ve Kavramlar

- Anlık değişim oranı
- Teğetin eğimi
- Türev
- Sağdan türev
- Soldan türev

Anlık Değişim Oranı

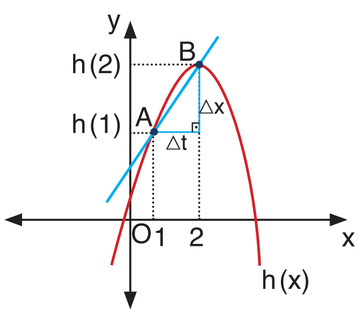
Bir futbolcu belli bir açıyla topa dikey yönlü hızı 20 m/sn. olacak şekilde vurmuştur. Topun t saniye sonraki yerden yüksekliği $h(t) = 20t - 5t^2$ fonksiyonu ile modellenmiştir. Örneğin topun birinci saniyedeki yerden yüksekliği $h(1) = 20 \cdot 1 - 5 \cdot 1^2 = 15$ m ve ikinci saniyedeki yerden yüksekliği $h(2) = 20 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2 = 20$ m olur.

Görsel 5.5: Futbolcu

$\triangle x$: Toplam yol
$\triangle t$: Toplam zaman
olmak üzere
topun birinci ve ikinci saniye aralığındaki ortalama dikey yönlü hızı

$V_{ort} = \dfrac{\triangle x}{\triangle t}$ ile bulunur.

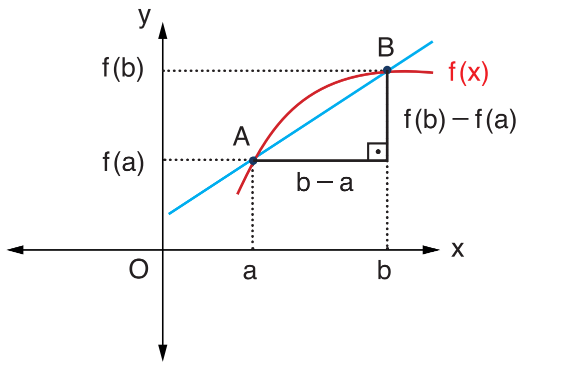
Buradan $V_{ort} = \dfrac{\triangle x}{\triangle t} = \dfrac{h(2) - h(1)}{2 - 1} = \dfrac{20 - 15}{1} = 5$ m/sn. olur.



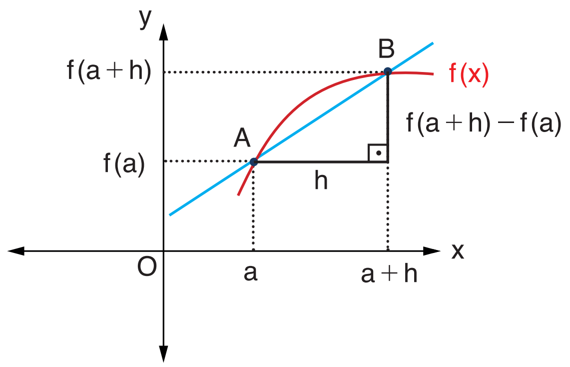
Topun $[1, 2]$ saniye aralığındaki ortalama hızı AB doğrusunun eğimi olur.

TANIM

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $x = a$ ve $x = b$ arasında f fonksiyonunun ortalama değişim oranı $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ olur.



Yukarıdaki grafikte verilen ortalama değişim oranı için $b = a + h$ alınsın.

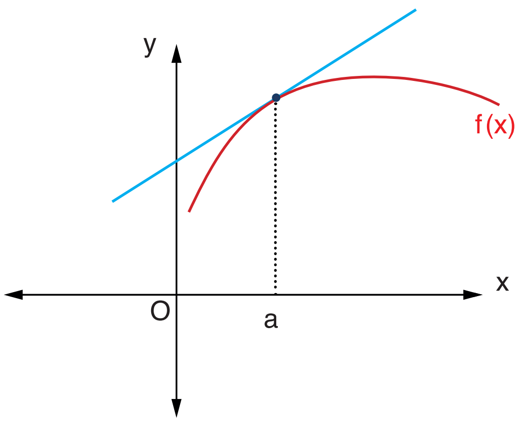


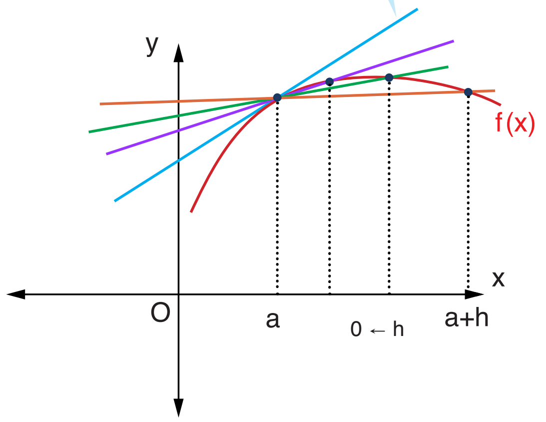
Bu durumda ortalama değişim oranı $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ olacaktır.

$h \to 0$ için ortalama değişim oranının limitine f fonksiyonunun A noktasındaki ani değişim oranı denir.

Ani değişim oranı $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ olur.

h → 0 için a noktasında f(x) fonksiyonuna teğet olan doğru elde edilir.





Ani değişim oranı A noktasındaki teğetin eğimidir. m_T, A noktasındaki teğetin eğimi olmak üzere $m_T = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ biçiminde bulunur.

ÖRNEK 1

$f(x) = x^2 - 1$ fonksiyonunun

a) $[2, 4]$ aralığındaki ortalama değişim oranını bulunuz.

b) $x = 2$ noktasındaki ani değişim oranını bulunuz.

ÇÖZÜM

a) $[2, 4]$ aralığındaki ortalama değişim oranı

$$\frac{f(4)-f(2)}{4-2} = \frac{(4^2-1)-(2^2-1)}{2} = \frac{15-3}{2} = 6$$ şeklinde bulunur.

b) $x = 2$ noktasındaki ani değişimin oranı aynı zamanda fonksiyonun $x = 2$ apsisli noktasındaki teğetinin eğimidir.

Buradan

$$\begin{aligned} m_T &= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2-1-(2^2-1)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4+4h+h^2-1-3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (4+h) = 4 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

TANIM

$f:[a, b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $x_0 \in (a, b)$ olsun.

Eğer $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ limiti varsa bu limite f fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi denir ve $f'(x_0)$ veya $\frac{d f(x_0)}{dx}$ ile gösterilir.

$y = f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki türevi o noktadaki teğetinin eğimine eşittir.

Bir f fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki teğetinin eğimi m_T olsun.

Bu durumda $m_T = f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ olur.

Bu limitte $x - x_0 = h$ dönüşümü yapılırsa $x = x_0 + h$ bulunur ve $x \to x_0$ iken $h \to 0$ olur.

Buna göre $m_T = f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ elde edilir.

ÖRNEK 2

$f(x) = x^2 - x$ fonksiyonunun $x = 3$ noktasındaki teğetinin eğimini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x)=x^2-x$ fonksiyonunun $x=3$ noktasındaki teğetinin eğimi m_T olsun.

I. Yol

$$m_T=f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+2)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3}(x+2)=5 \text{ bulunur.}$$

II. Yol

$$m_T=f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-(3+h)-6}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{9+6h+h^2-3-h-6}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+5h}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(h+5)=5 \text{ bulunur.}$$

Sağdan ve Soldan Türev

TANIM

$f:[a, b]\to\mathbb{R}$ ve $x_0\in(a, b)$ olsun.

$\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ limiti varsa bu limite f fonksiyonunun x_0 noktasındaki soldan türevi denir ve $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0^-)$ biçiminde gösterilir.

$\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ limiti varsa bu limite f fonksiyonunun x_0 noktasındaki sağdan türevi denir ve $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0^+)$ biçiminde gösterilir.

f fonksiyonu için $f'(x_0^-)=f'(x_0^+)=\ell$ ise f fonksiyonunun $x=x_0$ noktasında türevi vardır ve $f'(x_0)=\ell$ olur.

f fonksiyonu için $f'(x_0^-)\neq f'(x_0^+)$ ise f fonksiyonunun $x=x_0$ noktasında türevi yoktur denir.

ÖRNEK 3

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}4x-1, & x\le 1 \text{ ise}\\ x+2, & x>1 \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonu için $x=1$ noktasındaki türevinin olup olmadığını araştırınız.

ÇÖZÜM

$x=1$ noktasındaki türevinin olması için fonksiyonun bu noktadaki sağdan türevi soldan türevine eşit olmalıdır.

$$f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+2-3}{x-1}=1 \text{ olur.}$$

$$f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{4x-1-3}{x-1}=4 \text{ olur.}$$

Buradan $f'(1^+)\neq f'(1^-)$ olduğundan fonksiyonun $x=1$ noktasında türevi yoktur.

Bir Aralıkta Türevlenebilen Fonksiyonlar

$f:[a, b] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.
$\forall x \in (a, b)$ için f fonksiyonunun türevi varsa f fonksiyonu (a, b) aralığında türevlidir denir.

$y = f(x)$ fonksiyonu (a, b) aralığında türevli ise bu fonksiyonun türev fonksiyonu $f'(x)$ veya $\dfrac{df(x)}{dx}$ veya $\dfrac{dy}{dx}$ ile gösterilir.

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ olur.

ÖRNEK 4

Aşağıdaki fonksiyonların tanımlı oldukları aralıkta türevlerini bulunuz.

a) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 4$

c) $f:\mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

b) $f:[0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$

ÇÖZÜM

a)
$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - 4 - (x^2 - 4)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 4 - x^2 + 4}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x+h) = 2x$$

b)
$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

c)
$$\frac{d(f(x))}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{x+h-2} - \dfrac{1}{x-2}}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{x-2-(x+h-2)}{h(x+h-2)(x-2)}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{x-2-x-h+2}{h(x+h-2)(x-2)}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x+h-2)(x-2)} = -\frac{1}{(x-2)^2} \text{ bulunur.}$$

SIRA SİZDE

1. $f(x) = |x^2 - 4|$ fonksiyonu veriliyor.

Buna göre

a) f fonksiyonunun $x = 2$ apsisli noktada varsa türevini bulunuz.

b) f fonksiyonunun $x = 1$ apsisli noktada varsa türevini bulunuz.

2. Aşağıdaki fonksiyonların tanımlı oldukları aralıkta türevlerini bulunuz.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = 3x^2 - x$

b) $f: \mathbb{R} - \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 1}$

c) $f: [-3, +\infty] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+3}$

Michel Rolle (1652-1719)

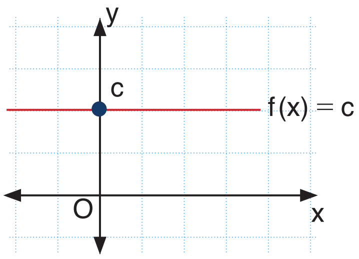
Fransız Matematikçi Michel Rolle (Mişel Rol) kendi adıyla anılan teoremin yazarıdır. Bu teorem onun 1690 tarihli
"Traite D'algebra" (Tua Deljebra) adlı eserinde bulunmaktadır.

Rolle Teoremi

$y = f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığının her noktasında sürekli ve (a, b) açık aralığının her noktasında türevlenebilir olsun. Bu durumda $f(a) = f(b)$ ise (a, b) aralığında $f'(c) = 0$ olacak şekilde en az bir c sayısı vardır.

Türev Alma Kuralları

Sabit Fonksiyonun Türevi



$f(x)=c$ sabit fonksiyonu x eksenine paralel olduğu için eğimi 0 olur.

$m_T=\dfrac{df(x)}{dx}=0$

$c\in\mathbb{R}$ olmak üzere $f(x)=c$ ise $f'(x)=0$ olur.

$f(x)=c$ ise

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}0=0 \text{ bulunur.}$$

Örneğin

$f(x)=3\Rightarrow f'(x)=0$

$f(x)=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow f'(x)=0$

$f(x)=e^2 \Rightarrow f'(x)=0$ olur.

$f(x)=x^n$ Fonksiyonunun Türevi

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$f(x)=x^n$ ise $f'(x)=n\cdot x^{n-1}$ olur.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h-x)[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+...+x^{n-1}]}{h}$$

n tane

$$=x^{n-1}+x^{n-1}+...+x^{n-1}=n\cdot x^{n-1} \text{ olur.}$$

Örneğin

$f(x)=x^3 \Rightarrow f'(x)=3x^2$

$f(x)=\dfrac{1}{x^4}=x^{-4} \Rightarrow f'(x)=-4x^{-4-1}=-4x^{-5}$

$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x)=\sqrt[7]{x^2}=x^{\frac{2}{7}} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2}{7}x^{\frac{2}{7}-1}=\dfrac{2}{7}x^{\frac{-5}{7}}=\dfrac{2}{7\sqrt[7]{x^5}}$ olur.

$f(x)=c\cdot x^n$ Fonksiyonunun Türevi

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{R}$ ve $c\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$f(x)=c\cdot x^n$ ise $f'(x)=c\cdot n\cdot x^{n-1}$ olur.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c\cdot(x+h)^n-c\cdot x^n}{h}$$
$$=c\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$
$$=c\cdot n\cdot x^{n-1}$$

Örneğin

$f(x)=3x^5\Rightarrow f'(x)=3\cdot 5\cdot x^{5-1}=15x^4$

$f(x)=\dfrac{2}{x^3}=2\cdot x^{-3}\Rightarrow f'(x)=2\cdot(-3)\cdot x^{-3-1}=-6x^{-4}$

$f(x)=4\sqrt[5]{x}=4\cdot x^{\frac{1}{5}}\Rightarrow f'(x)=4\cdot\dfrac{1}{5}\cdot x^{\frac{1}{5}-1}=\dfrac{4}{5}x^{\frac{-4}{5}}$ olur.

Trigonometrik Fonksiyonların Türevi

a) $f(x)=\sin x$ ise $f'(x)=\cos x$ olur.

$f(x)=\sin x$ ise

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cdot\cos h+\cos x\cdot\sin h-\sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cdot(\cos h-1)+\cos x\cdot\sin h}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\sin x\cdot\frac{\cos h-1}{h}\right)+\lim_{h\to 0}\left(\cos x\cdot\frac{\sin h}{h}\right)\\
&= \sin x\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}}_{0}+\cos x\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}}_{1}\\
&= \cos x \text{ bulunur.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{1-2\sin^2\frac{h}{2}-1}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\frac{h}{2}}{h}\cdot\sin\frac{h}{2}\\
&= -2\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{h}}_{\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{h}{2}}_{0}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

b) $f(x)=\cos x$ ise $f'(x)=-\sin x$ olur.

$f(x)=\cos x$ ise

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cdot\cos h-\sin x\cdot\sin h-\cos x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cdot(\cos h-1)-\sin x\cdot\sin h}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\cos x\cdot\left(\frac{\cos h-1}{h}\right)\right)-\lim_{h\to 0}\left(\sin x\cdot\frac{\sin h}{h}\right)\\
&= \cos x\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}}_{0}-\sin x\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}}_{1}\\
&= -\sin x \text{ bulunur.}
\end{aligned}
$$

Üstel Fonksiyonların Türevi

$a\neq 1$ ve $a\in\mathbb{R}^+$ olmak üzere

$f(x)=a^x$ ise $f'(x)=a^x\cdot\ln a$ olur.

$f(x)=e^x$ ise $f'(x)=e^x$ olur.

Örneğin

$f(x)=3^x \Rightarrow f'(x)=3^x\cdot\ln 3$

$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow f'(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x\cdot\ln\frac{1}{2}$

$f(x)=5e^x \Rightarrow f'(x)=5e^x$ olur.

Logaritma Fonksiyonunun Türevi

$a \neq 1$ ve $a \in \mathbb{R}^{+}$ olmak üzere

$f(x) = \log_a x$ ise $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$

$f(x) = \ln x$ ise $f'(x) = \frac{1}{x}$ olur.

Örneğin

$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}\log_3 e$

$f(x) = 5\ln x \Rightarrow f'(x) = 5\frac{1}{x}$ olur.

ÖRNEK 5

Aşağıdaki fonksiyonların $\frac{dy}{dx}$ türevlerini hesaplayınız.

a) $y = -4$

b) $y = 3x^5$

c) $y = 3\sqrt{x}$

ç) $y = 4\sqrt[3]{x}$

d) $y = 5\sin x$

e) $y = \frac{\cos x}{2}$

f) $y = 2^{x+3}$

g) $y = \log_5 x^2$

ğ) $y = \ln x^3$

ÇÖZÜM

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{d(-4)}{dx} = 0$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{d(3x^5)}{dx} = 3\frac{d(x^5)}{dx} = 3 \cdot 5 \cdot x^{5-1} = 15x^4$

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{d(3\sqrt{x})}{dx} = 3\frac{d(\sqrt{x})}{dx} = 3\frac{d\left(x^{\frac{1}{2}}\right)}{dx}$

$= 3 \cdot \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{3}{2\sqrt{x}}$

ç) $\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(4x^{\frac{1}{3}}\right)}{dx} = 4\frac{d\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}{dx} = 4 \cdot \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

d) $\frac{dy}{dx} = \frac{d(5\sin x)}{dx} = 5\frac{d(\sin x)}{dx} = 5\cos x$

e) $\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\frac{\cos x}{2}\right)}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d(\cos x)}{dx} = -\frac{1}{2}\sin x$

f) $\frac{dy}{dx} = \frac{d(2^{x+3})}{dx} = \frac{d(2^x \cdot 2^3)}{dx} = 8\frac{d(2^x)}{dx} = 8 \cdot 2^x \cdot \ln 2$

g) $\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\log_5 x^2\right)}{dx} = \frac{d(2\log_5 x)}{dx} = 2\frac{d(\log_5 x)}{dx} = 2\frac{1}{x}\log_5 e$

ğ) $\frac{dy}{dx} = \frac{d(\ln x^3)}{dx} = \frac{d(3\ln x)}{dx} = 3\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{3}{x}$ bulunur.

Türev ve Süreklilik ilişkisi

TEOREM
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $x_o\in(a,b)$ olsun. f fonksiyonu $x=x_o$ noktasında türevli ise aynı noktada süreklidir.

Başka bir ifadeyle $y=f(x)$ fonksiyonu $x=a$ da sürekli değil ise fonksiyonun bu noktada türevi yoktur.

Yukarıdaki teoremin tersi her zaman doğru değildir. Bir fonksiyon bir noktada sürekli olup türevi olmayabilir.

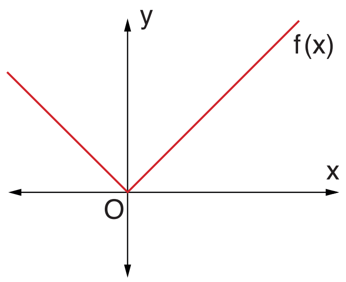
ÖRNEK 6

$f(x)=|x|$ fonksiyonunun hangi noktada türevi yoktur?

ÇÖZÜM

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \text{ ise} \\ -x, & x<0 \text{ ise}\end{cases}$$

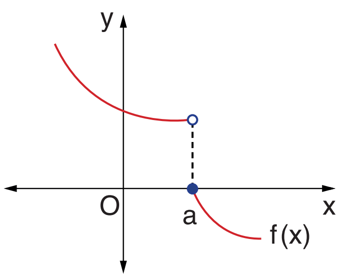
f fonksiyonu $x=0$ noktasında süreklidir.
Ancak
$f'(0^+)=1$
$f'(0^-)=-1$
olduğundan $f'(0^+)\neq f'(0^-)$ olur. Dolayısı ile fonksiyonun $x=0$ noktasında türevi yoktur. $f(x)=|x|$ fonksiyonunun grafiğine $x=0$ noktasından fonksiyona birden fazla teğet çizilebilir. Fonksiyon $x=0$ noktasında kırılmaktadır. Fonksiyonların kırılma noktalarında türevi yoktur.



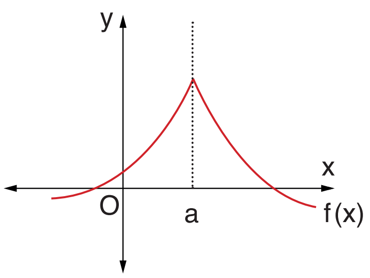
ÖRNEK 7

Aşağıda verilen grafiklerde $x=a$ noktalarında fonksiyonların sürekliliğini ve türevlenebilirliğini araştırınız.

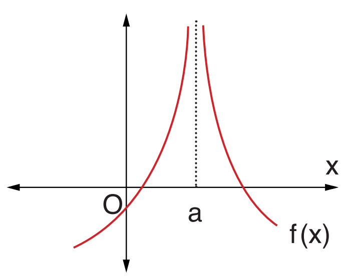
a)



b)



c)



ÇÖZÜM

a) $f(x)$ fonksiyonu $x = a$ noktasında sürekli değildir. Fonksiyonun bu noktada türevi yoktur.

b) $f(x)$ fonksiyonu $x = a$ noktasında süreklidir. Ancak bu noktada fonksiyon kırılmaktadır. $x = a$ noktasından fonksiyona birden fazla teğet çizilebileceğinden fonksiyonun bu noktada türevi yoktur.

c) $f(x)$ fonksiyonu $x = a$ noktasında tanımlı değildir. Dolayısı ile fonksiyon $x = a$ noktasında sürekli değildir. Fonksiyonun bu noktada türevi yoktur.

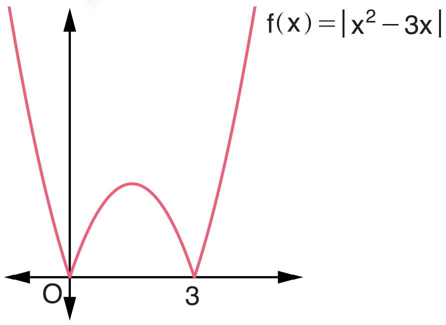
ÖRNEK 8

$f(x) = |x^2 - 3x|$ fonksiyonu veriliyor.

a) f fonksiyonu $x = 3$ noktasında sürekli midir?

b) f fonksiyonu $x = 3$ noktasında türevli midir?

ÇÖZÜM



f fonksiyonu parçalı fonksiyon biçiminde yazılırsa

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x < 0 \text{ ise} \\ -x^2 + 3x, & 0 \le x \le 3 \text{ ise} \\ x^2 - 3x, & x > 3 \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

a) $\lim\limits_{x \to 3^+} (x^2 - 3x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (-x^2 + 3x) = f(x) = 0$ olduğundan f fonksiyonu $x = 3$ noktasında süreklidir.

b)
$$f'(3^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{(3+h)^2 - 3(3+h) - (3^2 - 3 \cdot 3)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{9 + 6h + h^2 - 9 - 3h - 0}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2 + 3h}{h} = \lim_{h \to 0^+} (h + 3) = 3$$
$$f'(3^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{-(3+h)^2 + 3 \cdot (3+h) - (-3^2 + 3 \cdot 3)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{-9 - 6h - h^2 + 9 + 3h - 0}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{-h^2 - 3h}{h} = \lim_{h \to 0^-} (-h - 3) = -3$$

Buradan $f'(3^+) \ne f'(3^-)$ olduğundan fonksiyon $x = 3$ noktasında türevli değildir.

ÖRNEK 9

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+x-1, & x>1 \text{ ise} \\ bx+3, & x\le 1 \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R}$ için türevli ise a ve b değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

f fonksiyonu türevli olabilmesi için öncelikle sürekli olmalıdır. ax^2+x-1 ve $bx+3$ birer polinom fonksiyon olduğu için bu fonksiyonlar her noktada sürekli ve türevlidir. f fonksiyonu her noktada sürekli olduğundan $x=1$ noktasında da sürekli olmalıdır.

Buradan

$$\lim_{x\to 1^+}(ax^2+x-1)=\lim_{x\to 1^-}(bx+3)=f(1)$$

$$a+1-1=b+3$$

$$a=b+3 \quad \text{bulunur.}$$

İkinci olarak f fonksiyonunun türevli olabilmesi için her noktada sağdan türevinin soldan türevine eşit olması gerekir. Buradan $x=1$ kritik noktası için $f'(1^+)=f'(1^-)$ olmalıdır.

$$f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax^2+x-1-(b+3)}{x-1}$$

$b=a-3$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax^2+x-1-b-3}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax^2+x-4-(a-3)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{a(x^2-1)+x-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)[a(x+1)+1]}{x-1}$$

$=2a+1$ bulunur.

$$f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{bx+3-(b+3)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{bx+3-b-3}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{b(x-1)}{x-1}$$

$=b$ bulunur.

$f'(1^+)=f'(1^-)$ olduğundan $2a+1=b$ elde edilir.

Buradan $a=b+3$ olduğundan

$$2(b+3)+1=b$$

$$2b+7=b$$

$$b=-7$$

$$a=-7+3$$

$=-4$ elde edilir.

İki Fonksiyonun Toplamının ve Farkının Türevi

TEOREM

f ve g, $A \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı ve $\forall x \in A$ noktasında türevlenebilen fonksiyonlar ise $f+g$ fonksiyonu da $\forall x \in A$ noktasında türevlenebilir ve $[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$ olur.

İspat

$$[f(x)+g(x)]' = \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
$= f'(x)+g'(x)$ bulunur.

TEOREM

f ve g x noktasında türevlenebilen fonksiyonlar ve $a, b \in \mathbb{R}$ ise $[a\cdot f(x)+b\cdot g(x)]' = a\cdot f'(x)+b\cdot g'(x)$ olur.

ÖRNEK 10

Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{2}+3x^4-\cos x$

c) $f(x)=\frac{\cos x}{3}-2e^x+\log_3 x$

b) $f(x)=2\sqrt{x}+4\sqrt[3]{x}-\frac{5}{x^4}$

ÇÖZÜM

a) $$\frac{df(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+3x^4-\cos x\right)$$
$$=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)+\frac{d}{dx}(3x^4)+\frac{d}{dx}(-\cos x)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+3\cdot 4x^3+\sin x=\frac{1}{4\sqrt{x}}+12x^3+\sin x$$

b) $$\frac{df(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(2\sqrt{x}+4\sqrt[3]{x}-\frac{5}{x^4}\right)$$
$$=\frac{d}{dx}\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{d}{dx}\left(4x^{\frac{1}{3}}\right)+\frac{d}{dx}(-5x^{-4})$$
$$=2\cdot\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}+4\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-5\cdot(-4)\cdot x^{-5}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+20\cdot\frac{1}{x^5}$$

c) $$\frac{df(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{3}\right)+\frac{d}{dx}(-2e^x)+\frac{d}{dx}(\log_3 x)$$
$=-\frac{1}{3}\sin x-2e^x+\frac{1}{x}\log_3 e$ bulunur.

İki Fonksiyonun Çarpımının Türevi

TEOREM
f ve g, $A \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı ve $\forall x \in A$ noktasında türevlenebilen fonksiyonlar ise $f \cdot g$ fonksiyonu da x noktasında türevlenebilir ve $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ olur.

İspat

$$\begin{aligned}(f \cdot g)'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \\ &= f'(x) \cdot \lim_{h \to 0} g(x+h) + f(x) \cdot g'(x) \\ &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

$f(x) \cdot g(x+h)$ eklenip çıkarıldı.

$g(x)$ türevlenebilir olduğundan süreklidir. $\lim_{h \to 0} g(x+h) = g(x)$ olur.

ÖRNEK 11

Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a) $g(x) = x^2 \cdot e^x - \sin x \cdot \ln x$ **b)** $f(x) = (x^4 - 4x + 1) \cdot \left(3\sqrt{x} - \frac{5}{x^4}\right)$

ÇÖZÜM

a) $g(x) = (x^2)' \cdot e^x + (x^2)(e^x)' - ((\sin x)' \cdot \ln x + \sin x \cdot (\ln x)')$
$= 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x - \cos x \cdot \ln x - \sin x \cdot \frac{1}{x}$ bulunur.

b) $f(x) = (x^4 - 4x + 1)' \cdot \left(3\sqrt{x} - \frac{5}{x^4}\right) + (x^4 - 4x + 1) \cdot \left(3\sqrt{x} - \frac{5}{x^4}\right)'$
$= (4x^3 - 4)\left(3\sqrt{x} - \frac{5}{x^4}\right) + (x^4 - 4x + 1) \cdot \left(\frac{3}{2\sqrt{x}} + 20x^{-5}\right)$

ÖRNEK 12

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot \ldots \cdot (x-10)$ olduğuna göre $f'(4)$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$f(x) = (x-4)[(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-5) \cdot \ldots \cdot (x-10)]$ biçiminde yazılırsa
$f'(x) = (x-4)'[(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-5) \cdot \ldots \cdot (x-10)] +$
$(x-4)[(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-5) \cdot \ldots \cdot (x-10)]'$
olur. Buradan $f'(4) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot \ldots \cdot (-6) + 0 = 6 \cdot 6!$ bulunur.

İki Fonksiyonun Bölümünün Türevi

TEOREM

f ve g, $A \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, $\forall x \in A$ noktasında türevlenebilen fonksiyonlar ve $g(x) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$ fonksiyonu da $\forall x \in A$ noktasında türevlidir ve $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - g'(x)\cdot f(x)}{[g(x)]^2}$ olur.

İspat

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h) - \frac{f}{g}(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x+h)}{h\cdot g(x+h)\cdot g(x)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x+h)}{h\cdot g(x)\cdot g(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{g(x)\cdot g(x+h)}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x) - f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{g^2(x)}\left(f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)\right) \text{ elde edilir.}$$

$f(x)\cdot g(x)$ eklenip çıkarıldı.

ÖRNEK 13

Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a) $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 5}{x^4 - 1}$

b) $g(x) = \tan x$

c) $h(x) = \cot x$

ç) $m(x) = \sec x$

d) $n(x) = \operatorname{cosec} x$

ÇÖZÜM

a) $$f'(x) = \frac{(x^3 - 2x + 5)'\cdot(x^4 - 1) - (x^4 - 1)'\cdot(x^3 - 2x + 5)}{(x^4 - 1)^2}$$

$$= \frac{(3x^2 - 2)\cdot(x^4 - 1) - 4x^3(x^3 - 2x + 5)}{(x^4 - 1)^2}$$

$$= \frac{3x^6 - 3x^2 - 2x^4 + 2 - 4x^6 + 8x^4 - 20x^3}{(x^4 - 1)^2}$$

$$= \frac{-x^6 + 6x^4 - 20x^3 - 3x^2 + 2}{(x^4 - 1)^2}$$

b) $g'(x)=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'$

$$=\frac{(\sin x)'\cdot\cos x-(\cos x)'\cdot\sin x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$=1+\tan^2 x$$

$$=1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$\tan^2 x=\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$ yazılarak düzenlenir.

$$=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

c) $h'(x)=\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)'$

$$=\frac{(\cos x)'\cdot\sin x-(\sin x)'\cdot\cos x}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{-\sin x\cdot\sin x-\cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x}$$

$$=-\left(\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)$$

$$=-(1+\cot^2 x)$$

$$=-\left(1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)$$

$\cot^2 x=\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$ yazılarak düzenlenir.

$$=-\left(\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)$$

$$=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$=-\text{cosec}^2 x$$

ç) $m'(x)=\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)'$

$$=\frac{1'\cos x-(\cos x)'\cdot 1}{(\cos x)^2}$$

$$=\frac{0\cdot\cos x-(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ bulunur.

d) $n'(x)=\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)'=\dfrac{1'\sin x-(\sin x)'\cdot 1}{(\sin x)^2}$

$$=\frac{0\cdot\sin x-\cos x}{\sin^2 x}$$

$=-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$ bulunur.

SONUÇ

$(\tan x)'=1+\tan^2 x$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$=\sec^2 x$$

$(\cot x)'=-(1+\cot^2 x)$

$$=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$=-\text{cosec}^2 x$$

Bileşke Fonksiyonunun Türevi

TEOREM

$f(x)$ fonksiyonu x noktasında türevli, $g(x)$ fonksiyonu $f(x)$ noktasında türevli ise $(gof)(x)$ fonksiyonu x noktasında türevlidir ve $(gof)'(x) = g(f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ olur.

$y = f(u)$
$u = g(x)$ olsun.

$\dfrac{dy}{dx}$ türevi $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ biçiminde yazılır. Bu kurala zincir kuralı denir.

ÖRNEK 14

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ ve $g(x) = x^2 + x + 1$ olduğuna göre $(fog)'(2)$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$g'(x) = 2x + 1$
$g'(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ ve $g(2) = 2^2 + 2 + 1 = 7$
$f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$
$f'(7) = 3 \cdot 7^2 - 8 \cdot 7 + 5 = 96$ olur.

Bulunan değerler yerine yazılırsa

$$(fog)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$
$$\begin{aligned}(fog)'(2) &= f'(g(2)) \cdot g'(2)\\ &= f'(7) \cdot 5\\ &= 96 \cdot 5\\ &= 480 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK 15

$f(x^3 - x) = x^2 + 3x + 1$ ise $f'(24)$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

Eşitliğin her iki tarafının türevi alınırsa

$$[f(x^3 - x)]' = (x^2 + 3x + 1)'$$

$f'(x^3 - x) \cdot (3x^2 - 1) = 2x + 3$ olur.

$x^3 - x = 24$ denkleminin bir kökü $x = 3$ olur.

$x = 3$ ise $f'(3^3 - 3) \cdot (3 \cdot 3^2 - 1) = 2 \cdot 3 + 3$

$$f'(24) \cdot 26 = 9$$
$$f'(24) = \frac{9}{26} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 16

Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a) $f(x)=(x^3-x+1)^4$

b) $g(x)=\sqrt{x^2-x+1}$

c) $h(x)=\sin(\sqrt{x})$

ç) $k(x)=3^{x^2-x}$

d) $m(x)=\log_2(x^2+1)$

e) $n(x)=\ln(x^4+x^2+1)$

f) $r(x)=\cos^4(\sqrt{x^2+x+1})$

g) $s(x)=\ln(\tan(3x))$

ÇÖZÜM

a) $u(x)$ türevlenebilen bir fonksiyon olsun. $n\in\mathbb{R}$ olmak üzere $(u^n)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$ olur.

$u=x^3-x+1$ olsun.

$$f'(x)=(u^4)'$$
$$=4u^3\cdot u'$$
$$=4\cdot(x^3-x+1)^3\cdot(3x^2-1)$$

b) $u(x)$ türevlenebilen bir fonksiyon olsun. $n\in\mathbb{R}$ olmak üzere $(u^n)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$ olur.

$u=x^2-x+1$ olsun

$$g'(x)=(\sqrt{u})'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x^2-x+1}}\cdot(2x-1)$$

c) $u=\sqrt{x}$ olsun.

$$h(x)=\sin u$$
$$h'(x)=(\cos u)\cdot u'$$
$$h'(x)=(\cos\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ç) $u=x^2-x$ olsun.

$$k'(x)=(3^u)'=3^u\cdot\ln 3\cdot u'$$
$$=3^{x^2-x}\cdot(2x-1)\cdot\ln 3$$

d) $u=x^2+1$ olsun.

$$m'(x)=(\log_2 u)'=\frac{1}{u}\cdot\log_2 e\cdot u'$$
$$=\frac{1}{x^2+1}\cdot(\log_2 e)\cdot(2x)$$
$$=\frac{2x}{x^2+1}\cdot\log_2 e \text{ olur.}$$

e) $u=x^4+x^2+1$ olsun.

$$n'(x)=(\ln u)'=\frac{u'}{u}$$
$$=\frac{4x^3+2x}{x^4+x^2+1} \text{ olur.}$$

f) $u(x)$ türevlenebilen bir fonksiyon olsun. $n\in\mathbb{R}$ olmak üzere $(u^n)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$ olur.

$u=\sqrt{x^2+x+1}$ olsun.

$$r'(x)=(\cos^4 u)'=4\cos^3 u\cdot(-\sin u)\cdot u'$$
$$=4\cdot\left(\cos^3\sqrt{x^2+x+1}\right)\cdot\left(-\sin\sqrt{x^2+x+1}\right)\cdot\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

g) $u=\tan 3x$ olsun.

$$s'(x)=(\ln u)'=\frac{u'}{u}$$
$$=\frac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{\tan 3x}$$
$$=\frac{3}{\cos^2 3x\cdot\tan 3x} \text{ olur.}$$

ÖRNEK 17

$y = t^3 - t^2 + t - 1$
$t = 4x - 3$

biçiminde verilen $y = f(x)$ fonksiyonu için $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin $x = 1$ ve $x = 2$ için değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$
$$= (3t^2 - 2t + 1) \cdot 4 \text{ olur.}$$

$x = 1 \Rightarrow t = 4 \cdot 1 - 3 = 1$

$$f'(1) = (3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1) \cdot 4$$
$$= 2 \cdot 4$$
$$= 8 \text{ bulunur.}$$

$x = 2 \Rightarrow t = 4 \cdot 2 - 3 = 5$

$$f'(2) = (3 \cdot 5^2 - 2 \cdot 5 + 1) \cdot 4$$
$$= 66 \cdot 4$$
$$= 264 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 18

Gerçek sayılar kümesinde tanımlı ve türevlenebilir bir f fonksiyonu için $f(1) = f'(1) = 2$ ve $f'(2) = -3$ olduğuna göre $g(x) = f(x^2 \cdot f(x))$ ile tanımlanan g fonksiyonu için $g'(1)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$g(x) = f(x^2 \cdot f(x))$$
$$g'(x) = f'(x^2 \cdot f(x)) \cdot [2x \cdot f(x) + x^2 \cdot f'(x)]$$
$$g'(1) = f'(1^2 \cdot f(1)) \cdot [2 \cdot 1 \cdot f(1) + 1^2 \cdot f'(1)]$$
$$= f'(1 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 + 1 \cdot 2)$$
$$= f'(2) \cdot (6)$$
$$= (-3) \cdot 6$$
$$= -18 \text{ olarak bulunur.}$$

Yüksek Mertebeden Türevler

$y = f(x)$ fonksiyonunda $y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$ türevine $f(x)$ in türevi veya $f(x)$ in birinci mertebeden türevi denir.

Eğer $y' = f'(x)$ fonksiyonu da türevlenebilirse

$$(y')' = y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = f''(x)$$

türevine $f(x)$ in ikinci mertebeden türevi denir.

Benzer şekilde

$f(x)$ in üçüncü mertebeden türevi $y''' = \dfrac{d^3y}{dx^3}$

$f(x)$ in dördüncü mertebeden türevi $y^{(4)} = \dfrac{d^4y}{dx^4}$

$\vdots$

$f(x)$ in n. mertebeden türevi $y^{(n)} = \dfrac{d^ny}{dx^n}$ biçiminde olur.

ÖRNEK 19

$f(x) = x^4 - 3x^2 + 5x + 1$ fonksiyonu için $\dfrac{d^4f(x)}{dx^4}$ türevini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f'(x) = 4x^3 - 6x + 5$

$f''(x) = 12x^2 - 6$

$f'''(x) = 24x \Rightarrow f^4(x) = 24$ bulunur.

ÖRNEK 20

$f(x) = \dfrac{1}{3x-2}$ fonksiyonu için $\dfrac{d^{10}f(x)}{dx^{10}}$ türevini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x) = (3x-2)^{-1}$

$f'(x) = (-1)(3x-2)^{-2} \cdot 3$

$f''(x) = (-1)(-2)(3x-2)^{-3} \cdot 3 \cdot 3$

$f'''(x) = (-1)(-2)(-3)(3x-2)^{-4} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

$\vdots$

$f^{(10)}(x) = (-1)(-2)...(-9)(3x-2)^{-11} \cdot 3^{10}$

$= \dfrac{-9! \cdot 3^{10}}{(3x-2)^{11}}$ bulunur.

ÖRNEK 21

$f(x) = \sin(2x+1)$ fonksiyonu için $\dfrac{d^{42}f(x)}{dx^{42}}$ türevini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f'(x) = \cos(2x+1) \cdot 2$

$f''(x) = -\sin(2x+1) \cdot 2^2$

$f'''(x) = -\cos(2x+1) \cdot 2^3$

$f^4(x) = \sin(2x+1) \cdot 2^4$

$f^5(x) = \cos(2x+1) \cdot 2^5$

$\vdots$

Her 4 türevde tekrar $\sin(2x+1)$ bulunur.

Bu durumda 42. türevde $-\sin(2x+1)$ ifadesi bulunur.

$f^{(42)}(x) = -\sin(2x+1) \cdot 2^{42}$ olur.

SIRA SİZDE

1. Aşağıda verilen fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a) $y = \dfrac{x^3 - x}{x^2 + 1}$ **b)** $y = (x^3 - x)^6$ **c)** $y = \sqrt[5]{(2x^3 + 1)^2}$

2. Aşağıda verilen fonksiyonların tanımlı olduğu değerler için türevlerini bulunuz.

a) $y = \ln(4x^2 - x)$ **b)** $y = 3^{(x^4 - 2x^2)}$ **c)** $y = 4\sin^3(x^2 + 1)$

3. $f(3x^2 - 2x) = 2x^4 + x^2$ fonksiyonu için $f'(1)$ değerini bulunuz.

4. $f(x) = 2x^2 + 3$
$g(x) = x^2 + 1$

olduğuna göre $(fog)'(1)$ değerini bulunuz.

ALIŞTIRMALAR

1. **Aşağıdaki fonksiyonların $x = 2$ apsisli noktalarındaki teğetlerinin eğimlerini bulunuz.**

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = xe^x$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln(x^2 + 3)$

c) $f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$

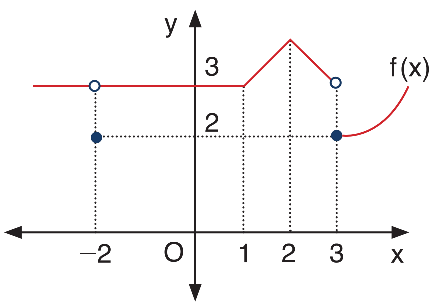
2. **Aşağıdaki fonksiyonların varsa $x = 0$ apsisli noktalarında türevini bulunuz.**

a) $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1, & x < 0 \text{ ise} \\ x^2 - 1, & x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \text{ ise} \\ x^2, & x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$

c) $f(x) = |x^2 - 4x|$

3.



Yukarıdaki grafikte $f(x)$ fonksiyonunun türevi olmayan noktalarının apsislerini bulunuz.

4. **Aşağıdaki fonksiyonların tanımlı oldukları aralıklarda türevini bulunuz.**

a) $f(x) = (x^2 - x)e^x$

b) $f(x) = x \cdot \cos x + x^2 \cdot \ln x$

c) $f(x) = \dfrac{x + \cos x}{\sin x + 1}$

ç) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

5. **Aşağıdaki fonksiyonların türevini bulunuz.**

a) $f(x) = \sin(x^3 - 1)$

b) $f(x) = \tan\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)$

c) $f(x) = e^{\cos x}$

ç) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$

d) $f(x) = \cos^3\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}\right)$

6. $f(f(x) + 3x + 1) = g^2(2x) + x^2$ **ve** $f'(0) = f'(1) = 4$ **ise** $g(0)$ **kaçtır?**

7. $f(x) = (2x - 1)^6$ ve $g(x) = x^3 - 4x^2 + 1$ **olduğuna göre** $(gof)'(1)$ **değeri kaçtır?**

8. $y = t^3 + t^2 + t + 1$

$t = 3x - 2$

olduğuna göre

$\dfrac{dy}{dx}$ **ifadesinin** $x = 1$ **için değeri kaçtır?**

9) $f(x) = x\cos x$ olduğuna göre

$\dfrac{d^{15}f(x)}{dx^{15}}$ **in türevini bulunuz.**

5.3. TÜREVİN UYGULAMALARI

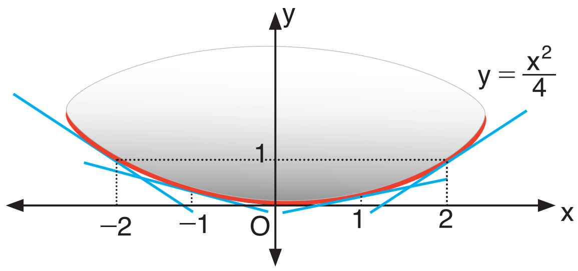
Bu Bölümde Neler Öğreneceksiniz?

- Bir fonksiyonun artan veya azalan olduğu aralıkları türev yardımı ile bulma
- Bir fonksiyonun ekstremum noktalarını türev yardımı ile bulma
- Bir fonksiyonun dönüm noktasını türev yardımı ile bulma
- Türev yardımı ile fonksiyonların grafiklerini çizme
- Maksimum ve minimum problemlerini türev kullanarak çözme

Terimler ve Kavramlar

- Kritik nokta
- Ekstremum nokta
- Yerel maksimum ve minimum nokta
- Mutlak maksimum ve minimum nokta
- Dönüm (büküm) noktası
- İç bükey
- Dış bükey

Artan ve Azalan Fonksiyonlar



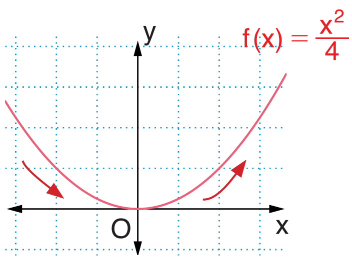
Yukarıdaki biçimde verilen parabolik bir uydu antenine $x = x_0$ apsisli noktalardan çizilen teğetlerin eğimi fonksiyonun bu noktadaki türevidir.

$f'(x) = \frac{2x}{4} = \frac{x}{2} \Rightarrow m_T = f'(x_0) = \frac{x_0}{2}$ olur.

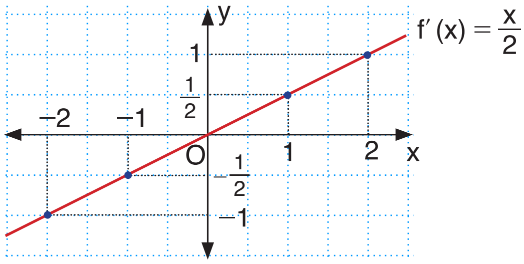
Aşağıdaki tabloda farklı $x = x_0$ apsisli noktalarda fonksiyonun aldığı değerlerle çizilen teğetlerin eğimleri bulunmaktadır.

x_0	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f(x_0) = \frac{x_0^2}{4}$		$1 \searrow$	$\frac{1}{4} \searrow$	$0 \nearrow$	$\frac{1}{4} \nearrow$	1	
$m_T = f'(x_0) = \frac{x_0}{2}$		-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	

Tabloda görüldüğü gibi $x = -2$ ve $x = -1$ apsisli noktalarda teğetin eğimi negatif, $x = 2$ ve $x = 1$ apsisli noktalarda teğetin eğimi pozitiftir. $x = 0$ noktasında ise teğetin eğimi 0 bulunur.



$f(x) = \frac{x^2}{4}$ fonksiyonu $(-\infty, 0)$ aralığında azalan, $(0, \infty)$ aralığında ise artan bir fonksiyondur.



$f(x)=\frac{x^2}{4}$ fonksiyonunun türevi $f'(x)=\frac{x}{2}$ fonksiyonu, $(-\infty, 0)$ aralığında negatif değer alır. $(0, \infty)$ aralığında pozitif değer alır.

Bir fonksiyonun bir noktadaki türevinin bilinmesi o nokta civarında fonksiyonun nasıl davrandığı hakkında bilgi verir.

TEOREM
f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığının her noktasında türevli olsun. Her $x \in (a, b)$ için $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında artan, $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında azalandır.

ÖRNEK 1

$f(x)=x^3+3x^2$ fonksiyonunun artan veya azalan olduğu aralıkları bulunuz.

ÇÖZÜM

f fonksiyonu $\mathbb{R}$ de sürekli ve her noktada türevli bir fonksiyondur.
Bu durumda
$f'(x) > 0$ ise f artan,
$f'(x) < 0$ ise f azalandır.
$f'(x) = 3x^2+6x$ olur.
$3x^2+6x=0$
$3x(x+2)=0$
$x_1=0$ veya $x_2=-2$ bulunur.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f′ (x)		+	o	−	o	+	
f (x)		Artan ↗		Azalan ↘		Artan ↗	

Buradan f fonksiyonunun artan olduğu aralık $[-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$, azalan olduğu aralık $[-2, 0]$ olur.

ÖRNEK 2

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3-4ax^2+12x+5$

fonksiyonunun daima artan bir fonksiyon olması için a nın değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

f fonksiyonu daima artan bir fonksiyon olduğundan $\forall x\in\mathbb{R}$ için $f'(x)>0$ olmalıdır.

$\forall x\in\mathbb{R}$ için $f'(x)=3x^2-8ax+12>0$ ise $\Delta\le 0$ olur.

$(-8a)^2-4\cdot 3\cdot 12\le 0$

$64a^2-144\le 0$

$4a^2-9\le 0$

$4a^2-9=0 \Rightarrow a_1=\frac{-3}{2}$ veya $a_2=\frac{3}{2}$ olur.

a	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$4a^2-9\le 0$	$+$	•	$-$	•	$+$
			Çözüm		

a nın değer aralığı $\left[\frac{-3}{2},\ \frac{3}{2}\right]$ bulunur.

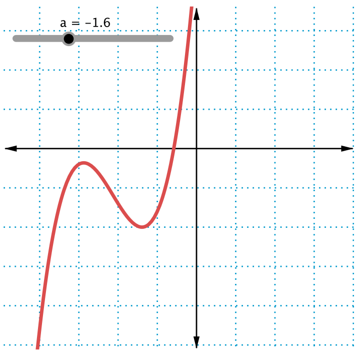
TEKNOLOJİ

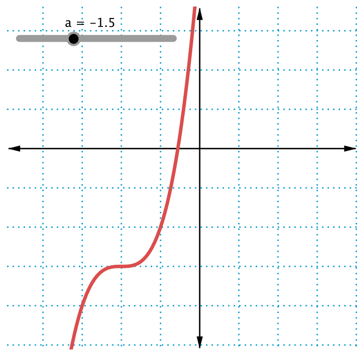
Yukarıdaki örnekte verilen $f(x)=x^3-4ax^2+12x+5$ fonksiyonunun daima artan olması için $\frac{-3}{2}\le a\le\frac{3}{2}$ olduğunu GeoGebra programını kullanarak test ediniz.

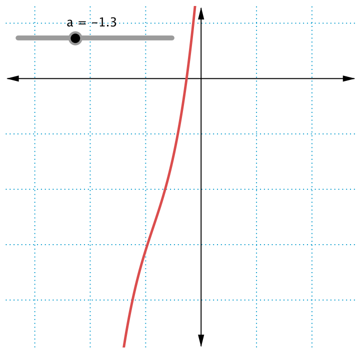
GeoGebra programının "grafik" bölümünde bir a sürgüsü a=2 tanımlayınız.

Giriş: $f(x)=x\,^\wedge 3-4ax\,^\wedge 2+12x+5$ fonksiyonunu yazınız.

Sürgüyü sağa ve sola çekerek $\frac{-3}{2}\le a\le\frac{3}{2}$ aralığının dışında fonksiyonun daima artan olmadığını test ediniz.







ÖRNEK 3

$f(x)$ fonksiyonu $(-4, 0)$ aralığında pozitif değerli ve azalan bir fonksiyondur. Buna göre

I. $x \cdot f(x)$ II. $\dfrac{f(x)}{x^2}$ III. $f^2(x)$ IV. $x^2 \cdot f^3(x)$

fonksiyonlarından hangisi ya da hangileri aynı aralıkta daima azalan bir fonksiyondur?

ÇÖZÜM

$f(x)$ pozitif değerli olduğundan $f(x) > 0$, azalan olduğundan $f'(x) < 0$ olur. Bu durumda $-4 < x < 0,\ f(x) > 0,\ f'(x) < 0$ elde edilir.

I. $h(x) = x \cdot f(x)$ olsun.
$h'(x) = 1 \cdot f(x) + x \cdot f'(x) > 0$ olur.

Bu durumda $x \cdot f(x)$ fonksiyonu $(-4, 0)$ aralığında daima artandır.

II. $h(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$ olsun.

$h'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot x^2 - 2x \cdot f(x)}{x^4}$ olur.

Bu durumda $h'(x)$ in işareti belirlenemediği için $\dfrac{f(x)}{x^2}$ fonksiyonunun bu aralıkta artan veya azalan olduğu bulunamaz.

III. $h(x) = f^2(x)$
$h'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) < 0$ olur.

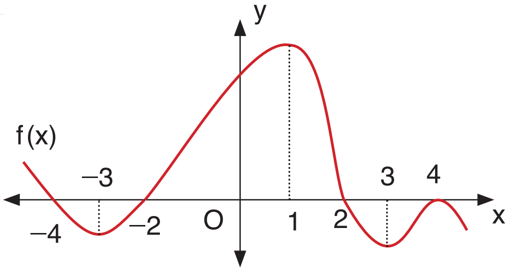
Bu durumda $f^2(x)$ fonksiyonu $(-4, 0)$ aralığında daima azalandır.

IV. $h(x) = x^2 \cdot f^3(x)$
$h'(x) = 2x \cdot f^3(x) + x^2 \cdot 3f^2(x) f'(x) < 0$ olur.

Bu durumda $x^2 \cdot f^3(x)$ fonksiyonu $(-4, 0)$ aralığında daima azalandır.

ÖRNEK 4

Yandaki grafikte verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıklarda türevinin işaretini inceleyiniz.

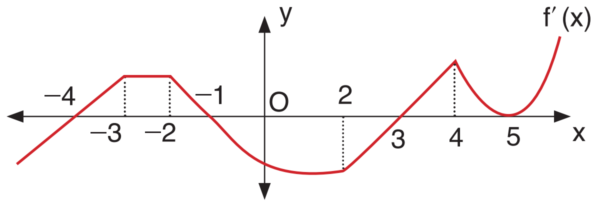


ÇÖZÜM

x	$-\infty$	-3	1	3	4	$+\infty$
f(x)	Azalan	Artan	Azalan	Artan	Azalan	
f′(x)	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	

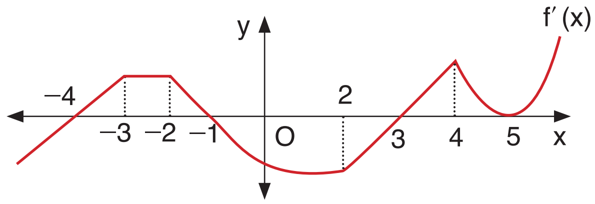
$(-\infty, -3]$ aralığında $f(x)$ azalan, $f'(x) < 0$
$[-3, 1]$ aralığında $f(x)$ artan, $f'(x) > 0$
$[1, 3]$ aralığında $f(x)$ azalan, $f'(x) < 0$
$[3, 4]$ aralığında $f(x)$ artan, $f'(x) > 0$
$[4, +\infty)$ aralığında $f(x)$ azalan, $f'(x) < 0$ olur.

ÖRNEK 5



Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.
Buna göre $f(x)$ fonksiyonunun artan veya azalan olduğu aralıkları bulunuz.

ÇÖZÜM



x	$-\infty$	-4		-1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$		$+$	
$f(x)$	Azalan		Artan		Azalan		Artan		Artan	

f fonksiyonu $(-\infty, -4] \cup [-1, 3]$ aralığında azalan,
$[-4, -1] \cup [3, 5] \cup [5, \infty)$ aralığında artandır.

Bir Fonksiyonun Ekstremum Noktaları

TANIM
$A \subseteq \mathbb{R}$ kümesi üzerinde tanımlı, gerçek değerli bir f fonksiyonu verildiğinde $f'(c) = 0$ veya $f'(c)$ yoksa $c \in A$ noktasına f fonksiyonunun bir kritik noktası denir.

ÖRNEK 6

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 12$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz.

ÇÖZÜM

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$
$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0$
$x^2 - 2x - 3 = 0$
$(x - 3)(x + 1) = 0$
$x_1 = 3$ veya $x_2 = -1$
Buradan $f'(3) = 0$ veya $f'(-1) = 0$ olduğundan $x = 3$ ve $x = -1$ apsisli noktalar f fonksiyonunun kritik noktalarıdır.

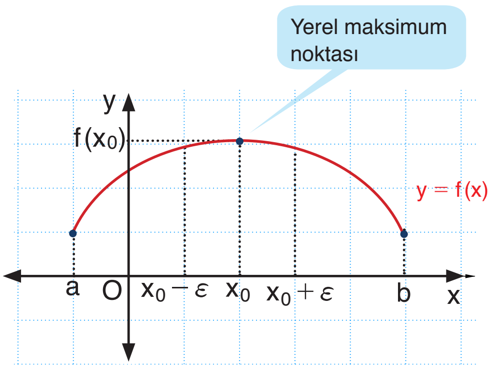
TANIM

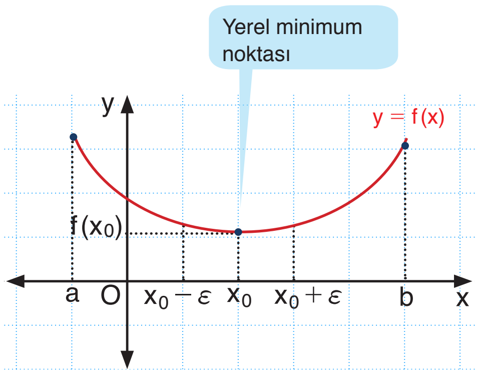
$x_0 \in (a, b)$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere $f:[a, b] \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu verilsin

I. f fonksiyonu $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$ aralığında en büyük değerini x_0 noktasında alıyorsa f fonksiyonunun $(x_0,\ f(x_0))$ noktasında bir yerel maksimumu vardır. $f(x_0)$ değerine fonksiyonun yerel maksimum değeri denir.

II. f fonksiyonu $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$ aralığında en küçük değerini x_0 noktasında alıyorsa f fonksiyonunun $(x_0,\ f(x_0))$ noktasında bir yerel minimumu vardır. $f(x_0)$ değerine fonksiyonun yerel minimum değeri denir.

Bir fonksiyonun yerel minimum ve yerel maksimum noktalarının hepsine birden fonksiyonun yerel ekstremum noktaları denir.





x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	Artan		Azalan

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	Azalan		Artan

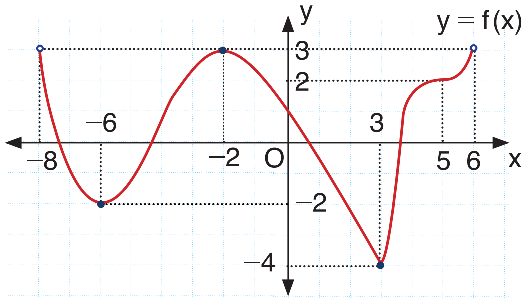
$f'(x)$ fonksiyonunun işareti $(x_0, f(x_0))$ noktasında değişiyorsa $(x_0,\ f(x_0))$ noktası $f(x)$ fonksiyonunun bir ekstremum noktasıdır.

TEOREM

$f:[a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $c \in (a, b)$ noktasında bir yerel minimumu veya maksimumu varsa ve f fonksiyonu c noktasında türevlenebiliyorsa $f'(c) = 0$ olur.

Bu teoreme göre $(x_0,\ f(x_0))$ noktası f fonksiyonunun bir ekstremum noktası ise $f'(x_0) = 0$ olur. Ancak $f'(x_0) = 0$ ise $(x_0,\ f(x_0))$ noktası bir ekstremum noktası olmak zorunda değildir.

ÖRNEK 7



Yanda $f:(-8,\ 6) \rightarrow \mathbb{R},\ y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre f fonksiyonunun $(-8,\ 6)$ aralığındaki ekstremum noktalarını bulunuz.

ÇÖZÜM

x	−8		−6		−2		3		5		6
f(x)		Azalan		Artan		Azalan		Artan		Artan	
f′(x)		−		+		−		+		+	
			Yerel minimum		Yerel maksimum		Yerel minimum				

$(-8,\ -6]$ aralığında $f(x)$ azalan olduğundan, $f'(x) < 0$ ve $[-6,\ -2]$ aralığında $f(x)$ artan olduğundan bu aralıkta $f'(x) > 0$ olur.
Bu durumda $(-6,\ -2)$ noktası yerel minimum noktasıdır ve
$f'(-6) = 0$ olur.
$[-6,\ -2]$ aralığında $f(x)$ artan olduğundan bu aralıkta $f'(x) > 0$ ve $[-2,\ 3]$ aralığında $f(x)$ azalan olduğundan bu aralıkta $f'(x) < 0$ olur.
Bu durumda $(-2,\ 3)$ noktası yerel maksimum noktasıdır ve
$f'(-2) = 0$ olur.
Benzer şekilde $(3,\ -4)$ noktası yerel minimum noktasıdır. Ancak
$f'(3)$ yoktur.
$(5,\ 2)$ noktası ekstremum nokta değildir. Ancak $f'(5) = 0$ olur.

ÖRNEK 8

$f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$ fonksiyonunun varsa yerel ekstremum noktalarını ve bu noktaların değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 12x^2 = 0$

$4x^2(x-3) = 0$

$x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = 3$ olur.

x	−∞		0		3		+∞
f′(x)		−		−		+	
f(x)		Azalan		Azalan		Artan	
					Yerel minimum		

$f(3) = 3^4 - 4 \cdot 3^3 + 2 = -25$

Yerel minimum noktası $(3,\ -25)$ ve yerel minimum değeri -25 bulunur.

ÖRNEK 9

$f(x)=x^3-ax^2+x-2$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktası olmadığına göre a nın değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

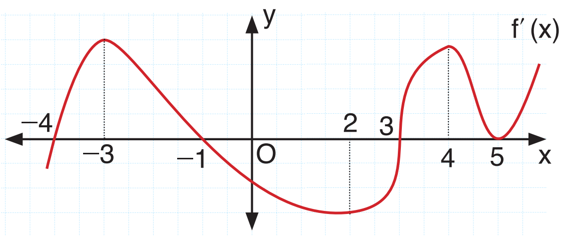
$f(x)$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktasının olmaması için $f'(x)=0$ denkleminin gerçek kökünün olmaması veya çift katlı kökünün olması gerekir.
Buradan $f'(x)=3x^2-2ax+1=0$ denklemi için $\triangle \le 0$ olmalıdır.

$$(-2a)^2-4\cdot 3\cdot 1\le 0$$
$$4a^2-12\le 0$$
$$a^2-3\le 0$$
$$(a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3})\le 0$$

a	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	$+\infty$
a^2-3	$+$	0	$-$	0	$+$
			Çözüm		

$-\sqrt{3}\le a\le \sqrt{3}$ bulunur.

ÖRNEK 10



Yukarıda $y=f(x)$ fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir. Varsa $f(x)$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarının apsislerini bulunuz.

ÇÖZÜM

x	$-\infty$		-4		-1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		Azalan ↘		Artan ↗		Azalan ↘		Artan ↗		Artan ↗	
			Yerel minimum		Yerel maksimum		Yerel minimum				

$y=f'(x)$ fonksiyonunun işaret tablosu yapılarak fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıklar bulunduğunda apsisi $x=-4$ ve $x=3$ olan noktalarda fonksiyonun yerel minimumu, apsisi $x=-1$ olan noktada ise fonksiyonun yerel maksimum olduğu görülür.

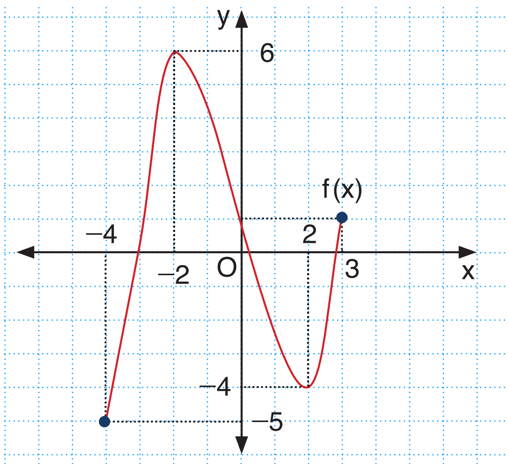
TANIM

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $y=f(x)$ fonksiyonunun görüntü kümesindeki en büyük sayıya $f(x)$ fonksiyonunun mutlak maksimumu en küçük sayıya ise $f(x)$ fonksiyonunun mutlak minimumu denir.

$f:[a, b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlı olduğu aralıkta sürekli bir fonksiyon olmak üzere mutlak minimum ve mutlak maksimum değerini bulmak için $f(a)$ ve $f(b)$ değerleri ile (a, b) aralığındaki yerel ekstremum değerleri bulunur. Bu değerlerin en büyüğü f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki mutlak maksimumu, en küçüğü de mutlak minimumu olur.

$f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ise $f(x)$ fonksiyonunun mutlak maksimum veya mutlak minimum değeri vardır. Ancak $f(x)$ fonksiyonu sürekli olmadığında veya tanım kümesi (a, b) açık aralığı olduğunda mutlak minimum ve mutlak maksimum değeri bulunmayabilir.

ÖRNEK 11



Yanda $f:[-4, 3]\to\mathbb{R}$, $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $f(x)$ fonksiyonunun mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

I. Fonksiyonun uç noktalarda aldığı değerler

$f(-4)=-5$

$f(3)=1$ olur.

II. Fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarında aldığı değerler:

$x=-2$ yerel maksimum noktası olduğundan $f(-2)=6$ ve

$x=2$ yerel minimum noktası olduğundan $f(2)=-4$ bulunur.

Bu durumda $f:[-4, 3]\to\mathbb{R}$, $y=f(x)$ fonksiyonunun mutlak maksimum değeri 6 ve mutlak minimum değeri -5 bulunur.

ÖRNEK 12

$f:[-3, 5]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x^2-24x$

fonksiyonunun mutlak maksimum ve mutlak minimum değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

I. Fonksiyonun uç noktalarda aldığı değerler

$f(-3)=(-3)^3-3\cdot(-3)^2-24\cdot(-3)=18$

$f(5)=5^3-3\cdot5^2-24\cdot5=-70$ olur.

II. Fonksiyonun yerel ekstremum değerleri

$f'(x)=3x^2-6x-24=0$

$x^2-2x-8=0$

$(x-4)(x+2)=0$

$x_1=4,\ x_2=-2$

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		Artan	Yerel maksimum	Azalan	Yerel minimum	Artan	

Yerel maksimum değeri $f(-2)=(-2)^3-3\cdot(-2)^2-24\cdot(-2)=28$
yerel minimum değeri $f(4)=4^3-3\cdot4^2-24\cdot4=-80$ bulunur.
Buradan fonksiyonunun mutlak minimum değeri -80, mutlak maksimum değeri 28 olur.

TEKNOLOJİ

GeoGebra programı yardımı ile $f(x)=x^3-3x^2+2$ fonksiyonunu ve fonksiyon türevlerinin grafiğini çizip fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıklar ile ekstremum noktalarında türev fonksiyonunun aldığı değerleri inceleyiniz.

I. Giriş: $f(x)=x\,{}^\wedge 3-3x\,{}^\wedge 2+2$ yazarak $f(x)$ fonksiyonu oluşturunuz.

II. Nokta aracını seçip fonksiyonun grafiği üzerine tıklayarak bir A noktası oluşturunuz.

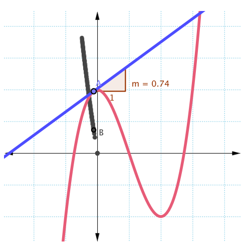
III. Teğet aracını seçip önce grafiğe, daha sonra A noktasına tıklayarak A noktasından geçen bir g teğet doğrusu oluşturunuz.

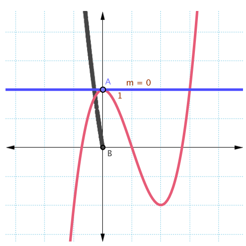
IV. Giriş: $m=$ eğim(g) yazarak teğet doğrusunun eğimini m olarak belirleyiniz.

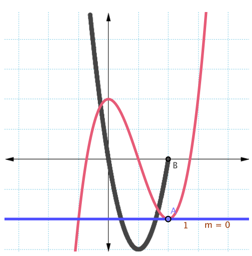
V. Giriş: $(x(A),m)$ yazarak fonksiyonun A noktasındaki türevini B noktası alarak oluşturunuz.

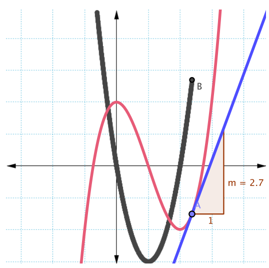
VI. B noktasının özellikler menüsünden “izi göster” sekmesine tıklayınız.

VII. A noktasına basılı tutup noktayı yavaşça hareket ettiriniz. Türev fonksiyonunun çizilmesini sağlayınız. Fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıklarda ve ekstremum noktalarındaki türev fonksiyonunun aldığı değerleri inceleyiniz.



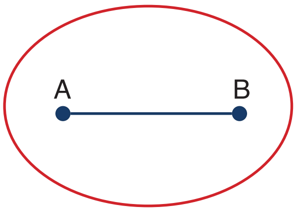




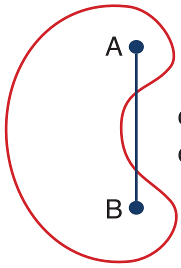


İçbükey veya Dışbükey Fonksiyonlar

TANIM
$K \subset \mathbb{R}^2$ olsun. Eğer K kümesinin iki noktasını birleştiren doğru parçası K kümesinin içinde kalıyorsa K ye bir dışbükey veya konveks küme denir.



dışbükey (konveks) küme



dışbükey (konveks) olmayan küme

Bu tanıma göre $\mathbb{R}^2$ de üçgen, kare ve çember gibi geometrik şekiller dışbükeydir.

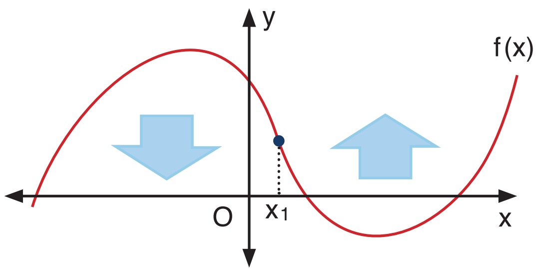
TANIM
f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonunun grafiğinin üst tarafında bulunan bölge dışbükey (konveks) ise eğri dışbükey (konveks) veya yukarı bükümlüdür denir.

Eğer f fonksiyonunun grafiğinin alt tarafında kalan bölge dışbükey ise eğri içbükey (konkav) veya aşağı bükümlüdür denir.

dışbükey (konveks)

içbükey (konkav)

Bir fonksiyon, tanım kümesinin bir kısmında dışbükey, bir kısmında içbükey olabilir.



Grafiği yukarıdaki gibi verilen fonksiyon $(-\infty, x_1)$ aralığında içbükey, (x_1, ∞) aralığında ise dışbükeydir.

TEOREM

$f:[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve (a, b) aralığı üzerinde fonksiyonun ikinci türevi bulunsun. $\forall x \in (a, b)$ için $f''(x) > 0$ ise f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında dışbükey, $f''(x) < 0$ ise f fonksiyonu (a, b) aralığında içbükeydir.

$f''(x) > 0$ $\qquad\qquad$ $f''(x) < 0$

ÖRNEK 13

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x + 5$ fonksiyonunun grafiğinin dışbükey ve içbükey olduğu aralıkları bulunuz.

ÇÖZÜM

f fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi alınıp işaret tablosu yapılır.

$f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x + 5,$

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 2$

$f''(x) = 12x^2 - 24x$ bulunur.

Buradan ikinci türevin kökleri

$f''(x) = 12x(x - 2) = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = 2$ olur.

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$f''(x)$	+		−		+
f(x)	Dışbükey		İçbükey		Dışbükey

f fonksiyonunun grafiği $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ aralığında dışbükey, $(0, 2)$ aralığında içbükeydir.

TANIM

Bir f fonksiyonunun dışbükeylikten içbükeyliğe veya içbükeylikten dışbükeyliğe geçtiği ve fonksiyonun sürekli olduğu noktaya dönüm (büküm) noktası denir.

Yukarıdaki tanıma göre $f''(x)$ fonksiyonu $x = a$ apsisli noktada işaret değiştiriyorsa bu nokta f fonksiyonunun bir dönüm noktasıdır. $x = a$ apsisli nokta f fonksiyonunun bir dönüm noktası ise $f''(a) = 0$ veya $f''(a)$ mevcut değildir.

ÖRNEK 14

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 9$ fonksiyonunun varsa dönüm noktasını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 9$$
$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 6$$
$$f''(x) = 6x - 6$$

$6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$ bulunur.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$\circ$	$+$
$f(x)$	İçbükey		Dışbükey

$x = 1$ apsisli noktada f fonksiyonu içbükeylikten dışbükeyliğe geçtiği için $(1, f(1))$ noktası dönüm noktasıdır.

$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 9 = -5$ olduğundan f fonksiyonunun dönüm noktası $(1, -5)$ olur.

ÖRNEK 15

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{ax^3}{6} + x^2 + bx + c$

fonksiyonunun dönüm noktası yoksa a hangi aralıktadır?

ÇÖZÜM

$f(x)$ fonksiyonunun dönüm noktası yoksa $f''(x) \neq 0$ olması gerekir.

$$f'(x) = \frac{4x^3}{12} - \frac{3ax^2}{6} + 2x + b$$
$$f''(x) = \frac{12x^2}{12} - \frac{6ax}{6} + 2$$
$$= x^2 - ax + 2 \text{ bulunur.}$$

$x^2 - ax + 2 = 0$ denkleminde $\triangle \leq 0$ olmalıdır.

$$a^2 - 4 \cdot 2 \leq 0$$
$$a^2 - 8 \leq 0$$

x	$-\infty$	$-2\sqrt{2}$		$2\sqrt{2}$	$+\infty$
$a^2 - 8 \leq 0$	$+$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$+$
			Çözüm		

O hâlde a nın en geniş aralığı $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$ olur.

ÖRNEK 16

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^3-mx^2-nx+1$ fonksiyonunun $(1,\ 2)$ noktasında dönüm noktası varsa m ve n değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(1,\ 2)$ noktası eğri üzerinde olduğundan denklemi sağlar.

$f(1)=2$

$2\cdot1^3-m\cdot1^2-n\cdot1+1=2$

$m+n=1$ olur.

Aynı zamanda $(1,\ 2)$ noktası f fonksiyonunun dönüm noktası olduğundan $f''(1)=0$ olur.

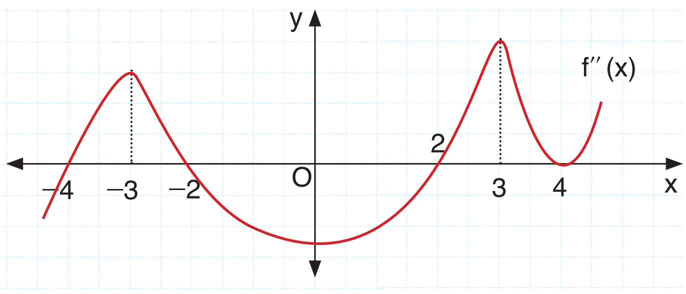
$f'(x)=6x^2-2mx-n$

$f''(x)=12x-2m$

$f''(1)=12\cdot1-2m=0 \quad\Rightarrow\quad m=6$ bulunur.

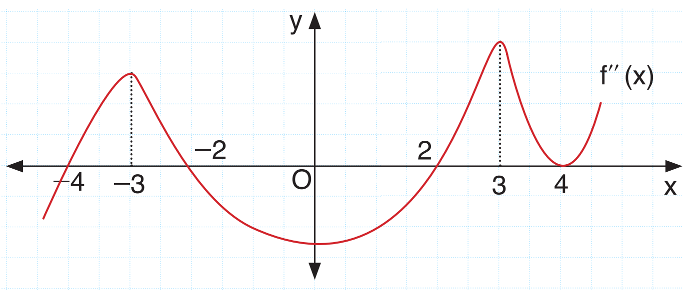
$m+n=1 \quad\Rightarrow\quad n=-5$ olur.

ÖRNEK 17



Yukarıda $y=f''(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. f fonksiyonunun içbükey veya dışbükey olduğu aralıklar ile varsa dönüm noktalarının apsislerini bulunuz.

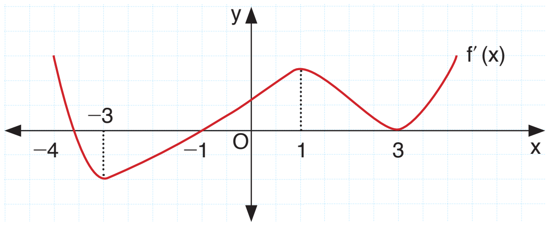
ÇÖZÜM



x	$-\infty$	-4		-2		2		4		$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$		$+$	
$f(x)$	İçbükey		Dışbükey		İçbükey		Dışbükey		Dışbükey	

$y=f(x)$ fonksiyonunun $x=-4,\ x=-2$ ve $x=2$ apsisli noktaları dönüm noktalarıdır. $x=4$ apsisli nokta ise dönüm noktası değildir.

ÖRNEK 18



Yanda $y = f'(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

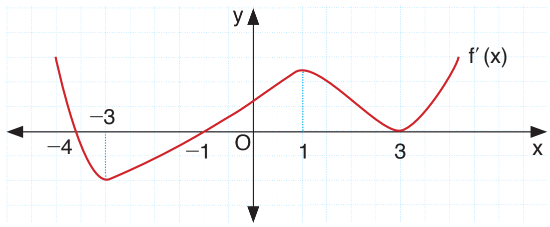
Buna göre

a) $y = f(x)$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları ve yerel ekstremum noktalarının apsislerini bulunuz.

b) $y = f(x)$ fonksiyonunun dışbükey veya içbükey olduğu aralıklar ile varsa dönüm noktalarının apsislerini bulunuz.

ÇÖZÜM

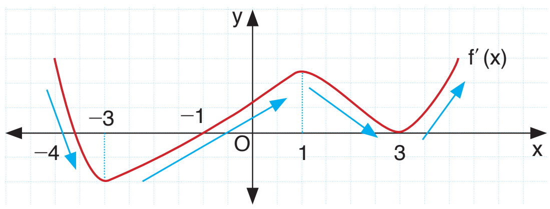
a)



x	$-\infty$	–4		–1		3		$+\infty$
f′ (x)	+	o	–	o	+	o	+	
f (x)	Artan		Azalan		Artan		Artan	

$x = -4$ apsisli nokta yerel maksimum,
$x = -1$ apsisli nokta yerel minimum noktasıdır.

b)



$h(x) = f'(x)$ olsun. $h(x)$ fonksiyonu için
$h(x)$ artan ise $h'(x) = f''(x) > 0$
$h(x)$ azalan ise $h'(x) = f''(x) < 0$ olur.

x	$-\infty$	–3		1		3		$+\infty$
f′ (x)	Azalan		Artan		Azalan		Artan	
f″ (x)	–	o	+	o	–	o	+	
f (x)	İçbükey		Dışbükey		İçbükey		Dışbükey	

f fonksiyonunda $x = -3$, $x = 1$ ve $x = 3$ apsisli noktalar dönüm noktalarıdır.

TANIM

$a \in \mathbb{R}$ iken $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ veya $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ eşitliklerinden biri sağlanırsa $x = a$ doğrusuna $f(x)$ fonksiyonunun düşey asimptotu denir.

$y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ biçimindeki bir rasyonel fonksiyonda $Q(x) = 0$ denkleminin kökleri x_1, x_2, ..., x_n olsun. Bu kökler aynı zamanda payın kökleri değilse bu durumda $x = x_1$, $x = x_2$, ..., $x = x_n$ doğruları $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ fonksiyonunun düşey asimptotları olur.

ÖRNEK 19

Aşağıdaki fonksiyonların varsa düşey asimptotlarını bulunuz.

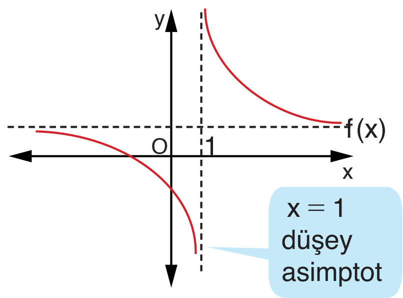
a) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2-x-6}{x^2-4}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x-1}{(x+3)^2}$

ÇÖZÜM

a) $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x+2}{x-1} = +\infty$ veya $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x+2}{x-1} = -\infty$

olduğundan $x = 1$ doğrusu düşey asimptottur.



GeoGebra

Giriş: $f(x) = (x+2)/(x-1)$

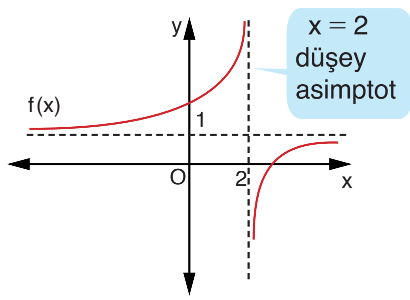
b) $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$ ve $x_2 = -2$ olur.

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2-x-6}{x^2-4} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x-3}{x-2} = -\infty$$

olduğundan $x = 2$ doğrusu düşey asimptottur.

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x^2-x-6}{x^2-4} = \lim_{x \to -2^+} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to -2^+} \frac{x-3}{x-2} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$$

olduğundan $x = -2$ düşey asimptot değildir.

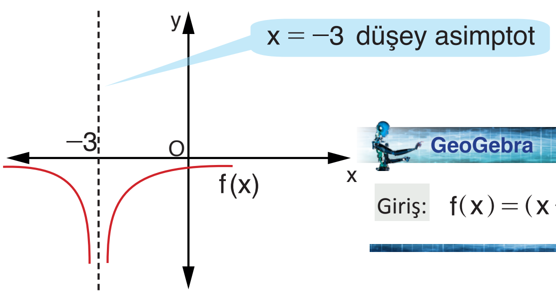


GeoGebra

Giriş: $f(x) = (x \wedge 2 - x - 6)/(x \wedge 2 - 4)$

c) $(x+3)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -3$ olur.

$\lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{x-1}{(x+3)^2} = \dfrac{-4}{0^+} = -\infty$ olduğundan $x = -3$ doğrusu düşey asimptottur.



GeoGebra

Giriş: $f(x) = (x-1)/(x+3) \wedge 2$

TANIM

$y = f(x)$ fonksiyonu $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$ veya $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$ eşitliklerinden en az birini sağlıyorsa $y = b$ doğrusuna $f(x)$ fonksiyonunun yatay asimptotu denir.

ÖRNEK 20

Aşağıdaki fonksiyonların varsa yatay asimptotunu bulunuz.

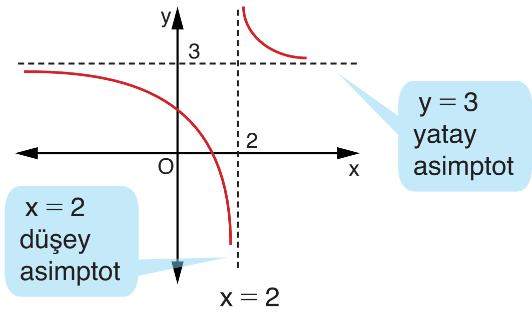
a) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x+1}$

ÇÖZÜM

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+1}{x-2} = 3$ olduğundan $y = 3$ yatay asimptottur.

GeoGebra

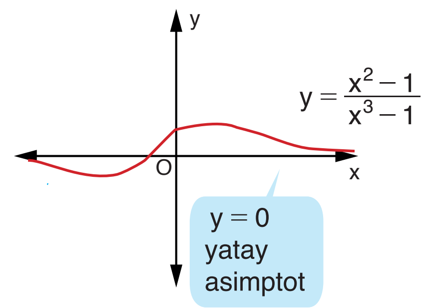
Giriş: f(x) = (3x + 1)/(x − 2)



b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1}{x^3-1} = 0$ olduğundan $y = 0$ yatay asimptottur.

GeoGebra

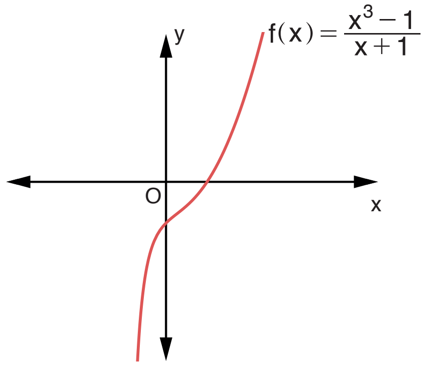
Giriş: f(x) = (x ^ 2 − 1)/(x ∧ 3 − 1)



c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-1}{x+1} = +\infty$ olduğundan $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x+1}$ fonksiyonunun yatay asimptotu yoktur.

GeoGebra

Giriş: f(x) = (x ^ 3 − 1)/(x + 1)



ÖRNEK 21

$f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x - 3}$ fonksiyonunun asimptotlarının kesim noktalarını bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x - 3)(x + 1) = 0$

$x_1 = 3,\ x_2 = -1$ olur.

$x = 3$ ve $x = -1$ düşey asimptottur.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x - 3} = 1$ olduğundan $y = 1$ yatay asimptottur.

Bu durumda asimptotların kesim noktaları $(-1, 1)$ ve $(3, 1)$ şeklinde bulunur.

ÖRNEK 22

Aşağıdaki fonksiyonların asimptotlarını bulunuz.

a) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

b) $f(x) = e^{-x^2}$

ÇÖZÜM

a) Logaritma fonksiyonunun tanımlı olması için $x^2 - 1 > 0$ olmalıdır.

$\lim\limits_{x \to -1^-} \ln(x^2 - 1) = -\infty$ ve $\lim\limits_{x \to 1^+} \ln(x^2 - 1) = -\infty$ olduğundan $x = -1$ ve $x = 1$ doğruları düşey asimptottur.

b) $f(x) = e^{-x^2}$ fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R}$ için tanımlıdır ve düşey asimptotu yoktur.

$\lim\limits_{x \to \infty} e^{-x^2} = e^{-\infty} = \dfrac{1}{e^{\infty}} = 0$ olduğundan $y = 0$ yatay asimptottur.

TANIM

$y = f(x)$ fonksiyonu için

$\lim\limits_{x \to \infty} |f(x) - P(x)| = 0$ veya $\lim\limits_{x \to -\infty} |f(x) - P(x)| = 0$ olacak şekilde I. dereceden $P(x)$ polinomu varsa $y = P(x)$ polinomuna $y = f(x)$ fonksiyonunun eğik asimptotu denir.

$P(x)$ ve $Q(x)$ birer polinom, $Q(x) \neq 0$ olmak üzere $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ fonksiyonu için $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \infty$ oluyorsa fonksiyonun grafiğinin eğik asimptotu vardır. Rasyonel fonksiyonların payı paydasına bölündüğünde bulunan bölüm fonksiyonun grafiği eğik asimptotudur.

ÖRNEK 23

Aşağıdaki fonksiyonların varsa asimptotlarını bulunuz.

a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+3}$

b) $f(x)=\dfrac{x-3}{x+4}$

c) $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-4}$

ç) $f(x)=x^3-x+1$

ÇÖZÜM

a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+3}$ fonksiyonu için

$\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{x^2-1}{x+3}=+\infty$ olduğu için $x=-3$ düşey asimptottur.

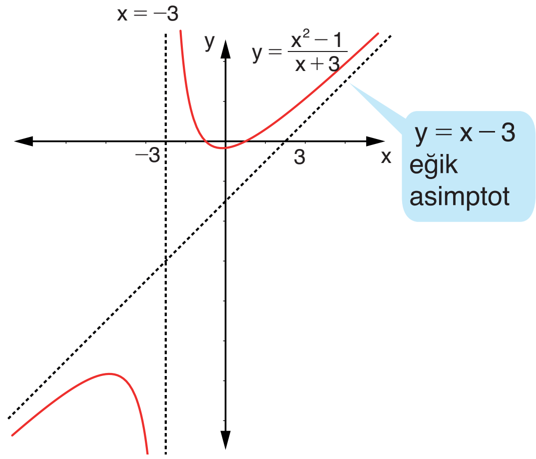
$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-1}{x+3}=\infty$ olduğundan fonksiyonun yatay asimptotu yoktur.

$$\begin{array}{rl|l} & x^2-1 & x+3 \\ \cline{3-3} - & x^2+3x & x-3 \\ \hline & -3x-1 & \\ - & -3x-9 & \\ \hline & 8 & \end{array}$$

$y=x-3$ eğik asimptottur.

GeoGebra

Giriş: f(x) = (x ^ 2 − 1)/(x + 3)



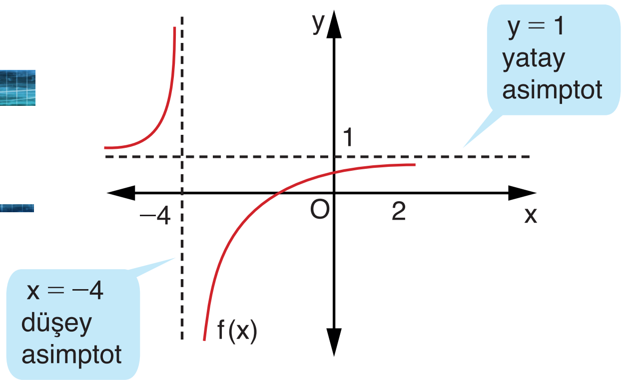
b) $f(x)=\dfrac{x-3}{x+4}$ fonksiyonu için $\lim\limits_{x\to -4^+}\dfrac{x-3}{x+4}=-\infty$ olduğundan $x=-4$ düşey asimptottur.

$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x-3}{x+4}=1$ olduğundan $y=1$ yatay asimptottur.

Eğik asimptot yoktur.

GeoGebra

Giriş: f(x) = (x − 3)/(x + 4)



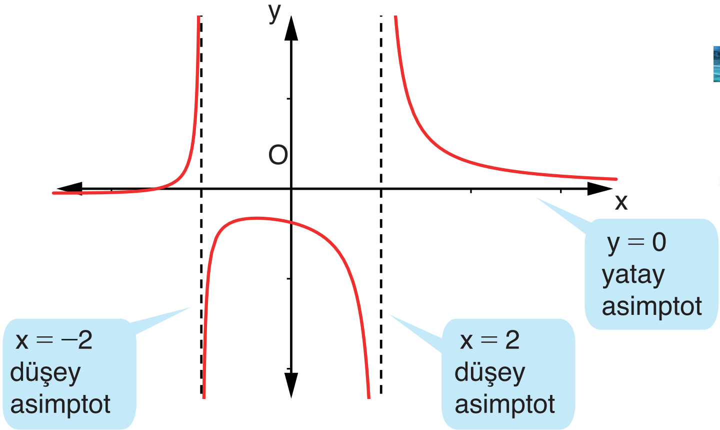
c) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-4}$ fonksiyonunun paydayı sıfır yapan $x = 2$ ve $x = -2$

doğruları için

$\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x+3}{x^2-4} = -\infty$ olduğundan $x = -2$ düşey asimptottur.

$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x+3}{x^2-4} = +\infty$ olduğundan $x = 2$ düşey asimptottur.

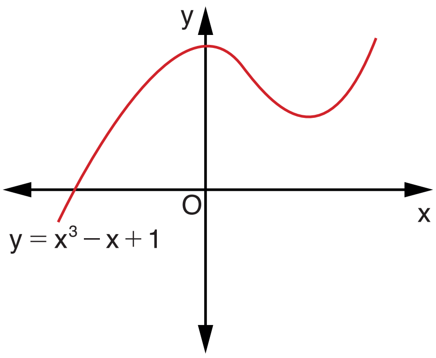
$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+3}{x^2-4} = 0$ olduğundan $y = 0$ yatay asimptottur.



GeoGebra

Giriş: f(x) = (x + 3)/(x ^ 2 – 4)

ç) $f(x) = x^3 - x + 1$ polinom fonksiyonun tanım kümesi $\mathbb{R}$ olduğundan asimptotu yoktur. Polinom fonksiyonların asimptotu yoktur.



GeoGebra

Giriş: f(x) = x ^ 3 – x + 1

Fonksiyon Grafiğinin Çizimi

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği çizilirken

1. Fonksiyonun tanım kümesi bulunur.
2. Varsa fonksiyonun asimptotları bulunur.
3. Fonksiyonun eksenleri kestiği noktalar bulunur.
4. Birinci türevi yardımıyla varsa fonksiyonun artan veya azalan olduğu aralıklar ile yerel ekstremum noktaları bulunur.
5. İkinci türevi yardımıyla varsa fonksiyonun içbükey veya dışbükey olduğu aralıklar ile dönüm noktaları bulunur.

ÖRNEK 24

Aşağıdaki fonksiyonların grafiğini çiziniz.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 4x$ **b)** $f: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$

ÇÖZÜM

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 4x$ fonksiyonun tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir.
f fonksiyonu polinom fonksiyonu olduğu için bu fonksiyonun asimptotu yoktur.

Fonksiyonun eksenleri kestiği noktalar

$y = 0 \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \ \Rightarrow\ x(x^2 - 4) = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = 2$ ve $x_3 = -2$ olduğundan

$(0,\ 0),\ (2,\ 0),\ (-2,\ 2)$ bulunur.

$x = 0 \Rightarrow y = 0$ olduğundan $(0,\ 0)$ bulunur.

Fonksiyon grafiğinin artan veya azalan olduğu aralıklar

$f'(x) = 3x^2 - 4 = 0$

$$x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{2}{\sqrt{3}},\ x_2 = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

x	$-\infty$	$\frac{-2}{\sqrt{3}}$		$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
f′(x)	+	0	–	0	+
f(x)	Artan		Azalan		Artan

biçiminde bulunur.

Fonksiyonun apsisi $x = \dfrac{-2}{\sqrt{3}}$ olan nokta yerel maksimum, apsisi $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ olan nokta yerel minimum noktasıdır.

$$f\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{-2}{\sqrt{3}}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{-2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{16}{3\sqrt{3}}$$

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 - 4\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-16}{3\sqrt{3}} \text{ olur.}$$

Buradan fonksiyonun yerel maksimum noktası $\left(\dfrac{-2}{\sqrt{3}},\ \dfrac{16}{3\sqrt{3}}\right)$ ve yerel minimum noktası $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}},\ \dfrac{-16}{3\sqrt{3}}\right)$ bulunur.

Fonksiyonun içbükey veya dışbükey olduğu aralıklar

$f(x) = x^3 - 4x$

$f'(x) = 3x^2 - 4$

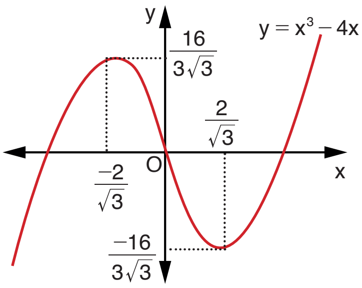
$f''(x) = 6x$ bulunur. Buradan $6x = 0 \ \Rightarrow\ x = 0$ olur.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f″(x)	–	0	+
f(x)	İçbükey		Dışbükey

$x = 0$ apsisli nokta fonksiyonun dönüm noktasıdır.

$f(0) = 0^3 - 4 \cdot 0 = 0$ olduğundan $(0,\ 0)$ fonksiyonun dönüm noktası olur.

Buna göre fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibi çizilir.



GeoGebra

Giriş: $f(x) = x\hat{}3 - 4x$

b) $f: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$ fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R} - \{3\}$

olur. f fonksiyonunun yatay asimptotu $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+1}{x-3} = 1$ olduğundan

$y = 1$ bulunur.

f fonksiyonunun düşey asimptotu

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ ve $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x+1}{x-3} = +\infty$ olduğundan $x = 3$ bulunur.

Eksenleri kestiği noktalar

$x = 0 \Rightarrow f(0) = \dfrac{0+1}{0-3} = \dfrac{-1}{3}$

$y = 0 \Rightarrow \dfrac{x+1}{x-3} = 0 \Rightarrow x = -1$

$\left(0, -\dfrac{1}{3}\right)$ ve $(-1, 0)$ bulunur.

Artan ve azalan olduğu aralıklar

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-3) - 1 \cdot (x+1)}{(x-3)^2} = \frac{x-3-x-1}{(x-3)^2} = \frac{-4}{(x-3)^2}$$

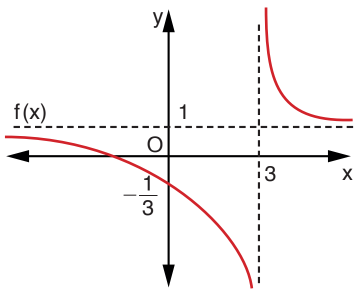
$f'(x) < 0$ olduğundan fonksiyon her noktada azalandır.
Fonksiyonun yerel ekstremum noktaları yoktur.
Fonksiyonun içbükey veya dışbükey olduğu aralıklar

$$f'(x) = -4(x-3)^{-2} \Rightarrow f''(x) = 8(x-3)^{-3} = \frac{8}{(x-3)^3}$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	İçbükey		Dışbükey

biçiminde bulunur.

f fonksiyonu $x = 3$ noktasında sürekli olmadığı için $x = 3$ noktası dönüm noktası değildir. Buna göre $f: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$ fonksiyonunun grafiği yandaki gibi çizilir.



GeoGebra

Giriş: $f(x) = (x+1)/(x-3)$

1. **Aşağıdaki fonksiyonların içbükey ve dışbükey olduğu aralıkları ve varsa dönüm noktalarını bulunuz.**

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x - 4$

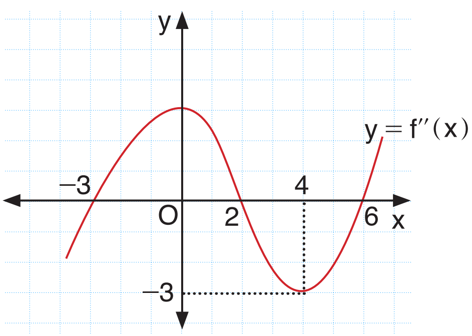
b) $f(x) = xe^x$

c) $f(x) = \dfrac{x-5}{x+5}$

2. $f(x) = x^4 - ax^3 + 3x^2 - 4x + 1$ **fonksiyonunun dönüm noktası olmadığına göre a hangi aralıktadır?**

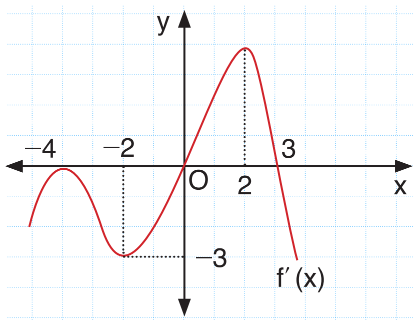
3. $f(x) = x^2 + 4\sin x$ **fonksiyonunun** $[0, 2\pi]$ **aralığındaki dönüm noktalarını bulunuz.**

4.



Yukarıda $y = f''(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. **Buna göre** $y = f(x)$ **fonksiyonunun içbükey ve dışbükey olduğu aralıklar ile dönüm noktalarının apsislerini bulunuz.**

5.



Yukarıda $y = f'(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. **Buna göre** $y = f(x)$ **fonksiyonunun içbükey ve dışbükey olduğu aralıklar ile dönüm noktalarının apsislerini bulunuz.**

6. **Aşağıdaki fonksiyonların varsa asimptotlarını bulunuz.**

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - x + 4}{x^3 - x}$

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{(x-1)^2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x-1}$

7. $f(x) = \dfrac{(a-1)x^4 - (b+1)x^2 - x}{3x^2 - x + 5}$ **fonksiyonunun yatay asimptotu** $y = 2$ **doğrusu ise** $a + b$ **kaçtır?**

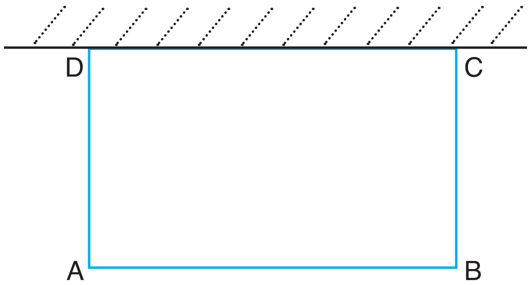
8. **Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.**

a) $f(x) = x^4 - x^3 + x^2$

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{(x-1)^2}$

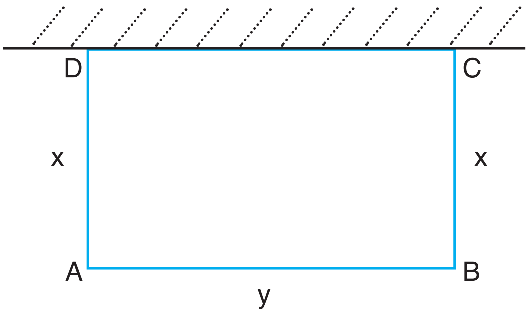
ÖRNEK 25

Yandaki şekilde dikdörtgen biçiminde bir bahçenin bir tarafında duvar bulunmaktadır. Bahçenin üç tarafına bir sıra tel çekilecektir. Çekilen telin uzunluğu 500 m olduğuna göre bahçenin alanı **en fazla** kaç m^2 olur?



ÇÖZÜM

$|AD| = |BC| = x$
$|AB| = y$ olsun.



Telin uzunluğu $y + 2x = 500$ m ve bahçenin alanı $A = x \cdot y$ olur.
$y = 500 - 2x$ olduğundan
$A = x \cdot y = x(500 - 2x)$
$= 500x - 2x^2$ bulunur.

Alanın maksimum değer alması için $A(x)$ fonksiyonunun maksimumu bulunması gerekir. Buradan $A'(x) = 0$ olmalıdır.
$A'(x) = 500 - 4x = 0 \Rightarrow x = 125$ m bulunur.
Buradan bahçenin maksimum alanı

$A(125) = 500 \cdot 125 - 2 \cdot 125^2$
$= 31250$ m^2 olur.

ÖRNEK 26

Bir bakteri türünün t dakika sonra görülen bakteri sayısı
$f(t) = -\frac{t^3}{3} + 15t^2 + 5000$ olarak veriliyor. Bu bakterinin üreme hızı
$V(t) = f'(t)$ olduğuna göre

a) Kaçıncı dakikada bakterinin üreme hızı en büyük değerini alır?
b) Bakterinin üreme hızı en büyük olduğu anda bakteri sayısı kaçtır?

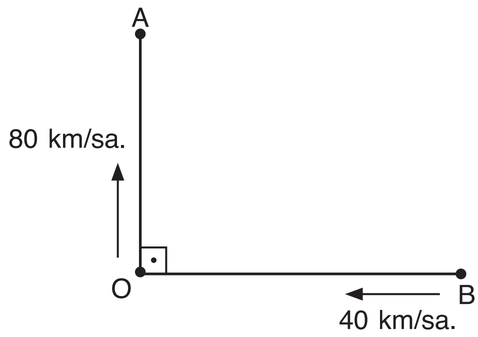
ÇÖZÜM

a) Bakterinin üreme hızı
$V(t) = f'(t) = -t^2 + 30t$ biçiminde bulunur.
Bakterinin üreme hızının en büyük değeri için $V'(t) = 0$ olmalıdır.
$V'(t) = -2t + 30 = 0$
$t = 15$ dakika olur.

b) Bakterinin üreme hızının en büyük olduğu andaki bakteri sayısı

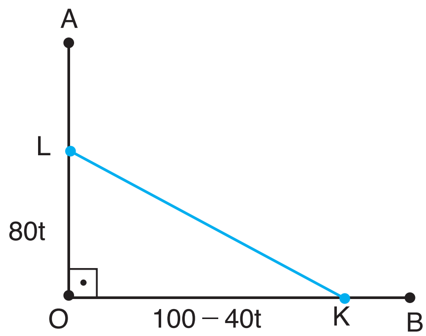
$f(15) = -\frac{15^3}{3} + 15 \cdot 15^2 + 5000$
$= 7250$ bulunur.

ÖRNEK 27



Yandaki gibi O noktasından hızı 80 km/sa. olan bir araç A noktasına doğru, B noktasından hızı 40 km/sa. olan bir araç O noktasına doğru aynı anda harekete başlıyor. $[AO] \perp [OB]$ ve $|OB| = 100$ km olduğuna göre iki araç arasındaki uzaklık en az kaç km olur?

ÇÖZÜM



t saat sonra O noktasındaki araç L noktasında, B noktasındaki araç K noktasında olacaktır.

Bu durumda

$|BK| = 40t \Rightarrow |OK| = 100 - 40t$

$|OL| = 80t$ bulunur.

$|KL|$ iki araç arasındaki en kısa mesafe olur.

$$|KL|^2 = |OL|^2 + |OK|^2$$
$$= (80t)^2 + (100 - 40t)^2$$
$$= 6400t^2 + 10000 - 8000t + 1600t^2$$
$$= 8000t^2 - 8000t + 10000$$

$|KL| = f(t) = \sqrt{8000t^2 - 8000t + 10000}$ bulunur.

$f(t)$ uzunluğunun minimum olması için $f'(t) = 0$ olması gerekir.

$$f'(t) = \frac{16000t - 8000}{2\sqrt{8000t^2 - 8000t + 10000}} = 0$$

ise $16000t - 8000 = 0$

$t = \frac{1}{2}$ saat bulunur.

$|OL| = 80t = 80 \cdot \frac{1}{2} = 40$ km

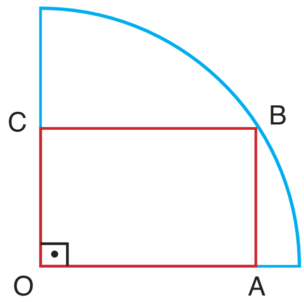
$|KB| = 40t = 40 \cdot \frac{1}{2} = 20$ km

$|OK| = 100 - 20 = 80$ km

$$|KL|^2 = |OK|^2 + |OL|^2$$
$$= 80^2 + 40^2 = 8000$$

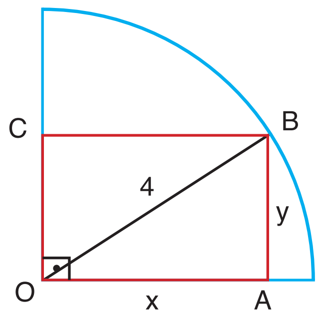
$|KL| = 40\sqrt{5}$ km bulunur.

ÖRNEK 28



Yukarıdaki şekilde yarıçap uzunluğu 4 birim olan O merkezli çeyrek dairenin içine OABC dikdörtgeni çizilmiştir. Buna göre dikdörtgenin alanı en çok kaç birimkare olur?

ÇÖZÜM



$|OA| = x$

$|AB| = y$

olmak üzere $x^2 + y^2 = 16$ olur.

OABC dikdörtgeninin alanı

$$A(x) = x \cdot y$$
$$= x \cdot \sqrt{16 - x^2} \text{ bulunur.}$$

Buradan $A(x)$ alanının maksimum değerinin bulunması için $A'(x) = 0$ olmalıdır.

$$A'(x) = \sqrt{16 - x^2} - \frac{2x}{2\sqrt{16 - x^2}} \cdot x = 0$$

$$\sqrt{16 - x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{16 - x^2}}$$
$$16 - x^2 = x^2$$
$$2x^2 = 16$$
$$x^2 = 8$$
$$x = 2\sqrt{2} \text{ veya } x = -2\sqrt{2} \text{ olur.}$$

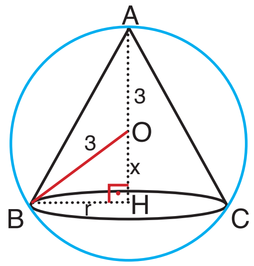
Buradan $x = 2\sqrt{2}$ için

$$A(x) = x\sqrt{16 - x^2}$$
$$= 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{16 - 8}$$
$$= 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}$$
$$= 8 \text{ birimkare bulunur.}$$

ÖRNEK 29

Yarıçap uzunluğu 3 birim olan bir küre içerisine yerleştirilebilen dik konilerden hacmi en büyük olanın yüksekliği kaç birim olur?

ÇÖZÜM



$|AO| = 3$
$|OB| = 3$
$|OH| = x$
Koninin yarıçapı $|BH| = r$ ve koninin yüksekliği $|AH| = 3 + x$ olsun.
Buradan $x^2 + r^2 = 3^2 \Rightarrow r^2 = 9 - x^2$ olur.

Koninin hacmi

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot |AH|$$
$$= \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot (3 + x) = \frac{\pi(9 - x^2)(3 + x)}{3}$$ biçiminde elde edilir.

Koninin hacmi maksimum olduğunda $V'(x) = 0$ olur.

Eşitliğin her iki tarafı $\frac{\pi}{3}$ ile bölünür ve $-2x$ parantez içine dağıtılır.

$$V'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{3}(-2x)(3 + x) + \frac{\pi}{3}(9 - x^2) = 0$$
$$-6x - 2x^2 + 9 - x^2 = 0$$
$$3x^2 + 6x - 9 = 0$$
$$x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$x_1 = 1 \text{ ve } x_2 = -3 \text{ olur.}$$

O hâlde $x = 1$ için koninin hacmi en büyük değeri alır.
Koninin yüksekliği $|AH| = 3 + x = 3 + 1 = 4$ birim bulunur.

ÖRNEK 30

Bir İnternet tarifesinin aylık aboneliği 100 TL olarak belirlenmiştir. Bu pakete abone olanların sayısı 200 den fazla olması hâlinde, 200 den fazla her bir kişi için abonelere yirmi beşer kuruş ödeme yapılacaktır. Örneğin İnternet paketine 300 kişi abone olduğunda her bir aboneye yirmi beşer TL geri ödeme yapılacak ve aylık abonelik ücreti 75 TL olacaktır. Abone kontenjanı 500 kişi olduğuna göre

a) Kaç abone olursa şirketin elde ettiği gelir en fazla olur?

b) Bu şirketin aylık geliri en çok kaç TL olur?

ÇÖZÜM

a) Abone sayısı x olsun. Bu durumda kişi başına düşen aylık abone ücreti $100 - (x - 200) \cdot 0{,}25$ olur.
Şirketin toplam geliri

$$A(x) = x[100 - (x - 200) \cdot 0{,}25]$$
$$= x\left(100 - \frac{x}{4} + 50\right)$$
$$= 150x - \frac{x^2}{4} \text{ bulunur.}$$

Toplam gelirin maksimum olması için $A'(x)=0$ olmalıdır.

$$150-\frac{2x}{4}=0$$

$$\frac{x}{2}=150 \quad \Rightarrow \quad x=300 \text{ bulunur.}$$

O hâlde 300 abone olursa şirket en fazla geliri elde eder.

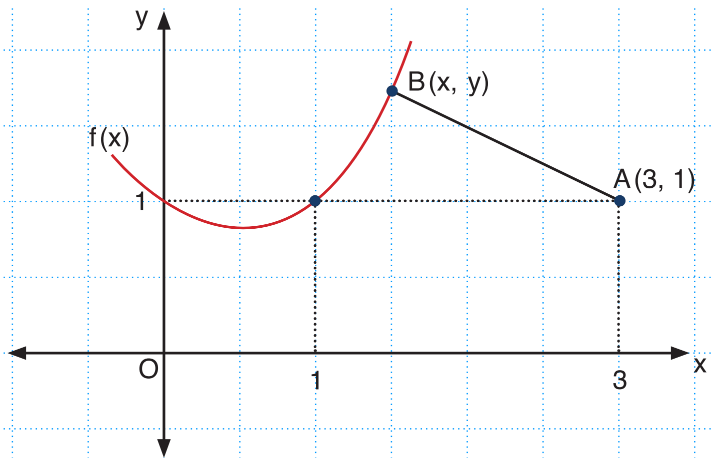
b) Şirketin aylık geliri en çok

$$A(300)=150\cdot 300-\frac{300^2}{4}=22500 \text{ TL olur.}$$

ÖRNEK 31

$f(x)=x^2-x+1$ parabolünün $A(3,1)$ noktasına en yakın noktasının apsisini bulunuz.

ÇÖZÜM



$A(3,1)$ noktasının parabole en yakın noktası $B(x,y)$ olsun.
AB uzunluğu

$$\begin{aligned}|AB|=f(x)&=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}\\&=\sqrt{(x-3)^2+(x^2-x+1-1)^2}\\&=\sqrt{x^2-6x+9+x^4-2x^3+x^2}\\&=\sqrt{x^4-2x^3+2x^2-6x+9} \text{ olur.}\end{aligned}$$

$f(x)$ uzunluğunun en kısa olması için $f(x)$ fonksiyonunun türevinin

0 olması gerekir.
Bu durumda

$$f'(x)=\frac{4x^3-6x^2+4x-6}{2\sqrt{x^4-2x^3+2x^2-6x+9}}=0$$

$$4x^3-6x^2+4x-6=0$$

$$2x^3-3x^2+2x-3=0$$

$$x^2(2x-3)+2x-3=0$$

$$(2x-3)(x^2+1)=0$$

$$x=\frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

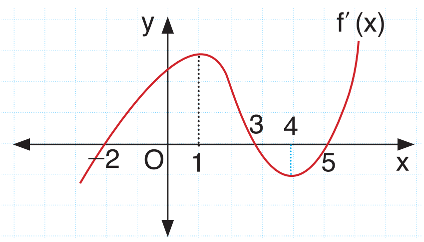
O hâlde B noktasının apsisi $\frac{3}{2}$ olur.

ALIŞTIRMALAR

1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 15$ **fonksiyonunun artan veya azalan olduğu aralıkları bulunuz.**

2. $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{ax-3}{x-2}$

fonksiyonu daima artan ise a hangi aralıktadır?

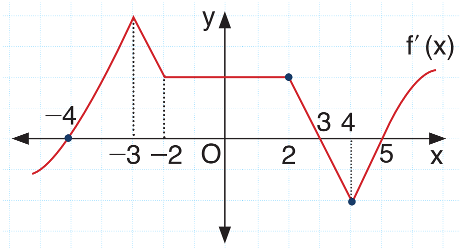
3. 

Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir. **Buna göre** $y = f(x)$ **fonksiyonunun artan veya azalan olduğu aralıkları bulunuz.**

4. $f(x) = x \cdot |x-3|$ **fonksiyonunun varsa yerel ekstremum noktalarını bulunuz.**

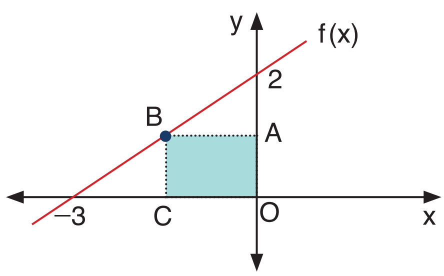
5. $f:[-1,\ 3] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 3x + 1$

fonksiyonunun en büyük ve en küçük değerlerini bulunuz.

6. 

Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir. **Buna göre** $y = f(x)$ **fonksiyonunun varsa yerel ekstremum noktalarınının apsislerini bulunuz.**

7. **Yarıçapı 4 cm olan bir küre içerisine çizilebilecek en büyük hacimli silindirin hacmini bulunuz.**

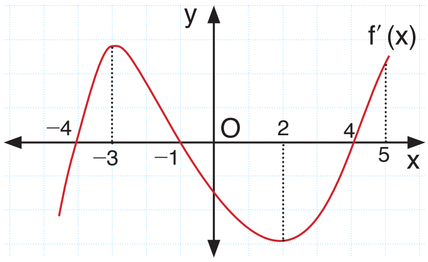
8. 

Yukarıda B köşesi $y = \dfrac{2x}{3} + 2$ **doğrusu üzerinde olan OABC dikdörtgeninin alanı en çok kaç birimkare olabilir?**

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 5

A) Aşağıda verilen boşluklara $y = f(x)$ **fonksiyonunun türevinin grafiğine göre** $<, >, =$ **sembollerinden uygun olanı yazınız.**

1.



I. $f(-3)$.........$f(-2)$

II. $f(4)$.........$f(5)$

III. $f'(-4)$.........$f'(-1)$

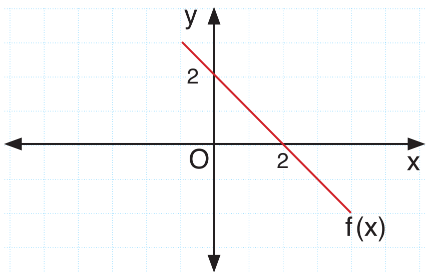
IV. $f''(-3)$.........$f''(2)$

V. $f''(-1)$.........$f''(3)$

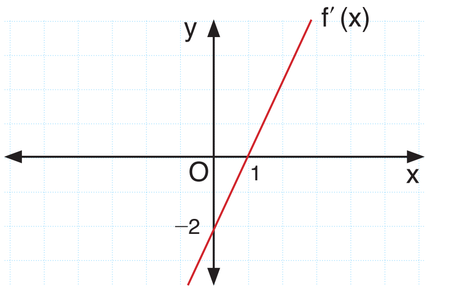
VI. $f''(-4)$.........$f''(0)$

B) Aşağıda verilen fonksiyonların grafikleri ile türevlerinin grafiklerini eşleştiriniz.

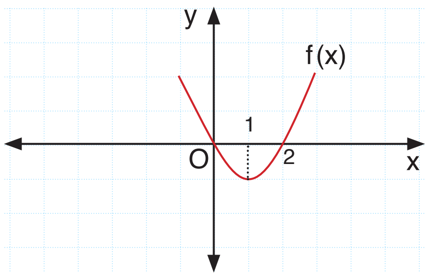
2. **I.**



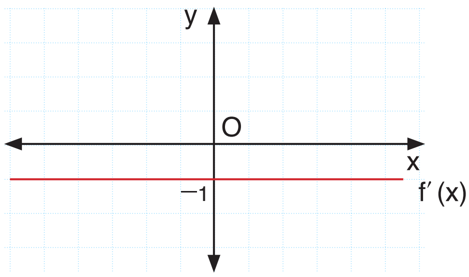
a)



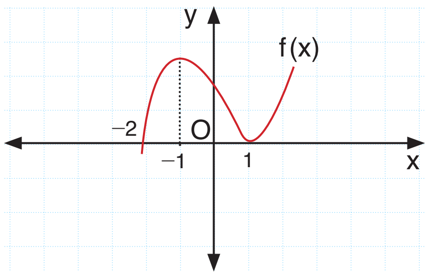
II.



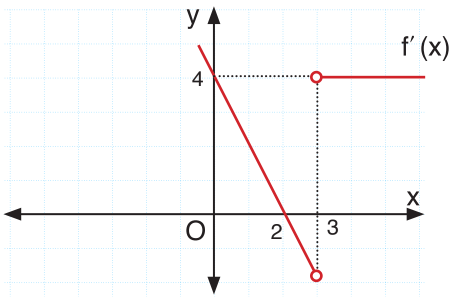
b)



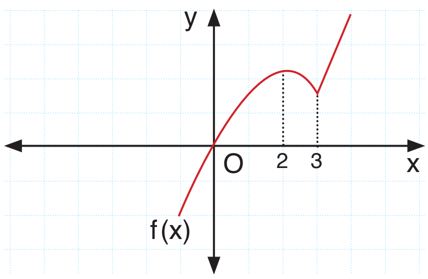
III.



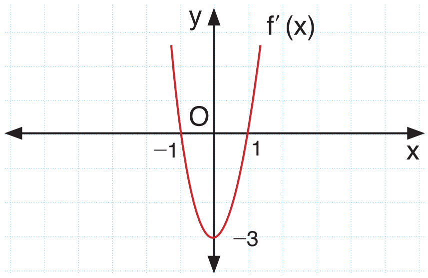
c)



IV.



ç)



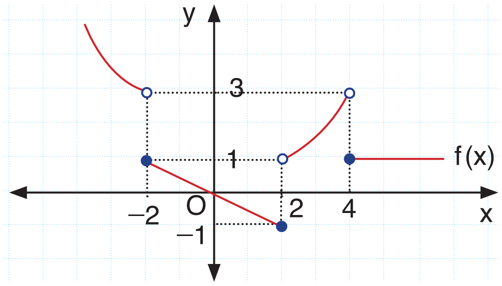
C) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruları cevaplandırınız.

3. $f(x)=\begin{cases} 2x^3-x^2+ax-3, & x>1 \text{ ise} \\ bx^2-4, & x\le 1 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu her noktada türevli ise $a+b$ **değeri kaçtır?**

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 4

4.



Yukarıda $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. **Buna göre** $\lim\limits_{x\to 2^-} f(f(x)-1)$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 4

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x^2}{\sin^2 3x}$ **ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{2}{9}$ C) $\frac{4}{9}$ D) 1 E) 0

6. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, sürekli bir fonksiyon olmak üzere $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}=4$ ise $f'(5)$ **değeri kaçtır?**

A) 4 B) 5 C) 9 D) 11 E) 15

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+4}{x+1}+ax+b\right)=2$ **olduğuna göre** $a\cdot b$ **kaçtır?**

A) -5 B) -4 C) -3 D) 1 E) 2

8. $f(x)=x^2-6ax+1$ **yerel ekstremum değeri** -8 **ise a nın pozitif değeri kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9. $f(x)=x^4-2x^3+6ax^2+bx+c$ fonksiyonunun dönüm noktası **olmadığına göre a nın en küçük tam sayı değeri kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

10. $y=|x^2-3x-4|$ **fonksiyonunun türevli olduğu küme aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\mathbb{R}-\{-4, 1\}$ B) $\{-1, 4\}$ C) $\mathbb{R}$

D) $\mathbb{R}-[-1, 4]$ E) $\mathbb{R}-\{-1, 4\}$

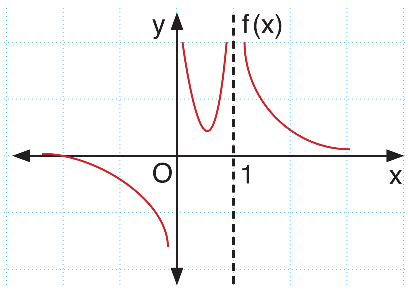
11. $f(x^2-x+1)=x^2-3x+1$ fonksiyonu veriliyor. **Aşağıdakilerden hangisi** $f'(1)$ **in değeri olabilir?**

A) -2 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

12. $f(x)=x^2\cdot|x^2-x-6|$ ise $f'(1)$ **değeri kaçtır?**

A) 0 B) 6 C) 10 D) 11 E) 12

13.



Yukarıda grafiği verilen $y=f(x)$ **fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $f(x)=\dfrac{x+1}{x(x-1)^2}$ B) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x(x-1)^2}$

C) $f(x)=\dfrac{x+2}{x(x-1)}$ D) $f(x)=\dfrac{x+2}{x(x-1)^2}$

E) $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$

14. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+3x^2+1}}{\sqrt{4x^2-3x+2}}$ **ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

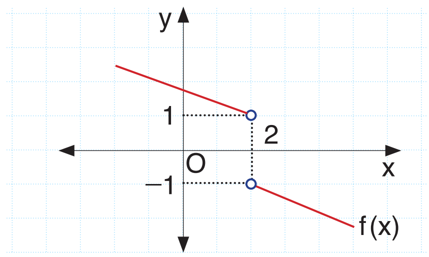
A) -1 B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 5

15. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{x^2-5}-2}$ **ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

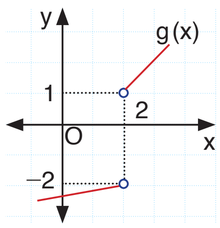
A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{3}$ C) 1 D) 0 E) $\frac{-1}{9}$

16.

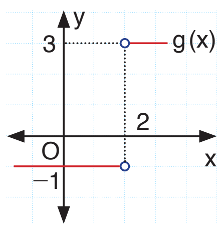


Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $(f+g)(x)$ fonksiyonu $x = 2$ apsisli noktada sürekli **olduğuna göre** $y = g(x)$ **fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

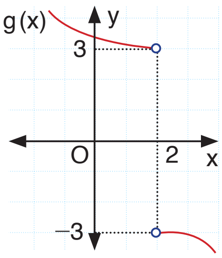
A)



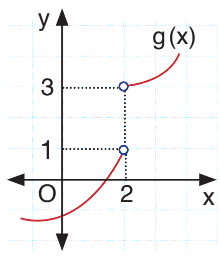
B)



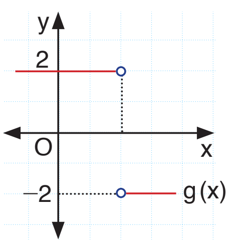
C)



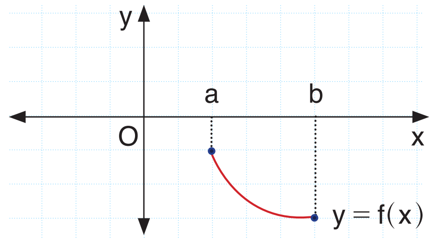
D)



E)



17.



Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki grafiği verilmiştir. **Buna göre aşağıdakilerden hangisi aynı aralıkta kesinlikle artandır?**

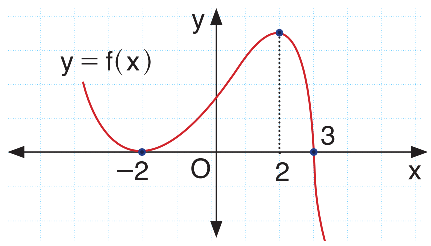
A) $\dfrac{f(x)}{x^3}$ B) $x \cdot f^2(x)$ C) $f^3(x)$

D) $x \cdot f(x)$ E) $x^2 \cdot f(x)$

18. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{7^{x+2}+3^{x-2}}{7^{x-3}-3^{x-1}}$ **ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{1}{3}$ B) 3 C) 7 D) 3^5 E) 7^5

19.



Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. **Buna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?**

A) $f'(2) \cdot f(2) = 0$ B) $f'(1) \cdot f'(3) < 0$

C) $f''(-2) \cdot f''(2) < 0$ D) $f'(3) \cdot f''(2) < 0$

E) $f(2) \cdot f'(2) \cdot f''(2) = 0$

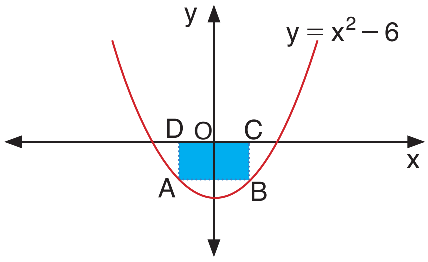
20. $y = 4t^3 - 2t^2 + 1$
$t = \sqrt{x^2+1}$

biçiminde verilen $y = f(x)$ **fonksiyonu için** $f'(0)$ **değeri kaçtır?**

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 5

21.

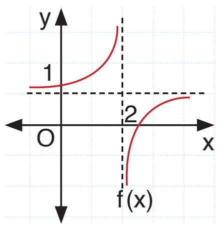


Yukarıda verilen ABCD dikdörtgeninin A ve B köşesi $y=x^2-6$ parabolü üzerindedir.
Buna göre ABCD dikdörtgeninin alanı en çok kaç birimkare olur.

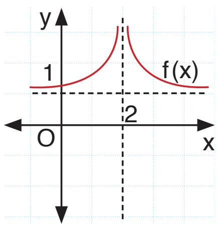
A) $4\sqrt{2}$ B) $8\sqrt{2}$ C) $16\sqrt{2}$
D) 8 E) 10

22. $f(x)=\dfrac{x(x+1)}{(x-2)^2}$ **fonksiyonun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

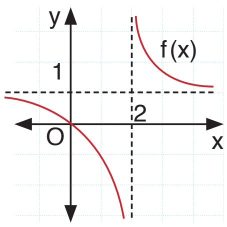
A)



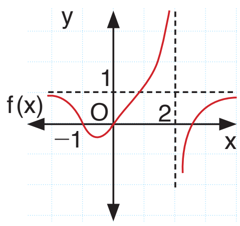
B)



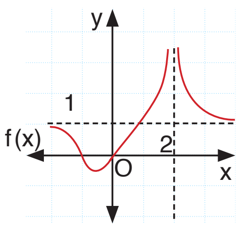
C)



D)



E)



Ç) Aşağıdaki açık uçlu soruları cevaplandırınız.

23. $f:\left[0,\ \dfrac{3\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x+\cos x$ **fonksiyonunun alabileceği en büyük ve en küçük değeri bulunuz.**

24. Aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^2-x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^3-1)}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt{4x^2-1}}{\sqrt{9x^2-x-1}}$

ç) $\lim\limits_{x\to 1^-}3^{\frac{1}{x-1}}$

25. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a) $f(x)=\sin^2\sqrt{x^2-1}$

b) $f(x)=\ln(\cos^2 x)$

c) $f(x)=e^{\sin(3x+1)}$

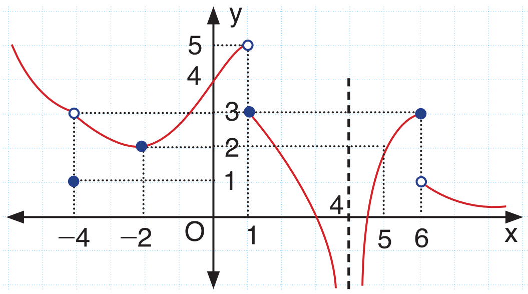
ç) $f(x)=\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{3}{x-2}\right)$

26. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x+3}, & x<1 \text{ ise}\\[2mm] \dfrac{x-2}{x+2}, & 1\le x\le 2 \text{ ise}\\[2mm] \dfrac{x^2-1}{x^2-5}, & x>2 \text{ ise}\end{cases}$

fonksiyonu hangi noktalarda sürekli değildir?

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 5

27.



Yukarıda verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine göre aşağıdakilerden kaç tanesi doğrudur?

I. $\lim_{x \to -2} f(x) = 2$

II. $\lim_{x \to -4^+} f(x) = 3$

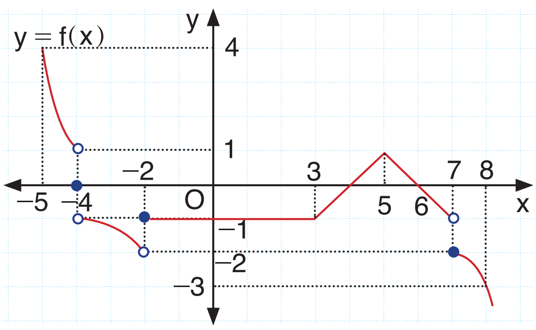
III. $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3$

IV. $\lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$

V. $\lim_{x \to 6^-} f(x) = 3$

VI. $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

28.



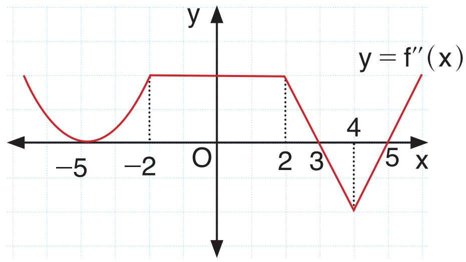
Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. **Buna göre $(-5, 8)$ aralığında fonksiyonun türevinin olmadığı noktaların apsislerini bulunuz.**

29. $y = e^{t+3}$

$t = 2x - 1$

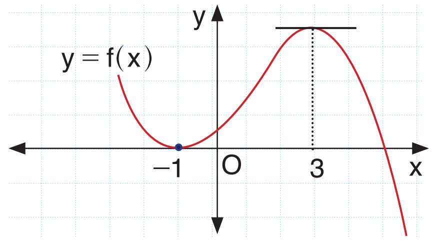
olduğuna göre $\frac{dy}{dx}$ in $x = 1$ **için değeri kaçtır?**

30.



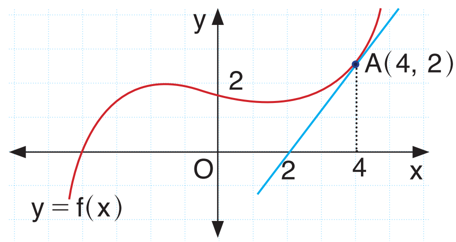
Yukarıda $y = f''(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. **Buna göre $y = f(x)$ fonksiyonunun içbükey ve dışbükey olduğu aralıklar ile dönüm noktalarının apsislerini bulunuz.**

31.



Yukarıda grafiği verilen III. dereceden bir polinom olan $y = f(x)$ fonksiyonunun dönüm noktasının apsisi kaçtır?

32.



Yukarıda verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun $A(4, 2)$ noktasından çizilen teğeti $B(2, 0)$ noktasından geçiyor.

Buna göre $g(x) = 3f^2(x) + f(x) + 2x - 1$ **fonksiyonunun üzerindeki $x = 4$ apsisli noktasından çizilen teğetin eğimini bulunuz.**

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 5

33. $f(x)=\sqrt{g(x^2-x+1)}+3x$

$g(1)=4,\ g'(1)=3$

ise $f'(0)$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

34. $f(x)=\dfrac{2x^2-3x-1}{x^2-16}$ **fonksiyonunun yatay ve düşey asimptotlarının kesiştikleri noktaları bulunuz.**

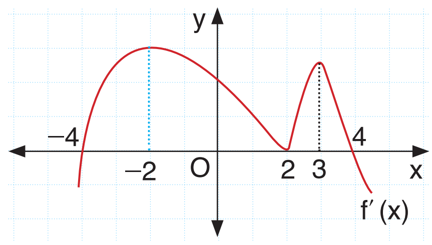
35. $f(x)=\dfrac{2x+1}{3x+1}$ **olduğuna göre** $\dfrac{d^nf(x)}{dx^n}$ **ifadesinin eşitini bulunuz.**

36. $f(x)=e^x\cdot \sin x$ **fonksiyonu için** $\dfrac{d^5f(x)}{dx^5}$ **in eşitini bulunuz.**

37. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-ax+9}$ **fonksiyonunun düşey asimptotu yoksa a hangi aralıkta olmalıdır?**

38. $f(x)$ **fonksiyonunun** $(1,\ 2)$ **noktasından geçen teğetinin eğimi** -3 **olduğuna göre** $g(x)=f^3(x)+x\cdot f(x)+3x-1$ **fonksiyonunun** $x=1$ **apsisli noktasındaki teğetinin eğimini bulunuz.**

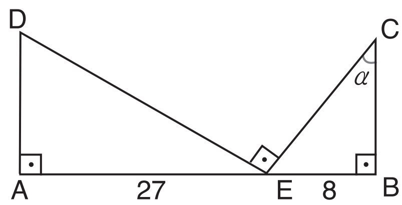
39.



Yukarıda grafiği verilen $y=f'(x)$ **fonksiyonunun grafiğine göre** $\dfrac{f'(x)}{f''(x)}<0$ **eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.**

40. $f(x)=\dfrac{3x^2-5x+1}{x-1}$ **fonksiyonunun asimptotlarını bulunuz.**

41.



$|AD|\perp|AB|$

$|BC|\perp|AB|$

$|AE|=27$ cm

$|EB|=8$ cm

$m(\widehat{ECB})=\alpha$

olmak üzere $|DE|+|EC|$ **toplamının en büyük olması için** $\tan\alpha$ **kaç olmalıdır?**

42. Yarıçapı 3 birim olan bir kürenin dışına minimum hacimli bir koni yerleştiriliyor. Koni küreye yan yüzeylerinden ve tabanından teğet **olduğuna göre koninin yüksekliği kaç birim olur?**

43. Albert Eistein tarafından ortaya atılan görelilik teorisine göre hareketsiz bir gözlemci tarafından ölçülen hareket halindeki bir cismin uzunluğu gerçek uzunluğundan daha kısa görünür.

$L = L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ denklemi ile modellenir.

Bu denklemde

L_0 : Duran cismin uzunluğu

L : Görünen uzunluk

v : Cismin hızı

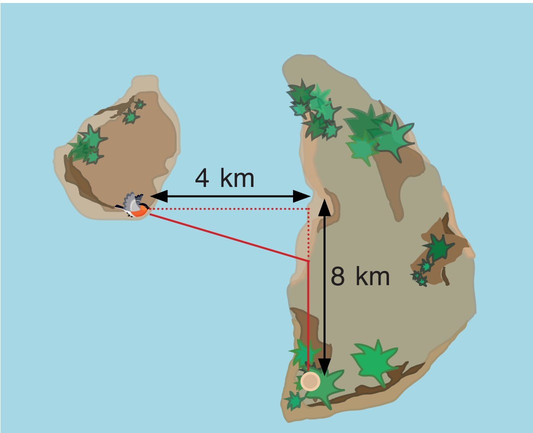
c : Işık hızı

olduğuna göre

a) **Bir uzay mekiği ışık hızının yarısına yaklaştığında cismin görünen uzunluğu ne olur?**

b) **Bir uzay mekiği ışık hızına yaklaştığında cismin görünen uzunluğu ne olur?**

44.



Yukarıda bir kuşun bir adadan diğerine uçuş rotası verilmiştir. Bu kuş su üzerinde 6 km/sa. ve kara üzerinde 10 km/sa. hızla uçmaktadır. **Buna göre bu kuş bir adadan diğer adadaki yuvasına en az kaç saatte gider?**

Bir firmanın ürettiği malların satışından elde ettiği toplam paraya gelir ya da toplam kazanç denir. Kâr toplam gelirden toplam giderin (maliyet) çıkarılması ile bulunur. Bu durumda satılan birim ürün sayısı x, $G(x)$ gelir fonksiyonu ve $M(x)$ de gider fonksiyonu olmak üzere kâr fonksiyonu $K(x) = G(x) - M(x)$ olur.

Giderin değişim oranı (marjinal gider)

$\frac{dM(x)}{dx} = M'(x)$,

gelirin değişim oranı (marjinal gelir)

$\frac{dG(x)}{dx} = G'(x)$,

kârın değişim oranı (marjinal kâr)

$\frac{dK(x)}{dx} = K'(x)$ ile bulunur.

Yukarıdaki bilgilere göre 45 ve 46. soruları cevaplandırınız.

45. Bir firma x birim ürettiği maldan toplam giderini $M(x) = x^2 + 2x + 27$ biçiminde hesaplıyor. Ayrıca x birim malın birim fiyatı $f(x) = 10x + \frac{2}{x}$ olduğunda malın tümü satılıyor.

Buna göre

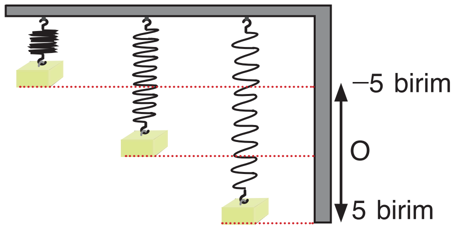
a) **Marjinal gider ve marjinal geliri bulunuz.**

b) **5 birim mal satıldığında elde edilen marjinal kârı bulunuz.**

46. Bir malın toplam gideri (maliyet) x TL, toplam geliri (satış fiyatı) y TL olmak üzere x ile y arasında $y = -x^2 + 5x + 5$ bağıntısı bulunmaktadır.

Buna göre bu malın satışından en çok kaç TL kâr elde edilir?

47.



Bir yayın ucuna asılı olan bir ağırlığın hava direnci olmaksızın yukarı ve aşağı doğru yaptığı salınıma basit harmonik hareket denir.

Yukarıdaki şekilde bir yayın ucuna asılı bir ağırlık, II. konumda durağan bir haldeyken aşağı doğru 5 birim çekildikten sonra $t = 0$ anında bırakılıp yukarı ve aşağıya doğru hareketine başlıyor. t zaman sonra yayın konumu $s(t) = 5\cos t$ biçiminde modellenmiştir.

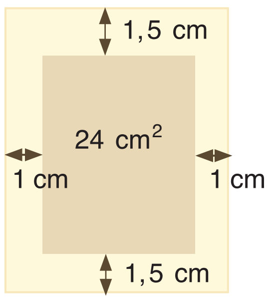
Yayın t anındaki hızı $v(t) = s'(t)$ ve t anındaki ivmesi $a(t) = v'(t)$ **olmak üzere**

a) **Bu hareketlinin en büyük hızını bulunuz.**

b) **Hareketlinin hızının en büyük olduğu durumdaki konumunu bulunuz.**

c) **Hareketlinin ivmesinin en büyük olduğu konumu bulunuz.**

48.



Bir kağıdın $24\ cm^2$ lik kısmına yazı yazılacaktır. **Alttan ve üstten** 1,5 cm, **sağdan ve soldan 1 cm boşluk bırakılacağına göre bu kağıdın alanı en az kaç** cm^2 **olmalıdır?**

49 ve 50. soruları aşağıda verilen bilgilere göre cevaplandırınız.

Bir hareketlinin t saatte aldığı yol $s(t)$ fonksiyonu ile veriliyor. $v(t)$ hareketlinin hızı ve $v(t) = s'(t)$ ve $a(t)$ ivmesi olmak üzere $a(t) = v'(t) = s''(t)$ biçiminde bulunur.

49. Bir hareketlinin t saatte aldığı yol $s(t) = 2t^3 - t^2 + 3t + 1$ km fonksiyonu ile veriliyor.
Buna göre

a) **Hareketlinin 3. saatteki anlık hızını bulunuz.**

b) **Hareketlinin 2. saatteki anlık ivmesini bulunuz.**

50. Dikey olarak fırlatılan bir cismin t saniyede aldığı yol $s(t) = 64t - 4t^2$ m fonksiyonu ile veriliyor.
Buna göre

a) **Bu cisim en çok kaç m yükselir?**

b) **Bu cisim yere kaçıncı saniyede çarpar?**

DEĞERLENDİRME
Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorular ile ilgili konuları veya faaliyetleri tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.

SAYILAR VE CEBİR

6. İNTEGRAL

Doğaya karşı sorumluluk bilincinin toplumda yerleşmesi sonucu Dünya daha yaşanabilir bir yer hâline gelecektir. Ekosistemin bozulması doğanın fiziksel ve biyolojik yapısının bozulmasına, insan sağlığının olumsuz etkilenmesine neden olur. Örneğin 1999 yılında Marmara açıklarındaki kazada bir petrol tankerinden sızan sıvı yakıtın etkisi yıllarca sürmüştür. Böyle bir sızıntının deniz yüzeyinde kapladığı alan, kenarları düzgün olmayan bölgeye bir örnektir. Kenarları düzgün olmayan kapalı bir bölgenin alanını bulmak için kenarları düzgün olan daha küçük kapalı bölgelerden yararlanılır.

Hazırlık Çalışması

Yukarıdaki petrol sızıntısının alanını yaklaşık olarak hesaplamak için kenarları düzgün olan hangi çokgenlerden yararlanılabilir? Tartışınız.

6.1 BELİRSİZ İNTEGRAL

Bu Bölümde Neler Öğreneceksiniz?

- Bir fonksiyonun belirsiz integralini açıklayarak integral alma kurallarını oluşturma
- Belirsiz integral alma yöntemlerini kullanarak integral alma

Terimler ve Kavramlar

- Ters türev
- Belirsiz integral
- İntegral sabiti

Görsel 6.1: Türk Yıldızları

Bir hareketlinin zamana bağlı yol denkleminin türevi bu hareketlinin hızını verir ve hareketlinin zamana bağlı hız denkleminin türevi ise ivmeyi verir. Bu durumda zamana bağlı hız denklemi verilen bir hareketlinin yol denklemini bulmak için hız denkleminin hangi fonksiyonun türevi olduğunu bulmak gerekir. Benzer şekilde zamana bağlı ivme denklemi verilen bir hareketlinin hız denklemini bulmak için ivme denkleminin hangi fonksiyonun türevi olduğunu bilmek gerekir.

Türevi verilen bir fonksiyonun kendisini bulma işlemine integral alma işlemi denir. Bu durumda türev ve integral birbirinin tersi olan işlemlerdir ve integral alma işlemi ters türev olarak da adlandırılır.

$x(t)$: Zamana bağlı yol denklemi
$v(t)$: Zamana bağlı hız denklemi
$a(t)$: Zamana bağlı ivme denklemi olmak üzere

$$x(t) \underset{\text{İntegrali}}{\overset{\text{Türevi}}{\rightleftarrows}} v(t) \underset{\text{İntegrali}}{\overset{\text{Türevi}}{\rightleftarrows}} a(t)$$

biçiminde gösterilebilir.

ÖRNEK 1

Türevi $f(x) = 2x$ olan fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?

a) $g(x) = x^2 - 1$
b) $h(x) = x^2$
c) $k(x) = x^2 + 2$

ÇÖZÜM

Verilen fonksiyonların türevleri alınırsa

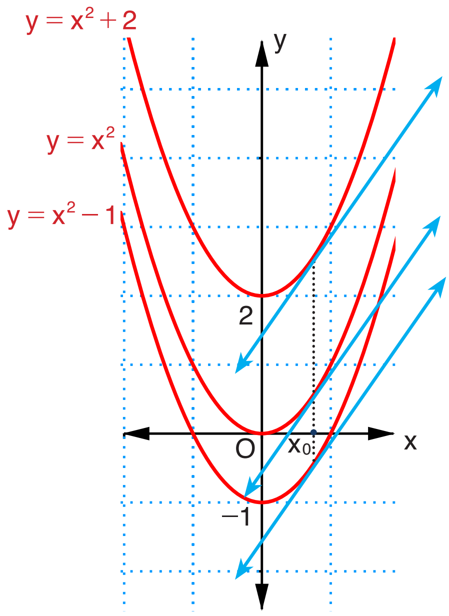
a) $g(x) = x^2 - 1 \Rightarrow g'(x) = \frac{d}{dx}(x^2 - 1) = 2x$ bulunur.

b) $h(x) = x^2 \Rightarrow h'(x) = \frac{d}{dx}x^2 = 2x$ bulunur.

c) $k(x) = x^2 + 2 \Rightarrow k'(x) = \frac{d}{dx}(x^2 + 2) = 2x$ bulunur.

Elde edilen sonuçlar incelendiğinde g, h ve k fonksiyonları türevi $f(x) = 2x$ olan fonksiyonlardır. Bunun gibi sonsuz sayıda fonksiyon bulunmaktadır.

Ayrıca aşağıdaki grafikte de görüldüğü gibi g, h ve k fonksiyonlarının x_0 noktasındaki teğetleri birbirine paraleldir.



Buna göre $f(x) = 2x$ fonksiyonunun ters türevi bir fonksiyon ailesini oluşturur. Sabit terimlerin türevlerinin sıfır olmasından dolayı $c \in \mathbb{R}$ iken $x^2 + c$ türündeki tüm fonksiyonların türevi 2x e eşittir. Bu durum $F(x) = x^2 + c \Rightarrow F' = \frac{d}{dx}(x^2 + c) = 2x = f(x)$ şeklinde gösterilir.

Bir fonksiyonun türevi f ve f nin tüm ters türevlerinin ailesi $F(x)$ olsun. $F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ olacak şekilde bir $F(x)$ fonksiyonu varsa $F(x) + c$ fonksiyonuna $f(x)$ in ters türevi veya belirsiz integrali denir ve $\int f(x)dx = F(x) + c$ şeklinde gösterilir.

Bu eşitlik $f(x)$ fonksiyonunun belirsiz integralinin $F(x) + c$ olduğunu gösterir. $\int$ sembolüne integral işareti ve c gerçek sayısına da integral sabiti denir. $f(x)$ fonksiyonu da integrali alınan fonksiyonu göstermektedir.

O halde $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x)dx = F(x) + c$ olur.

$\int f(x)dx$ ifadesindeki dx diferansiyeli integralin hangi değişkene göre alındığını gösterir.
Örneğin $(c \in \mathbb{R})$ olmak üzere türevi $f(x) = 2x$ olan fonksiyonun belirsiz integrali $\int 2xdx = x^2 + c$ şeklinde gösterilir.

ÖRNEK 2

Aşağıda verilen integrallerin hangi değişkene göre alınacağını bulunuz.

a) $\int 2x^4\,dx$ **b)** $\int 5y^2x\,dy$ **c)** $\int \sin x \cdot \cos t\,dt$

ÇÖZÜM

a) $\int 2x^4\,dx$ integrali $2x^4$ fonksiyonunun x e göre integralinin alınacağını

b) $\int 5y^2x\,dy$ integrali $5 \cdot y^2 \cdot x$ fonksiyonunun y ye göre integralinin alınacağını

c) $\int \sin x \cos t\,dt$ integrali $\sin x \cos t$ fonksiyonunun t ye göre integralinin alınacağını göstermektedir.

ÖRNEK 3

Aşağıda verilen integralleri hesaplayınız.

a) $\int dx$ **b)** $\int 4x^3\,dx$ **c)** $\int \cos x\,dx$

ÇÖZÜM

Bir belirsiz integral işlemini yapmak için integrali alınacak olan fonksiyonun ters türevi biliniyorsa bu fonksiyonun ters türevi yazılır. Sabit terimleri temsilen c sayısı eklenerek belirsiz integral işlemi yapılmış olur.

a) $(x)' = \frac{d}{dx}(x) = 1$ olacağından $\int dx = x + c$

b) $(x^4)' = \frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$ olacağından $\int 4x^3dx = x^4 + c$

c) $(\sin x)' = \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ olacağından $\int \cos x\,dx = \sin x + c$ olur.

İntegral ve türev birbirinin tersi olan işlemler olduğundan aşağıdaki sonuçlar çıkarılabilir.

SONUÇ

Bir fonksiyonun diferansiyelinin integrali bu fonksiyona sabit eklenerek bulunur. f sürekli ve türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$\int df(x) = \int f'(x)dx = f(x) + c$ olarak bulunur.

ÖRNEK 4

Aşağıdaki ifadelerin eşitini bulunuz.

a) $\int d\left(\sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{x}\right)$ b) $\int d(\tan x)$ c) $\int d(e^x+e^{-x})$

ÇÖZÜM

a) $\int d\left(\sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{x}\right)=\sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{x}+c$

b) $\int d(\tan x)=\tan x+c$

c) $\int d(e^x+e^{-x})=e^x+e^{-x}+c$

SONUÇ

Bir fonksiyonun integralinin türevi fonksiyonun kendisine eşittir. f sürekli bir fonksiyon olmak üzere $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$ olarak yazılır.

ÖRNEK 5

Aşağıdaki ifadelerin türevini bulunuz.

a) $\int (3x^2+x-1)dx$ b) $\int e^x dx$ c) $\int \cos x\, dx$

ÇÖZÜM

a) $\int (3x^2+x-1)dx$ in türevi $\frac{d}{dx}\int (3x^2+x-1)dx=3x^2+x-1$

b) $\int e^x dx$ in türevi $\frac{d}{dx}\int e^x dx=e^x$

c) $\int \cos x\, dx$ in türevi $\frac{d}{dx}\int \cos x\, dx=\cos x$ olarak bulunur.

ÖRNEK 6

$\frac{d^2}{dx^2}\int (x^4-3x^2+2)dx$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\frac{d}{dx}\int (x^4-3x^2+2)dx=x^4-3x^2+2$ olur.

Buradan

$$\frac{d^2}{dx^2}\int (x^4-3x^2+2)dx=\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(\int (x^4-3x^2+2)dx\right)\right]$$

$$=\frac{d}{dx}(x^4-3x^2+2)=4x^3-6x \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 7

$\int [x \cdot f(x) - 3]dx = x^4 - 2x^3 + c$ ise $f(1)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\int [x \cdot f(x) - 3]dx = x^4 - 2x^3 + c$$
$$\frac{d}{dx}\int [x \cdot f(x) - 3]dx = \frac{d}{dx}(x^4 - 2x^3 + c)$$
$$x \cdot f(x) - 3 = (x^4 - 2x^3 + c)'$$
$$x \cdot f(x) - 3 = 4x^3 - 6x^2$$
$$f(x) = 4x^2 - 6x + \frac{3}{x} \Rightarrow f(1) = 1 \text{ bulunur.}$$

Temel İntegral Alma Kuralları

İntegral alma işleminde integrali alınacak olan ifadenin hangi fonksiyonun türevi olduğu biliniyorsa bu fonksiyona c integral sabiti eklenerek integral işlemi tamamlanır.

Aşağıdaki tabloda temel integral alma kuralları, bazı fonksiyonların türevi ile integrali arasındaki ilişkiden yararlanılarak verilmiştir.

$F(x)$	$F'(x) = f(x)$	$\int f(x)dx$
ax	a	$\int a\,dx = ax + c$
$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	x^n	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \; (n \neq -1)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + c$
e^x	e^x	$\int e^x\,dx = e^x + c$
$\frac{a^x}{\ln a}$	a^x	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
$\sin x$	$\cos x$	$\int \cos x\,dx = \sin x + c$
$-\cos x$	$\sin x$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$
$\tan x$	$\sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$	$\int (1 + \tan^2 x)\,dx = \tan x + c$
$-\cot x$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + c$
$-\cot x$	$\mathrm{cosec}^2 x$	$\int \mathrm{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c$
$-\cot x$	$1 + \cot^2 x$	$\int (1 + \cot^2 x)\,dx = -\cot x + c$

ÖRNEK 8

Aşağıdaki ifadelerin integrallerini hesaplayınız.

a) $\int x^4\,dx$ **b)** $\int \frac{1}{t^2}\,dt$ **c)** $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

ÇÖZÜM

a) $\int x^4\,dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{x^5}{5} + c$

b) $\int \frac{1}{t^2}dt = \int t^{-2}dt = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + c = \frac{t^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{t} + c$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = 2\sqrt{x} + c$ olur.

Bir Fonksiyonun Sabit Bir Gerçek Sayı ile Çarpımının İntegrali

Bir fonksiyonun sabit bir gerçek sayı ile çarpımının integrali o fonksiyonun integralinin sabitle çarpımına eşittir.

f sürekli bir fonksiyon ve $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)dx$ olur.

ÖRNEK 9

$\int 2\ln x dx = 2\int \ln x dx$ eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

$\int 2\ln x\,dx = 2\int \ln x\,dx$ eşitliğinin her iki tarafının türevi alınırsa

$$\frac{d}{dx}\left(\int 2\ln x\,dx\right) = \frac{d}{dx}\left(2\int \ln x\,dx\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int 2\ln x\,dx\right) = 2\frac{d}{dx}\left(\int \ln x\,dx\right)$$

$2\ln x = 2\ln x$ bulunur.

ÖRNEK 10

Aşağıdaki ifadelerin integrallerini hesaplayınız.

a) $\int \sqrt{3}\,dx$ **b)** $\int \left(-\frac{5}{7}\right)dt$

ÇÖZÜM

a) $\int \sqrt{3}\,dx = \int \sqrt{3}\,x^0 dx = \sqrt{3}\int x^0 dx = \sqrt{3}\cdot\frac{x^{0+1}}{0+1} + c = \sqrt{3}\,x + c$

b) $\int \left(-\frac{5}{7}\right)dt = \int \left(-\frac{5}{7}\right)t^0 dt = \left(-\frac{5}{7}\right)\int t^0 dt = -\frac{5}{7}\cdot\frac{t^{0+1}}{0+1} + c = -\frac{5t}{7} + c$

olur.

İki Fonksiyonun Toplamının veya Farkının İntegrali

İki fonksiyonun toplamının veya farkının integrali, bu fonksiyonların integrallerinin toplamına veya farkına eşittir. f ve g sürekli fonksiyonlar olmak üzere $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ ve $\int [a \cdot f(x) \pm b \cdot g(x)]dx = a\int f(x)dx \pm b\int g(x)dx$ olur.

ÖRNEK 11

Aşağıdaki ifadelerin integrallerini hesaplayınız.

a) $\int x^2(x-1)^2dx$

b) $\int \left(\frac{x^2}{3} - 2\sqrt{x} + \frac{3}{x^2}\right)dx$

c) $\int (4^x + \cos x + \sqrt{x} + e^x)dx$

ç) $\int 4\tan^2 x\, dx$

ÇÖZÜM

a)
$$\begin{aligned}\int x^2(x-1)^2dx &= \int x^2(x^2-2x+1)dx\\ &= \int (x^4-2x^3+x^2)dx\\ &= \int x^4dx - \int 2x^3dx + \int x^2dx\\ &= \frac{x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + c\\ &= \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} + c\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\int \left(\frac{x^2}{3} - 2\sqrt{x} - \frac{3}{x^2}\right)dx &= \frac{1}{3}\int x^2dx - 2\int \sqrt{x}\,dx - 3\int \frac{1}{x^2}dx\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 3\cdot\frac{x^{-1}}{-1} + c\\ &= \frac{x^3}{9} - 2\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3\cdot x^{-1} + c\\ &= \frac{x^3}{9} - \frac{4\sqrt{x^3}}{3} + \frac{3}{x} + c\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\int (4^x + \cos x + \sqrt{x} + e^x)dx &= \int 4^xdx + \int \cos x dx + \int \sqrt{x}\,dx + \int e^xdx\\ &= \frac{4^x}{\ln 4} + \sin x + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + e^x + c\\ &= \frac{4^x}{\ln 4} + \sin x + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + e^x + c\end{aligned}$$

ç)
$$\begin{aligned}\int 4\tan^2 x\,dx &= 4\int \tan^2 x\,dx\\ &= 4\int (\tan^2 x + 1 - 1)dx\\ &= 4\left(\int (1+\tan^2 x)dx - \int dx\right)\\ &= 4(\tan x - x) + c\\ &= 4\tan x - 4x + c \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK 12

$\int \frac{\sin x(1+\cos 2x)}{\sin 2x}dx$ integralini hesaplayınız.

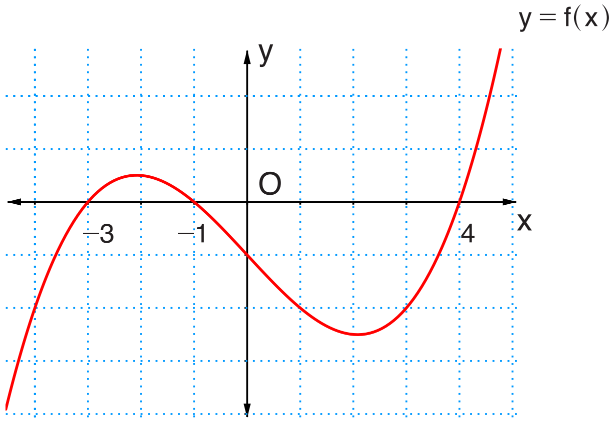
ÇÖZÜM

$$\int \frac{\sin x(1+\cos 2x)}{\sin 2x}dx = \int \frac{\sin x(1+2\cos^2 x-1)}{2\sin x\cos x}dx$$
$$= \int \frac{\sin x(2\cos^2 x)}{2\sin x\cos x}dx$$
$$= \int \cos x\,dx$$
$$= \sin x + c \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 13

Yandaki şekilde üçüncü dereceden $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$\int f(x)dx = \frac{ax^4}{4} - \frac{bx^2}{2} + 24x$ olduğuna göre $a+b$ toplamı kaçtır?



ÇÖZÜM

$y=f(x)$ fonksiyonun grafiği $-3, -1$ ve 4 noktalarından geçtiğine göre

$f(x) = m(x+3)(x+1)(x-4)$

$f(x) = m(x^3-13x-12)$

$$\int f(x)dx = \int m(x^3-13x-12)dx$$

$$m\left(\frac{x^4}{4} - \frac{13x^2}{2} - 12x\right) + c = \frac{ax^4}{4} - \frac{bx^2}{2} + 24x$$

eşitliğinden

$-12m = 24$

$m = -2$

$\frac{m}{4} = \frac{a}{4}$

$m = a$

$a = -2$

$-\frac{13m}{2} = -\frac{b}{2}$

$13m = b$

$b = -26$

$c = 0$ olur.

Bu durumda $a+b = (-2)+(-26) = -28$ bulunur.

ÖRNEK 14

$f(x)$ fonksiyonuna $A(-2, 4)$ noktasından çizilen teğetin eğimi 3 ve $f''(x) = 4x - 1$ olduğuna göre $f(4)$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\int f''(x)dx = \int (4x-1)dx$$

$$f'(x) = \frac{4x^2}{2} - x + c = 2x^2 - x + c \text{ olur.}$$

$f'(-2) = 3$ olduğundan

$$f'(-2) = 8 + 2 + c = 3$$

$$c = -7 \text{ olarak bulunur.}$$

$f'(x) = 2x^2 - x - 7$ integrali alınırsa

$$f(x) = \int f'(x)dx$$

$$= \int (2x^2 - x - 7)dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 7x + c$$

Buradan $f(-2) = 4$ olacağından

$$f(-2) = 2 \cdot \frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} - 7 \cdot (-2) + c = 4$$

$$= -\frac{16}{3} - 2 + 14 + c = 4$$

$$c = -\frac{8}{3} \text{ bulunur.}$$

Bu durumda

$$f(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 7x - \frac{8}{3}$$

$$f(4) = \frac{2 \cdot 64}{3} - 8 - 28 - \frac{8}{3} = 4 \text{ olur.}$$

ÖRNEK 15

Bir ürünün marjinal maliyeti maliyet fonksiyonunun türevi olarak tanımlanmaktadır. x üretim miktarını göstermek üzere bir imalathanenin TL cinsinden marjinal maliyeti $f(x) = 6x^2 + 10x - 15$ olarak tahmin edilmektedir. Bu üründen sadece bir tane üretmenin maliyeti 52 TL olduğuna göre 10 tane üretmenin maliyetini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

Maliyet fonksiyonu M(x) olsun. Bu durumda marjinal maliyet fonksiyonunun integrali alınırsa bu ürüne ait maliyet fonksiyonu bulunur.

$$M(x) = \int f(x)dx = \int (6x^2 + 10x - 15)dx$$

$$= \frac{6x^3}{3} + 10\frac{x^2}{2} - 15x + c$$

$M(x) = 2x^3 + 5x^2 - 15x + c$

$M(1) = 52$ olduğundan

$M(1) = 2 + 5 - 15 + c = 52 \Longrightarrow c = 60$ olur. Bu durumda

$M(x) = 2x^3 + 5x^2 - 15x + 60$ maliyet fonksiyonunu kullanarak 10 tane ürünü üretmek için

$M(10) = 2 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 - 15 \cdot 10 + 60 = 2410$ TL olur.

ALIŞTIRMALAR

1. **Aşağıda verilen integralleri hesaplayınız.**

   a) $\int d(\cot x + \ln x)$

   b) $\int \frac{d}{dx}(5^x - e^{x+1})dx$

2. **Aşağıda verilen ifadeleri hesaplayınız.**

   a) $\frac{d}{dx}\int (x^2+5)dx$

   b) $\frac{d}{dx}\int \left(\cos^3 x - \frac{1}{x}\right)dx$

   c) $\frac{d}{dx}\int (\cot x + \ln x)dx$

3. **Aşağıda verilen integralleri hesaplayınız.**

   a) $\int \left(\frac{2x - \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}\right)dx$

   b) $\int x^2 dy + \int t dx$

   c) $\int (x^2 y + xy^2 + y)dx$

4. $\int x^2 f(x)dx = 6x^4 - 4x^3 + c$ ise $f(-2)$ **değerini bulunuz.**

5. $x^2 \int f(x)dx = x^4 - 4x^3$ ise $f(1)$ **değerini bulunuz.**

6. **Aşağıda verilen integralleri hesaplayınız.**

   a) $\int (7 \cdot 2^x + \sec^2 x - 2)dx$

   b) $\int \left(\frac{2}{\sin^2 x} + e^x\right)dx$

   c) $\int \left(\frac{1}{t} - t^3 + \sin t\right)dt$

   ç) $\int \cot^2 x\, dx$

7. $\int \left(\frac{\cos^2 x - \sin x - 1}{1 + \sin x}\right)dx$ **integralini hesaplayınız.**

8. $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\int x^m dx = \frac{x^{n+1}}{2n-6} + c$ **olduğuna göre** $m \cdot n$ **değerini bulunuz.**

9. $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği $(2,1)$ noktasından geçmektedir. $f'(x) = 6x^2 - 4x$ **olduğuna göre** $y = f(x)$ **fonksiyonunun denklemini bulunuz.**

10. $F(x) = \int (3\ln x + 1)dx$ fonksiyonu veriliyor. **Buna göre** $F(x)$ **fonksiyonunun** $x = e$ **apsisli noktasındaki teğetinin eğimini bulunuz.**

11. L uzunluğundaki bir elektrik telinin esnemesi sonucu oluşan durumun denklemi $f''(x) = \frac{x \cdot L}{2} - x^2$ ile verilmiştir. **Buna göre** $f(0) = 0$ **ve** $f'(1) = 0$ **için** $f(x)$ **fonksiyonunu bulunuz.**

İntegral Alma Yöntemleri

Bazı durumlarda integrali alınacak fonksiyonun hangi ifadenin türevi olduğunu görmek zor olabilir. Bunun için integral alma yöntemleri geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden bazıları aşağıdaki gibidir.

Değişken Değiştirme Yöntemi

f ve g sürekli türevlenebilen bir fonksiyon olmak üzere $x = g(u)$ dönüşümü yapıldığında $dx = g'(u)du$ olacağından

$\int f(x)dx = \int f(g(u))g'(u)du$ integrali bulunur.

İnregral hesaplandıktan sonra $u = g^{-1}(x)$ dönüşümü ile tekrar x değişkenine dönülür. Bu nedenle g fonksiyonu, tersi olan bir fonksiyon olmak zorundadır.

ÖRNEK 16

$\int (3x+1)^3 dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$\int (3x+1)^3 dx$ integralini bulmak için $3x+1 = u$ olsun.

$3x+1 = u$ ifadesinde her iki tarafın diferansiyeli alınırsa

$d(3x+1) = d(u)$

$3dx = du$

$dx = \dfrac{du}{3}$ bulunur.

Bulunan ifadeler integralde yerine yazılırsa

$$\int (3x+1)^3 dx = \int u^3 \cdot \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^3 du$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{u^4}{4} + c$$

$$= \frac{u^4}{12} + c$$

$$= \frac{(3x+1)^4}{12} + c$$ bulunur.

ÖRNEK 17

$\int \sin(x^2-4x)\cdot(2x-4)dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$\int \sin(x^2-4x)\cdot(2x-4)dx$ integralinde $(x^2-4x)' = 2x-4$ olacağından $x^2-4x = u$ dönüşümü yapılır.

$x^2-4x = u$ ifadesinde her iki tarafın diferansiyeli alınırsa

$(2x-4)dx = du$ olur.

Bu değerler integralde yerine yazılırsa

$\int \sin u \cdot du = -\cos u + c = -\cos(x^2-4x) + c$ bulunur.

ÖRNEK 18

$\int \frac{\ln x-2}{x}dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

Verilen integralde $(\ln x-2)'=\frac{1}{x}$ olduğundan $\ln x-2=u$ dönüşümü yapılır. Bu durumda

$\frac{1}{x}dx=du$ olur.

Elde edilen değerler integralde yerine yazılırsa

$\int u\,du=\frac{u^2}{2}+c=\frac{(\ln x-2)^2}{2}+c$ olur.

ÖRNEK 19

$\int \tan x\,dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$\int \tan x\,dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx$ integralinde $\cos x=u$ dönüşümü yapılırsa

$-\sin x\,dx=du \Rightarrow \sin x\,dx=-du$ olur.

Bu durumda

$$\begin{aligned}\int \tan x\,dx&=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx\\&=\int \frac{-du}{u}\\&=-\int \frac{du}{u}=-\ln|u|+c\\&=-\ln|\cos x|+c \text{ olur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK 20

$\int (3x^3-4)^6\cdot 9x^2dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$u=3x^3-4$ dönüşümü yapılırsa $du=9x^2\,dx$ olur.

$$\begin{aligned}\int (3x^3-4)^6\cdot 9x^2dx&=\int u^6du=\frac{u^7}{7}+c\\&=\frac{(3x^3-4)^7}{7}+c \text{ olur}\end{aligned}$$

SONUÇ

$(n\neq -1)$ olmak üzere

$\int [f(x)]^n\cdot f'(x)dx=\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+c$ olur.

ÖRNEK 21

$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$u = \cos x$ dönüşümü yapılırsa $du = -\sin x\, dx \Rightarrow \sin x\, dx = -du$ olur.

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \int -\frac{du}{u^3}$$
$$= -\int u^{-3} du$$
$$= -\frac{u^{-2}}{-2} + c$$
$$= \frac{1}{2u^2} + c = \frac{1}{2\cos^2 x} + c \text{ olur.}$$

ÖRNEK 22

$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$x = u^2$ denirse $dx = 2udu$ olur. Buradan

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{e^u}{u} 2udu$$
$$= 2\int e^u du$$
$$= 2e^u + c = 2e^{\sqrt{x}} + c \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 23

$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$g(x) = u$ denilirse $g'(x)dx = du$ olur. Buna göre

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \int \frac{du}{u}$$
$$= \ln|u| + c$$
$$= \ln|g(x)| + c \text{ bulunur.}$$

SONUÇ

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln|g(x)| + c \text{ olur.}$$

ÖRNEK 24

$\int \frac{1}{x+2} dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$x+2=u$ dönüşümü yapılırsa $dx=du$ olduğundan

$$\int \frac{1}{x+2}dx=\int \frac{1}{u}du$$
$$=\ln|u|+c$$
$$=\ln|x+2|+c \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 25

$\int \left(\frac{x^2+2x+5}{x+2}\right)dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$$\int \frac{x^2+2x+5}{x+2}dx=\int \left(x+\frac{5}{x+2}\right)dx$$
$$=\int x\,dx+\int \frac{5}{x+2}dx$$
$$=\frac{x^2}{2}+5\ln|x+2|+c \text{ bulunur.}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2+2x+5 & x+2 \\ \cline{2-2} -\ x^2+2x & x \\ \hline 5 & \end{array}$$

ÖRNEK 26

$\int \left(\frac{x+5}{x+2}\right)dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$$\int \left(\frac{x+5}{x+2}\right)dx=\int \left(\frac{x+2+3}{x+2}\right)dx$$
$$=\int \left(\frac{x+2}{x+2}+\frac{3}{x+2}\right)dx$$
$$=\int \left(1+\frac{3}{x+2}\right)dx$$
$$=\int dx+\int \frac{3}{x+2}dx$$
$$=x+3\ln|x+2|+c \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 27

$\int e^{3x}dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$\int e^{3x}dx$ integralinde $3x=u$ denirse $3dx=du$ olup $dx=\frac{du}{3}$ olur.

Buradan $\int \frac{e^u}{3}\cdot du=\frac{1}{3}e^u+c=\frac{1}{3}e^{3x}+c$ bulunur.

SONUÇ

$c,\ a\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$\int e^x dx=e^x+c \text{ ve } \int e^{ax}dx=\frac{e^{ax}}{a}+c \text{ olur.}$$

ÖRNEK 28

$\int 5^{4x}dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$4x = u \Rightarrow 4dx = du$ olup $dx = \dfrac{du}{4}$ bulunur.

Buradan $\displaystyle\int \frac{5^u}{4}du = \frac{1}{4}\cdot\frac{5^u}{\ln 5} + c$

$\displaystyle = \frac{5^{4x}}{4\cdot \ln 5} + c$ olur.

SONUÇ

a, b, c $\in \mathbb{R}$, $a > 0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere

$\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ ve $\displaystyle\int a^{bx} dx = \frac{a^{bx}}{b\cdot \ln a} + c$ olur.

ÖRNEK 29

$\int \cos 3x\, dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$3x = u \Rightarrow 3dx = du$ olup $dx = \dfrac{du}{3}$ bulunur.

Buradan $\displaystyle\int \frac{\cos u}{3}du = \frac{\sin u}{3} + c$

$\displaystyle = \frac{\sin 3x}{3} + c$ olur.

SONUÇ

a, c $\in \mathbb{R}$ için

$\displaystyle\int \sin x\, dx = -\cos x + c$ ve $\displaystyle\int \sin ax\, dx = -\frac{\cos ax}{a} + c$

$\displaystyle\int \cos x\, dx = \sin x + c$ ve $\displaystyle\int \cos ax\, dx = \frac{\sin ax}{a} + c$ bulunur.

ÖRNEK 30

$\int 5^{4-\cos x} \sin x\, dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

Verilen integralde $4 - \cos x = u$ dönüşümü yapılırsa

$4 - \cos x = u \Rightarrow \sin x dx = du$ olur.

Bu değerler verilen integralde yerine yazılırsa

$\displaystyle\int 5^u du = \frac{5^u}{\ln 5} + c = \frac{5^{4-\cos x}}{\ln 5} + c$ elde edilir.

ÖRNEK 31

$\int \frac{x\,dx}{(x^2+3)^6}$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$\int \frac{x\,dx}{(x^2+3)^6}$ integralinde $x^2+3=u$ dönüşümü yapılırsa

$x^2+3=u$

$2x\,dx=du$

$x\,dx=\frac{du}{2}$ olur.

Bu değerler integralde yerine yazılırsa

$$\int \frac{du}{2\cdot(u)^6}=\frac{1}{2}\int u^{-6}du$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-5}}{-5}+c$$

$$=-\frac{1}{10u^5}+c=-\frac{1}{10(x^2+3)^5}+c \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 32

$\int \frac{2}{x\cdot\sqrt{1+\ln x}}dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

Verilen integralde $1+\ln x=u$ dönüşümü yapılırsa

$1+\ln x=u \Rightarrow \frac{1}{x}dx=du$ olur.

Bu değerler verilen integralde yerine yazılırsa

$$2\int \frac{du}{\sqrt{u}}=2\int u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$=2\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c$$

$$=4\sqrt{u}+c=4\sqrt{1+\ln x}+c \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 33

$\int (x-1)\cdot\sqrt[3]{(x-1)\cdot\sqrt{x-1}}\,dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

Verilen integralde $x-1=u \Rightarrow dx=du$ dönüşümü uygulanırsa

$$\int u\cdot\sqrt[3]{u\cdot\sqrt{u}}\,du=\int u\sqrt[6]{u^3}\,du$$

$$=\int u^{\frac{3}{2}}du=\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+c=\frac{2}{5}\cdot\sqrt{u^5}+c=\frac{2}{5}\cdot\sqrt{(x-1)^5}+c$$

bulunur.

ÖRNEK 34

$\int (\tan^3 x + \tan x)dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$\int (\tan^3 x + \tan x)\,dx = \int \tan x(\tan^2 x + 1)\,dx$ ifadesinde $\tan x = u$ denirse $(1 + \tan^2 x)\,dx = du$ olur.

$\int \tan x \cdot (\tan^2 x + 1)dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{\tan^2 x}{2} + c$ bulunur.

SONUÇ

$n, m, k \in \mathbb{Z}^+$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\sqrt[m]{ax+b}$ ve $\sqrt[n]{ax+b}$ köklü ifadesini içeren fonksiyonların integrallerini hesaplamak için $\text{EKOK}(m, n) = k$ olmak üzere $ax + b = u^k$ değişken değiştirmesi yapılır.

ÖRNEK 35

$\int \frac{\sqrt[3]{x} - 4}{\sqrt{x}}dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$\text{Ekok}(2, 3) = 6$ olduğundan verilen integralde $x = u^6$ dönüşümü yapılırsa $dx = 6u^5 du$ olur. Bu değerler integralde yerine yazılırsa

$$\int \frac{\sqrt[3]{x} - 4}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{u^2 - 4}{u^3} \cdot 6u^5 du = 6\int (u^4 - 4u^2)du = 6\left(\frac{u^5}{5} - \frac{4u^3}{3}\right) + c$$

bulunur. $u^6 = x$ dönüşümü yapılırsa $u = \sqrt[6]{x}$ ve değeri yerine yazılırsa

$$\int \frac{\sqrt[3]{x} - 4}{\sqrt{x}}dx = \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - 8\sqrt{x} + c \text{ elde edilir.}$$

ÖRNEK 36

$\int \frac{\sqrt{2x+1} + \sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[6]{2x+1}}dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$\text{Ekok}(2, 3, 6) = 6$ olduğundan $2x + 1 = u^6$ dönüşümü yapılırsa

$$2x + 1 = u^6 \quad \Rightarrow \quad 2dx = 6 \cdot u^5 du$$
$$dx = 3u^5 du \text{ olur.}$$

Buradan

$$\int \frac{\sqrt{2x+1} + \sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[6]{2x+1}}dx = \int \frac{u^3 + u^2}{u} \cdot 3u^5\,du$$
$$= 3\int (u^7 + u^6)\,du = 3\frac{u^8}{8} + \frac{3 \cdot u^7}{7} + c$$
$$= \frac{3}{8} \cdot \sqrt[3]{(2x+1)^4} + \frac{3}{7} \cdot \sqrt[6]{(2x+1)^7} + c \text{ bulunur.}$$

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\int (2x^3 + x^2 - 3)^6 (6x^2 + 2x)\,dx$

b) $\int (1 - 4x)^7\,dx$

c) $\int (x + 2)\sqrt{x^2 + 4x + 8}\,dx$

ç) $\int (2x^3 - x) \cdot \cos(x^4 - x^2 - 1)\,dx$

d) $\int \cot x\,dx$

e) $\int \sin(\tan x)\sec^2 x\,dx$

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\int \dfrac{e^x}{2e^x + 1}\,dx$

b) $\int \dfrac{3x^2 - 1}{x^3 - x + 4}\,dx$

c) $\int \dfrac{2x \cdot e^{\sqrt{x^2 - 1}}}{\sqrt{x^2 - 1}}\,dx$

ç) $\int 7^{2x+1}\,dx$

d) $\int \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,dx$

e) $\int 3^{\sin x} \cdot \cos x\,dx$

3. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\int [\sin(6x - 5) + \cos(2x + 3)]\,dx$

b) $\int \sec^2(4x - 1)\,dx$

c) $\int \dfrac{e^{\cot x}}{\sin^2 x}\,dx$

ç) $\int \cos^2 x\,d(\sin x)$

4. $\int \dfrac{x - 5}{\sqrt{1 - \sqrt{x - 5}}}\,dx$ **integralini hesaplayınız.**

5. $\int (2x + 1)\sqrt{x - 3}\,dx$ **integralini hesaplayınız.**

6. $\int \dfrac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan x + 1}}\,dx$ **integralini hesaplayınız.**

7. $\int \dfrac{1}{\sqrt{x + 1} - \sqrt[3]{x + 1}}\,dx$ **integralini hesaplayınız.**

8. $\int \dfrac{2\sqrt[3]{x - 1} - \sqrt{x - 1}}{\sqrt[6]{x - 1}}\,dx$ **integralini hesaplayınız.**

Kısmî İntegrasyon Yöntemi

İki fonksiyonun çarpımının integraline ait kuralı bulabilmek için türevin çarpım kurallarını uygulamak gerekir. $u = f(x)$ ve $v = g(x)$ türevlenebilir iki fonksiyon olsun. $f(x) \cdot g(x)$ in türevi

$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$ olur.

Elde edilen ifadenin her iki tarafının integrali alınırsa

$$\int \frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)]dx = \int f(x) \cdot g'(x)dx + \int g(x) \cdot f'(x)dx$$

$$f(x) \cdot g(x) + c = \int f(x) \cdot g'(x)dx + \int g(x) \cdot f'(x)dx$$

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) + c - \int g(x) \cdot f'(x)dx \text{ elde edilir.}$$

$u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx$ ve $v = g(x) \Rightarrow dv = g'(x)dx$ yazılırsa

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ şeklinde bulunur.

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ yöntemini kullanarak integral almaya kısmî integrasyon yöntemi denir.

ÖRNEK 37

$\int x e^x dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

İntegrali alınacak ifade bir polinom ile bir üstel fonksiyonun çarpımı ise polinoma u, diğer kısma dv denir.

$\int x e^x dx$ integralinde

$x = u \Rightarrow dx = du$ ve $e^x dx = dv$

$\int e^x dx = \int dv \Rightarrow e^x = v$ elde edilir.

Bu değerler $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$\int x e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$ elde edilir.

ÖRNEK 38

$\int \ln x\,dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$\int \ln x\,dx$ integralinde $\ln x = u \Rightarrow \frac{1}{x}dx = du$ ve $dx = dv \Rightarrow x = v$ olur.

Bu değerler $\int udv = uv - \int vdu$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$\int \ln x\,dx = \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c$ bulunur.

SONUÇ

$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + c$

ÖRNEK 39

$\int x \sin 2x \, dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

İntegrali alınacak ifade bir polinom ile bir trigonometrik fonksiyonun çarpımı ise polinoma u, diğer kısma dv denir. $\int x \sin 2x dx$ integralinde

$x = u \Rightarrow dx = du$ ve $\sin 2x \, dx = dv$

$\int \sin 2x \, dx = \int dv$

$-\dfrac{\cos 2x}{2} = v$ elde edilir.

Bu değerler $\int u \, dv = uv - \int v \, du$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\int x \sin 2x \, dx = \frac{-x\cos 2x}{2} - \int \left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{-x\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx = \frac{-x\cos 2x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + c \text{ olur.}$$

ÖRNEK 40

$\int x \ln x \, dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

İntegrali alınacak ifade bir polinom ile bir logaritmik fonksiyonun çarpımı ise logaritmalı ifadeye u, diğer kısma dv denir.

$\int x \ln x \, dx$ integralinde $\ln x = u \Rightarrow \dfrac{1}{x}dx = du$ ve $x \, dx = dv \Rightarrow \dfrac{x^2}{2} = v$

olur. Bu değerler $\int u \, dv = uv - \int v \, du$ eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\int x \ln x \, dx = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{1}{2}\int x \, dx = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + c \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 41

$\int x^2 \cos 3x \, dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

Tablo yöntemi ile kısmî integrasyon yöntemini uygulamak kolaylık sağlar. $\int u dv$ integralinde u nun sonlu sayıda türevi alındığında sıfır bulunabiliyor ve dv nin integrali sonlu sayıda alınabiliyorsa aşağıdaki biçimde bir tablo oluşturularak integral kolay biçimde bulunabilir.

	Türevi Alınacak	İntegrali Alınacak
$+$	x^2	$\cos 3x$
$-$	$2x$	$\frac{1}{3}\sin 3x$
$+$	2	$-\frac{1}{9}\cos 3x$
	0	$-\frac{1}{27}\sin 3x$

$\int x^2 \cos 3x \, dx$ integralinde

$$\int x^2 \cos 3x \, dx = x^2 \frac{1}{3}\sin 3x - 2x\left(-\frac{1}{9}\cos 3x\right) + 2\left(-\frac{1}{27}\sin 3x\right) + c$$

$$= \sin 3x\left(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{27}\right) + \frac{2x}{9}\cos 3x + c \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 42

$\int (2x^3 - 4x)e^x dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

	Türevi Alınacak	İntegrali Alınacak
+	$2x^3 - 4x$	e^x
−	$6x^2 - 4$	e^x
+	$12x$	e^x
−	12	e^x
	0	e^x

Türevi alınan her ifadenin işareti değiştirilir. Bu ifadeler oklarla gösterilen integrali alınan ifadeler ile çarpılır ve bu çarpımlar toplanır.

$$\int (2x^3 - 4x)e^x\,dx = (2x^3 - 4x)e^x - (6x^2 - 4)e^x + 12xe^x - 12e^x + c$$

$$= (2x^3 - 6x^2 + 8x - 8)e^x + c \text{ bulunur.}$$

SIRA SİZDE

Aşağıda tabloda verilen boşlukları örnekte olduğu gibi integral bulunabilecek şekilde doldurunuz.

$\int u\,dv$	u ve dv	du ve v	$uv - \int v\,du$
$\int (x^2+1)\ln x\,dx$	$u = \ln x$ $dv = (x^2+1)dx$	$du = \frac{1}{x}dx$ $v = \frac{x^3}{3} + x$	$\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\ln x - \int \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\frac{1}{x}dx$
$\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$			
$\int x^3 \ln x\,dx$			
$\int x^2 e^{2x}\,dx$			
$\int \cos x \ln(\sin x)\,dx$			

Basit Kesirlere Ayırma Yöntemi

P(x) ve Q(x) birer polinom olsun. $\frac{P(x)}{Q(x)}$, $(Q(x) \neq 0)$ biçimindeki

rasyonel fonksiyonlar için $\text{der}[P(x)] < \text{der}[Q(x)]$ olsun.

$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx+b_n}$ olarak basit kesirlerin

toplamı şeklinde yazılarak yapılan işleme basit kesirlere ayırma yöntemi ile integral alma denir.

Burada polinom eşitliğinden $A_1, A_2, \cdots, A_n$ değerleri bulunur ve

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{A_1}{a_1x+b_1}dx + \int \frac{A_2}{a_2x+b_2}dx + \cdots + \int \frac{A_n}{a_nx+b_n}dx$$

integrali alınır.

Eğer $\text{der}[P(x)] \geq \text{der}[Q(x)]$ ise $P(x)$ polinomu $Q(x)$ polinomuna bölünür. $B(x)$ bölüm, $K(x)$ kalan olmak üzere $\frac{P(x)}{Q(x)} = B(x) + \frac{K(x)}{Q(x)}$ şeklinde yazılarak $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int B(x)dx + \int \frac{K(x)}{Q(x)}dx$ integrali alınır.

$\int \frac{K(x)}{Q(x)}dx$ ifadesinde basit kesirlere ayırma yöntemi kullanılarak integral alınır.

ÖRNEK 43

$\int \frac{2}{x^2-4}dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$\frac{2}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$ yazılır. Payda eşitlenerek

$\frac{2}{(x-2)(x+2)} = \frac{Ax+2A+Bx-2B}{(x-2)(x+2)}$ elde edilir.

$2 = (A+B)x + 2A - 2B$ eşitliğini $\forall x \in \mathbb{R}$ için sağlayan A ve B gerçek sayıları bulunur. Bu durumda

$A + B = 0$

$2A - 2B = 2$

denklemlerinden $A = \frac{1}{2}$ ve $B = -\frac{1}{2}$ bulunur.

Buradan bulunan değerler integralde yerine yazılırsa

$$\int \frac{2}{x^2-4}dx = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x-2} - \frac{\frac{1}{2}}{x+2} \right) dx = \frac{1}{2}\left[\int \frac{1}{x-2}dx - \int \frac{1}{x+2}dx \right]$$

$$= \frac{1}{2}(\ln|x-2| - \ln|x+2|) + c = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 44

$\int \frac{x-1}{(x+1)(x+2)}dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$\int \frac{x-1}{(x+1)(x+2)}dx = \int \left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}\right)dx$ biçiminde yazılırsa

Paydaları eşitlenir.

$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}=\frac{x-1}{(x+1)(x+2)}$

$A(x+2)+B(x+1)=x-1$ olur.

$x=-1 \Rightarrow A=-2$

$x=-2 \Rightarrow B=3$ bulunur.

$$\int \frac{x-1}{(x+1)(x+2)}dx = \int \frac{-2}{(x+1)}+\frac{3}{(x+2)}dx$$
$$=-2\int \frac{dx}{x+1}+3\int \frac{dx}{x+2}$$
$$=-2\ln|x+1|+3\ln|x+2|+c \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 45

$\int \frac{x+1}{x^3+2x^2-3x}dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$x^3+2x^2-3x=x(x^2+2x-3)=x(x-1)(x+3)$ olduğundan

$\frac{x+1}{x(x-1)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+3}$ bulunur. Payda eşitlenirse

$x+1=A(x-1)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-1)$ eşitliği elde edilir.

Bu eşitlikte

$x=0$ için $1=-3A \Rightarrow A=-\frac{1}{3}$

$x=1$ için $2=4A \Rightarrow B=\frac{1}{2}$

$x=-3$ için $-2=12C \Rightarrow C=-\frac{1}{6}$ bulunur.

Elde edilen bu değerler

$\int \frac{x+1}{x^3+2x^2-3x}dx=\int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+3}\right)dx$ integralinde yerine yazılırsa

$$\int \frac{x+1}{x^3+2x^2-3x}dx=\int\left(\frac{-\frac{1}{3}}{x}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{6}}{x+3}\right)dx$$
$$=-\frac{1}{3}\int\frac{1}{x}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{6}\int\frac{1}{x+3}dx$$
$$=-\frac{1}{3}\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x+3|+c \text{ elde edilir.}$$

ÖRNEK 46

$\int \frac{2x-1}{(x-1)(x+1)^2}dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ biçimindeki rasyonel fonksiyonun paydasının çarpanları

arasında $(ax+b)^n$ biçiminde bir çarpan varsa

$\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{A_1}{ax+b} + \dfrac{A_2}{(ax+b)^2} + \ldots + \dfrac{A_n}{(ax+b)^n} + \dfrac{B}{mx+n}$ şeklinde yazılır.

$A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ değerleri bulunarak integral alınır.

Verilen ifadenin integralini alabilmek için $\dfrac{2x-1}{(x-1)(x+1)^2}$ ifadesini

basit kesirlere ayırma yöntemi kullanılır.

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \quad \textbf{(I)}$$

$2x-1 = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)$

$x=-1$ için $-3=-2C \Rightarrow C = \dfrac{3}{2}$

$x=1$ için $1=4A \Rightarrow A=\dfrac{1}{4}$

$x=0$ için

$-1 = A-B-C$

$-1 = \dfrac{1}{4} - B - \dfrac{3}{2}$

$B = -\dfrac{1}{4}$ bulunur.

Elde edilen değerler **(I)** eşitliğinde yerine yazılıp integrali alınırsa

$$\int \frac{2x-1}{(x-1)(x+1)^2}dx = \int \frac{\frac{1}{4}}{x-1}dx + \int \frac{-\frac{1}{4}}{x+1}dx + \int \frac{\frac{3}{2}}{(x+1)^2}dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2}dx$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{3}{2(x+1)} + c$$

$$= \ln\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{3}{2(x+1)} + c \text{ sonucu elde edilir.}$$

SIRA SİZDE

$\displaystyle\int \frac{x+1}{(x-1)(x-2)(x+2)^2}dx$ integralini hesaplayınız.

ÖRNEK 47

$\int \frac{x^3-4x^2+3}{x^2-4}dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ biçimindeki rasyonel fonksiyonda $der[P(x)] \geq der[Q(x)]$

ise $P(x)$ polinomu $Q(x)$ polinomuna bölünür. $P(x)$ in $Q(x)$ e bölünmesinden bulunan bölüm $B(x)$ ve kalan $K(x)$ ise

$\frac{P(x)}{Q(x)} = B(x) + \frac{K(x)}{Q(x)}$ biçiminde yazılarak integrali alınır.

x^3-4x^2+3 polinomu x^2-4 polinomuna bölünürse

$\frac{x^3-4x^2+3}{x^2-4} = x-4+\frac{4x-13}{x^2-4}$ elde edilir.

$\int \frac{x^3-4x^2+3}{x^2-4}dx = \int (x-4)dx + \int \frac{4x-13}{x^2-4}dx$ şeklinde yazılarak

$\int \frac{4x-13}{x^2-4}dx$ ifadesinin integrali basit kesirlere ayrılır ve

$\frac{4x-13}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$

$4x-13 = A(x+2)+B(x-2)$ eşitliği elde edilir.

$x=2$ için $-5=4A \Rightarrow A=-\frac{5}{4}$

$x=-2$ için $-21=-4B \Rightarrow B=\frac{21}{4}$ olur.

Buradan

$$\int \frac{4x-13}{x^2-4}dx = -\frac{5}{4}\int \frac{1}{x-2}dx + \frac{21}{4}\int \frac{1}{x+2}dx$$

$$= -\frac{5}{4}\ln|x-2| + \frac{21}{4}\ln|x+2| + c \text{ bulunur.}$$

Elde edilen bu sonuç yerine yazılırsa

$$\int \frac{x^3-4x^2+3}{x^2-4}dx = \int (x-4)dx + \int \frac{4x-13}{x^2-4}dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x - \frac{5}{4}\ln|x-2| + \frac{21}{4}\ln|x+2| + c$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x + \ln\left|\sqrt[4]{\frac{(x+2)^{21}}{(x-2)^5}}\right| + c \text{ olur.}$$

ALIŞTIRMALAR

1. **Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.**

a) $\int (2x+1)e^x\,dx$

b) $\int (x^2+1)e^{3x}\,dx$

c) $\int x\cos x\,dx$

ç) $\int x\sec^2 x\,dx$

d) $\int x^2 \ln x\,dx$

e) $\int \ln^2 x\,dx$

2. **Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.**

a) $\int (x^3-x^2+2x+1)\sin x\,dx$

b) $\int (x^2+1)(\cos^2 x-\sin^2 x)\,dx$

c) $\int (t^2-2t-5)e^t\,dt$

ç) $\int (ax+b)e^{ax}\,dx$

3. **Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.**

a) $\int e^x \sin x\,dx$

b) $\int 2^x e^x\,dx$

c) $\int 3^x \cos x\,dx$

4. **Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.**

a) $\int \frac{dx}{x^2-1}$

b) $\int \frac{x-3}{x^2+3x}dx$

c) $\int \frac{2x-4}{x^2-9}dx$

ç) $\int \frac{dx}{x^3+5x^2+6x}$

5. **Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.**

a) $\int \frac{x+1}{(x-1)^2}dx$

b) $\int \frac{x-2}{x^2(x-3)}dx$

c) $\int \frac{x+1}{x^3-1}dx$

6. **Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.**

a) $\int \frac{x^4}{x-2}dx$

b) $\int \frac{x^3+2x^2+x+1}{x+3}dx$

c) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x+6\sin x+8}dx$

ç) $\int \frac{4\cdot 3^x}{9^x-2\cdot 3^x-15}dx$

7. **Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.**

a) $\int \frac{\sin x+2\cos x+\cos 2x}{2+\cos x-2\sin x-\sin x\cos x}dx$

b) $\int \sec x\,dx$

6.2. BELİRLİ İNTEGRAL VE UYGULAMALARI

Bu Bölümde Neler Öğreneceksiniz?

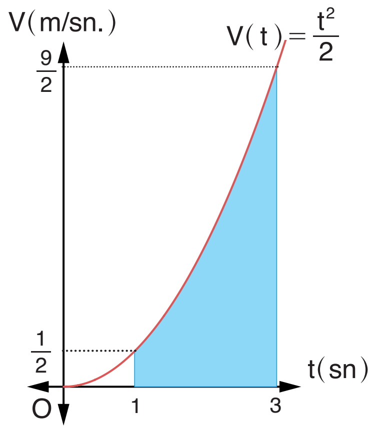
- Bir fonksiyonun grafiği ile x ekseni arasında kalan sınırlı bölgenin alanını Riemann (Riman) toplamı yardımıyla yaklaşık hesaplama
- Bir fonksiyonun belirli ve belirsiz integralleri arasındaki ilişkiyi açıklama
- Belirli integralin özelliklerini kullanarak işlem yapma
- Belirli integral ile alan hesabı yapma

Terimler ve Kavramlar

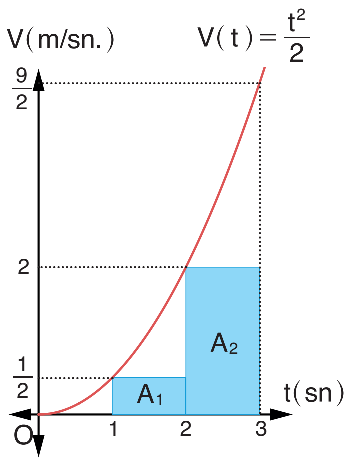
- Riemann toplamı
- Belirli integral

Bir baba, şekli düzgün olmayan tarlasını çocukları arasında eşit bir şekilde paylaştırmak istiyor. Bu tarlanının alanının hesaplanmasında ve eşit parçalara bölüştürülmesinde integral hesabı kullanılabilir. Bunun gibi gerçek hayatta karşılaşılan düzgün olmayan bölgelerin alanlarının hesaplanmasında integrale ihtiyaç duyulmuştur.

Hız – zaman grafiği verilen ve bir doğru boyunca hareket eden bir cismin $t_1 = 1$ ve $t_2 = 3$ saniye aralığında aldığı toplam yol, grafik ile x ekseni arasında kalan alan yardımıyla bulunur.



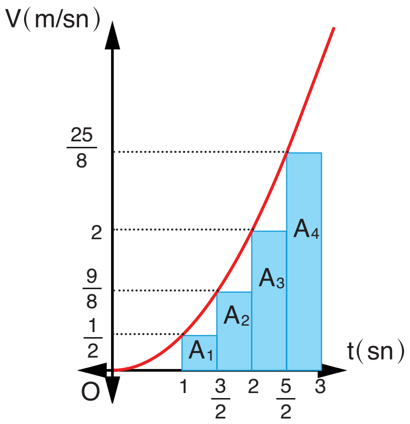
Yandaki boyalı alanın yaklaşık değerini bulmak için $[1, 3]$ kapalı aralığında bölge aşağıdaki gibi eşit parçaya bölünüp dikdörtgenlere ayrılır ve bu dikdörtgenlerin alanları toplanır.



A_1 dik dörtgeninin alanı: $1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,m^2$

A_2 dikdörtgeninin alanı : $1 \cdot 2 = 2\,m^2$ olur.

Buradan $A_1 + A_2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}\,m^2$ bulunur.



x ekseni üzerindeki kenar uzunlukları

1 birim yerine $\frac{1}{2}$ birim alınırsa

A_1 dikdörtgeninin alanı : $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} m^2$

A_2 dikdörtgeninin alanı : $\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{8} = \frac{9}{16} m^2$

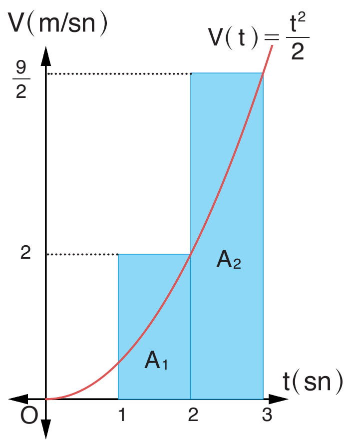
A_3 dikdörtgenin alanı : $\frac{1}{2} \cdot 2 = 1 m^2$

A_4 dikdörtgen alanı : $\frac{1}{2} \cdot \frac{25}{8} = \frac{25}{16} m^2$ olur.

Buradan taralı alan yaklaşık olarak

$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \frac{1}{4} + \frac{9}{10} + 1 + \frac{25}{16} = \frac{54}{16} = \frac{27}{8} m^2$ bulunur. Elde edilen bu sonuç alanın değerine ilk hesaplamadan daha yakın bir değerdir.

Eğer dikdörtgenlerin x ekseni üzerindeki kenarları daha da küçültülürse elde edilen dikdörtgenlerin alanları toplamı istenen alana daha da yakın değer olacaktır.

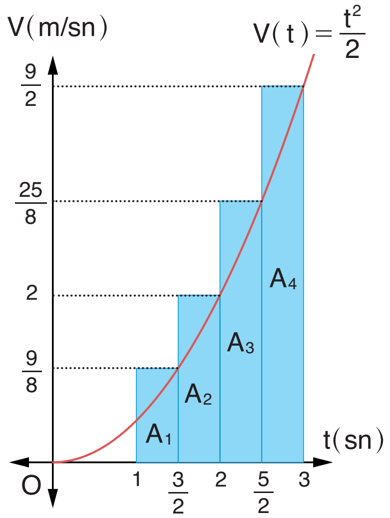


Boyalı alan $[1, 3]$ kapalı aralığında yukarıdaki gibi eşit parçalara bölünmüş dikdörtgenlere de ayrılabilir. Bu dikdörtgenlerin alanları toplanarak taralı alanın yaklaşık değeri hesaplanır.

A_1 dikdörtgenin alanı: $1 \cdot 2 = 2 m^2$

A_2 dikdörtgenin alan: $1 \cdot \frac{9}{2} = \frac{9}{2} m^2$ olur.

Buradan $A_1 + A_2 = 2 + \frac{9}{2} = \frac{13}{2} m^2$ bulunur.



Dikdörtgenlerin x ekseni üzerindeki kenar uzunlukları 1 birim yerine $\frac{1}{2}$ birim alınırsa

A_1 dikdörtgenin alanı : $\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{8}=\frac{9}{16}\,m^2$

A_2 dikdörtgeninin alanı : $2\cdot\frac{1}{2}=1\,m^2$

A_3 dikdörtgeninin alanı : $\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{8}=\frac{25}{16}\,m^2$

A_4 dikdörtgeninin alanı : $\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2}=\frac{9}{4}\,m^2$ olur.

Buradan boyalı alan

$$A_1+A_2+A_3+A_4=\frac{9}{16}+1+\frac{25}{16}+\frac{9}{4}$$
$$=\frac{86}{16}$$
$$=\frac{43}{8}\,m^2 \text{ bulunur.}$$

TANIM

$a,b\in\mathbb{R}$ ve $a<b$ olmak üzere $[a,\,b]$ kapalı aralığında
$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$
şeklinde elde edilen $P=\{x_0,\,x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_{n-1},\,x_n\}$ kümesine $[a,\,b]$ kapalı aralığının parçalanması veya bölüntüsü denir. Eğer bu parçaların uzunlukları birbirine eşit ise düzgün parçalanma veya düzgün bölüntü denir. $[x_{k-1},x_k]$ kapalı aralık $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}=\frac{b-a}{n}\quad(k\in\mathbb{Z}^+)$ değerine P düzgün bölüntüsünün herhangi bir alt aralığının uzunluğu denir.

Yukarıdaki grafikte $[1,\,3]$ aralığının P düzgün bölüntüsü (düzgün parçalanması) $P=\left\{1,\,\frac{3}{2},\,2,\,\frac{5}{2},\,3\right\}$ olur.

TANIM

$f:[a, b] \to \mathbb{R}$ pozitif değerli ve sürekli bir fonksiyon olsun.

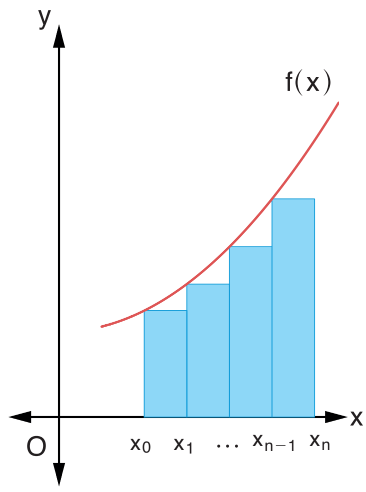
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ olacak şekilde

$P = \{a = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n = b\}$ kümesi $[a,b]$ kapalı aralığının düzgün bölüntüsü olmak üzere

f artan ise $f(x_0)\cdot\Delta x_1 + f(x_1)\cdot\Delta x_2 + \ldots + f(x_{n-1})\cdot\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x_k$,

f azalan ise $f(x_1)\cdot\Delta x_1 + f(x_2)\cdot\Delta x_2 + \ldots + f(x_n)\cdot\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$

toplamına alt toplam denir.



Alt toplam

ÖRNEK 1

$f:[1, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{5}{x}$ fonksiyonu veriliyor. $[1, 4]$ aralığını 4 eşit parçaya bölerek alt toplamı bulunuz.

ÇÖZÜM

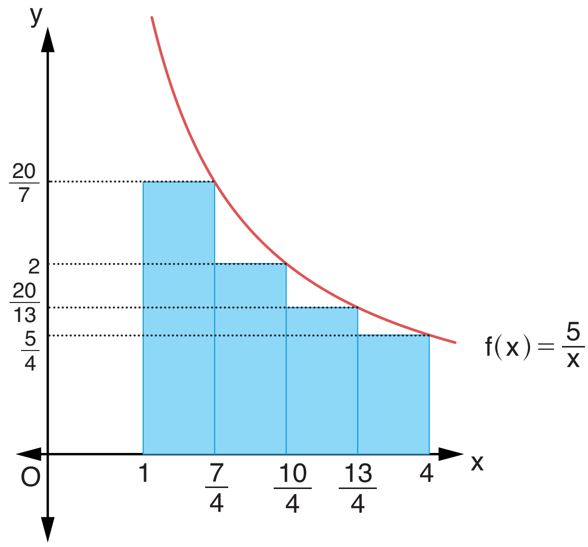
$[1, 4]$ aralığını 4 eşit parçaya bölen düzgün P bölüntüsü, Δx_k uzunluğundan

$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \Delta x_4 = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$ olarak bulunur.

Elde edilen değer her bir alt aralığın uzunluğudur. Bu durumda düzgün P bölüntüsü

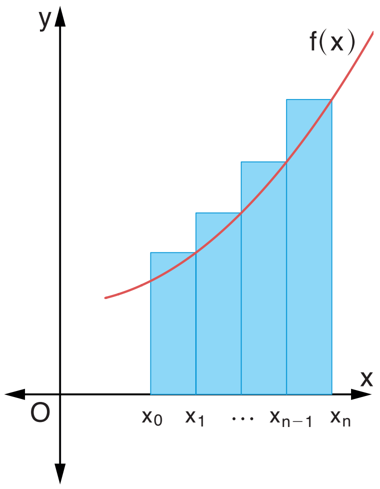
$P = \left\{1, \frac{7}{4}, \frac{10}{4}, \frac{13}{4}, 4\right\}$ olur.

$\left[1, \frac{7}{4}\right], \left[\frac{7}{4}, \frac{10}{4}\right], \left[\frac{10}{4}, \frac{13}{4}\right], \left[\frac{13}{4}, 4\right]$ alt aralıkarı elde edilir.



$$\text{Alt Toplam} = f\left(\frac{7}{4}\right)\cdot\frac{3}{4} + f\left(\frac{10}{4}\right)\cdot\frac{3}{4} + f\left(\frac{13}{4}\right)\cdot\frac{3}{4} + f(4)\cdot\frac{3}{4}$$

$$= \frac{20}{7}\cdot\frac{3}{4} + 2\cdot\frac{3}{4} + \frac{20}{13}\cdot\frac{3}{4} + \frac{5}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{8349}{1456} \text{ bulunur.}$$



Üst toplam

TANIM

$f:[a, b] \to \mathbb{R}$ pozitif tanımlı ve sürekli bir fonksiyon olsun.
$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ olacak şekilde

$P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ kümesi $[a,b]$ aralığının düzgün bölüntüsü olmak üzere

f artan ise $f(x_1)\cdot\Delta x_1 + f(x_2)\cdot\Delta x_2 + \ldots + f(x_n)\cdot\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$,

f azalan ise $f(x_0)\cdot\Delta x_1 + f(x_1)\cdot\Delta x_2 + \ldots + f(x_{n-1})\cdot\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x_k$

toplamına üst toplam denir.

ÖRNEK 2

$f:[0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonu veriliyor. $[0, 2]$ kapalı aralığını 4 eşit parçaya bölerek üst toplamı bulunuz.

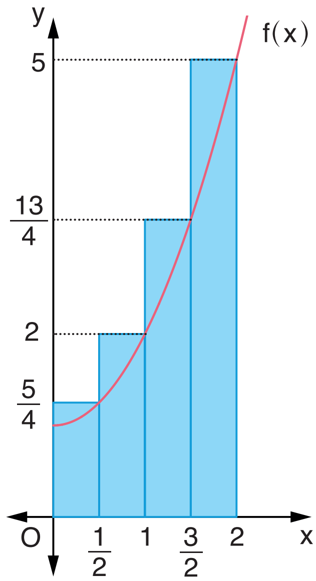
ÇÖZÜM

$[0,2]$ kapalı aralığını 4 eşit parçaya bölen düzgün P bölüntüsü, Δx_k uzunluğundan

$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \Delta x_4 = \dfrac{2-0}{4} = \dfrac{1}{2}$ olarak bulunur.

Buna göre düzgün P bölüntüsü

$P = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$ olur. $\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right], \left[1, \frac{3}{2}\right], \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ alt aralıkları elde edilir.



$$\text{Üst Toplam} = f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} + f(1)\cdot\frac{1}{2} + f\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} + f(2)\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{13}{4}\cdot\frac{1}{2} + 5\cdot\frac{1}{2}$$

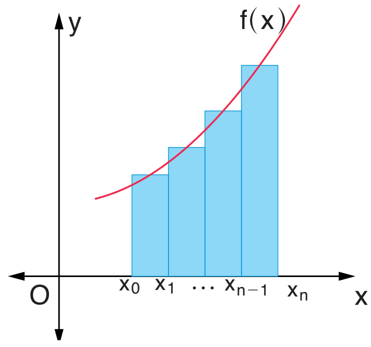
$$= \frac{23}{4} \text{ birimkare bulunur.}$$

TANIM

$x_{k-1} < t_k < x_k$ olmak üzere

$R_n = f(t_1)\cdot\Delta x_1 + f(t_2)\cdot\Delta x_2 + \ldots + f(t_n)\cdot\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k$ toplamına

Riemann toplamı denir.



Riemann toplamı

ÖRNEK 3

$f:[2, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$ fonksiyonu veriliyor. $[2, 4]$ aralığını 5 eşit parçaya bölerek ve $t_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$ alarak Riemann toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$[2, 4]$ aralığını 5 eşit parçaya bölen düzgün bir P bölüntüsü, Δx_k uzunluğundan

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \Delta x_4 = \Delta x_5 = \frac{b-a}{n} = \frac{4-2}{5} = \frac{2}{5} \text{ olur.}$$

Buna göre düzgün P bölüntüsü

$$P = \left\{2, \frac{12}{5}, \frac{14}{5}, \frac{16}{5}, \frac{18}{5}, 4\right\} \text{ olur.}$$

$t_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$ olduğundan

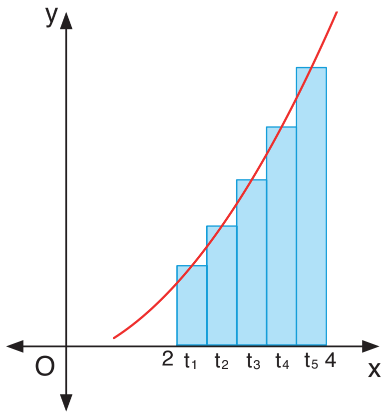
$$t_1 = \frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{2 + \frac{12}{5}}{2} = \frac{11}{5}$$

$$t_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{12}{5} + \frac{14}{5}}{2} = \frac{13}{5}$$

$$t_3 = \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{\frac{14}{5} + \frac{16}{5}}{2} = \frac{15}{5}$$

$$t_4 = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{\frac{16}{5} + \frac{18}{5}}{2} = \frac{17}{5}$$

$$t_5 = \frac{x_4 + x_5}{2} = \frac{\frac{18}{5} + 4}{2} = \frac{19}{5} \text{ olur.}$$



Buradan

$$R_n = \sum_{k=1}^{5} f(x_k)\Delta x_k = f(t_1)\Delta x_1 + f(t_2)\Delta x_2 + \ldots + f(t_5)\Delta x_5$$

$$= f\left(\frac{11}{5}\right)\cdot\frac{2}{5} + f\left(\frac{13}{5}\right)\cdot\frac{2}{5} + \cdots + f\left(\frac{19}{5}\right)\cdot\frac{2}{5}$$

$$= \frac{96}{25}\cdot\frac{2}{5} + \frac{144}{25}\cdot\frac{2}{5} + \frac{200}{25}\cdot\frac{2}{5} + \frac{264}{25}\cdot\frac{2}{5} + \frac{336}{25}\cdot\frac{2}{5}$$

$$= \frac{1040}{25}\cdot\frac{2}{5}$$

$$= \frac{416}{25} \text{ birimkare bulunur.}$$

Riemann alt veya üst toplamında $[a, b]$ kapalı aralığı n parçaya bölünsün. n değeri arttıkça Riemann toplamı eğri altında kalan alanın gerçek değerine yaklaşır. $n \to \infty$ için bu toplamların limiti alındığında alanın gerçek değeri elde edilir.

TANIM

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x_k = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k = A$ ise A sayısına f fonksiyonunun $[a, b]$ kapalı aralığındaki belirli integrali denir ve $\int\limits_a^b f(x)dx = A$ şeklinde gösterilir.

Ayrıca $\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x_k \leq R_n \leq \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$ olduğundan

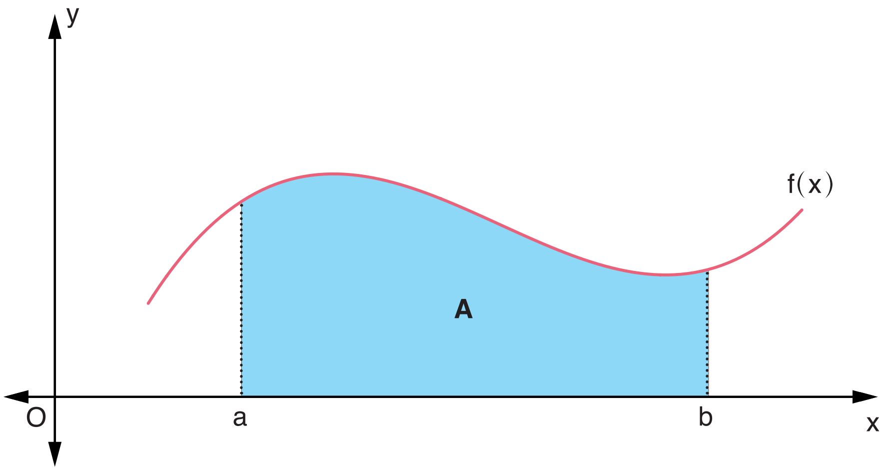
$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{a} f(x_{k-1})\Delta x_k \leq \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k \leq \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$

$A \leq \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k \leq A \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = A$ olur.

Bu durumda $R_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k = \int\limits_a^b f(x)dx = A$ bulunur.

$\int\limits_a^b f(x)dx$ gösteriminde a ya integralin alt sınırı, b ye de üst sınırı denir. $y = f(x)$ fonksiyonun grafiği ile x ekseni arasında kalan alan

$A = \int\limits_a^b |f(x)|dx$ ile hesaplanır.



Bu durumda düzgün olmayan bölgelerin alanlarının gerçek değerini bulmak için belirli integral kullanılır.

ÖRNEK 4

$\int\limits_1^2 (x+1)dx$ belirli integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

I. Yol

$[1,\,2]$ aralığını n eşit parçaya bölen düzgün P bölüntüsü Δx_k uzunluğundan

$\Delta x_k = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{2-1}{n} = \dfrac{1}{n}$ ve $t_k = \dfrac{x_{k-1}+x_k}{2} = a + k\cdot\Delta x_k = 1 + \dfrac{k}{n}$

olur.

Buna göre $R_n = \int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot\Delta x_k\right) = A$ ifadesinde yerine yazılırsa

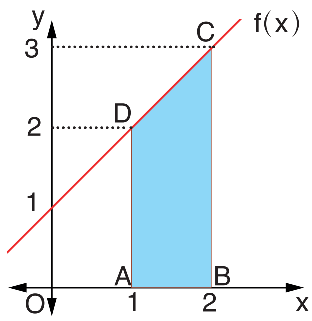
$$R_n = \int\limits_1^2 (x+1)dx$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}+1\right)\cdot\frac{1}{n}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{n}+\frac{k}{n^2}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)+\left(\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}\right)+\left(\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)+\dots+\left(\frac{2}{n}+\frac{n}{n^2}\right)\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{2}{n}+\frac{2}{n}+\dots+\frac{2}{n}\right)+\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\dots+\frac{n}{n^2}\right)\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[n\cdot\left(\frac{2}{n}\right)+\left(\frac{1+2+\dots+n}{n^2}\right)\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[2+\frac{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}{n^2}\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}2+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)$$
$$= 2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2} \text{ bulunur.}$$

II. Yol

$[1,2]$ aralığında $f(x)=x+1$ grafiği ile x ekseni arasında kalan alan

$\int\limits_1^2 f(x)dx = \int\limits_1^2 (x+1)dx$ belirli integralin değerine eşittir.

$$A(ABCD) = \int\limits_1^2 (x+1)dx$$
$$= \left(\frac{|AD|+|BC|}{2}\right)\cdot|AB| = \frac{(2+3)}{2}\cdot 1 = \frac{5}{2} \text{ birimkare}$$



TEKNOLOJİ

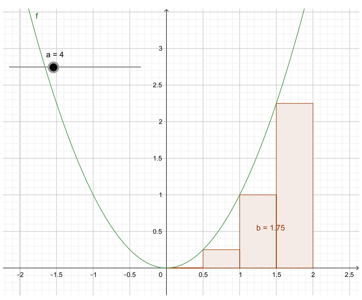
$\int_0^2 x^2 dx$ belirli integralinin alt toplam, üst toplam ve Riemann toplamını GeoGebra programı yardımı ile bulunuz.

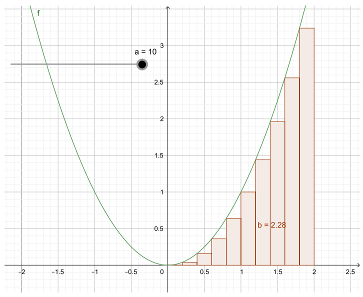
Giriş: f(x)=x^2 yazarak $f(x)=x^2$ fonksiyonunu oluşturunuz.

a adında minimum: 1, maksimum: 10, artış: 1 olan bir sürgü oluşturunuz.

a) Alt Toplam

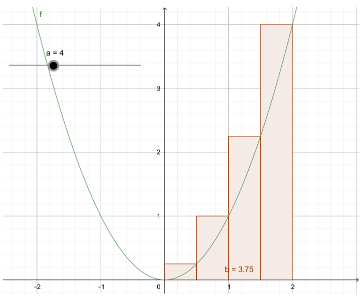
Giriş: AltToplam(f, 0, 2, a)
yazarak a bölüntüsüne göre alt toplamı bulunuz. Sürgüyü hareket ettirerek bölüntü sayısını değiştiriniz.

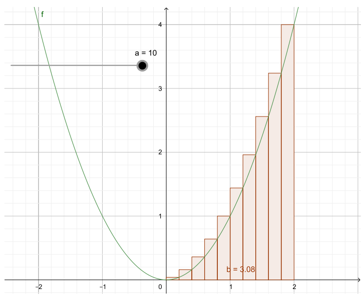




b) Üst Toplam

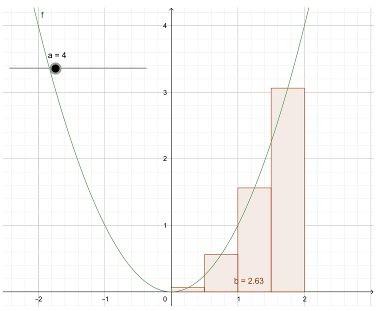
Giriş: ÜstToplam(f, 0, 2, a)
yazarak a bölüntüsüne göre üst toplamı bulunuz. Sürgüyü hareket ettirerek bölüntü sayısını değiştiriniz.

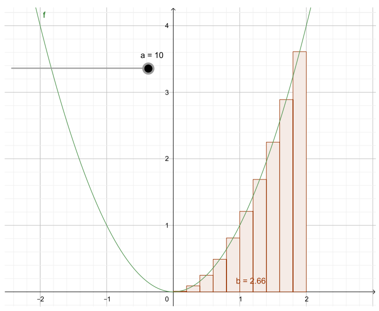




c) Riemann Toplamı

Giriş: DikdörtgenToplam(f,0, 2, a,0.5)
yazarak a bölüntüsüne göre bölüntünün orta noktaları için Riemann toplamını bulunuz. Sürgüyü hareket ettirerek bölüntü sayısını değiştiriniz.





ALIŞTIRMALAR

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-1$ fonksiyonu veriliyor. $[2,4]$ **aralığında 4 eşit parçaya bölerek P bölüntüsünü oluşturunuz. Elde edilen P bölüntüsüne göre f fonksiyonunun grafiğinin x ekseni ile arasında kalan alanı alt ve üst dikdörtgenlere ayırarak bulunuz.**

2. Aşağıda verilen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **fonksiyonlarının yanlarında verilen P bölüntüsüne göre alt toplamını, üst toplamını ve Riemann toplamını bulunuz.**

a) $f(x)=x+3$ $\qquad P=\left\{1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2},\ 3\right\}$

b) $f(x)=x^2-2$ $\qquad P=\left\{1,\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3},\ 2\right\}$

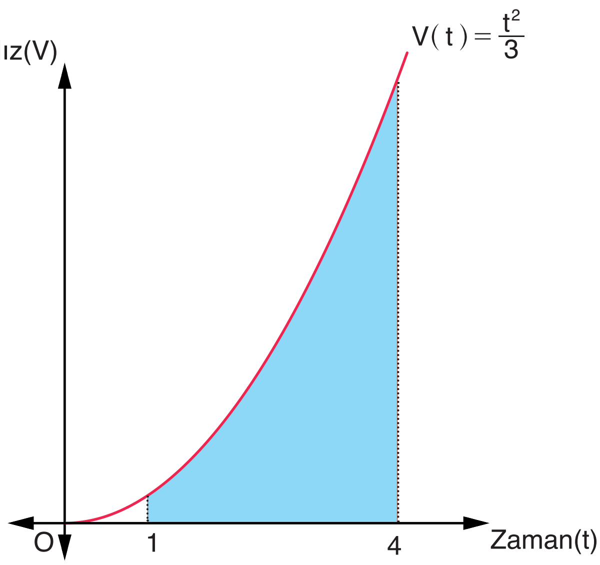
3. Aşağıdaki limitleri, verilen aralıkta belirli integral olarak gösteriniz.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sin(x_{k-1})\cdot\Delta x_k\right)$ $\qquad [0,\ \pi]$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}2\cdot x_k\cdot\ln(x_k)\cdot\Delta x_k\right)$ $\qquad [1,\ e]$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}(3(x_k)^2+1)\cdot\Delta x_k\right)$ $\qquad [1,\ 5]$

4.



Hız-zaman grafiği verilen ve bir doğru boyunca hareket eden bir cismin $t_1=1$ **saniye ve** $t_2=4$ **saniye aralığında aldığı toplam yolu bulunuz.**

5. Aşağıda verilen belirli integrallerin değerini bulunuz.

a) $\int_1^3 (2x+1)dx$

b) $\int_0^4 x^2dx$

6. $f:[0,\ 2]\to[1,\ 9]$ olmak üzere $f(x)=4x+1$ fonksiyonunun eşit uzunlukta 4 alt aralığına göre Riemann toplamı A, $f(x)$ fonksiyonu ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanı B olsun.
Buna göre $A-B$ **farkı kaçtır?**

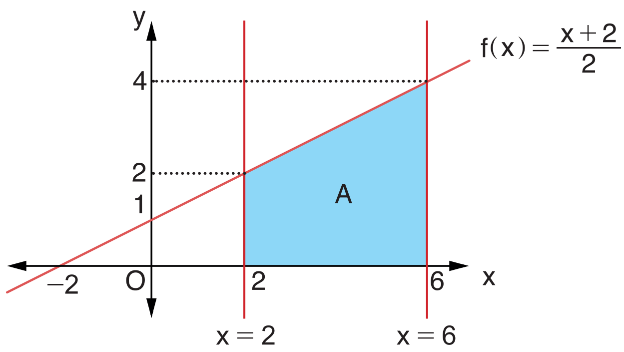
Bir Fonksiyonun Belirli ve Belirsiz İntegralleri Arasındaki İlişki

TEOREM

$f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında integrallenebilen bir fonksiyon olsun. $\forall x \in (a, b)$ için $F'(x) = f(x)$ olacak şekilde sürekli bir $F:[a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ olur.

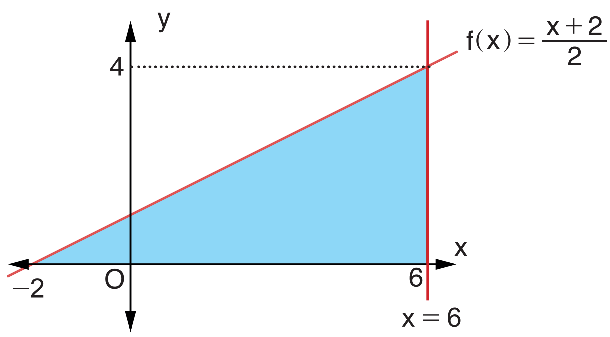
Burada a ya integralin alt sınırı, b ye integralin üst sınırı denir.

Belirli integral hesabı yapılırken belirsiz integral alma kuralları aynen uygulanır. Örneğin



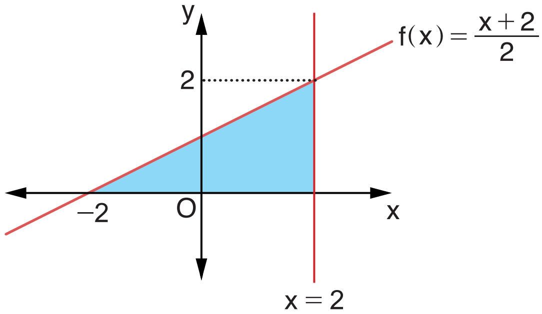
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+2}{2}$ fonksiyonu, $x = 2$ doğrusu, $x = 6$ doğrusu ve x ekseni ile sınırlı bölgenin alanını bulmak için $A = \int_2^6 \left(\frac{x+2}{2}\right)dx$ belirli integrali hesaplanır.

$y = f(x)$ eğrisinin altındaki boyalı alan $F(x)$ fonksiyonu olsun.



$F'(x) = f(x)$ olduğuna göre $f(x) = \frac{x+2}{2}$ fonksiyonunun x ekseni ile sınırlı bölgesinin alanı $F(6)$ ya eşittir.

Aynı şekilde $f(x)=\dfrac{x+2}{2}$ fonksiyonu ve $x=2$ doğrusunun x ekseni ile sınırlı bölgesinin alanı $F(2)$ ye eşittir.



Bu durumda $f(x)=\dfrac{x+2}{2}$ fonksiyonu, $x=2$ ve $x=6$ doğrularının x ekseni ile arasında kalan alan $F(6)-F(2)$ ye eşit olacaktır.

Sonuç olarak $A=\int_2^6 \left(\dfrac{x+2}{2}\right)dx=F(6)-F(2)$ olur.

ÖRNEK 5

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2 x)dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$f(x)=1+\tan^2 x$ fonksiyonunun integrali $F(x)=\tan x+c$ olur.

$\int f(x)dx=F(x)+c \Rightarrow \int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ olduğuna göre

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2 x)dx=(\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\tan\dfrac{\pi}{4}-\tan 0=1-0=1$ bulunur.

ÖRNEK 6

$\int_{-2}^{2} (2x+3)(x^2+3x+5)^2 dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$x^2+3x+5=u \;\Rightarrow\; (2x+3)dx=du$

dönüşümü yapıldığında belirli integralin sınırları değiştirilir.

$x^2+3x+5=u$ eşitliğinde

$x=2 \;\Rightarrow\; 2^2+3\cdot 2+5=u \;\Rightarrow\; u=15$

$x=-2 \;\Rightarrow\; (-2)^2+3\cdot(-2)+5=u \;\Rightarrow\; u=3$ olur.

Elde edilen bu değerler yerine yazılırsa

$\int_{-2}^{2} (2x+3)(x^2+3x+5)^2 dx=\int_3^{15} u^2 du=\dfrac{u^3}{3}\Big|_3^{15}=\dfrac{15^3}{3}-\dfrac{3^3}{3}=1116$ bulunur.

Ya da sınırlar değiştirilmeden de aynı sonuca ulaşılabilir.

$$\int_{-2}^{2} (2x+3)(x^2+3x+5)^2 dx=\dfrac{(x^2+3x+5)^3}{3}\Big|_{-2}^{2}=\dfrac{(2^2+3\cdot 2+5)^3}{3}-\dfrac{[(-2)^2+3\cdot(-2)+5]^3}{3}$$

$$=\dfrac{15^3}{3}-\dfrac{3^3}{3}=1116 \text{ elde edilir.}$$

ÖRNEK 7

$\displaystyle\int_e^{e^3} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$\displaystyle\int_e^{e^3} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$ integralinde

$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$

dönüşümü uygulanır ve sınırlar

$x = e^3$ için $u = \ln e^3 \Rightarrow u = 3$

$x = e$ için $u = \ln e \Rightarrow u = 1$ ile değiştirilse

$$\int_e^{e^3} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx = \int_1^3 \sqrt{u}\,du$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\sqrt{u^3}\Big|_1^3$$

$$= \frac{2}{3}(\sqrt{27} - \sqrt{1})$$

$$= \frac{2}{3}(3\sqrt{3} - 1)$$

$$= 2\sqrt{3} - \frac{2}{3} \text{ elde edilir.}$$

ÖRNEK 8

$\displaystyle\int_0^1 (x^2 - 2x)e^x\,dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$\int (x^2 - 2x)e^x dx$ integralinde kısmî intagrasyon yöntemi uygulanırsa

Türevi Alınacak		İntegrali Alınacak
+	$x^2 - 2x$	e^x
–	$2x - 2$	e^x
+	2	e^x
	0	e^x

$$\int_0^1 (x^2 - 2x)e^x dx = \left[(x^2 - 2x)e^x - (2x - 2)e^x + 2e^x\right]\Big|_0^1$$

$$= (x^2 - 2x - 2x + 2 + 2)e^x\Big|_0^1$$

$$= (x^2 - 4x + 4)e^x\Big|_0^1$$

$$= (1 - 4 + 4)\cdot e^1 - (0^2 - 4.0 + 4)\cdot e^0$$

$$= e - 4 \text{ elde edilir.}$$

Belirli İntegralin Özellikleri

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrallenebilen bir fonksiyon olsun.

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$

$$\int_a^a f(x)dx = F(x)\Big|_a^a = F(a)-F(a)=0$$ olarak bulunur.

ÖRNEK 9

$\int_3^3 \frac{(x^4-x)2^x}{\sin x}dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$\int_a^a f(x)dx = 0$ olduğundan $\int_3^3 \frac{(x^4-x)2^x}{\sin x}dx = 0$ olarak bulunur.

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = -[F(a)-F(b)] = -\int_b^a f(x)dx$$ olarak bulunur.

ÖRNEK 10

$\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(x)dx = 0$$ olarak bulunur.

3. $c\in\mathbb{R}$ **olmak üzere** $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

Riemann toplamından

$$\int_a^b cf(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} cf(x_t)\Delta x_k\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(c\sum_{k=1}^{n} f(x_t)\Delta x_k\right)$$
$$= c\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f(x_t)\Delta x_k\right) = c\int_a^b f(x)dx$$ bulunur.

ÖRNEK 11

$\int_{-2}^{3} 4f(x)dx = 7$ olduğuna göre $\int_{3}^{-2} 8f(x)dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$$\int_{-2}^{3} 4f(x)dx = 4\int_{-2}^{3} f(x)dx = 7 \Rightarrow \int_{-2}^{3} f(x)dx = \frac{7}{4} \text{ olur.}$$

Buradan

$$\int_{3}^{-2} 8f(x)dx = 8\int_{3}^{-2} f(x)dx$$

$$= -8\int_{-2}^{3} f(x)dx = -8\cdot\frac{7}{4} = -14 \text{ bulunur.}$$

4. $\int_{a}^{b} [f(x) \pm g(x)]dx = \int_{a}^{b} f(x)dx \pm \int_{a}^{b} g(x)dx$

Riemann toplamından

$$\int_{a}^{b} [f(x) \pm g(x)]dx = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} [f(x_t) \pm g(x_t)]\cdot \Delta x_k\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} (f(x_t)\Delta x_k \pm g(x_t)\Delta x_k)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} (f(x_t)\Delta x_k) \pm \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} (g(x_t)\Delta x_k)$$

$$= \int_{a}^{b} f(x)dx \pm \int_{a}^{b} g(x)dx \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 12

$\int_{2}^{3} \left(3^x + \frac{1}{x+1}\right)dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$$\int_{2}^{3} \left(3^x + \frac{1}{x+1}dx\right) = \int_{2}^{3} 3^x dx + \int_{2}^{3} \frac{1}{x+1}dx$$

$$= \frac{3^x}{\ln 3}\Big|_2^3 + \ln|x+1|\Big|_2^3$$

$$= \frac{3^3}{\ln 3} - \frac{3^2}{\ln 3} + \ln 4 - \ln 3 = \frac{18}{\ln 3} + \ln\frac{4}{3} \text{ bulunur.}$$

5. $a < c < b$ **için** $\int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$

$A = \int_{a}^{c} f(x)dx = F(c) - F(a)$ ve $B = \int_{c}^{b} f(x)dx = F(b) - F(c)$ olsun.

Bu durumda

$$A+B=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=F(c)-F(a)+F(b)-F(c)$$
$$=F(b)-F(a)$$
$$=\int_a^b f(x)dx \text{ bulunur.}$$

Benzer şekilde $a<c<d<e<b$ için

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^d f(x)dx+\int_d^e f(x)dx+\int_e^b f(x)dx \text{ elde edilir.}$$

ÖRNEK 13

$$f(x)=\begin{cases} x & , x<2 \text{ ise} \\ x-2, & 2\le x<4 \text{ ise} \\ 3 & , 4\le x \text{ ise}\end{cases}$$

olmak üzere $\int_0^7 f(x)dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

Parçalı fonksiyonun kritik noktalarına göre integral parçalanır.

$$\int_0^7 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx+\int_4^7 f(x)dx$$
$$=\int_0^2 xdx+\int_2^4 (x-2)dx+\int_4^7 3dx$$
$$=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2+\left.\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\right|_2^4+\left.3x\right|_4^7$$
$$=2+2+9=13 \text{ olarak elde edilir.}$$

ÖRNEK 14

$\int_0^3 \sqrt{x^2-4x+4}\,dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$ olup $x=2$ noktası $f(x)$ fonksiyonunun kritik noktasıdır.

$$\int_0^3 \sqrt{x^2-4x+4}\,dx=\int_0^3 |x-2|dx$$
$$=\int_0^2 (-x+2)dx+\int_2^3 (x-2)dx$$
$$=\left.\left(-\frac{x^2}{2}+2x\right)\right|_0^2+\left.\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\right|_2^3$$
$$=2+\left(\frac{9}{2}-6-2+4\right)=\frac{5}{2} \text{ bulunur.}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$		$x-2$

ÖRNEK 15

$\displaystyle\int_3^4 \frac{x}{x^2-x-2}dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$\dfrac{x}{x^2-x-2}=\dfrac{x}{(x-2)(x+1)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x+1}$ olacak şekilde basit kesirlere ayrılır. Buradan $x=A(x+1)+B(x-2)$ ifadesinde $x=2$ için $2=3A \Rightarrow A=\dfrac{2}{3}$ ve $x=-1$ için $-1=-3B \Rightarrow B=\dfrac{1}{3}$ bulunur.

Bu durumda

$$\int_3^4 \frac{x}{x^2-x-2}dx=\int_3^4 \frac{\frac{2}{3}}{x-2}dx+\int_3^4 \frac{\frac{1}{3}}{x+1}dx$$
$$=\left(\frac{2}{3}\ln|x-2|+\frac{1}{3}\ln|x+1|\right)\Big|_3^4$$
$$=\frac{1}{3}\ln\left|(x-2)^2(x+1)\right|\Big|_3^4$$
$$=\frac{1}{3}(\ln 20-\ln 4)$$
$$=\frac{1}{3}\ln 5 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 16

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tanımlı f fonksiyonunun $x=-1$ noktasındaki teğeti x ekseni ile pozitif yönde 45^0 lik açı yapıyor. $x=-2$ noktası f fonksiyonunun yerel minimum değeri olduğuna göre $\displaystyle\int_{-2}^{-1} f'(x)\cdot f''(x)dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

f fonksiyonunun $x=-1$ noktasındaki teğeti x ekseni ile pozitif yönde 45^0 lik açı yapıyor ise $f'(-1)=1$ olur. f fonksiyonunun $x=-2$ noktasında yerel minimum değeri $f'(-2)=0$ olur.

Bu durumda $\displaystyle\int_{-2}^{-1} f'(x)\cdot f''(x)dx$ integralinde

$f'(x)=u \Rightarrow f''(x)dx=du$ ve

$\left.\begin{array}{l} x=-2 \Rightarrow f'(-2)=0 \\ x=-1 \Rightarrow f'(-1)=1 \end{array}\right.$ dönüşümü uygulanırsa

$$\int_{-2}^{-1} f'(x)\cdot f''(x)dx=\int_0^1 u\,du$$
$$=\frac{u^2}{2}\Big|_0^1$$
$$=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2} \text{ elde edilir.}$$

ÖRNEK 17

a ve b birbirinden farklı gerçek sayılar olmak üzere

$\int_a^b d(3x^2-2x)=0$ olduğuna göre $a+b$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$\int_a^b d(f(x))=\int_a^b f'(x)dx=f(x)\Big|_a^b=f(b)-f(a)$ olduğuna göre

$\int_a^b d(3x^2-2x)=\int_a^b (6x-2)dx=(3x^2-2x)\Big|_a^b=(3x^2-2x)\Big|_a^b=0$

$(3b^2-2b)-(3a^2-2a)=0$

$3(b^2-a^2)-2(b-a)=0$

$3(b-a)(b+a)-2(b-a)=0$

$(b-a)\cdot(3b+3a-2)=0$ elde edilir.

Bu durumda

$b=a$ veya $3b+3a-2=0$ olur.

Buradan $3b+3a=2 \Rightarrow a+b=\frac{2}{3}$ elde edilir.

SIRA SİZDE

$\int_1^2 (f(3x-2)+3x)dx=\frac{17}{2}$ olduğuna göre $\int_1^4 (f(x)-2x)dx$ integralini hesaplayınız.

$f(x)=\begin{cases} \frac{x+2}{3}, & x<1 \text{ ise} \\ 2x-1, & x>1 \text{ ise} \end{cases}$ olmak üzere $\int_1^4 f(x-2)dx$ integralini hesaplayınız.

ALIŞTIRMALAR

1. $f(x)$ ve $g(x)$ sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$\int_{2}^{3} f(x)dx = 2$ ve $\int_{2}^{3} g(x)dx = 6$ **olduğuna göre aşağıdaki integrallerin değerini hesaplayınız.**

a) $\int_{5}^{5} f(x)dx$ b) $\int_{2}^{3} 5f(x)dx - \int_{3}^{2} \frac{g(x)}{3}dx$

2. $\int_{-1}^{2} 2f^2(x)dx = 4$ **olduğuna göre** $\int_{2}^{-1} 5f^2(x)dx$ **integralini hesaplayınız.**

3. **Aşağıda verilen ifadelerin integrallerini hesaplayınız.**

a) $\int_{0}^{-2} (x^3 + 2^x)dx$

b) $\int_{\ln 3}^{\ln 4} e^{2x}dx + \int_{\ln 4}^{\ln 5} e^{2x}dx$

c) $\int_{1}^{2} \frac{2x}{x^2+1}dx$

ç) $\int_{0}^{1} 3xe^x dx$

d) $\int_{-2\pi}^{2\pi} \sin x \cos x \cos 2x \, dx$

4. $f(x) = \begin{cases} x-2, & x < 0 \text{ ise} \\ -x^2, & x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$ **olduğuna göre**

$\int_{-1}^{1} f(x)dx$ **integralini hesaplayınız.**

5. $\int_{-3}^{1} |x^2 - 4|dx$ **integralini hesaplayınız.**

6. $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \leq 3 \text{ ise} \\ \ln^3 x, & x > 3 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor. **Buna göre** $\int_{0}^{1} f(x)dx$ **integralini hesaplayınız.**

7. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x|\ln x|dx$ **integralini hesaplayınız.**

8. $f(x) = \begin{cases} x, & x > 1 \text{ ise} \\ 2x, & x \leq 1 \text{ ise} \end{cases}$

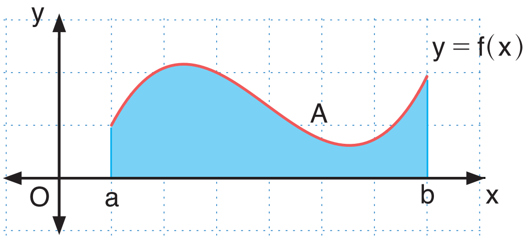
$g(x) = \begin{cases} x^2, & x > 1 \text{ ise} \\ x^3, & x \leq 1 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonları veriliyor.

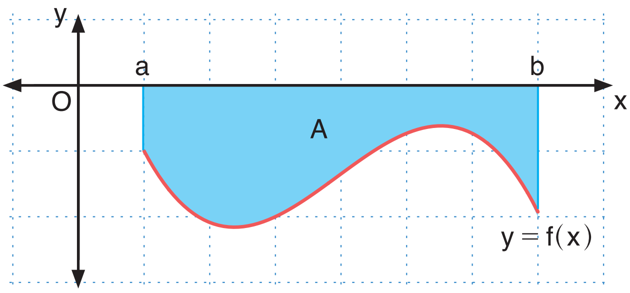
Buna göre $\int_{0}^{2} (f(x) + g(x))dx$ integralini **hesaplayınız.**

Belirli İntegral ile Alan Hesabı

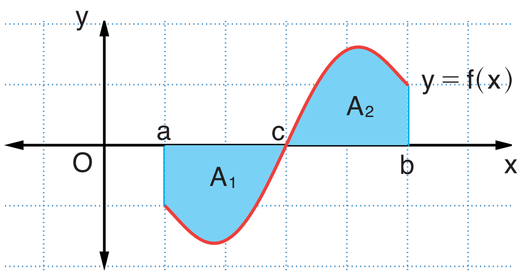
Geometrik şekillerin alan kuralları uygulanarak her yüzeyin alanının hesaplanması mümkün olmayabilir. Bir gölün yüzeyinin alanı, bir uçak gövdesinin alanı veya bir kara parçasının yüz ölçümü hesaplanırken integral kullanılır. Herhangi bir nesnenin dış yüzeyini ölçme veya kaplama işinin mühendislik alanı başta olmak üzere pek çok alanda uygulamaları bulunmaktadır.



$f:[a, b] \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ sürekli ve integrallenebilir bir fonksiyon ve $f(x) > 0$ olsun. $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$, $x = b$ doğruları ve x ekseni ile sınırlı bölgenin alanı $A = \int_a^b f(x)dx$ olur.



$f:[a,b] \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu $f(x) < 0$ olsun. $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$, $x = b$ doğruları ve x ekseni ile sınırlı bölgenin alanı $A = -\int_a^b f(x)dx$ olur.



$f:[a, b] \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu olmak üzere $a < c < b$ ve $\forall x \in [a, c)$ için $f(x) < 0$, $\forall x \in (c, b]$ için $f(x) > 0$ olsun. $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$, $x = b$ doğruları ve x ekseni ile sınırlı bölgenin alanı

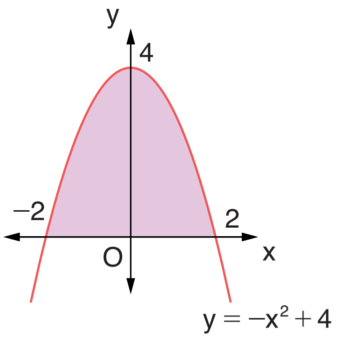
$A = A_1 + A_2 = -\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ olur. Buradan $A = \int_a^b |f(x)|dx$

ifadesi elde edilir.

ÖRNEK 18

Denklemi $y=-x^2+4$ olan eğri ile x ekseninin sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.

ÇÖZÜM



$y=0$ için $-x^2+4=0$ olup $x^2=4 \Rightarrow x=-2$ ve $x=2$ x eksenini kestiği noktalar ve $x=0$ için $y=4$ y eksenini kestiği noktadır.
Buradan alan

$$A=\int_{-2}^{2} f(x)dx=\int_{-2}^{2}(-x^2+4)dx$$

$$=\left(-\frac{x^3}{3}+4x\right)\Big|_{-2}^{2}$$

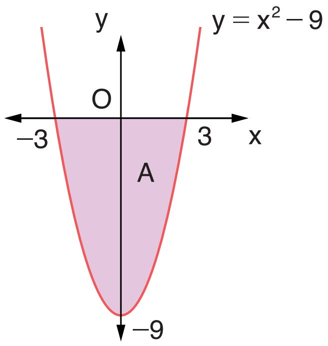
$$=\left(-\frac{8}{3}+8\right)-\left(\frac{8}{3}-8\right)$$

$$=-\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3}+8=\frac{32}{3} \text{ birimkare bulunur.}$$

ÖRNEK 19

Denklemi $y=x^2-9$ olan eğri ile x ekseninin sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.

ÇÖZÜM



$y=0$ için $x^2-9=0 \Rightarrow x=3$ ve $x=-3$ x eksenini kestiği noktalar olup $x=0$ için $y=-9$ y eksenini kestiği noktadır.

$$A=-\int_{-3}^{3}(x^2-9)dx=-\left(\frac{x^3}{3}-9x\right)\Big|_{-3}^{3}$$

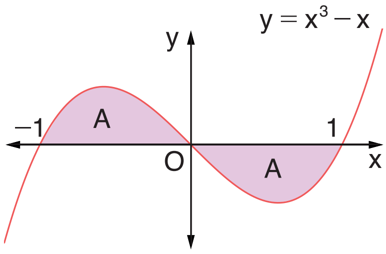
$$=-[(9-27)-(-9+27)]=36 \text{ birimkare olarak bulunur.}$$

ÖRNEK 20

Denklemi $y=x^3-x$ olan eğri ile x ekseninin sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.

ÇÖZÜM

$y=0$ için $x^3-x=0$ olup $x(x^2-1)=0 \Rightarrow x=0,\ x=1$ ve $x=-1$ noktaları x eksenini kestiği noktalardır.
Bu durumda alan



$$A=\int_{-1}^{0} f(x)dx-\int_{0}^{1} f(x)dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx-\int_{0}^{1}(x^3-x)dx$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0}-\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{1}$$

$$=\left(0+\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{1}{4}-0\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2} \text{ birimkare bulunur.}$$

ÖRNEK 21

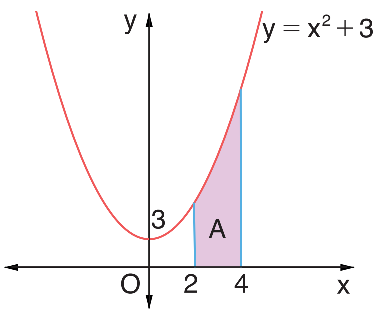
$y = x^2 + 3$ eğrisi ile $x = 2$, $x = 4$ ve $y = 0$ doğruları arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$y = x^2 + 3$ fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir. Buna göre

$$A = \int_2^4 (x^2 + 3)dx = \left(\frac{x^3}{3} + 3x\right)\Big|_2^4$$

$$= \left(\frac{4^3}{3} + 12\right) - \left(\frac{2^3}{3} + 6\right) = \frac{74}{3}$$ birimkare olarak bulunur.



ÖRNEK 22

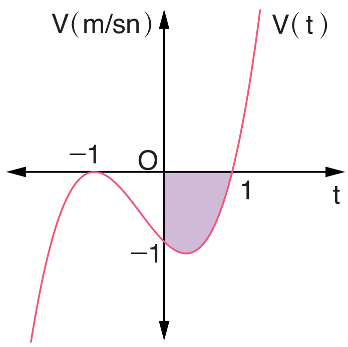
Yanda grafiği verilen, bir doğru boyunca hareket eden ve zamana bağlı hız fonksiyonu $V(t) = t^3 + t^2 - t - 1$ m/sn olan bir hareketlinin $t = 0$ ve $t = 1$ saniye aralığındaki toplam aldığı yolu bulunuz.

ÇÖZÜM

$(0, 1)$ aralığında $f(x) < 0$ olduğundan alan

$$A = -\int_0^1 V(t)dt = -\int_0^1 (t^3 + t^2 - t - 1)dt$$

$$= \left(-\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{11}{12}$$ m olarak bulunur.



ÖRNEK 23

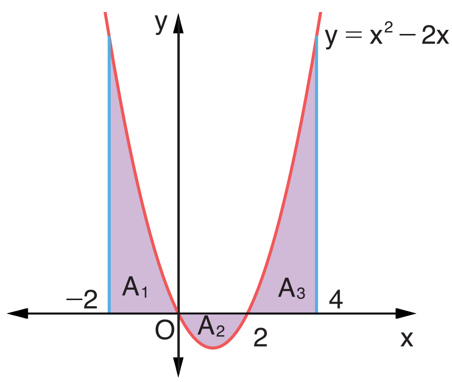
$y = x^2 - 2x$ eğrisiyle $y = 0$, $x = -2$ ve $x = 4$ doğruları arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

ÇÖZÜM

$y = x^2 - 2x$ eğrisinin grafiğine göre $A = A_1 + A_2 + A_3$ olup

$$A_1 = \int_{-2}^0 (x^2 - 2x)dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_{-2}^0 = 0 - \left(\frac{-8}{3} - 4\right) = \frac{20}{3}$$ birimkare

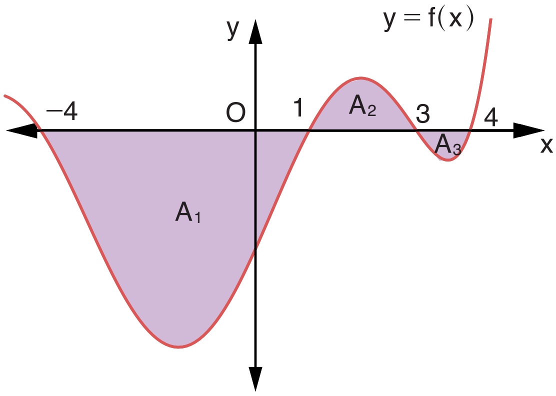
$$A_2 = -\int_0^2 (x^2 - 2x)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + x^2\right)\Big|_0^2 = \left(-\frac{8}{3} + 4\right) - (0 - 0) = \frac{4}{3}$$ birimkare



$$A_3 = \int_2^4 (x^2 - 2x)dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_2^4 = \left(\frac{64}{3} - 16\right) - \left(\frac{8}{3} - 4\right) = \frac{20}{3}$$ birimkare bulunur.

Buradan $A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{20}{3} + \frac{4}{3} + \frac{20}{3} = \frac{44}{3}$ birimkare elde edilir.

ÖRNEK 24



Yandaki grafikte $\int_{-4}^{4} f(x)dx = -7$ ve $\int_{-4}^{4} |f(x)|dx = 13$ olduğuna göre A_2 değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Grafiğe göre

$$\int_{-4}^{4} f(x)dx = -\int_{-4}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{3} f(x)dx - \int_{3}^{4} f(x)dx$$

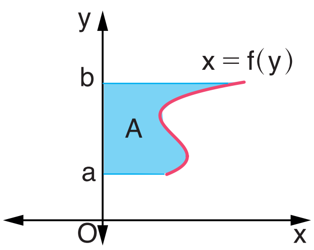
$$= -A_1 + A_2 - A_3 = -7$$

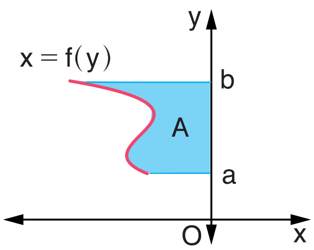
$$\int_{-4}^{4} |f(x)|\,dx = \int_{-4}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{4} f(x)dx$$

$$= A_1 + A_2 + A_3 = 13 \text{ bulunur.}$$

Buradan da

$$-A_1 + A_2 - A_3 = -7$$
$$A_1 + A_2 + A_3 = 13$$
$$2A_2 = 6$$
$$A_2 = 3 \text{ birimkare elde edilir.}$$





TANIM

$[a,\, b]$ kapalı aralığında $f(y) \geq 0$ olmak üzere $x = f(y)$ eğrisi $y = a$ ve $y = b$ doğruları ile y ekseninin sınırladığı bölgenin alanı A olsun.

Bu durumda $A = \int_{a}^{b} f(y)dy = \int_{a}^{b} xdy$ biçiminde yazılır.

$[a,\, b]$ kapalı aralığında $f(y) \leq 0$ olmak üzere $x = f(y)$ eğrisi $y = a$ ve $y = b$ doğruları ile y ekseninin sınırladığı bölgenin alanı A olsun.

Bu durumda $A = -\int_{a}^{b} f(y)dy = -\int_{a}^{b} xdy$ biçiminde yazılır.

ÖRNEK 25

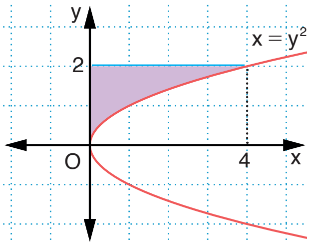
$y = \sqrt{x}$ eğrisinin $y = 0$ ve $y = 2$ doğruları arasında kalan bölgesinin alanını hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$y=\sqrt{x} \Rightarrow x=y^2$ olup

$\int_0^2 f(y)dy=\int_0^2 y^2dy$

$=\frac{y^3}{3}\Big|_0^2=\frac{8}{3}$ birimkare olarak bulunur.



ÖRNEK 26

$y=\ln x$ eğrisi $y=1$, $y=2$ doğruları ve y ekseni ile sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

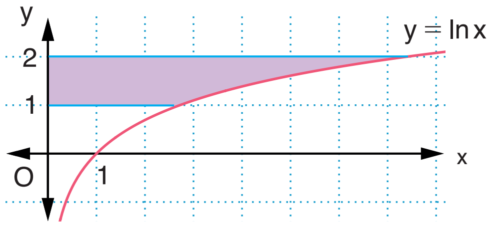
ÇÖZÜM

$y=\ln x \Rightarrow x=e^y$ olup

$A=\int_1^2 f(y)dy$

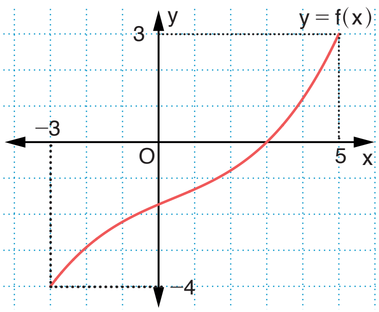
$=\int_1^2 e^y dy$

$=(e^y)\Big|_1^2=(e^2-e)$ birimkare bulunur.

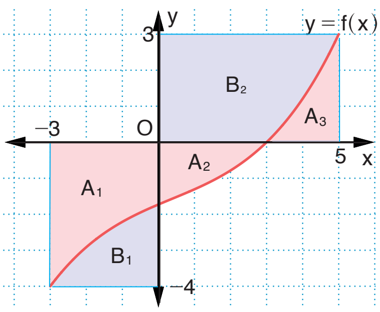


ÖRNEK 27

Yandaki şekilde grafiği verilen $f:[-3,5]\rightarrow[-4,3]$ ve $y=f(x)$ fonksiyonu için $\int_{-3}^{5} f(x)dx+\int_{-4}^{3} f(y)dy$ toplamını bulunuz.



ÇÖZÜM



$\int_{-3}^{5} f(x)dx=-A_1-A_2+A_3$ ve

$\int_{-4}^{3} f(y)dy=-B_1+A_2+B_2$ olur.

Buradan

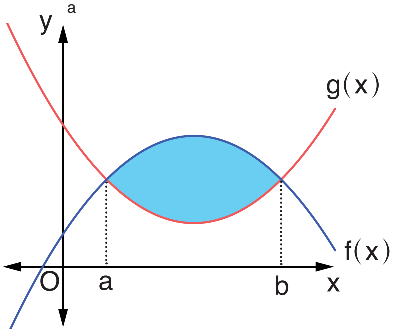
$\int_{-3}^{5} f(x)dx+\int_{-4}^{3} f(y)dy=A_3+B_2-(A_1+B_1)$

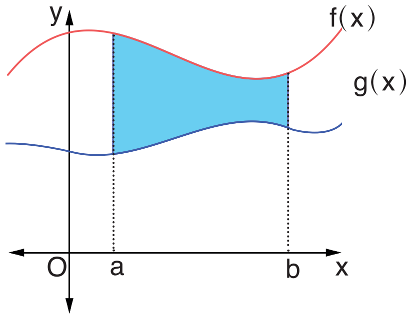
$=15-12=3$ birimkare bulunur.

$y = f(x)$ ve $y = g(x)$ Eğrileri Arasındaki Alan

$[a, b]$ kapalı aralığında $f(x)$ ve $g(x)$ integrallenebilir iki fonksiyon olsun.
$\forall x \in [a, b]$ için $f(x) \geq g(x)$ ise $x = a$, $x = b$ doğruları ile eğriler arasında kalan sınırlı bölgenin alanı

$$A = A_1 - A_2$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$
$$= \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \text{ bulunur.}$$





ÖRNEK 28

$y = x^2 + 3x$ eğrisi ve $y = x + 3$ doğrusu ile sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

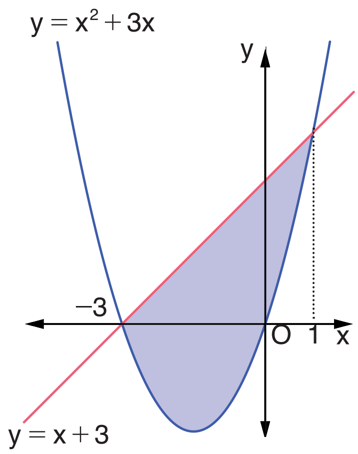
ÇÖZÜM

$y = x^2 + 3x$ eğrisi ile $y = x + 3$ doğrusunun kesim noktaları

$x^2 + 3x = x + 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

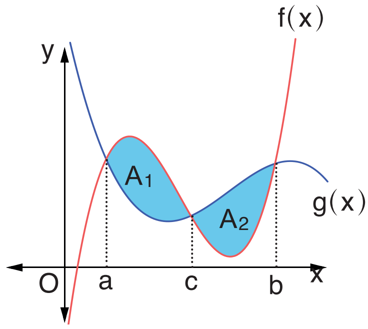
$(x + 3)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = -3$ ve $x = 1$ biçiminde elde edilir. Bu durumda elde edilen bu noktalar doğru ile eğrinin birlikte belirlediği alanın sınırlarını gösterir. İstenen alan

$$A = \int_{-3}^{1} [(x + 3) - (x^2 + 3x)]\,dx$$
$$= \int_{-3}^{1} (-x^2 - 2x + 3)\,dx$$
$$= \left(-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right)\Bigg|_{-3}^{1}$$
$$= \left(\frac{-1}{3} - 1 + 3\right) - (9 - 9 - 9)$$
$$= \frac{32}{3} \text{ birimkare olarak bulunur.}$$



SONUÇ

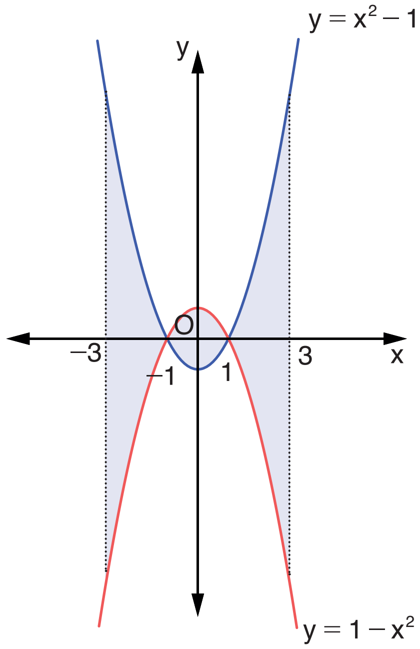
$[a, b]$ aralığının bir kısmında $f(x) \geq g(x)$ ve diğer kısmında $f(x) \leq g(x)$ ise $x = a$ ve $x = b$ doğruları ile eğriler arasında kalan sınırlı bölgenin alanı $A = A_1 + A_2 = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$ olur.



ÖRNEK 29

$y = x^2 - 1$ ile $y = 1 - x^2$ eğrileri ile $x = -3$ ve $x = 3$ doğruları arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

ÇÖZÜM



$y = x^2 - 1$ ile $y = 1 - x^2$ eğrilerinin kesim noktaları $x^2 - 1 = 1 - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 2 = 0$ olup

buradan

$x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ ve $x = -1$ noktaları bulunur.

$$A = \int_{-3}^{3} |x^2 - 1 - (1 - x^2)|dx = \int_{-3}^{3} |2x^2 - 2|dx$$

$$= 2\left[\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Big|_{-3}^{-1} + \left(-\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_{-1}^{1} + \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Big|_{1}^{3}\right]$$

$$= 2\left[\left(-\frac{1}{3} + 1\right) - (-9 + 3) + \left(-\frac{1}{3} + 1\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) + (9 - 3) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right]$$

$$= 2\left(\frac{2}{3} + 6 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 6 + \frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{88}{3} \text{ birimkare olur.}$$

ÖRNEK 30

$y = e^x$ ve $y = e^{-x}$ eğrileri ile $x = -\ln 3$ ve $x = \ln 2$ doğruları arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$y = e^x$ ve $y = e^{-x}$ eğrilerinin oluşturduğu bölgenin alanı

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-\ln 3}^{0} (e^{-x} - e^x)dx + \int_{0}^{\ln 2} (e^x - e^{-x})dx$$

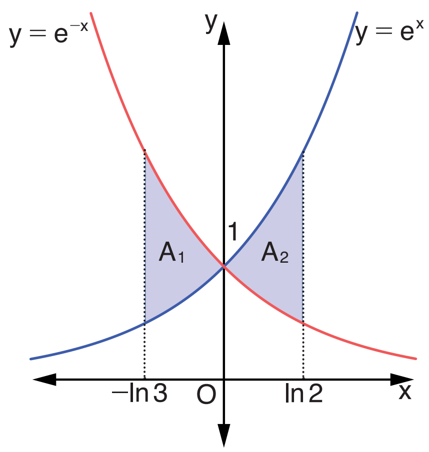
$$= (-e^{-x} - e^x)\Big|_{-\ln 3}^{0} + (e^x + e^{-x})\Big|_{0}^{\ln 2}$$

$$= [(-e^0 - e^0) - (-e^{\ln 3} - e^{-\ln 3})] + [(e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}) - (e^0 + e^{-0})]$$

$$= \left[-2 - \left(-3 - \frac{1}{3}\right)\right] + \left[\left(2 + \frac{1}{2}\right) - 2\right]$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{11}{6} \text{ birimkare olarak bulunur.}$$



SONUÇ

$[a, b]$ aralığı için $f(y) \geq g(y)$ ise $y = a$ ve $y = b$ doğruları ile eğriler arasında kalan sınırlı bölgenin alanı $A = \int_a^b |f(y) - g(y)| dy$ olarak ifade edilir.

ÖRNEK 31

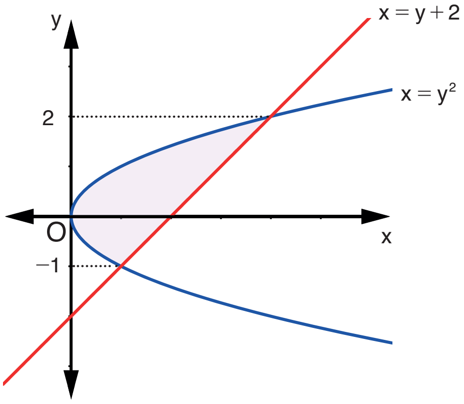
$x = y^2$ eğrisi ve $x = y + 2$ doğrusu ile sınırlı bölgenin alanını hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$x = y^2$ eğrisi ve $x = y + 2$ doğrusunun kesim noktaları

$y^2 = y + 2 \Rightarrow y^2 - y - 2 = 0$

$(y - 2)(y + 1) = 0 \Rightarrow y = 2$ ve $y = -1$ bulunur.



Boyalı alan:

$$A = \int_{-1}^{2} [(y+2) - y^2] dy$$

$$= \int_{-1}^{2} (y + 2 - y^2) dy$$

$$= \left(\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{9}{2} \text{ birimkare olarak bulunur.}$$

ÖRNEK 32

$x = y^2 - 6y$ ve $x = 8 - y^2$ eğrileri arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

ÇÖZÜM

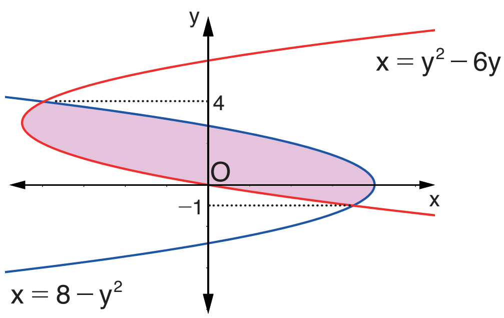
$x = y^2 - 6y$ ve $x = 8 - y^2$ eğrilerinin kesim noktaları

$y^2 - 6y = 8 - y^2$

$2y^2 - 6y - 8 = 0$

$y^2 - 3y - 4 = 0$

$(y - 4)(y + 1) = 0 \Rightarrow y = 4$ ve $y = -1$ bulunur.



$$A = \int_{-1}^{4} [(8 - y^2) - (y^2 - 6y)] dy$$

$$= \int_{-1}^{4} (8 - 2y^2 + 6y) dy$$

$$= \left(8y - \frac{2y^3}{3} + 3y^2\right)\Bigg|_{-1}^{4}$$

$$= \left(32 - \frac{128}{3} + 48\right) - \left(-8 + \frac{2}{3} + 3\right)$$

$$= \frac{125}{3} \text{ birimkare olur.}$$

ÖRNEK 33

Aşağıda verilen integralini hesaplayınız.

a) $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$

b) $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$

c) $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$

ç) $\int_0^{3\sqrt{2}} \left(\sqrt{36-x^2}-x\right)dx$

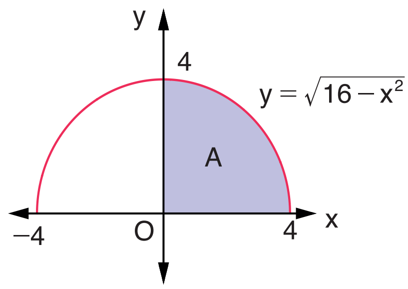
ÇÖZÜM

a) $y=\sqrt{16-x^2}$ fonksiyonu $r=4$ yarıçaplı yarım çemberdir. Yandaki A boyalı alanı $A=\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$ biçiminde hesaplanır.

$A=\dfrac{\pi\cdot r^2}{4}=\dfrac{\pi\cdot 16}{4}=4\pi$ birimkare olduğundan

$\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx=A$

$=4\pi$ birimkare elde edilir.

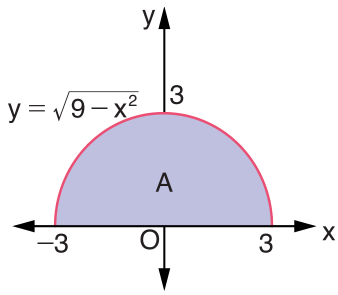


b) $y=\sqrt{9-x^2}$ fonksiyonu $r=3$ yarıçaplı çemberdir. Yandaki A boyalı alanı $A=\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ biçiminde hesaplanır.

$A=\dfrac{\pi\cdot r^2}{2}=\dfrac{9\pi}{2}$ birimkare olduğundan

$\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2}\,dx=A$

$=\dfrac{9\pi}{2}$ birimkare elde edilir.

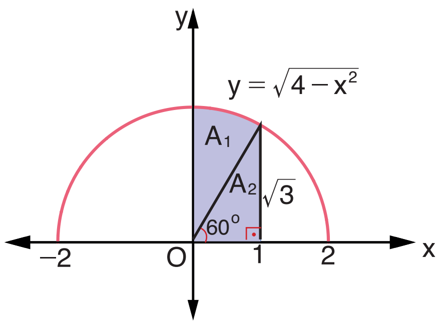


c) A_1 alanı 30^0 lik bir dilim alanı olup

$A_1=\pi\cdot r^2\cdot\dfrac{\alpha}{360^0}=\dfrac{\pi\cdot 4\cdot 30^0}{360^0}=\dfrac{\pi}{3}$ birimkare ve A_2 alanı da dik üçgen alanı olup $A_2=\dfrac{1\cdot\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ birimkare şeklinde bulunur.

Bu durumda boyalı alan $A=A_1+A_2=\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ birimkare bulunur.

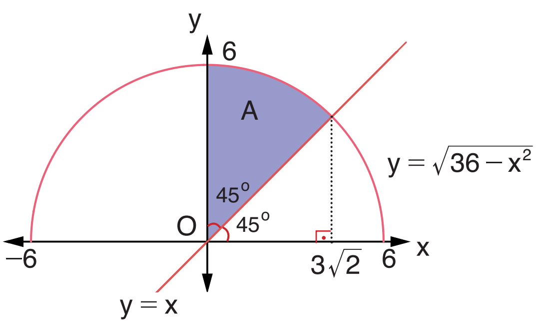
$A=\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx=\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ birimkare elde edilir.



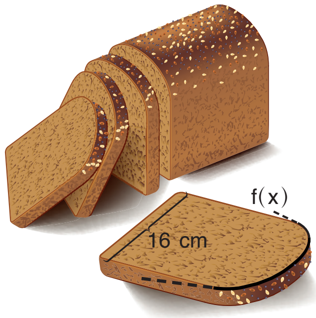
ç) $\int_0^{3\sqrt{2}} \left(\sqrt{36-x^2}-x\right)dx$ integralinin değeri çember ile doğru arasında kalan A alanıdır. A alanı $r=6$ olan 45^0 lik daire diliminin alanına eşittir.

$A=\dfrac{\pi\cdot r^2\cdot 45^0}{360^0}=\dfrac{\pi\cdot 36\cdot 45}{360}=\dfrac{9\pi}{2}$ birimkare olup

$\int_0^{3\sqrt{2}} \left(\sqrt{36-x^2}-x\right)dx=A=\dfrac{9\pi}{2}$ birimkare elde edilir.



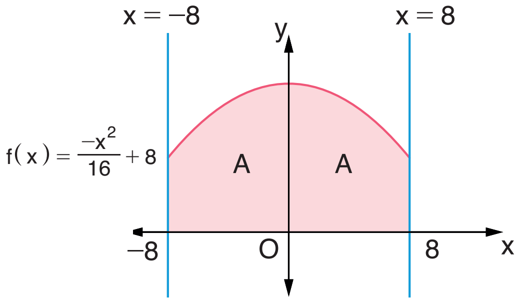
ÖRNEK 34



Ekmek israfını önlemek amacıyla bayat ekmek dilimlerinin üzerine tereyağı sürülüp kızartılacaktır. Ekmek dilimlerinin yüzey alanlarının eşit olduğu ve bir ekmek diliminin taban uzunluğu 16 cm olduğu bilinmektedir.

Dilimin üst yüzeyi ise $f(x)=\frac{-x^2}{16}+8$ fonksiyonu ile modellenmiştir. 10 cm^2 ekmek yüzeyine yaklaşık 1,5 gr tereyağı sürüldüğüne göre 512 gr tereyağı ile kaç tane ekmek dilimi yağlanabilir?

ÇÖZÜM



$$A=\int_0^8\left(\frac{-x^2}{16}+8\right)dx$$

$$=\left(-\frac{x^3}{48}+8x\right)\Big|_0^8$$

$$=\left(-\frac{8^3}{48}+64\right)-0$$

$$A=\frac{160}{3}\ cm^2$$

$$2A=\frac{320}{3}\ cm^2 \text{ olarak bulunur.}$$

10 cm^2 ekmek yüzeyine yaklaşık 1,5 gr tereyağı sürüldüğüne göre $\frac{320}{3}$ cm^2 yüzeye 16 gr tereyağı sürülmelidir.

1 dilim için 16 g tereyağı kullanılıyorsa 512 g tereyağı ile 32 dilim ekmek yağlanabilir.

TEKNOLOJİ

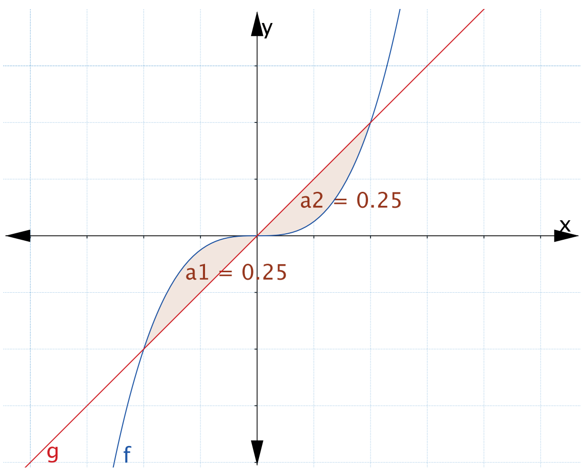
$y=x^3$ eğrisi ile $y=x$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını Geogebra programı yardımı ile bulunuz.

Giriş: f(x)=x^3
Giriş: g(x)=x

yazarak $f(x)=x^3$ ve $g(x)=x$ fonksiyonlarını oluşurunuz.

Giriş: a1=İntegralarasında(f,g, -1, 0)
Giriş: a2=İntegralarasında(g,f, 0, 1)
Giriş: a = a1 + a2

yazarak f ve g fonksiyonları arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

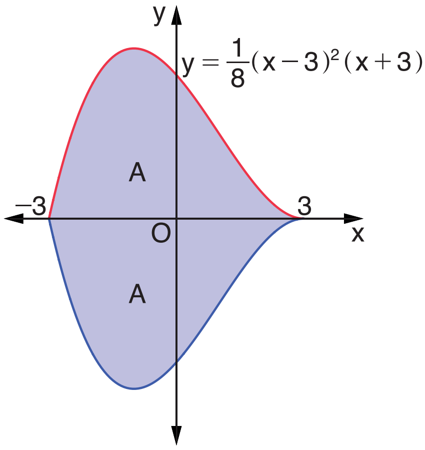


ÖRNEK 35

Yazın tatil sezonunun kapanmasıyla birlikte açık havuzları kışa hazırlamak gerekir. Kış boyunca açık bulunan bir havuz bazen kazalara sebep olabilir. Hem güvenlik hem de temizlik açısından havuzun üstünün kapatılması gerekmektedir.
Havuzun simetrik doğrusunun üstünde kalan eğri

$y=\frac{1}{8}(x-3)^2(x+3)$ fonksiyonu ile modellenmiştir.

Havuz örtüsü tasarlayan bir firma yandaki şekilde gösterilen havuzun üstünü kapatmak için metrekaresi 60 TL olan bir örtü kullanacaktır. Bu örtünün maliyeti en az kaç TL olur?



ÇÖZÜM

$$A=\int_{-3}^{3}\frac{1}{8}(x-3)^2(x+3)dx$$

$$=\frac{1}{8}\int_{-3}^{3}(x^3-9x-3x^2+27)dx$$

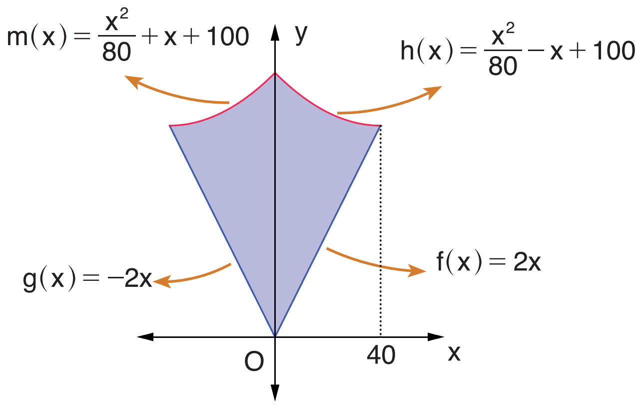
$$=\frac{1}{8}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{9x^2}{2}-x^3+27x\right)\Bigg|_{-3}^{3}$$

$$=\frac{1}{8}\left[\left(\frac{81}{4}-\frac{81}{2}-27+81\right)-\left(\frac{81}{4}-\frac{81}{2}+27-81\right)\right]=\frac{108}{8}=13,5\ m^2$$

$2A=27\ m^2$ lik havuz için maliyet en az $60\cdot 27=1620$ TL olarak bulunur.

ÖRNEK 36

Emre bir uçurtma şenliği için yandaki gibi bir uçurtma modellemiştir.
Buna göre uçurtmanın yüzeyi en az kaç cm^2 kağıt ile kaplanabilir?



ÇÖZÜM

Yüzey alanı: 2A

$$A=\int_{0}^{40}(h(x)-f(x))dx$$

$$=\int_{0}^{40}\left(\frac{x^2}{80}-x+100-2x\right)dx$$

$$=\int_{0}^{40}\left(\frac{x^2}{80}-3x+100\right)dx=\frac{x^3}{240}-\frac{3x^2}{2}+100x\Bigg|_{0}^{40}=\frac{40^3}{240}-\frac{3\cdot 40^2}{2}+100\cdot 40=\frac{5600}{3}$$

Bu durumda yüzeyin alanı en az $2A=\frac{11200}{3}$ cm^2 kağıt ile kaplanabilir.

ALIŞTIRMALAR

1. **Aşağıda verilen eğri ve doğruların belirtilen sınırlarda alanlarını bulunuz.**

a) $y=x^2-5,\ x=-2,\ x=1$

b) $x=y^2+y,\ y=-1,\ y=1$

c) $y=\dfrac{1}{e^x},\ x=0,\ x=1$

ç) $y=x\cdot \sin x,\ x=0,\ x=1$

2. **Aşağıda verilen eğrilerle sınırlanmış bölgelerin alanlarını bulunuz.**

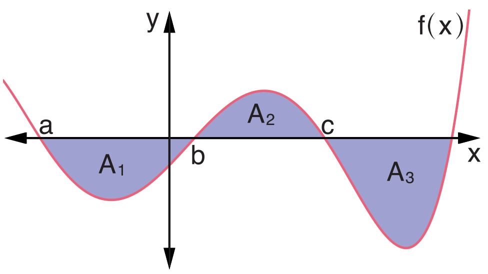
a) $y=x^2-1$ ve $y=3-x^2$

b) $y=x^3$ ve $y=x^2+6x$

c) $y=x^2$ ve $y=3-2x$

ç) $y=\dfrac{5}{x^2+6}$ ve $y=1$

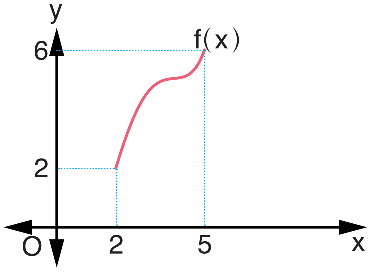
3.



Şekilde ifade edilen A_1, A_2 ve A_3 alanları için $\int_a^c f(x)dx=-2$, $\int_b^d f(x)dx=4$ ve $\int_a^d f(x)dx=-10$ **ise** $A_1+A_2+A_3$ **kaç birimkare olduğunu bulunuz.**

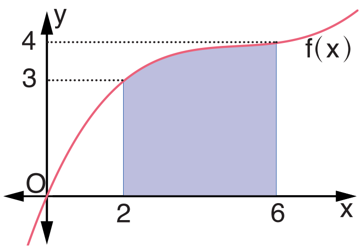
4. $y=|x^2-1|$ **eğrisinin** $x=-2$ **,** $x=3$ **doğruları ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.**

5.



Şekildeki $f:[2,5]\to[2,6]$ **ve** $y=f(x)$ **fonksiyonu için** $\int_2^5 f(x)dx+\int_2^6 f(y)dy$ **toplamını hesaplayınız.**

6.



Şekilde $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $\int_2^6 f(x)dx=9$ birimkare **olduğuna göre** $\int_3^4 f^{-1}(x)dx$ **integralinin değerini bulunuz.**

7. $y=x^3-2x+3$ **eğrisi ile** $y=3-x$ **doğrusu arasında kalan alanı bulunuz.**

8. $x=y^2$ **ve** $y=x^2$ **eğrileri arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.**

9. $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$ **integralini hesaplayınız.**

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 6

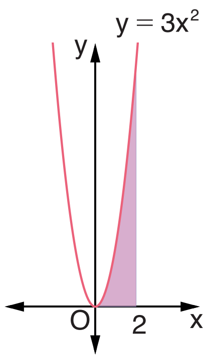
A) Aşağıda verilen integrallerin eşitini bulup sonuçlarını karşılarındaki boşluklara yazınız.

1.

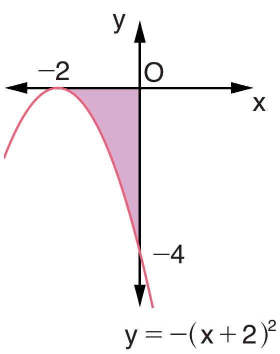
1	$\int_{1}^{2} \frac{3x+7}{x^2+6x+5}dx$	
2	$\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} \sec^2(2x)dx$	
3	$\int_{0}^{\pi} x^2\cos x dx$	
4	$\int_{0}^{1} \frac{1}{1+e^{-2x}}dx$	
5	$\int_{1}^{2} \frac{\ln x^2}{x}dx$	
6	$\int_{1}^{9} \frac{1}{\sqrt{t}}dt$	

B) Aşağıda verilen alanların eşitini bulup tabloda eşleştiriniz.

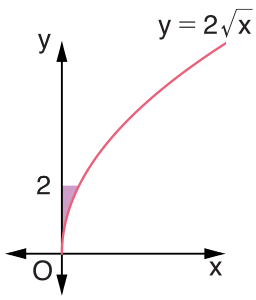
2. I.



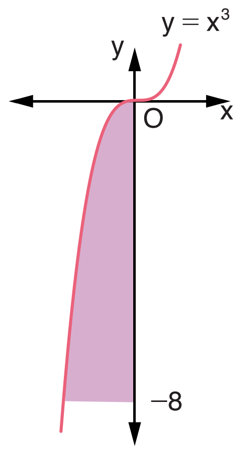
II.



III.



IV.



a	b	c	d
$\frac{8}{3}$	$\frac{2}{3}$	12	8

C) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruları cevaplandırınız.

3. $x\int f(x)dx = 3x^3 + \frac{x^2}{2}$ **olduğuna göre** $f'(x)$ **aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 6 B) 6x C) $6x + \frac{1}{2}$

D) $3x^2 + \frac{x}{2}$ E) $x^3 + \frac{x^2}{4}$

4. $\int \frac{2x-1}{(x+1)^2(x+3)}dx$ **integralinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{7}{2}\ln\left|\frac{x+3}{x+1}\right| - \frac{3}{2(x+1)} + c$

B) $\frac{7}{2}\ln\left|\frac{x+3}{x+1}\right| + \frac{3}{2(x+1)} + c$

C) $\frac{7}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right| + \frac{3}{2(x+1)} + c$

D) $\frac{7}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right| + \frac{3}{2(x+1)} + c$

E) $\frac{7}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right| - \frac{3}{2(x+1)} + c$

5. $f(x) = \begin{cases} 3x^2+1, & x < -1 \text{ ise} \\ -x+3, & x \geq -1 \text{ ise} \end{cases}$

olduğuna göre $\int_{-4}^{-1} f(x+2)dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) 6 B) 8 C) 14 D) 21 E) 24

6. $f:[0, 4] \to \mathbb{R}$, $y = 3x + 1$ fonksiyonu veriliyor. $[0, 4]$ aralığını 4 eşit parçaya bölen bölüntüye göre **f fonksiyonunun Riemann alt toplamını bulunuz.**

A) 18 B) 20 C) 22 D) 24 E) 26

7) $\int x\cos 3x dx$ **integralinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{1}{9}\cos 3x + \frac{x}{3}\sin 3x + c$

B) $\frac{1}{3}\cos 3x + \frac{x}{9}\sin x + c$

C) $\frac{1}{9}\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x + c$

D) $\frac{1}{9}\sin 3x + \frac{x}{3}\cos 3x + c$

E) $\frac{1}{9}\cos 3x - \frac{x}{3}\sin 3x + c$

8) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$ **integralinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $2x\sqrt{x+1} + \frac{4}{3}\sqrt{(x+1)^3} + c$

B) $\frac{4}{3}\sqrt{x+1} - 2x\sqrt{(x+1)^3} + c$

C) $\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3} + c$

D) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} + c$

E) $2x\sqrt[3]{x+1} - \frac{4}{3}\sqrt{(x+1)^3} + c$

9. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2 x}{\tan x}dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) $\ln\sqrt{2}$ B) $\ln 2$ C) $\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$

D) $\ln\frac{3}{2}$ E) $\ln\sqrt{3}$

10. $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2}\,dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) $\pi+2$ B) $\pi-2$ C) 2π D) $2\pi+2$ E) $\frac{\pi}{2}$

11. $\frac{d}{dx}f(x)=4x^3-\frac{3}{x^4}$ ve $f(2)=0$ ise $f(x)$ **fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $f(x)=x^4+\frac{1}{x^3}+\frac{129}{8}$

B) $f(x)=x^4+\frac{1}{x^3}-\frac{129}{8}$

C) $f(x)=x^4+\frac{3}{x^3}+\frac{129}{8}$

D) $f(x)=x^3+\frac{1}{x^4}+\frac{129}{8}$

E) $f(x)=x^3+\frac{1}{x^4}-\frac{129}{8}$

12. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x^2 d(\sin x)$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{\sqrt{2}}{16}(\pi^2-8\pi-32)$

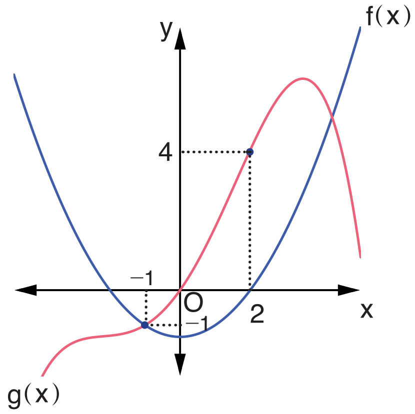
B) $\frac{\sqrt{2}}{32}(\pi^2+8\pi+32)$

C) $\frac{\sqrt{2}}{32}(\pi^2-8\pi+32)$

D) $\frac{\sqrt{2}}{32}(\pi^2+8\pi-32)$

E) $\frac{\sqrt{2}}{32}(\pi^2-8\pi-16)$

13.



Şekilde $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

$\int_{-1}^{2} \frac{f'(x)}{g(x)}dx-\int_{-1}^{2} \frac{g'(x)\cdot f(x)}{g^2(x)}dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

14. $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)}dx$ **integralinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\ln\left|\frac{(x+1)^2}{x+2}\right|+c$

B) $\ln|(x+1)(x+2)|+c$

C) $\ln\left|\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2\right|+c$

D) $\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|+c$

E) $\ln\left|\frac{(x+2)^2}{x+1}\right|+c$

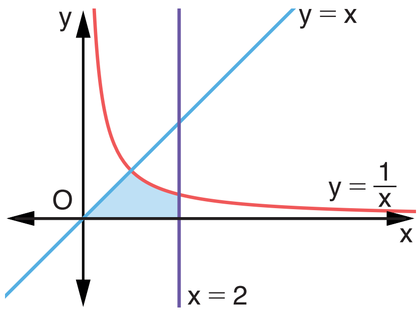
15. $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le 0 \text{ ise}\\ \sin x, & x>0 \text{ ise}\end{cases}$ ve

$g(x)=\begin{cases}\cos x, & x<\dfrac{\pi}{2} \text{ ise}\\ \sin x, & x\ge \dfrac{\pi}{2} \text{ ise}\end{cases}$

olduğuna göre $\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-g(x)]dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

16.



Yukarıdaki grafikte verilen $y=\frac{1}{x}$ **eğrisi ile** $y=x$, $x=2$ **ve** $y=0$ **doğruları arasında kalan bölgenin alanı kaç birimkaredir?**

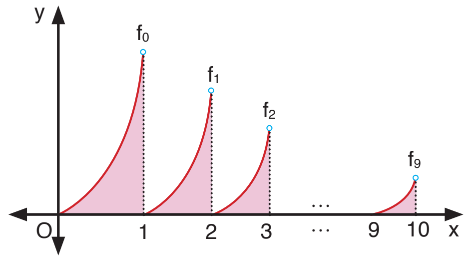
A) $\frac{1}{3}+\ln 2$ B) $\ln 2$ C) $\frac{1}{2}+\ln 3$

D) $2+\ln 2$ E) $\frac{1}{2}+\ln 2$

17. $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$f_n:[n, n+1)\to\left[0, \frac{1}{3^n}\right)$ ve $f_n(x)=\frac{(x-n)^2}{3^n}$

biçiminde tanımlanan fonksiyonlar ile x ekseni arasında kalan bölgeler aşağıdaki şekilde boyalı olarak verilmiştir.

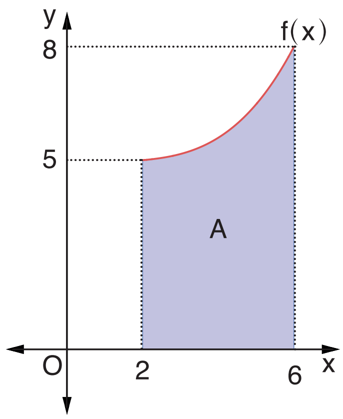


Buna göre tüm boyalı bölgelerin alanları toplamı kaçtır?

A) $\frac{3^9-1}{4\cdot 3^9}$ B) $\frac{3^{10}-1}{2\cdot 3^{10}}$ C) $\frac{3^{10}-1}{4\cdot 3^{10}}$

D) $\frac{3^{10}}{4}$ E) $\frac{1}{2}(3^9-1)$

18.



Yukarıdaki şekilde $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$\int_{2}^{6}(2f(x)-4)dx=32$ **olduğuna göre A değerinin kaç birimkare olduğunu bulunuz.**

A) 14 B) 15 C) 16 D) 18 E)24

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 6

19. $\int_{-1}^{2} |x^3 - x| dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{7}{4}$ B) $\frac{9}{4}$ C) $\frac{11}{4}$ D) $\frac{13}{4}$ E) $\frac{15}{4}$

20. $\int \frac{\sqrt{x-2} + \sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[6]{x-2}} dx$ **integralinin eşiti nedir?**

A) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{(x-2)^4} + \frac{6}{7}\sqrt[6]{(x-2)^7} + c$

B) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x-2)^4} + \frac{6}{7}\sqrt[6]{(x-2)^7} + c$

C) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x-2)^4} + \frac{7}{6}\sqrt[6]{(x-2)^7} + c$

D) $\frac{3}{4}\sqrt[6]{(x-2)^7} + \frac{7}{6}\sqrt[3]{(x-2)^4} + c$

E) $\frac{4}{3}\sqrt[6]{(x-2)^7} + \frac{6}{7}\sqrt[6]{(x-2)^7} + c$

21. $\int x^3 \ln x dx$ **integralinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(3x^2 - 6x + 6)\ln x + c$

B) $(6x - 6)\ln x + c$

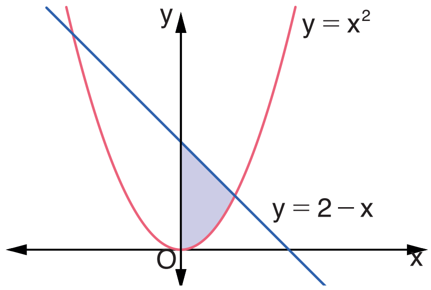
C) $\frac{x^4}{4}\ln x + \frac{x^4}{16} + c$

D) $\frac{x^4}{3}\ln x - \frac{x^3}{4} + c$

E) $\frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + c$

Ç) Aşağıdaki açık uçlu soruları cevaplandırınız.

22. Aşağıda $y = x^2$ parabolü ile $y = 2 - x$ doğrusunun grafiği verilmiştir.



Buna göre boyalı bölgenin alanı kaç birimkaredir?

23. $\int \frac{\sin x}{\sin(x+2)} dx$ **integralinin eşitini bulunuz.**

24. $\int 3^{3^x+1} \cdot 3^x \cdot \ln 3 dx$ **integralini hesaplayınız.**

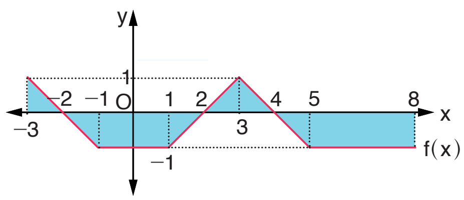
25. $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$ **integralini hesaplayınız.**

26. $\int \frac{x+1}{x^2-5x+6} dx$ **integralini hesaplayınız.**

27. $\int_0^{\pi} x \cdot \cos 2x \, dx$ **integralini hesaplayınız.**

28. $\int \sqrt[3]{3x^2+2x+1} \cdot (6x+2) dx$ **integralini hesaplayınız.**

29.



$y = f(x)$ fonksiyonuna ait grafik verilmiştir.
Buna göre

a) $\int_{-3}^{0} f(x)dx$ **integralini hesaplayınız.**

b) $\int_{-3}^{8} f(x)dx$ **integralini hesaplayınız.**

c) $\int_{-3}^{8} |f(x)| dx$ **integralini hesaplayınız.**

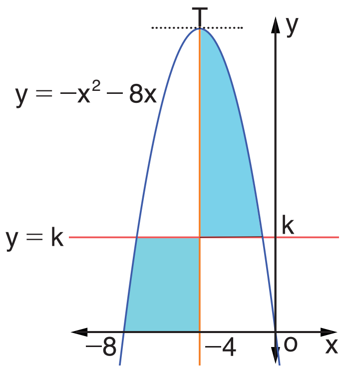
30. $\int \ln(\sin x)\cot x\,dx$ **integralini hesaplayınız.**

31. $\int \dfrac{x^3+x}{\sqrt{x^4+2x^2+1}}dx$ **integralini hesaplayınız.**

32. $\int_{-2}^{2} \dfrac{|x|}{x}dx$ **integralini hesaplayınız.**

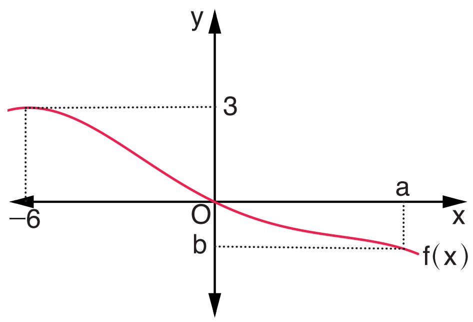
33. $\int \dfrac{dx}{1+\tan x}$ **integralini hesaplayınız.**

34. $0<k<16$ olmak üzere tepe noktası T olan $y=-x^2-8x$ parabolü ve $y=k$ doğrusu aşağıdaki grafikte gösterilmiştir.



Buna göre boyalı bölgelerin alanları toplamı kaç birimkaredir?

35.



Şekildeki grafik $y=f(x)$ fonksiyonuna aittir.

$\int_{-6}^{a} f(x)dx + \int_{b}^{3} f(y)dy = 5$ **olduğuna göre**

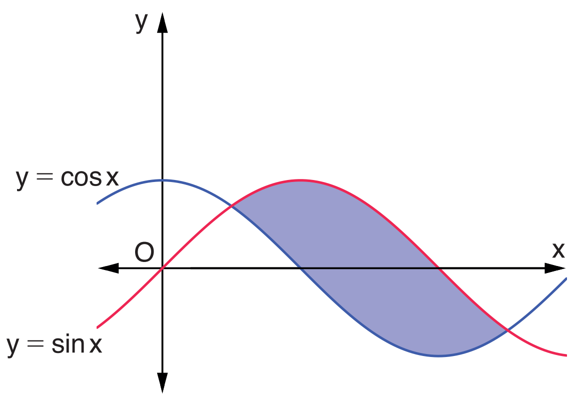
$a\cdot b$ **değerini bulunuz.**

36. $\int e^x(f(x)+f'(x))dx = e^x f(x)+c$ **eşitliğinin doğru olduğunu gösteriniz.**

37. $\int \dfrac{(2-\cos^2 t)\cdot \cos t}{7-\cos^2 t-5\cdot \sin t}dt$ **integralinin eşitini bulunuz.**

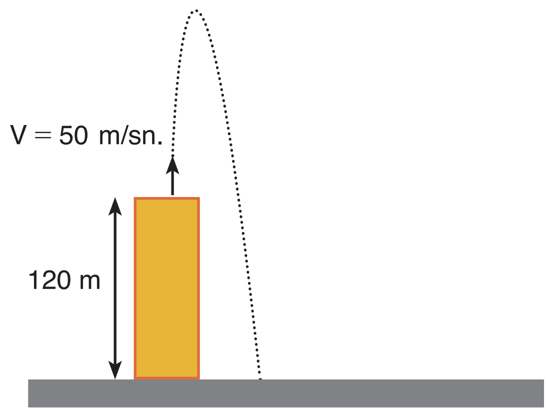
38. $\int\limits_2^3 x\ln(x^2-1)dx$ **integralini hesaplayınız.**

39. Aşağıda $y=\cos x$ ve $y=\sin x$ grafikleri verilmiştir.



Buna göre boyalı bölgenin alanı kaç birimkaredir?

D) Aşağıdaki soruları verilen bilgilere göre cevaplandırınız.



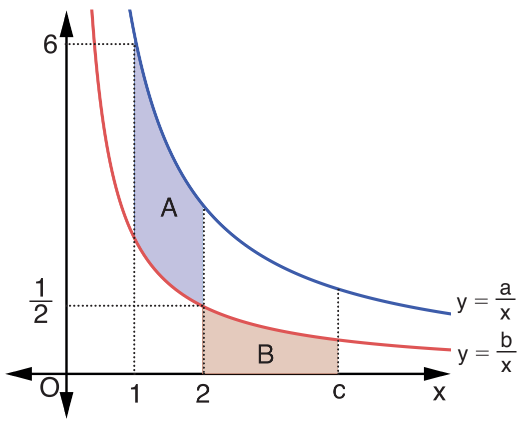
Yerden 120 m yükseklikte bulunan bir cisim 50 m/sn. hızla yukarı doğru dikey olarak fırlatılıyor. Cismin yer çekimi ivmesi 10 m/sn^2 olsun.

t saniye sonraki zamana göre aşağıdaki 37, 38 ve 39. soruları cevaplandırınız.

40. **Cismin** $a(t)$ **ivmesini,** $V(t)$ **hızını ve** $S(t)$ **konum denklemini bulunuz.**

41. **Cismin çıkabileceği maksimum yüksekliği bulunuz.**

42. **Cismin yere çarptığı ana kadar geçen süreyi hesaplayınız.**



Yukarıdaki $y=\frac{a}{x}$ ve $y=\frac{b}{x}$ eğrilerinin grafikleri $x=1,\ x=2$ ve $x=c$ doğruları ile sınırladığı alanlar şekildeki gibi verilmiştir.

Bu bilgileri kullanarak 40, 41 ve 42. soruları cevaplandırınız.

43. **a ve b değerlerini bulunuz.**

44. Grafikteki boyalı alanlar arasında $A=5B$ bağıntısı **olduğuna göre c değeri kaçtır?**

45. **A ve B alanlarının birbirine eşit olması için c kaç birim ötelenmelidir?**

46. Motosiklet üreten bir firma, ayda x adet motosiklet üretilmesi durumunda gider fonksiyonunu $f(x)=600-\frac{3}{x},\ (0<x<1000)$ olarak belirtiyor.
Bu firma 300 adet motosiklet üretimini 900 adet üretim seviyesine yükseltme durumuna göre

a) **Toplam giderde ne kadarlık bir artış olacağını belirli integral ile ifade ediniz.**

b) **Toplam giderdeki artış miktarını bulunuz.**

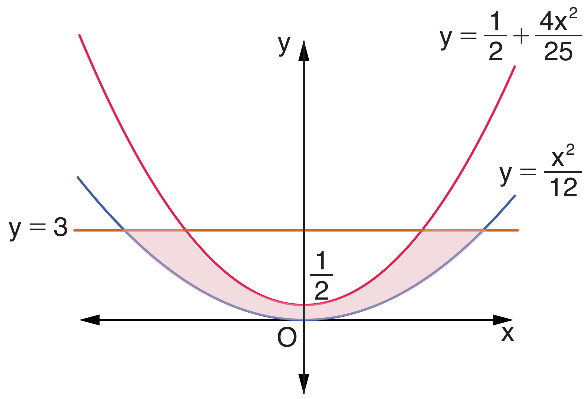
47. Bir tankerden sızan petrolün deniz yüzeyinde kapladığı alanın artış hızı $V(t)=3t^2-2t\ (m^2/saat)$ kuralı ile veriliyor. İlk 1 saatin sonunda petrol sızıntısının kapladığı alan $100\ m^2$ **olduğuna göre**

a) **Petrol sızıntısının zamana göre deniz yüzeyinde kapladığı alanının** $A(t)$ **kuralını bulunuz.**

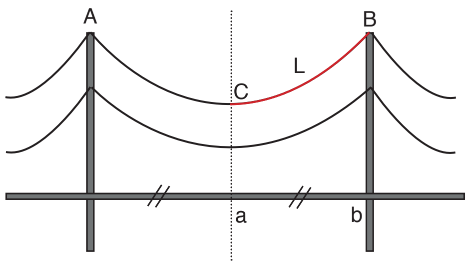
b) **5 saat sonra deniz yüzeyinde oluşan petrol sızıntısının kapladığı alan kaç** m^2 **olur?**

c) **Tankerin deposunda 1000 ton petrol vardır. Sızıntıya herhangi bir müdahalede bulunulmamıştır. Sızıntı saat 13.00'te başladığına göre saat kaçta sızıntının bitmesi gerekir?**

48. Bilgisayarda dizayn edilen uçağın burun kısmından alınan bir kesit şekildeki gibidir. Dış yüzeyi $y = \frac{x^2}{12}$ ve iç yüzeyi $y = \frac{1}{2} + \frac{4x^2}{25}$ eğrileri ile modelleniyor.
Uçak burnunun üst kısmından 3 birimlik bir kesit alınıyor.
Buna göre oluşan kesit alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.



49.



Bir asma köprünün kabloları değiştirilmek isteniyor. Çelikten yapılmış kabloların uzunluğu $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$ kuralı ile bulunmaktadır. **Buna göre**
$|\overset{\frown}{CB}| = f(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$ **eğrisinin**
$x = 0$ ve $x = 4$ **doğruları arasında kalan parçasının uzunluğu kaç birim olur?**

50. Kanserde erken müdahale tedavi başarısını artırmaktadır. Toplumda sık görülen bu hastalığın erken tanıda tedavi ihtimali vardır. Bundan dolayı toplumu bilinçlendirmek için çeşitli projeler uygulanmaktadır.
“ Kanser ve Bilinçli Toplum” projesi kapsamında seminer veren bir doktor, seminere katılan insan sayısının her seminerde $100 + 200t$ (kişi/seminer sayısı) oranı ile değişeceğini tahmin etmektedir.

Buna göre

a) 1 ve 4. seminerler arasında tahminî kaç kişi bu projeden yararlanmıştır?

b) Doktorun amacı 7000 kişiye proje kapsamında seminer vermek olduğuna göre toplamda kaç seminer vermelidir?

DEĞERLENDİRME
Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorular ile ilgili konuları veya faaliyetleri tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.

GEOMETRİ

7. ANALİTİK GEOMETRİ

7.1. ÇEMBERİN ANALİTİK İNCELEMESİ

Çember; matematik, geometri, fizik vb. bilim dalları ve günlük hayatta birçok alanda kullanılır. Evde, okulda, sporda, sanatta ve birçok iş alanında çemberin kullanıldığını görmek mümkündür. Basketbol potası, yüzük, radar ekranı ve yağmur damlalarının suda oluşturduğu dalgalar çember şeklindedir.

Hazırlık Çalışması

Analitik düzlemde yarıçap uzunlukları biri diğerinin iki katı ve her iki eksene de birinci ve ikinci bölgede teğet olan çemberler veriliyor. Bu çemberlerin merkezlerinden geçen doğrunun denklemini bulunuz.

7.1. ÇEMBERİN ANALİTİK İNCELEMESİ

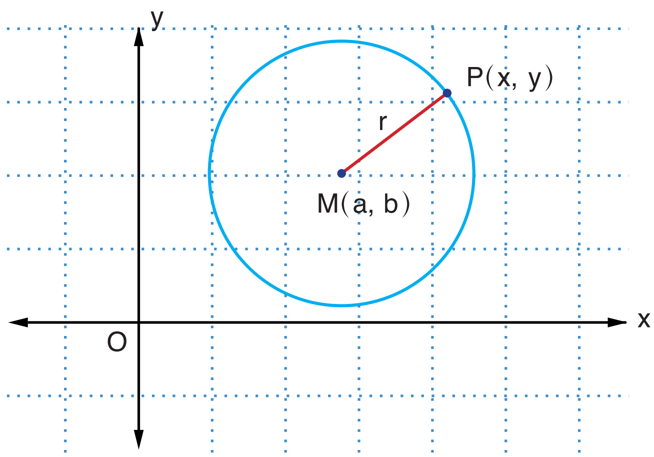
Bu Bölümde Neler Öğreneceksiniz?

- Merkezi ve yarıçapı verilen çemberin denklemini oluşturma
- Denklemleri verilen doğru ile çemberin birbirine göre durumlarını belirleyerek işlem yapma

Terimler ve Kavramlar

- Çemberin standart denklemi
- Çemberin genel denklemi

Analitik düzlemde sabit bir $M(a, b)$ noktası seçilir. Bu M noktasına eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesine (geometrik yerine) çember denir. Burada seçilen sabit noktaya çemberin merkezi denir.



HATIRLATMA

İki nokta arasındaki uzaklık

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Şekildeki sabit nokta $M(a, b)$ ve bu noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktalardan herhangi biri $P(x, y)$ olsun. M ile P noktaları arasındaki uzaklık bu çemberin yarıçapı olup r ile gösterilir.

İki nokta arasındaki uzaklık formülünden $|MP| = r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ olur. Her iki tarafın karesi alınırsa $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ denklemi elde edilir. Bu denkleme çemberin standart denklemi denir.

ÖRNEK 1

Analitik düzlemde merkezi $M(-3, 2)$ ve yarıçap uzunluğu $r = 5$ birim olan çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

Analitik düzlemde merkezinin koordinatları $M(a, b)$ ve yarıçap uzunluğu r olan çemberin standart denklemi $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ olduğundan bu denklemde $a = -3$, $b = 2$ ve $r = 5$ değerleri yerine yazılırsa çemberin standart denklemi $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 25$ olarak bulunur.

ÖRNEK 2

Analitik düzlemde standart denklemi $(x-4)^2+(y+2)^2=9$ olan çemberin merkezini ve yarıçap uzunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Analitik düzlemde merkezi $M(a, b)$ ve yarıçap uzunluğu r birim olan çemberin standart denklemi

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ olduğundan

$(x-4)^2+(y+2)^2=9$ ifadesinde

$a=4$

$b=-2$

$r^2=9$

$r=3$ birim olur.

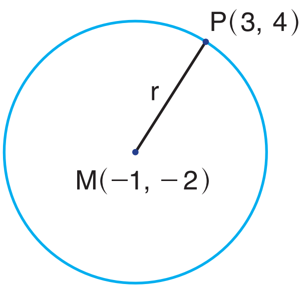
Buradan çemberin merkezinin koordinatları $M(4, -2)$ ve yarıçap uzunluğu 3 birim olarak bulunur.

ÖRNEK 3

Analitik düzlemde merkezi $M(-1, -2)$ olan ve $P(3, 4)$ noktasından geçen çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

Çemberin standart denklemini yazabilmek için çemberin yarıçap uzunluğu bilinmelidir.



İki nokta arasındaki uzaklık formülünden $|MP|=r$ olur.

$$
\begin{aligned}
|MP| &= \sqrt{(3-(-1))^2+(4-(-2))^2} \\
&= \sqrt{4^2+6^2} \\
&= \sqrt{16+36} \\
&= \sqrt{52} \\
&= 2\sqrt{13} \text{ birim bulunur.}
\end{aligned}
$$

Merkezi $M(-1, -2)$ ve yarıçap uzunluğu $r=2\sqrt{13}$ birim olan çemberin standart denklemi

$$(x-(-1))^2+(y-(-2))^2=(2\sqrt{13})^2$$

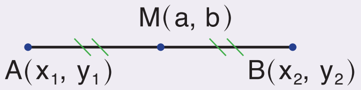
$$(x+1)^2+(y+2)^2=52 \text{ olarak bulunur.}$$

ÖRNEK 4

Analitik düzlemde $A(2, -4)$ ve $B(4, 6)$ noktaları veriliyor. AB doğru parçasını çap kabul eden çemberin standart denklemini bulunuz.

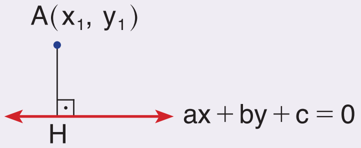
HATIRLATMA

Orta nokta formülü



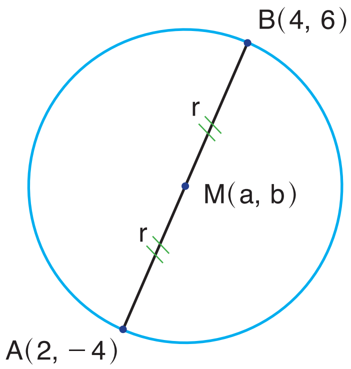
$a = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ $\quad b = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

Bir Noktanın Bir Doğruya En Kısa Uzaklığı



$|AH| = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

ÇÖZÜM



AB doğru parçası çemberin çapı olduğu için AB doğru parçasının orta noktası bu çemberin merkezidir. Çemberin merkezi $M(a, b)$ olmak üzere orta nokta formülünden

$a = \dfrac{2+4}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$

$b = \dfrac{-4+6}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$ bulunur.

Bu durumda çemberin merkezi $M(3, 1)$ olur.

$$
\begin{aligned}
r &= |MB| \\
&= \sqrt{(3-4)^2 + (1-6)^2} \\
&= \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2} \\
&= \sqrt{1+25} = \sqrt{26} \text{ birim bulunur.}
\end{aligned}
$$

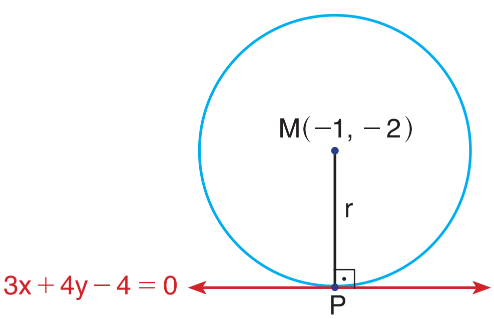
Merkezi $M(3, 1)$ ve yarıçap uzunluğu $\sqrt{26}$ birim olan çemberin standart denklemi $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 26$ olur.

ÖRNEK 5

Analitik düzlemde merkezi $M(-1, -2)$ olan çember, denklemi $3x + 4y - 4 = 0$ olan doğruya teğet olduğuna göre bu çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

Çember doğruya teğet olduğundan M noktasının $3x + 4y - 4 = 0$ doğrusuna uzaklığı çemberin yarıçapı kadardır.
Buradan



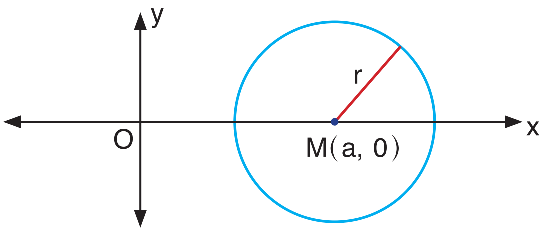
$|MP| = r$

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{|3\cdot(-1) + 4\cdot(-2) - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \\
&= \frac{|-15|}{5} \\
&= 3 \text{ birim olarak bulunur.}
\end{aligned}
$$

Çemberin standart denklemi

$$(x-(-1))^2 + (y-(-2))^2 = 3^2$$
$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 9 \text{ olur.}$$

Merkezi x Ekseni Üzerinde Olan Çemberin Denklemi



Çemberin merkezi $M(a, b)$ olsun.
Çemberin merkezi x ekseni üzerinde olduğu için merkezin ordinatı $b = 0$ olur. Buradan $M(a, 0)$ olur.

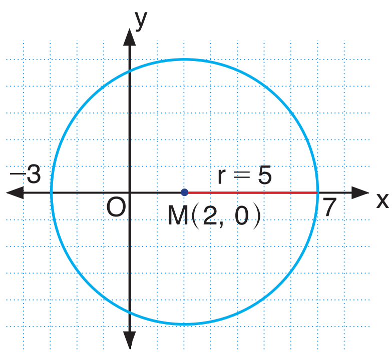
Çemberin yarıçap uzunluğu r birim ise standart denklemi
$(x-a)^2 + (y-0)^2 = r^2$
$(x-a)^2 + y^2 = r^2$ olarak bulunur.

ÖRNEK 6

Merkezi x ekseni üzerinde, apsisi 2 ve yarıçap uzunluğu 5 birim olan çemberin standart denklemini bulunuz.

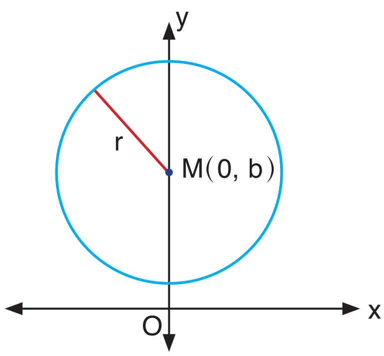
ÇÖZÜM

Çemberin merkezi x ekseni üzerinde apsisi 2 olduğundan merkezi $M(2, 0)$ olur. Yarıçap uzunluğu $r = 5$ birim olduğundan çemberin standart denklemi
$(x-2)^2 + y^2 = 5^2$
$(x-2)^2 + y^2 = 25$ olarak bulunur.



Merkezi y Ekseni Üzerinde Olan Çemberin Denklemi

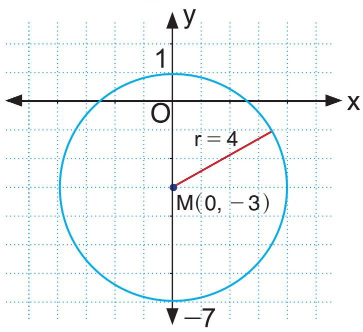
Çemberin merkezi $M(a, b)$ olsun. Merkezi y ekseni üzerinde olduğu için merkezinin apsisi $a = 0$ olur. Bu durumda $M(0, b)$ olur. Yarıçap uzunluğu r birim olduğundan çemberin standart denklemi $x^2 + (y-b)^2 = r^2$ olarak bulunur.



ÖRNEK 7

Analitik düzlemde merkezi y ekseni üzerinde, ordinatı -3 ve yarıçap uzunluğu 4 birim olan çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM



Çemberin merkezi y ekseni üzerinde ordinatı -3 olduğundan çemberin merkezi $M(0, -3)$ olur.

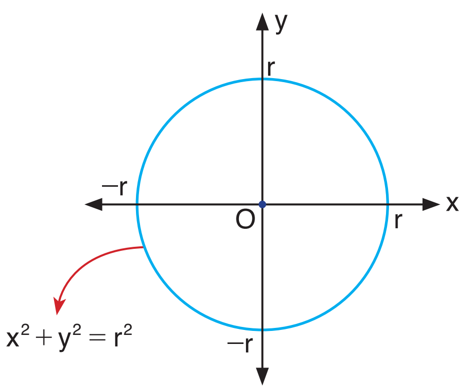
Yarıçap uzunluğu $r = 4$ birim olduğundan çemberin standart denklemi

$$x^2 + (y - (-3))^2 = 4^2$$

$$x^2 + (y + 3)^2 = 16 \text{ bulunur.}$$

Merkezi Orijinde (Başlangıç Noktası) Olan Çemberin Denklemi

Çemberin merkezi $M(a, b)$ olsun. Çemberin merkezi orijinde olduğu için merkezi $M(0, 0)$ olur.



Çemberin standart denkleminde $a = b = 0$ yazılırsa

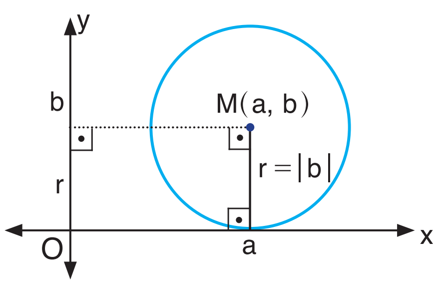
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

merkezil çember denklemi elde edilir.

x Eksenine Teğet Olan Çemberin Denklemi



Çember x eksenine teğet olduğu için çemberin yarıçap uzunluğu aynı zamanda M noktasının ordinatının mutlak değeri kadardır. $r = |b|$ olur (Yarıçap uzunluğu negatif olamaz.). Bu durumda çemberin standart denklemi $(x - a)^2 + (y - b)^2 = b^2$ olur.

ÖRNEK 8

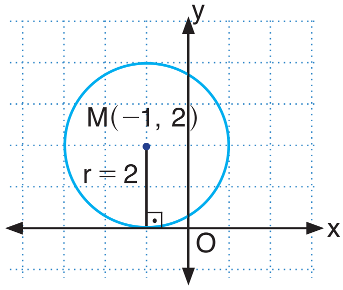
Analitik düzlemde merkezi $M(-1, 2)$ ve x eksenine teğet olan çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

Çember x eksenine teğet olduğu için çemberin yarıçap uzunluğu $r = |2| = 2$ birim olup çemberin standart denklemi

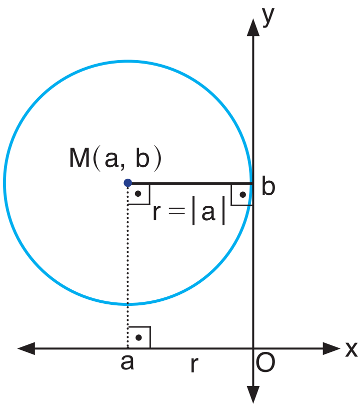
$(x-(-1))^2 + (y-2)^2 = 2^2$

$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ olarak bulunur.



y Eksenine Teğet Olan Çemberin Denklemi

Çember y eksenine teğet olduğu için çemberin yarıçap uzunluğu merkezin apsisinin mutlak değeri kadardır. $r = |a|$ olur. Bu durumda çemberin standart denklemi $(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2$ olur.



ÖRNEK 9

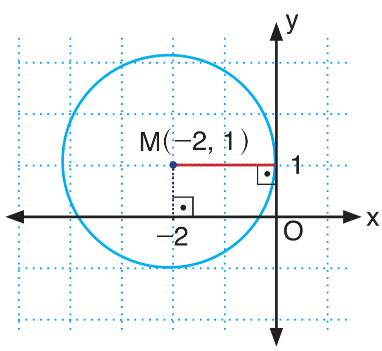
Analitik düzlemde merkezi $M(-2, 1)$ ve y eksenine teğet olan çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

Çember y eksenine teğet olduğu için $r = |-2| = 2$ birim olup çemberin standart denklemi

$(x-(-2))^2 + (y-1)^2 = 2^2$

$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$ olarak bulunur.



Her İki Eksene de Teğet Olan Çember Denklemi

Merkezi $M(a, b)$ ve yarıçap uzunluğu r birim olan çember her iki eksene de teğet ise çemberin yarıçap uzunluğu $r = |a| = |b|$ olur.

Bu çemberin standart denklemi, çember

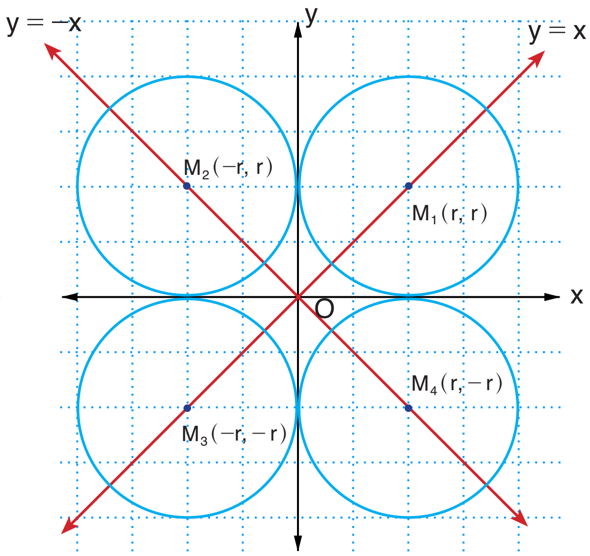
I. bölgede ise merkezi $M_1(r, r)$ olacağından $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

II. bölgede ise merkezi $M_2(-r, r)$ olacağından $(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

III. bölgede ise merkezi $M_3(-r, -r)$ olacağından $(x+r)^2+(y+r)^2=r^2$

IV. bölgede ise merkezi $M_4(r, -r)$ olacağından $(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$ olur.

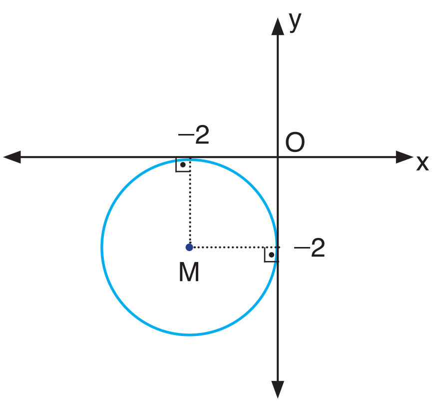
Her iki eksene de teğet olan çemberlerin merkezleri $y = x$ ve $y = -x$ doğruları üzerindedir.



ÖRNEK 10

Yarıçap uzunluğu 2 birim ve eksenlere analitik düzlemin 3. bölgesinde teğet olan çemberin standart denklemini yazınız.

ÇÖZÜM



Çember eksenlere analitik düzlemin 3. bölgesinde teğet olduğundan çemberin merkezinin koordinatları $M(-2, -2)$ olur.

Bu durumda çemberin standart denklemi

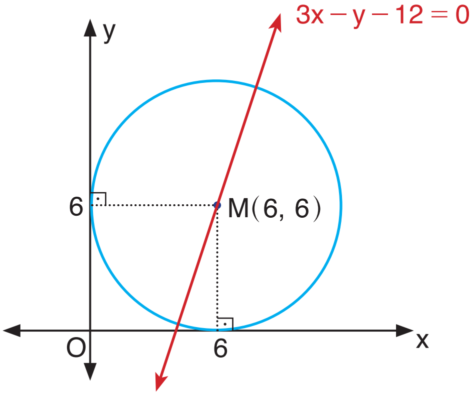
$$(x-(-2))^2+(y-(-2))^2=2^2$$
$$(x+2)^2+(y+2)^2=4$$

olarak bulunur.

ÖRNEK 11

Analitik düzlemde merkezi $3x-y-12=0$ doğrusu üzerinde bulunan ve her iki eksene de birinci bölgede teğet olan çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM



Çember her iki eksene de analitik düzlemin I. bölgesinde teğet olduğundan çemberin merkezi $M(r,\ r)$ şeklindedir. M noktası $3x-y-12=0$ doğrusu üzerinde olduğundan bu doğru denklemini sağlar.

$3x-y-12=0$ doğru denkleminde

$x=r$ ve $y=r$ değerleri yerine yazılırsa

$3r-r-12=0$

$2r=12$

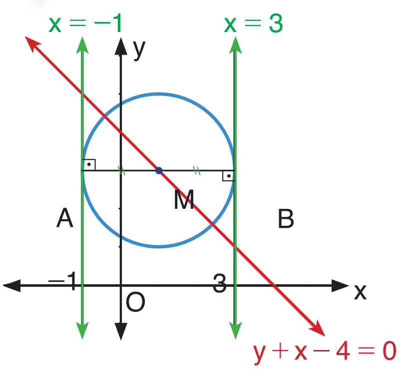
$r=6$ birim bulunur.

Çemberin merkezi $M(6,\ 6)$ ve yarıçap uzunluğu 6 birim olduğundan çemberin standart denklemi $(x-6)^2+(y-6)^2=36$ olur.

ÖRNEK 12

Analitik düzlemde $x=3$ ve $x=-1$ doğrularına teğet olan, merkezi $y+x-4=0$ doğrusu üzerinde bulunan çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM



Şekilde görüldüğü gibi çember $x=3$ ve $x=-1$ doğrularına teğet olduğundan çemberin yarıçap uzunluğu bu iki doğru arasındaki uzaklığın yarısı kadardır.

$$r=\frac{|AB|}{2}$$

$$=\frac{|3-(-1)|}{2}=2 \text{ birim olur.}$$

Çemberin merkezi $x=3$ ve $x=-1$ doğrularına eşit uzaklıkta bulunan $x=1$ doğrusu üzerinde olur. Buradan merkezi $M(1,\ b)$ şeklindedir. Merkez aynı zamanda $y+x-4=0$ doğrusu üzerinde olduğundan doğru denklemini sağlar. $x=1$ ve $y=b$ değerleri doğru denkleminde yerine yazılırsa

$b+1-4=0$

$b-3=0 \Rightarrow b=3$ bulunur.

O hâlde merkezi $M(1,\ 3)$ ve yarıçapı 2 birim olan çemberin standart denklemi

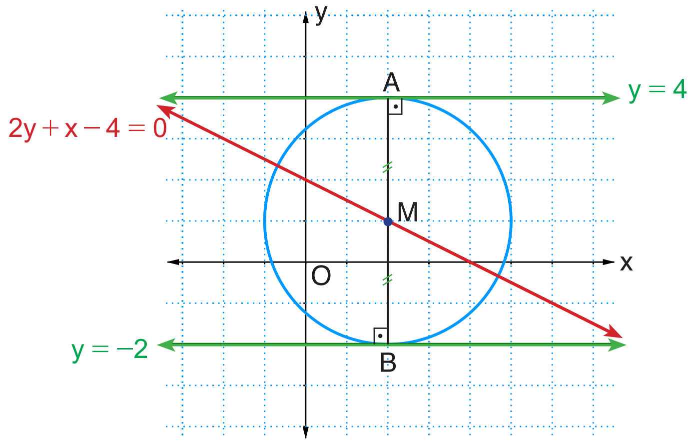
$(x-1)^2+(y-3)^2=2^2$

$(x-1)^2+(y-3)^2=4$ olarak bulunur.

ÖRNEK 13

Analitik düzlemde $y = -2$ ve $y = 4$ doğrularına teğet olan, merkezi $2y + x - 4 = 0$ doğrusu üzerinde bulunan çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM



Çember $y = -2$ ve $y = 4$ doğrularına teğet olduğu için çemberin merkezi bu iki doğruya eşit uzaklıkta bulunan $y = 1$ doğrusu üzerinde olur. Merkezi $M(a, 1)$ olur. Çember $y = -2$ ve $y = 4$ doğrularına teğet olduğundan çemberin yarıçap uzunluğu bu iki doğru arasındaki uzaklığın yarısı kadardır.

$$r = \frac{|AB|}{2}$$
$$= \frac{|4-(-2)|}{2}$$
$= 3$ birim bulunur.

Çemberin merkezi aynı zamanda $2y + x - 4 = 0$ doğrusu üzerinde olduğundan doğru denklemini sağlamalıdır. $x = a$ ve $y = 1$ değerleri doğru denkleminde yerine yazılırsa

$$2 \cdot 1 + a - 4 = 0$$
$$a - 2 = 0$$
$a = 2$ olur.

Buradan $M(2, 1)$ ve $r = 3$ birim olan çemberin standart denklemi

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 3^2$$
$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$ olarak bulunur.

ÖRNEK 14

Analitik düzlemde $x - 2y + 4 = 0$ ve $4y - 2x - 20 = 0$ doğrularına teğet olan, merkezi $x = -1$ doğrusu üzerinde bulunan çemberin merkezinin ordinatı kaçtır?

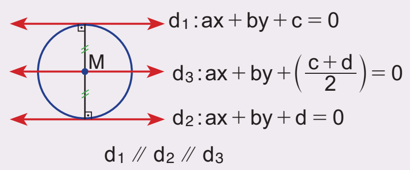
ÇÖZÜM

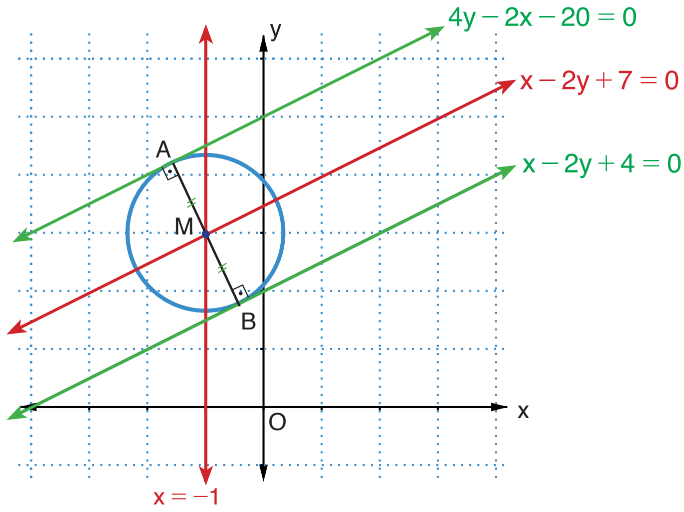
$x-2y+4=0$ ile $4y-2x-20=0$ doğrularının eğimleri eşit ve $\frac{1}{2}$ olduğundan bu doğrular birbirine paraleldir. Çember $x-2y+4=0$ ve $4y-2x-20=0$ doğrularına teğet olduğu için çemberin merkezi bu iki doğruya eşit uzaklıkta bulunan $x-2y+7=0$ doğrusu üzerindedir. Ayrıca çemberin merkezi $x=-1$ doğrusu üzerinde bulunduğundan merkezin koordinatları $M(-1, b)$ şeklindedir. M noktasının koordinatları $x-2y+7=0$ doğru denklemini sağlar. $x=-1$ ve $y=b$ değerleri doğru denkleminde yerine yazılırsa

$$-1-2b+7=0$$
$$2b=6$$
$$b=3 \text{ olur.}$$

Buradan çemberin merkezinin ordinatı 3 olarak bulunur.

HATIRLATMA





ÖRNEK 15

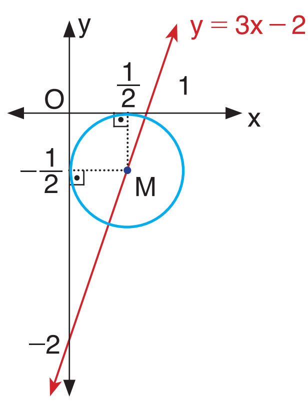
Analitik düzlemde merkezi $y=3x-2$ denklemiyle verilen doğru üzerinde bulunan, eksenlere analitik düzlemin dördüncü bölgesinde teğet olan çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

Çember analitik düzlemin dördüncü bölgesinde eksenlere teğet olduğu için çemberin merkezi $M(r, -r)$ şeklindedir. Çemberin merkezi $y=3x-2$ doğrusu üzerinde olduğu için merkezin koordinatları bu doğru denklemini sağlar. $x=r$ ve $y=-r$ değerleri doğru denkleminde yerine yazılırsa

$$y=3x-2$$
$$-r=3r-2$$
$$4r=2 \Rightarrow r=\frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

Çemberin merkezinin koordinatları $M\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ olur.



Çemberin yarıçapı $r=\frac{1}{2}$ birim olup çemberin standart denklemi

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4} \text{ olarak bulunur.}$$

ÖRNEK 16

Analitik düzlemde merkezi $2x-y+6=0$ doğrusu üzerinde bulunan ve her iki eksene de analitik düzlemin 2. bölgesinde teğet olan çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

Çember eksenlere analitik düzlemin 2. bölgesinde teğet olduğu için çemberin merkezi $M(-r, r)$ şeklindedir. M noktası $2x-y+6=0$ doğrusu üzerinde olduğundan doğru denklemini sağlar.

$$2x-y+6=0$$
$$2\cdot(-r)-r+6=0$$
$$-3r=-6$$
$$r=2 \text{ bulunur.}$$

Bu durumda çemberin merkezi $M(-2, 2)$ ve yarıçap uzunluğu $r=2$ birim olup çemberin standart denklemi $(x+2)^2+(y-2)^2=4$ şeklinde bulunur.

Çemberin Genel Denklemi

Çemberin standart denklemi açılırsa

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$
$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2$$
$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0 \text{ olur.}$$

Bu ifadede $-2a=D,\ -2b=E,\ a^2+b^2-r^2=F$ olsun. Bu eşitlikler denklemde yerine yazılırsa $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ elde edilir. Buna çemberin genel denklemi denir.

$$-2a=D \qquad -2b=E$$
$$a=-\frac{D}{2} \qquad b=-\frac{E}{2}$$

olup çemberin merkezi $M\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ olur.

$$a^2+b^2-r^2=F$$
$$r^2=a^2+b^2-F$$
$$r^2=\left(-\frac{D}{2}\right)^2+\left(-\frac{E}{2}\right)^2-F$$
$$r^2=\frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-F$$
$$r^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$$
$$r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F} \text{ birim bulunur.}$$

Bu durumda denklemi $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ olan çemberin merkezi $M\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ ve yarıçap uzunluğu $r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ olur.

D^2+E^2-4F ifadesine $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ çember denkleminin diskriminantı denir.

Bu durumda

I. $D^2+E^2-4F>0$ ise verilen denklem bir çember belirtir.

II. $D^2+E^2-4F<0$ ise verilen denklem bir çember belirtmez.

III. $D^2+E^2-4F=0$ ise verilen denklem bir nokta belirtir. Bu noktanın koordinatları $M\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ şeklindedir.

$Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$ denkleminin çemberin genel denklemi olabilmesi için $A=B\neq 0$ olmalıdır. Bu denklem x^2 li ve y^2 li terimlerin katsayısı 1 olacak şekilde düzenlenmelidir. Çemberin genel denkleminde xy li terim yoktur. Yani xy li terimin katsayısı 0 olmalıdır.

ÖRNEK 17

$x^2+y^2-8x+10y+21=0$ denklemi bir çember belirtir mi? Çember belirtir ise bu çemberin merkezini ve yarıçap uzunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2+y^2-8x+10y+21=0$ denkleminde
$D=-8,\ E=10,\ F=21$ olup buradan

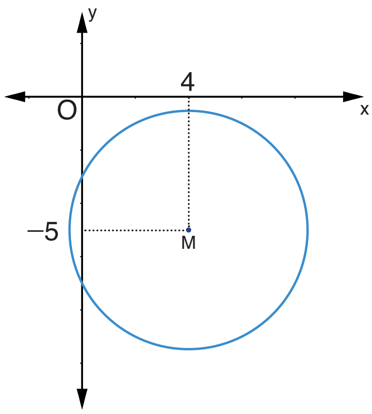
$$\begin{aligned} D^2+E^2-4F &= (-8)^2+10^2-4\cdot 21 \\ &= 64+100-84 \\ &= 80 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

$80>0$ olduğundan verilen denklem bir çember belirtir.
Çemberin merkezi

$$\begin{aligned} M\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) &= M\left(-\left(-\frac{8}{2}\right), -\frac{10}{2}\right) \\ &= M(4, -5) \text{ olur.} \end{aligned}$$

Çemberin yarıçap uzunluğu

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{80} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{5} = 2\sqrt{5} \text{ birim bulunur.} \end{aligned}$$



ÖRNEK 18

Analitik düzlemde $x^2+y^2-2x+4y+13=0$ denklemi bir çember belirtir mi? Çember belirtir ise bu çemberin merkezinin koordinatlarını ve yarıçap uzunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2+y^2-2x+4y+13=0$ denkleminde

$D=-2,\ E=4,\ F=13$ olup

$$\begin{aligned} D^2+E^2-4F &= (-2)^2+4^2-4\cdot 13 \\ &= 4+16-52 \\ &= -32 \\ &= -32 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

$-32<0$ olduğundan verilen denklem bir çember belirtmez.

ÖRNEK 19

Analitik düzlemde $x^2+y^2-4x+6y+13=0$ denklemi bir çember belirtir mi? Çember belirtir ise bu çemberin merkezinin koordinatlarını ve yarıçap uzunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2+y^2-4x+6y+13=0$ denkleminde

$D=-4,\ E=6,\ F=13$ olup

$$\begin{aligned} D^2+E^2-4F &= (-4)^2+6^2-4\cdot 13 \\ &= 16+36-52=0 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

O hâlde denklem bir nokta belirtir.

Bu nokta

$$\begin{aligned} M\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) &= M\left(-\frac{(-4)}{2}, -\frac{6}{2}\right) \\ &= M(2, -3) \text{ olur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK 20

$x^2+y^2-4x+6y-k=0$ denklemi bir çember belirttiğine göre k nin alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$x^2+y^2-4x+6y-k=0$ denkleminde $D=-4,\ E=6,\ F=-k$ olur.

Bu denklem çember belirttiğine göre $D^2+E^2-4F>0$ olmalıdır.

$$\begin{aligned} (-4)^2+6^2-4\cdot(-k) &> 0 \\ 16+36+4k &> 0 \\ 52+4k &> 0 \\ 4k &> -52 \\ k &> -13 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Bu durumda k nin alabileceği en küçük tam sayı değeri -12 olur.

ÖRNEK 21

$x^2+y^2+(k+1)xy-4ky-5=0$ denklemi bir çember belirttiğine göre bu çemberin yarıçap uzunluğunu hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$x^2+y^2+(k+1)xy-4ky-5=0$ ifadesinin bir çember belirtmesi için xy li terimin katsayısının 0 olması gerekir.

Bu durumda

$k+1=0$

$k=-1$ bulunur.

Denklemde $k=-1$ değeri yerine yazılırsa

$x^2+y^2-4(-1)y-5=0$

$x^2+y^2+4y-5=0$ denklemi elde edilir.

Bu denklemde $D=0$, $E=4$, $F=-5$ olup çemberin yarıçap uzunluğu

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{0^2+4^2-4(-5)}$$

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{0+16+20}$$

$r=\frac{1}{2}\sqrt{36}=3$ birim bulunur.

ÖRNEK 22

$(a-3)x^2+(3a-1)y^2-6ax-4ay+12=0$ denklemi bir çember belirttiğine göre bu çemberin yarıçap uzunluğunu hesaplayınız.

ÇÖZÜM

Genel çember denkleminde x^2 ve y^2 li terimin katsayıları eşit ve 1 olmalıdır. x^2 ve y^2 li terimlerin katsayıları eşitlenirse

$a-3=3a-1$

$2a=-2 \Rightarrow a=-1$ olur.

Bu değer denklemde yerine yazılırsa

$(-1-3)x^2+(3(-1)-1)y^2-6(-1)x-4(-1)y+12=0$

$-4x^2-4y^2+6x+4y+12=0$ elde edilir.

Bu denklemde x^2 ve y^2 li terimlerin katsayılarını 1 yapmak için denklemin her iki tarafı $\left(-\frac{1}{4}\right)$ ile çarpılır.

$$\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(-4x^2-4y^2+6x+4y+12)=\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot 0$$

$x^2+y^2-\frac{3}{2}x-y-3=0$ denklemi elde edilir.

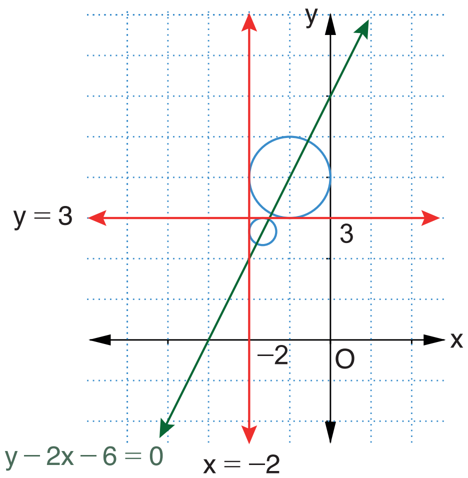
Bu çemberin genel denkleminde $D=-\frac{3}{2}$, $E=-1$, $F=-3$ olup çemberin yarıçap uzunluğu

$$r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+(-1)^2-4\cdot(-3)}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{9}{4}+1+12}$$

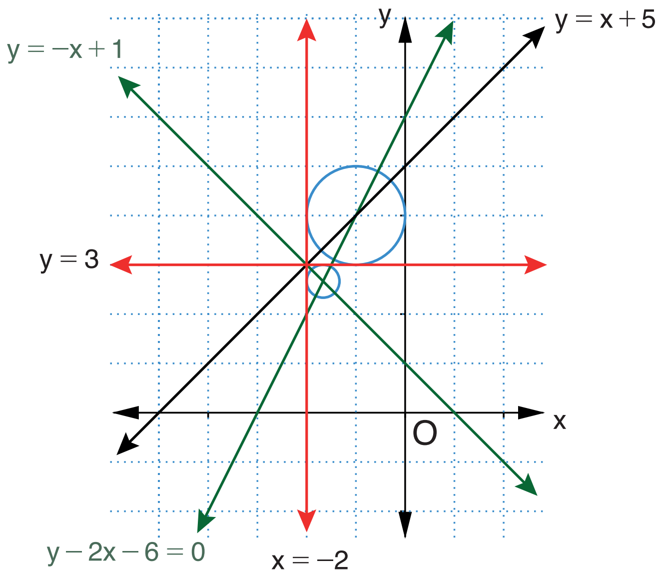
$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{61}{4}}=\frac{\sqrt{61}}{4}$ birim bulunur.

ÖRNEK 23



Analitik düzlemde $x = -2$, $y = 3$ doğrularına teğet olan ve merkezi $y - 2x - 6 = 0$ doğrusu üzerinde bulunan çemberlerden birinin merkezinin koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM



Analitik düzlemde $x = a$, $y = b$ doğrularına teğet olan çemberin merkezi, $A(a, b)$ noktasından geçen ve eğimi $\tan45^\circ = 1$ veya $\tan135^\circ = -1$ olan doğru üzerindedir.

Analitik düzlemde $x = -2$, $y = 3$ doğrularına teğet olan çemberin merkezi $A(-2, 3)$ noktasından geçen ve eğimi $\tan45^\circ = 1$ olan doğru üzerindedir. İlk olarak bu doğrunun denklemi

$y - 3 = 1(x - (-2))$

$y - 3 = (x + 2)$

$y = x + 5$ bulunur.

Çemberin merkezinin koordinatları $y - 2x - 6 = 0$ doğrusunun üzerinde olduğundan bu iki doğru denkleminin kesişim noktası bulunur.

$y = x + 5$ değeri $y - 2x - 6 = 0$ denkleminde yerine yazılırsa

$x + 5 - 2x - 6 = 0$

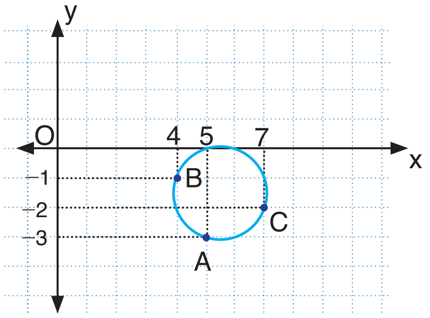
$-x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ olur.

$x = -1$ için $y = -1 + 5 = 4$ olup çemberin merkezi $M(-1, 4)$ olarak elde edilir. Diğer çemberin merkezi de $A(-2, 3)$ noktasından geçen ve eğimi $\tan135^\circ = -1$ olan doğru üzerindedir.

HATIRLATMA

$A(x_1, y_1)$ noktasından geçen ve eğimi $\tan\alpha = m$ olan doğrunun denklemi $y - y_1 = m(x - x_1)$ şeklindedir.

ÖRNEK 24

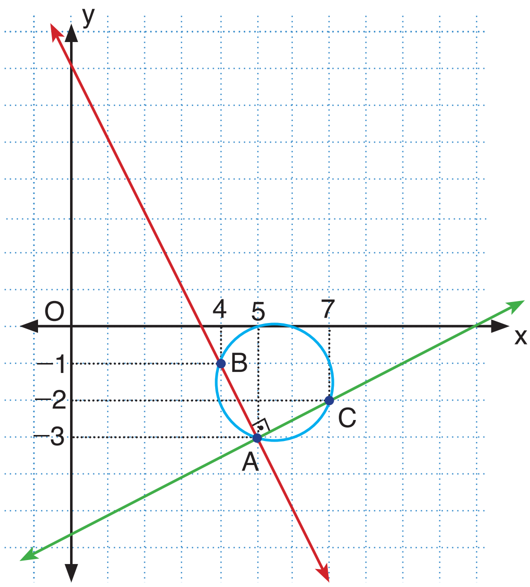


Analitik düzlemde $A(5, -3)$, $B(4, -1)$, $C(7, -2)$ noktalarından geçen çemberin merkezinin koordinatlarını bulunuz.

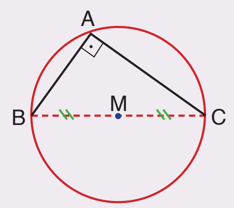
ÇÖZÜM

Analitik düzlemde $A(5, -3)$ ve $B(4, -1)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi bulunur. $m_{AB} = \dfrac{-1+3}{4-5} = \dfrac{2}{-1} = -2$ olur. $A(5, -3)$ ve $C(7, -2)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi bulunur.

$m_{AC} = \dfrac{-2+3}{7-5} = \dfrac{1}{2}$ olur. $m_{AB} \cdot m_{AC} = (-2) \cdot \dfrac{1}{2} = -1$ olduğundan $[AB] \perp [AC]$ bulunur.



HATIRLATMA



$m(\widehat{BAC}) = 90°$ ise $[BC]$ çap olur.

$m(\widehat{BAC}) = 90°$ olduğundan BC doğru parçası bu çemberin çapı olur. Çemberin merkezi M olsun. M noktası BC doğru parçasının orta noktasıdır. Orta nokta formülünden

$a = \dfrac{4+7}{2}$

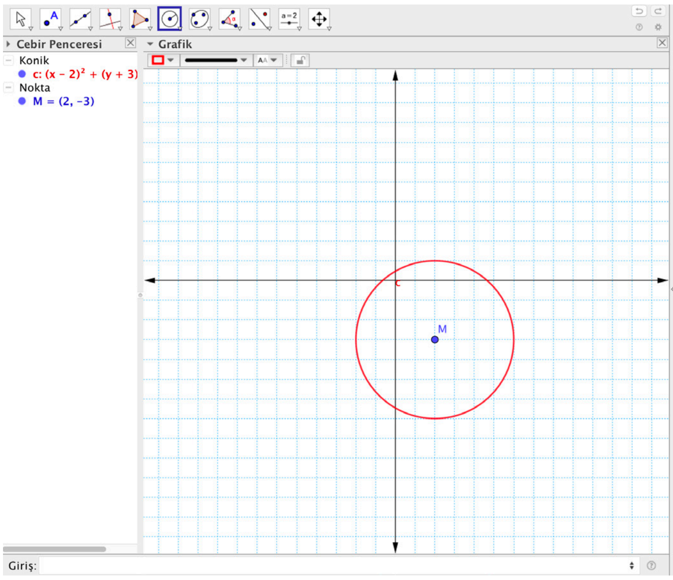
$= \dfrac{11}{2}$

$b = \dfrac{-1-2}{2}$

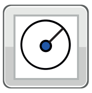
$= \dfrac{-3}{2}$ bulunur.

Buradan çemberin merkezi $M\left(\dfrac{11}{2}, \dfrac{-3}{2}\right)$ olarak bulunur.

Merkezinin kordinatları ve yarıçap uzunluğu verilen çemberin grafiğini GeoGebra programı yardımıyla çizmek için

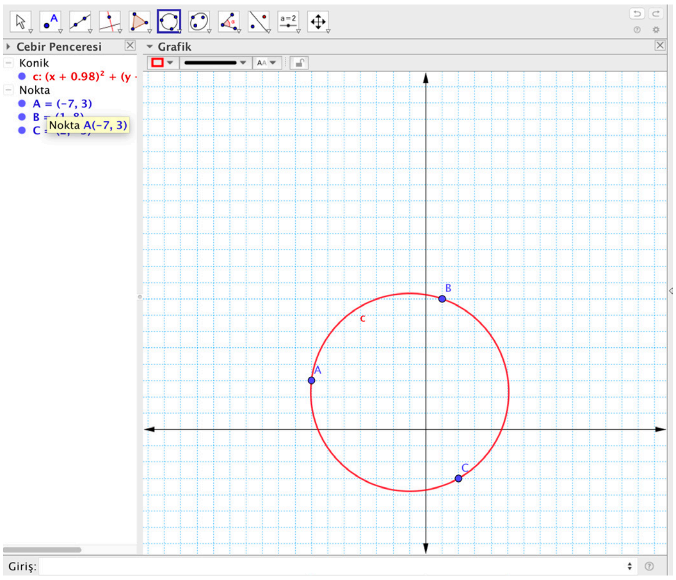


I. Giriş: Koordinatları yazarak çemberin merkez noktasını oluşturunuz.

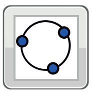
II.  “Merkez ve yarıçapla çember” komutuna tıklayınız.

III. Noktanın üzerine tıklayınız. Çıkan pencerede yarıçap değeri giriniz.

Üç noktasının koordinatları verilen çemberin grafiğini GeoGebra programı yardımıyla çizmek için



I. Giriş: 1. noktanın koordinatını yazınız.
Giriş: 2. noktanın koordinatını yazınız.
Giriş: 3. noktanın koordinatını yazınız.

II.  “Üç noktadan geçen çember” komutuna tıklayınız.

III. Noktaların üzerine sırasıyla tıklayınız.

ALIŞTIRMALAR

1. **Aşağıda merkezinin koordinatları ve yarıçap uzunluğu verilen çemberlerin standart denklemini bulunuz.**

a) $M(1, 2)$, $r = 3$ birim

b) $M(-2, 1)$, $r = 2$ birim

c) $M(5, -4)$, $r = \sqrt{5}$ birim

ç) $M(-3, -6)$, $r = 4$ birim

d) $M(0, -5)$, $r = 6$ birim

2. **Aşağıda standart denklemi verilen çemberlerin merkezinin koordinatları ve yarıçap uzunluğunu bulunuz.**

a) $(x-1)^2+(y-2)^2=4$

b) $(x-2)^2+(y+3)^2=1$

c) $(x+4)^2+(y-5)^2=18$

ç) $(x+5)^2+y^2=12$

d) $x^2+(y-1)^2=36$

3. **Aşağıda genel denklemi verilen çemberlerin merkezinin koordinatları ve yarıçap uzunluğunu bulunuz.**

a) $x^2+y^2-2x-y-1=0$

b) $x^2+y^2+4x+2y+1=0$

c) $x^2+y^2+x-3=0$

ç) $x^2+y^2-6y-7=0$

d) $x^2+y^2-2x+6y-2=0$

4. **Merkezi** $M(-2, -5)$ **noktası ve y eksenine teğet olan çemberin standart denklemini bulunuz.**

5. **Merkezi** $M(-2, 3)$ **noktası ve x eksenine teğet olan çemberin standart denklemini bulunuz.**

6. **Merkezi analitik düzlemin ikinci bölgesinde bulunan, x ve y eksenine teğet, yarıçap uzunluğu 4 birim olan çemberin genel denklemini bulunuz.**

7. **Analitik düzlemde** $A(0, 6)$, $B(0, -4)$ **ve** $C(-3, 0)$ **noktalarından geçen çemberin genel denklemini bulunuz.**

8. $x^2+y^2+4x-2k+1=0$ **denklemi bir nokta belirttiğine göre k değerini hesaplayınız.**

9. $x^2+y^2+4x+6y-k=0$ **denklemi bir çember belirttiğine göre k nin en küçük tam sayı değeri kaçtır?**

10. $m \in \mathbb{R}-\{-2\}$,

$(m+2)x^2+4y^2+8x+(7m-2)y-3=0$

denklem bir çember belittiğine göre bu çemberin merkezinin koordinatlarını ve yarıçap uzunluğunu bulunuz.

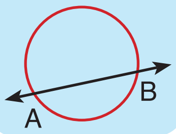
11. Analitik düzlemde $A(-2, 6)$ ve $B(4, 2)$ noktaları veriliyor. $[PA]\perp[PB]$ **olacak şekilde P noktalarının geometrik yerini bulunuz.**

Bir Çember İle Bir Doğrunun Birbirine Göre Durumları

$ax^2 + bx + c = 0$ ikinci dereceden denkleminin diskriminantı $\Delta = b^2 - 4ac$ olur.

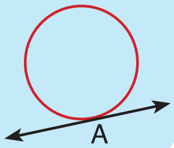
Analitik düzlemde genel denklemi $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ olan çember ile denklemi $y = mx + n$ olan doğru ele alınsın. Çember ile doğrunun birbirine göre durumları araştırılırken çember denklemi ile doğrunun denkleminin ortak çözümü yapılır. Ortak çözüm için çember denkleminde y yerine $mx + n$ yazılarak x e bağlı ikinci dereceden bir denklem elde edilir. Elde edilen bu denklemin diskriminantı $(\Delta = b^2 - 4ac)$ için

$\Delta > 0$ ise



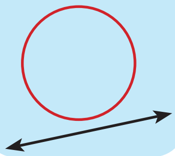
I. $\Delta > 0$ ise doğru çemberi iki farklı noktada keser. Ortak çözüm denkleminin kökleri kesişim noktalarının apsisleridir.

$\Delta = 0$ ise



II. $\Delta = 0$ ise doğru çembere teğettir. Bu durumda doğru ile çember sadece bir noktada kesişir.

$\Delta < 0$ ise



III. $\Delta < 0$ ise doğru çemberi kesmez. Doğru ile çemberin ortak noktası yoktur.

ÖRNEK 26

Genel denklemi $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$ olan çember ile $x - y + 1 = 0$ doğrusunun varsa kesişim noktalarını bulunuz.

ÇÖZÜM

Çember denklemi ile doğru denkleminin ortak çözümü yapılır.
$x - y + 1 = 0 \Rightarrow y = x + 1$ olup bu y değeri çember denkleminde yazılırsa

$$x^2 + (x+1)^2 - 4x + 2(x+1) - 5 = 0$$
$$x^2 + x^2 + 2x + 1 - 4x + 2x + 2 - 5 = 0$$
$$2x^2 - 2 = 0 \text{ elde edilir.}$$

Bu denklemin diskriminantı bulunur.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 0^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) \\ &= 0 + 16 \\ &= 16\end{aligned}$$

$16 > 0$ olduğundan doğru çemberi iki farklı noktada keser.
Bu noktalar A ve B olsun.

$$\begin{aligned}2x^2 - 2 &= 0 \\ 2x^2 &= 2 \\ x^2 &= 1 \\ x = 1 \text{ veya } x &= -1 \text{ olur.}\end{aligned}$$

Bu x değerleri $y = x + 1$ doğru denkleminde yerine yazılırsa

$x = 1$ için $y = 1 + 1 = 2$ olup $A(1,\ 2)$ ve
$x = -1$ için $y = -1 + 1 = 0$ olup $B(-1,\ 0)$

bulunur.

ÖRNEK 27

Genel denklemi $x^2+y^2-2x-6y+k=0$ olan çemberin $y-x+2=0$ doğrusuna teğet olması için k ne olmalıdır?

ÇÖZÜM

Çember doğruya teğet ise ortak çözüm denkleminde $\Delta=0$ olmalıdır.

$y-x+2=0 \Rightarrow y=x-2$ değeri çember denkleminde yazılırsa

$$x^2+(x-2)^2-2x-6\cdot(x-2)+k=0$$
$$x^2+x^2-4x+4-2x-6x+12+k=0$$
$$2x^2-12x+16+k=0 \text{ denklemi elde edilir.}$$

Bu denklemde $\Delta=0$ olmalıdır.

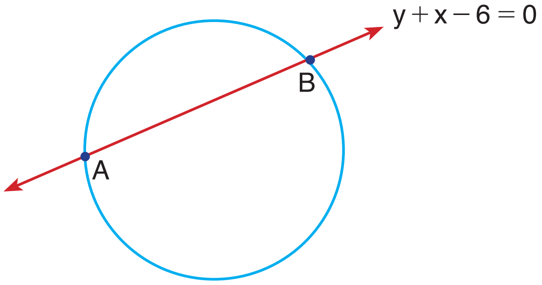
$$(-12)^2-4\cdot2\cdot(16+k)=0$$
$$144-128-8k=0$$
$$16-8k=0 \Rightarrow k=2 \text{ olarak bulunur.}$$

ÖRNEK 28

Analitik düzlemde genel denklemi $x^2+y^2+4x-6y-4=0$ olan çemberin, denklemi $y+x-6=0$ olan doğru üzerindeki kirişinin uzunluğu kaç birimdir?

ÇÖZÜM

$y+x-6=0$ doğrusunun $x^2+y^2+4x-6y-4=0$ çemberini kestiği noktalar A ve B olsun. [AB] kirişinin uzunluğunu bulmak için A ve B noktalarının koordinatları bulunmalıdır. A ve B noktalarını bulmak için bu iki denklemin ortak çözümü yapılır.



$y+x-6=0 \Rightarrow y=-x+6$ olup çember denkleminde yerine yazılırsa

$$x^2+(-x+6)^2+4x-6(-x+6)-4=0$$
$$x^2+x^2-12x+36+4x+6x-36-4=0$$
$$2x^2-2x-4=0$$
$$2(x^2-x-2)=0$$
$$x^2-x-2=0$$
$$(x-2)\cdot(x+1)=0$$
$$(x-2)=0 \text{ veya } (x+1)=0$$
$$x=2 \qquad x=-1 \text{ bulunur.}$$

$x=2$ için $y=6-2=4$ olup $A(2,\ 4)$ ve

$x=-1$ için $y=6-(-1)=7$ olup $B(-1,\ 7)$ olur.

İki nokta arasındaki uzaklık formülünden

$$|AB|=\sqrt{(2-(-1))^2+(4-7)^2}$$
$$=\sqrt{3^2+(-3)^2}$$
$$=\sqrt{9+9}$$
$$=\sqrt{18}=3\sqrt{2} \text{ birim bulunur.}$$

ÖRNEK 29

Genel denklemi $(x+2)^2+(y-4)^2=4$ olan çember ile denklemi $y=x+3$ olan doğrunun varsa kesişim noktalarını bulunuz.

ÇÖZÜM

Çember denklemi ile doğru denkleminin ortak çözümü yapılarak Δ bulunur.

$(x+2)^2+(x+3-4)^2=4$

$x^2+4x+4+x^2-2x+1=4$

$2x^2+2x+1=0$

$\Delta=2^2-4\cdot 2\cdot 1$

$\Delta=4-8=-4$ bulunur.

$-4<0$ olduğundan çember ile doğru kesişmez.

ÖRNEK 30

Genel denklemi $x^2+y^2+2x-2y-3=0$ olan çemberin x eksenini kestiği iki farklı nokta A ve B ise A ile B arasındaki uzaklık kaç birimdir?

ÇÖZÜM

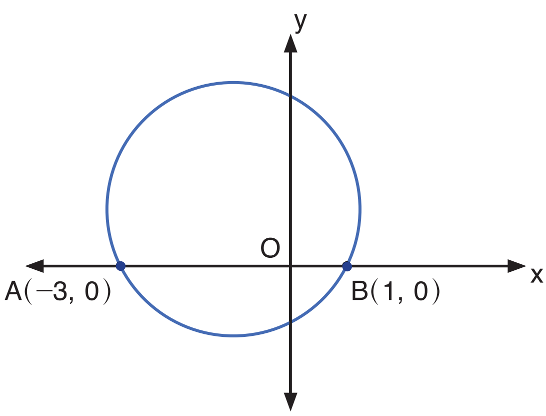
Genel denklemi $x^2+y^2+2x-2y-3=0$ olan çember x eksenini 2 farklı noktada kesiyorsa bu noktaların ordinatları 0 olur. Çemberin genel denkleminde $y=0$ yazılırsa $x^2+2x-3=0$ denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri A ve B noktalarının apsisleridir.

$x^2+2x-3=0$

$(x+3)\cdot(x-1)=0$

$x+3=0$ veya $x-1=0$

$x=-3$ $\quad$ $x=1$ olur.



Buradan $A(-3,\ 0)$ ve $B(1,\ 0)$ noktaları elde edilir.

Bu iki nokta arasındaki uzaklık

$|AB|=|-3-1|$

$=4$ birim olur.

ÖRNEK 31

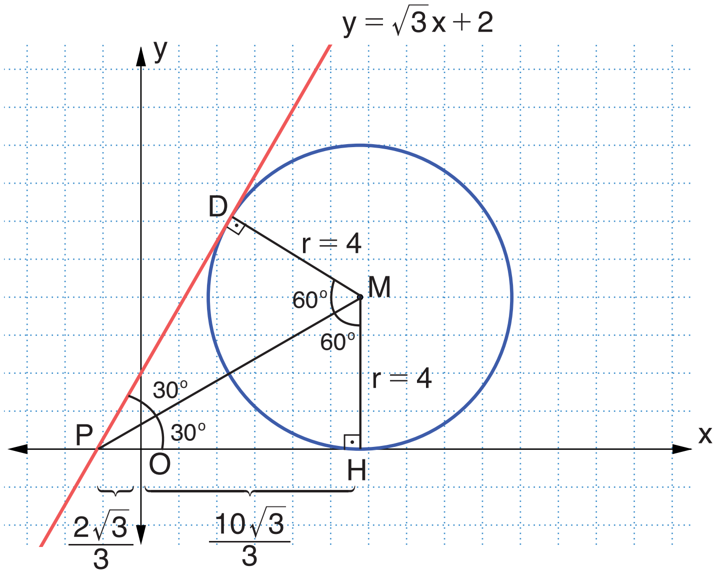
Analitik düzlemde denklemi $y = \sqrt{3}x + 2$ olan doğruya ve x eksenine analitik düzlemin 1. bölgesinde teğet, yarıçap uzunluğu 4 birim olan çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

$y = \sqrt{3}x + 2$ doğrusunun eğimi $\sqrt{3}$ olduğundan eğim açısının ölçüsü 60° olur. Çemberin merkezinden x eksenine ve doğruya teğet olduğu noktaya bir dikme çizilir. Elde edilen PHM dik üçgeninde $|MH| = 4$ ise $|PH| = 4\sqrt{3}$ birim olur.

Buradan

$$|OH| = |PH| - |PO|$$
$$= 4\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}$$
$$= \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ birim olur.}$$



$M\left(\frac{10\sqrt{3}}{3}, 4\right)$ ve $r = 4$ birim olan çemberin standart denklemi

$$\left(x - \frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (y-4)^2 = 4^2$$

$$\left(x - \frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (y-4)^2 = 16 \text{ bulunur.}$$

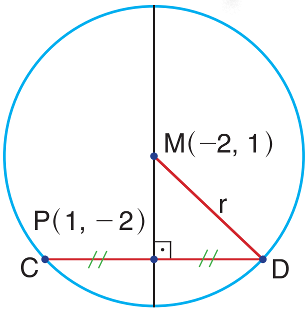
SIRA SİZDE

Analitik düzlemde denklemi $y = \sqrt{3}x + 2$ olan doğruya ve x eksenine analitik düzlemin 3. bölgesinde teğet, yarıçap uzunluğu 4 birim olan çemberin standart denklemini bulunuz.

ÖRNEK 32

Genel denklemi $x^2+y^2+4x-2y-20=0$ olan çemberin iç bölgesindeki $P(1,-2)$ noktasından geçen en kısa kirişin uzunluğunu hesaplayınız.

ÇÖZÜM



Şekildeki P noktasından geçen en kısa kiriş P noktasında çemberin çapına dik olan $[CD]$ kirişidir.

$x^2+y^2+4x-2y-20=0$ denkleminde

$D=4$, $E=-2$ ve $F=-20$ olup çemberin merkezi

$M\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)=M(-2,1)$ olur.

Yarıçap uzunluğu

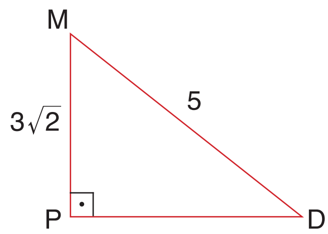
$r=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-2)^2-4\cdot(-20)}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{16+4+80}=\frac{1}{2}\sqrt{100}=5$ birim bulunur.

M ile P noktaları arasındaki uzaklık

$|MP|=\sqrt{(-2-1)^2+(1+2)^2}=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$ birim olur.

M ile D noktaları birleştirilirse MPD dik üçgeni elde edilir. MPD dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa



$(3\sqrt{2})^2+|PD|^2=5^2$

$18+|PD|^2=25$

$|PD|^2=25-18=7$

$|PD|=\sqrt{7}$ birim bulunur.

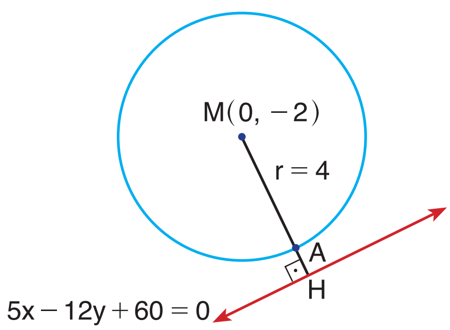
En kısa kirişin uzunluğu $|CD|=2|PD|=2\sqrt{7}$ birim bulunur.

ÖRNEK 33

Analitik düzlemde standart denklemi $x^2+(y+2)^2=16$ olan çemberin, denklemi $5x-12y+60=0$ olan doğruya en yakın noktasının uzaklığı kaç birimdir?

ÇÖZÜM

Çemberin merkezi $M(0,-2)$ ve yarıçap uzunluğu $r=4$ birimdir. Çemberin $5x-12y+60=0$ doğrusuna en yakın noktası A olsun. A noktasının $5x-12y+60=0$ doğrusuna uzaklığını hesaplamak için çemberin merkezinin bu doğruya olan uzaklığı bulunarak bu uzaklıktan çemberin yarıçapının uzunluğu çıkartılır.



$|AH|=|MH|-|MA|$ olur.

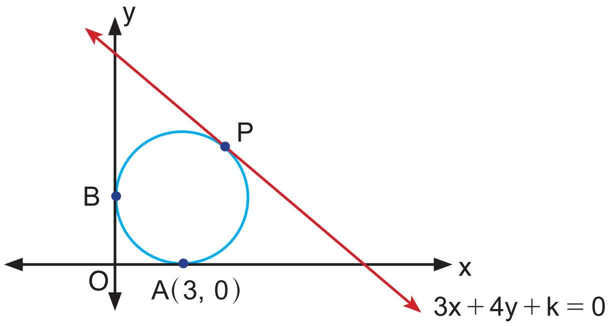
$|MH|=\dfrac{|5\cdot 0-12\cdot(-2)+60|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}$

$=\dfrac{|84|}{\sqrt{169}}=\dfrac{84}{13}$ birim bulunur.

$|AH|=\dfrac{84}{13}-4=\dfrac{32}{13}$ birim bulunur.

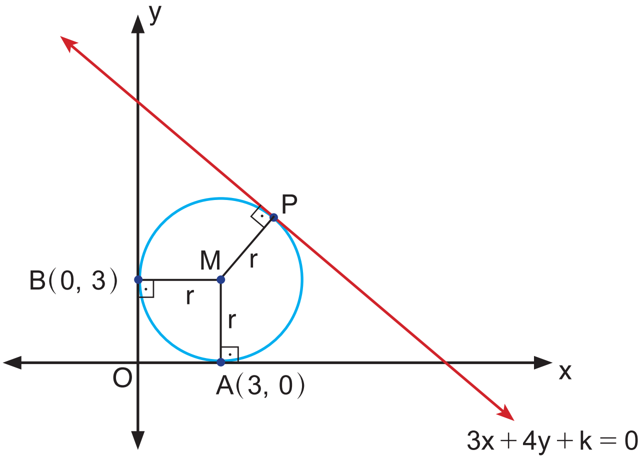
ÖRNEK 34

Analitik düzlemde x eksenine $A(3,\ 0)$ noktasında, y eksenine B noktasında ve $3x + 4y + k = 0$ doğrusuna da P noktasında teğet olan çember verilmiştir. Buna göre k değerini bulunuz.



ÇÖZÜM

Şekildeki çemberin merkezi M noktası olsun. Çember her iki eksene de teğet olduğu için çemberin merkezinin koordinatları $M(r,\ r)$ şeklindedir. Çember x eksenine $A(3,\ 0)$ noktasında teğet olduğundan çemberin merkezinin apsisi 3 olur. Buradan çemberin merkezinin koordinatları $M(3,\ 3)$ ve B noktasının koordinatları $B(0,\ 3)$ olarak bulunur.



$|MP| = r$ olduğundan bir noktanın bir doğruya uzaklığı formülünden

$$3 = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$3 = \frac{|21 + k|}{5} \Rightarrow 15 = |21 + k|$$

$21 + k = 15$ veya $21 + k = -15$

$k = -6$ $\qquad$ $k = -36$ bulunur.

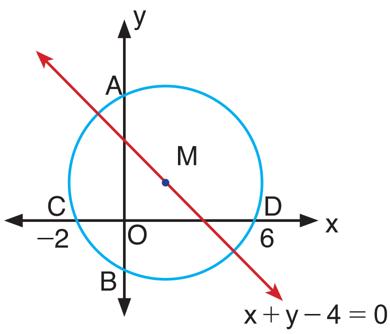
$k = -6$ için $3x + 4y - 6 = 0$

doğrusu x eksenini 2 noktasında kestiğinden yukarıdaki şekle uygun değildir. Bundan dolayı $k = -36$ olmalıdır.

SIRA SİZDE

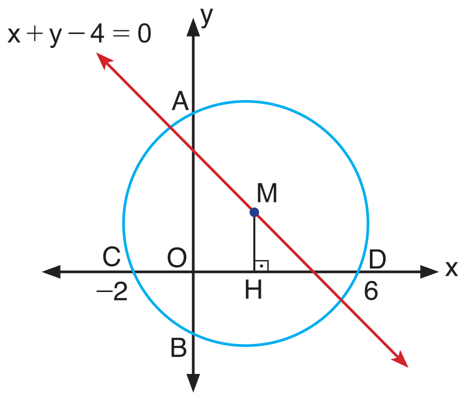
Analitik düzlemde standart denklemi $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$ olan çemberin, denklemi $3x - 4y - 9 = 0$ olan doğruya en yakın noktasının uzaklığı kaç birimdir?

ÖRNEK 35



Şekildeki çemberin merkezi $x+y-4=0$ doğrusu üzerindedir. Çember x eksenini $C(-2,\ 0)$ ve $D(6,\ 0)$ noktalarında, y eksenini de A ve B noktalarında kestiğine göre A ile B noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz.

ÇÖZÜM



Çemberin merkezinden CD kirişine dikme çizilir. $|CH|=|HD|$ olduğundan H noktası orta noktadır. Orta nokta formülünden $H(2,\ 0)$ olur. Bu durumda çemberin merkezinin apsisi de 2 olur. Çemberin merkezi $x+y-4=0$ doğrusu üzerinde olduğundan doğru denklemini sağlar.

$x=2$ için $2+y-4=0$

$y=2$ olur.

Buradan M noktası $M(2,\ 2)$ olur.
M ile D arasındaki uzaklık çemberin yarıçapı olup

$$\begin{aligned}|MD|=r&=\sqrt{(2-6)^2+(2-0)^2}\\&=\sqrt{16+4}\\&=\sqrt{20}\\&=2\sqrt{5}\text{ birim bulunur.}\end{aligned}$$

Merkezi $M(2,\ 2)$ ve $r=2\sqrt{5}$ birim olan çemberin standart denklemi $(x-2)^2+(y-2)^2=20$ bulunur. A ve B noktaları y ekseni üzerinde olduğundan apsisleri 0 olup bu değer çember denkleminde yerine yazılırsa $x=0$ için

$$\begin{aligned}(0-2)^2+(y-2)^2&=20\\4+(y-2)^2&=20\\(y-2)^2&=16\end{aligned}$$

$y-2=4$ veya $y-2=-4$

$y=6$ $\qquad$ $y=-2$ bulunur.

Buradan $A(0,\ 6)$ ve $B(0,\ -2)$ olup A ile B arasındaki uzaklık $|6-(-2)|=8$ birim olarak bulunur.

ALIŞTIRMALAR

1. **Analitik düzlemde** $y = x + k$ **doğrusu ile standart denklemi** $x^2 + y^2 = 1$ **olan çemberin ortak noktası bulunmadığına göre k nin değer aralığını bulunuz.**

2. Analitik düzlemde $3x - 4y + k = 0$ doğrusunun standart denklemi $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$ olan **çemberi iki farklı noktada kesmesi için k nin değer aralığını bulunuz.**

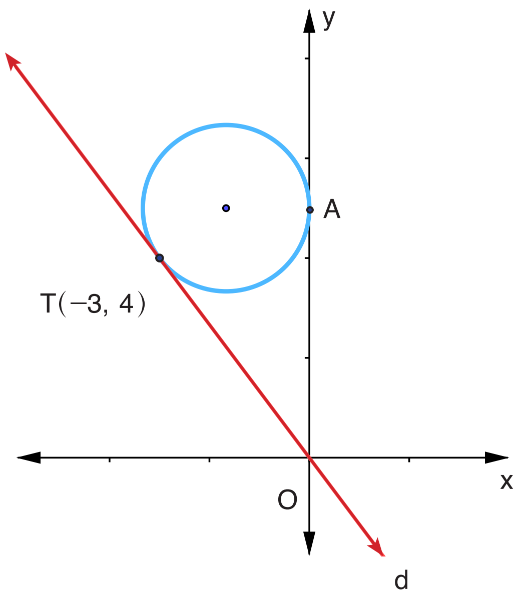
3. Analitik düzlemde $x + 2y = m$ doğrusu genel denklemi $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ olan çembere teğet **olduğuna göre m nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?**

4. **Analitik düzlemde standart denklemi** $(x + 3)^2 + y^2 = 9$ **olan çemberin, denklemi** $3x + 4y - 12 = 0$ **olan doğruya en uzak noktasının uzaklığı kaç birimdir?**

5. Genel denklemi $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ olan çemberin x eksenini kestiği iki farklı nokta A ve B **ise A ile B arasındaki uzunluğu bulunuz.**

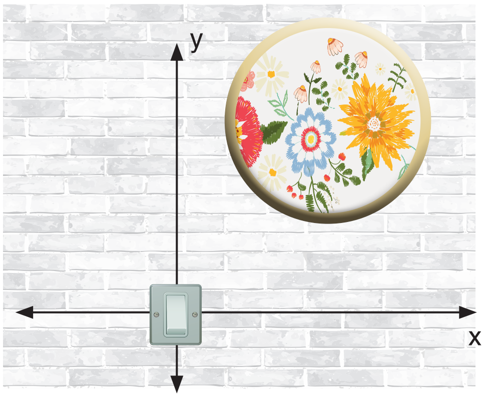
6. Genel denklemi $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 16 = 0$ olan çemberin y eksenini kestiği iki farklı nokta A ve B **ise A ile B arasındaki uzunluğu bulunuz.**

7.



Şekildeki çember y eksenine A noktasında ve d doğrusuna T noktasında teğettir. **Buna göre çemberin yarıçap uzunluğu kaç birimdir?**

8. Anadoluda kasnak ile çeşitli örtülere, giyeceklere ve dekoratif eşyalara süs amacıyla nakış yapılır.



Genel denklemi $x^2 + y^2 - 12x - 16y + 84 = 0$ olarak modellenen yukarıdaki şekilde verilen kasnak, duvara sabitlenmiştir. **Buna göre analitik düzlemin başlangıç noktasında bulunan elektrik düğmesinin bu kasnağa en yakın uzaklığını bulunuz.**

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 7

A) Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri uygun biçimde doldurunuz.

1.

Çemberin Merkezi	Çemberin Yarıçap Uzunluğu	Çemberin Standart Denklemi
$M(-2, 5)$	$r = 3$	
$M(1, 0)$	$r = 2$	
$M(0, 3)$	$r = 5$	
$M(-4, -1)$	$r = 4$	
$M(-7, 0)$	$r = 6$	
$M(1, 2)$	$r = 1$	

2.

Çemberin Standart Denklemi	Çemberin Merkezi	Çemberin Yarıçap Uzunluğu
$x^2 + (y - 1)^2 = 25$		
$(x - 2)^2 + y^2 = 1$		
$x^2 + y^2 + 6x - 8y - 33 = 0$		
$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$		

B) Aşağıda numaralandırılmış kutucuklarda verilen denklemlere göre soruları cevaplayınız.

3.

1 $x^2 + y^2 - 4x - 3 = 0$	2 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$	3 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$
4 $x^2 + y^2 - x + y = 0$	5 $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0$	6 $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 3 = 0$

a) **Denklemlerden hangileri çember belirtir?**
b) **Denklemlerden hangileri nokta belirtir?**

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 7

C) Aşağıdaki çoktan seçmeli soruları cevaplandırınız.

4. **Merkezinin koordinatları** $M(-1, 2)$ **olan ve** $A(3, -4)$ **noktasından geçen çemberin yarıçap uzunluğu kaç birimdir?**

A) 6 B) $4\sqrt{5}$ C) 7 D) $2\sqrt{5}$ E) $2\sqrt{13}$

5. **Merkezinin koordinatları** $M(-3, 4)$ **olan ve** $3x-4y+2=0$ **doğrusuna teğet olan çemberin yarıçapı kaç birimdir?**

A) 4 B) $\frac{22}{3}$ C) $\frac{23}{5}$ D) $\frac{26}{5}$ E) 5

6. Genel denklemi $x^2+y^2+4x-2y+k-1=0$ olan çember y eksenine teğet **ise k nin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

7. $5x^2+5y^2-10x+15y-5=0$ denklemi bir çember denklemi **ise bu çemberin merkezinin koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $M(1, 3)$ B) $M\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ C) $M\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$ D) $M\left(-1, \frac{3}{2}\right)$ E) $M\left(1, \frac{3}{2}\right)$

8. **Analitik düzlemde merkezi x ekseni üzerinde bulunan ve** $A(2, 0)$ ile $B(6, 0)$ **noktalarından geçen çemberin yarıçap uzunluğu kaç birimdir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

9. Genel denklemi $x^2+y^2+4x-6y+9=0$ olan çemberin $A(1, -1)$ noktasına en yakın noktası B **ise** $|AB|$ **kaç birimdir?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

10. **Analitik düzlemde** $A(0, 2)$, $B(0, 8)$ **ve** $C(4, 0)$ **noktalarından geçen çemberin genel denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x^2+y^2+8x-10y+16=0$

B) $x^2+y^2-8x+10y-16=0$

C) $x^2+y^2+8x-10y-16=0$

D) $x^2+y^2-8x-10y+16=0$

E) $x^2+y^2-8x-10y-16=0$

11. $(a-1)x^2+3y^2+9x+(b-2)xy+12=0$ denklemi bir çember **belirttiğine göre** $a+b$ **değeri kaçtır?**

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

12. Analitik düzlemde $y=x+3$ doğrusunun genel denklemi $x^2+y^2-4x+10y-k=0$ olan çemberi iki farklı noktada kesmesi için k **hangi aralıkta değer almalıdır?**

A) $(0, 21)$ B) $(-21, 0)$ C) $(-\infty, 21)$ D) $(21, \infty)$ E) $(-21, 21)$

13. $x^2+y^2+x-2y+k=0$ denklemi bir nokta **belirttiğine göre k nin değeri aşağıdakilerden hangisidir?**

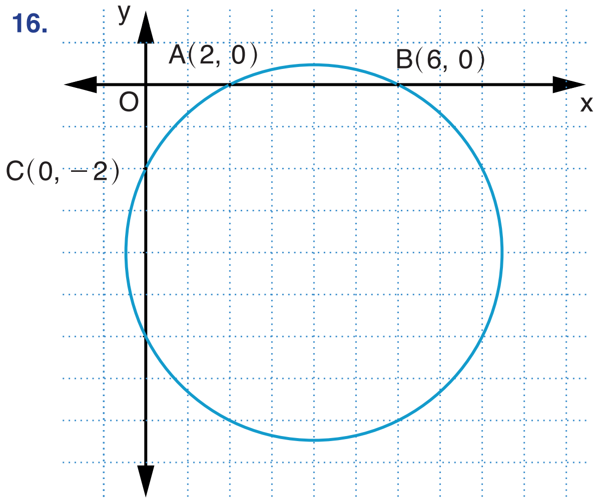
A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $-\frac{3}{4}$ E) $-\frac{5}{4}$

Ç) Aşağıdaki açık uçlu soruları cevaplandırınız.

14. $(k+1)x^2+(3-k)y^2+(a-8)xy-2ax+4ky+8=0$ denklemi bir çember **belirttiğine göre bu çemberin merkezinin koordinatlarını ve yarıçap uzunluğunu bulunuz.**

15. **Genel denklemi** $x^2+y^2-2x+6y+2=0$ **olan çemberin denklemi** $y-x+1=0$ **olan doğru ile kesiştiği noktaların apsisleri toplamı kaçtır?**

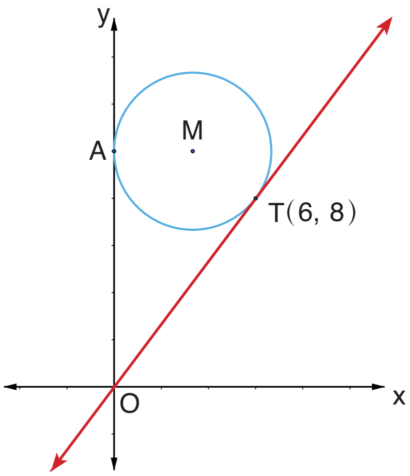
16.



Şekildeki çember eksenleri $A(2,\ 0)$, $B(6,\ 0)$ ve $C(0,\ -2)$ noktalarında kesmektedir. **Buna göre çemberin yarıçap uzunluğu kaç birimdir?**

17. **Analitik düzlemde** $x = 12$ **ve** $y = 6$ **doğrularına teğet olan, merkezi** $y - 3x + 2 = 0$ **doğrusu üzerinde bulunan çemberlerden birinin yarıçapı kaç birimdir?**

18.

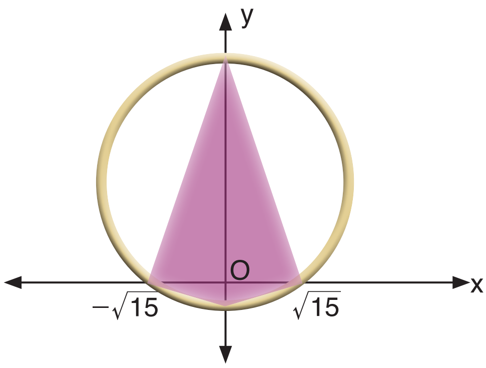


Şekildeki çember y eksenine A noktasında, d doğrusuna da $T(6,\ 8)$ noktasında teğettir. **Buna göre çemberin yarıçap uzunluğu kaç birimdir?**

19. Analitik düzlemde $A(0,\ -2)$ ve $B(0,\ 8)$ noktalarından geçen çemberin merkezi $x - 6 = 0$ doğrusu üzerindedir. **Buna göre çemberin standart denklemini bulunuz.**

20. Analitik düzlemde $4x - 5y = 12$ ve $4x - 5y = 20$ doğrularına teğet olan, merkezi $y = 3$ doğrusu üzerinde bulunan **çemberin merkezinin apsisini bulunuz.**

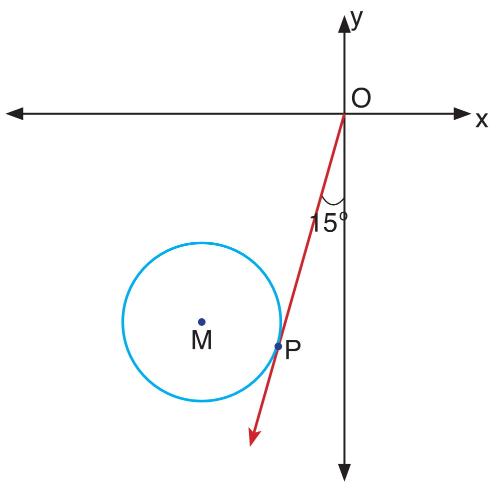
21.



Kimsesiz çocuklar yararına düzenlenen bir kermeste satılmak üzere yukarıda verilen şekildeki gibi çember biçiminde plastik bir küpe tasarlanmıştır. Bu çemberin standart denklemi $x^2 + (y - 1)^2 = 16$ olarak modellenmiştir. **Buna göre küpenin iç kısmındaki geometrik şeklin alanını bulunuz.**

22. Analitik düzlemde $x + 2y - 8 = 0$ doğrusunun eksenleri kestiği noktaların arasındaki uzaklığı çap kabul eden **çemberin standart denklemini bulunuz.**

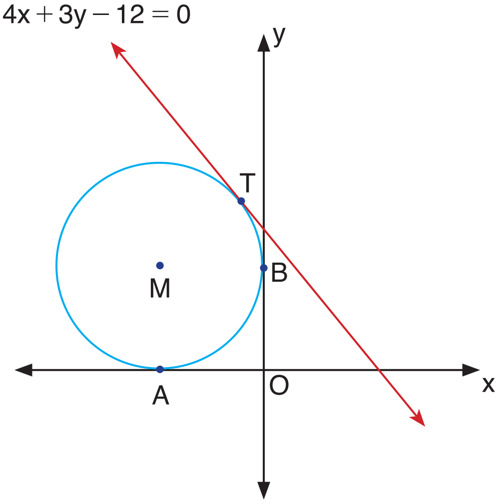
23.



Şekildeki OP ışınına teğet olan çemberin merkezi $M(-4,\ -4)$ **olduğuna göre çemberin yarıçap uzunluğunu bulunuz.**

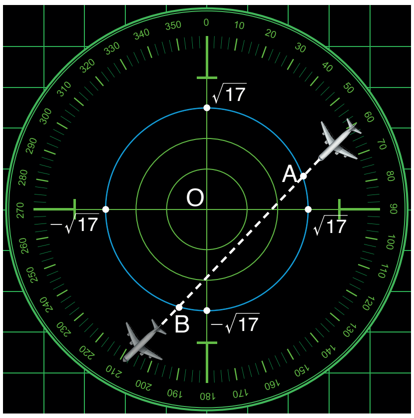
ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 7

24. $4x+3y-12=0$



Şekildeki çember eksenlere A ve B noktalarında, $4x+3y-12=0$ doğrusuna ise T noktasında teğettir. **Buna göre çemberin yarıçap uzunluğu kaç birimdir?**

25.



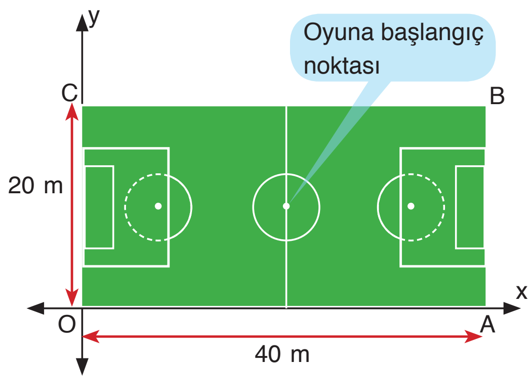
Bir havalimanındaki radar ekranında bir uçağın piste inişi sırasındaki görüntüsü yukarıdaki gibidir. Burada uçağın rotasının A ve B noktalarından geçtiği görülüyor. AB doğrusunun denklemi $y-x+3=0$ **olduğuna göre**

a) **Radar ekranındaki A ve B noktalarının koordinatlarını bulunuz.**

b) **A ve B noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz.**

26. Bir belediye arsasına 15 Temmuz Demokrasi Şehitleri Parkı yapılmak isteniyor. Bu park, eşitsizlikleri $1 \le x < 2$, $4 < x < 5$, $2 < y < 3$ ve $5 < y \le 6$ olan doğruların kesişim bölgelerini içine alacak şekilde en küçük çembersel bölgeye yapılacaktır. **Buna göre bu çemberin standart denklemini bulunuz.**

27.



Bir futbol sahasında iki penaltı noktası ve sahanın ortasında oyuna başlangıç noktası vardır. Bu penaltı noktaları ile oyuna başlangıç noktası doğrusal olup bu noktaları merkez kabul eden, yarıçapları eşit olan üç çember vardır. Şekildeki gibi bir köşesi orijinde olan 20×40 m boyutundaki bir sahada iki penaltı noktası arasındaki uzaklık 24 m ve çemberler arasındaki en kısa mesafe dörder metredir. Penaltı noktaları oyuna başlangıç noktasına göre simetriktir.
Buna göre orijine uzak olan penaltı noktasını merkez kabul eden çemberin standart denklemini bulunuz.

DEĞERLENDİRME
Cevaplarınızı cevap anahtarı ile karşılaştırınız. Yanlış cevap verdiğiniz ya da cevap verirken tereddüt ettiğiniz sorular ile ilgili konuları veya faaliyetleri tekrarlayınız. Cevaplarınızın tümü doğru ise bir sonraki öğrenme faaliyetine geçiniz.

CEVAP ANAHTARI

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 1

A)

En Geniş Tanım Kümesi	Fonksiyonunun Tersi	Fonksiyonun Tersinin Tanım Kümesi
$(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$	$\mp\sqrt{3^{x-1}+4}$	$\mathbb{R}$
$\left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$	$\frac{5^{4-x}-3}{2}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$\log_3\left(\frac{x+1}{3}\right)$	$(-1, \infty)$
$\mathbb{R}$	$\log_5\left(\frac{25}{x-3}\right)$	$(3, \infty)$

B) 2. a) $\{2, 4, 6, 7, 9\}$ b) $\{1, 2, 4, 5\}$ c) $\{2, 4\}$

C) 3. C 4. D 5. C 6. C 7. C 8. B 9. D 10. A 11. A 12. B 13. C 14. E
15. B 16. C 17. E 18. E 19. D

Ç) 20. 3 21. $Ç = \{\log_2 3, 3\}$ 22. 1 23. $Ç = \{4\}$

24. a) $y = \log_4(x-3)$ b) $y = \log_{\frac{1}{5}}(x+2)$ c) $y = \log_{\frac{1}{2}} x - 2$

25. $x = \frac{8}{15}$, $y = \frac{5}{2}$, $z = \frac{125}{6}$ 26. $x = \frac{e^2}{1+e^2}$ 27. 5^8 28. 5

29. $\left(\frac{1}{81}, -2\right)$ ve $(9, 4)$ 30. $g(x) = \sqrt{1-x} - 1$ 31. -1

32. $x = e^{a+b}$, $y = e^{a-b}$ 33. a) $(-4, 0)$ b) $(2, 5)$ c) $\left[\frac{9}{4}, 18\right]$ ç) $(\sqrt[3]{3}+1, 28]$

34. $\frac{4a+b}{3a+b}$ 35. $3f(x)$ 36. $x-y+2$ 37. 1 38. $3x+y$ 39. $g^{-1}(x) = x \cdot e^3$

40. 10 41. $a = \frac{10}{11}$, $b = -2$, $c = \frac{9}{8}$ 42. -3 43. $\log_{18} 108$ 44. 2

D) 45. a) $10^{23,2}$ b) $10^{26,05}$ 46. $\approx \%65$ 47. ≈ 6 yıl

48. a) $k = \frac{1}{40}\ln\left(\frac{61}{30}\right)$ b) $\approx 8\,247\,427\,027$ 49. a) 5 gram b) ≈ 26 saat

50. a) 10^5 Watt/m^2 b) 10^{10} katı 51. a) $[H^+] \approx 0{,}0316$ ve $[OH^-] \approx 13{,}9684$

b) $[H^+] = 10^{-7,8}$ c) $pH = 4{,}795 < 7$ olduğundan asidiktir.

52. ≈ 17 dakika b) ≈ 61 °C

53. a) $\approx 48\,016$ b) ≈ 270 54. ≈ 4812 m^3

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 2

A) 1. I. 5, 8, 11, 14, 17 II. 3, 3, 6, 18, 72 III. $-2, -1, \frac{-2}{3}, \frac{-1}{2}, \frac{-2}{5}$
IV. 3, 1, −1, −3, −5 V. 5, −6, 8, −3, 11

B) 2. I - d, II - a, III - b, IV - c, V - e

C) 3. C 4. D 5. C 6. B 7. C 8. E 9. A 10. B 11. E 12. A 13. B 14. D

Ç) 15. 12 16. 9 17. 33 18. −150 19. 140

20. a) $k = -\frac{3}{2}$, b) $S_{40} = -30$ 21. 9 22. −10 23. $\frac{64}{17}$

24. 900 25. 2 26. 9 27. a) b) $170\sqrt{5}$

28. $\frac{121}{3}$ 29. $\frac{304}{47}$ m 30. a) $\frac{39}{2}$ b) 200 31. $\frac{2^{30}+2}{3 \cdot 2^{26}}$

32. a) $4n+46$ b) 126 c) $S_n = 2n^2 + 48n$

CEVAP ANAHTARI

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 3

A)

1.

$\cot\left(\frac{\pi}{12}\right)$	$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$	$\tan75^{0}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$	$\sin\frac{23\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
$\cos105^{o}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$	$\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$	$\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$	$\cot\frac{11\pi}{12}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

B) 2. a) III . b) V. c) IV. ç) I. d) II.

C) 3. B 4. E 5. B 6. E 7. A 8.E 9. A 10. C 11. E 12. C 13. C 14. B 15. D 16. A 17. B 18. A 19. D 20. C 21. A 22. C

Ç)

23. $-\frac{7}{11}$ 24. 3 25. $\frac{39}{5\sqrt{61}}$ 26. $\frac{4}{5}$ 27. a) $\frac{9}{64}$ b) $\frac{125}{512}$ 28. $\frac{x}{4y}$ 29. $\frac{9}{16}$ 30. 2 31. -4

32. 5 33. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 34. $\frac{9}{10}$ 35. $\frac{-\sqrt{5}}{2}$ 36. 1 37. $2+\sqrt{5}$ 38. 2^{22} 39. 1

40. $A=\frac{15}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})\ br^{2}$ 41. $\frac{3}{16}$ 42. $\frac{2}{3}$ 43. 0,7 44. b) $\frac{5}{24}\sin(2t+c)$ c) $\frac{2}{\pi}$

45. $\frac{1}{9}$ 46. b) $\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{a}}$ c) $x=a$ 48. 45^{o}

49. a) $A=81(1+\cos\alpha)\cdot\sin\alpha$ b) $\frac{243\sqrt{3}}{4}$ c) $A=81$ 50. 0

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 4

A)

1.

	Saatin Tersi Yönünde			Saat yönünde		
	90^{o}	180^{o}	270^{o}	90^{o}	180^{o}	270^{o}
$(-4,-2)$	$(2,-4)$	$(4,2)$	$(-2,4)$	$(-2,4)$	$(4,2)$	$(2,-4)$
$\left(\frac{1}{2},-3\right)$	$\left(3,\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2},3\right)$	$\left(-3,-\frac{1}{2}\right)$	$\left(-3,-\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2},3\right)$	$\left(3,\frac{1}{2}\right)$
$(0,-4)$	$(4,0)$	$(0,4)$	$(-4,0)$	$(-4,0)$	$(0,4)$	$(4,0)$

2.

	$(-3,4)$ Noktasına Göre	Orijine Göre	x Eksenine Göre	y Eksenine Göre	$x=-2$ Doğrusuna Göre	$y=-3$ Doğrusuna Göre	$y=x$ Doğrusuna Göre	$y=-x$ Doğrusuna Göre	$y=-3x$ Doğrusuna göre	$y=2x+4$ Doğrusuna göre
$(-1,-3)$	$(-5,11)$	$(1,3)$	$(-1,3)$	$(1,-3)$	$(-3,-3)$	$(-1,-3)$	$(-3,-1)$	$(3,1)$	$\left(\frac{13}{5},\frac{-9}{5}\right)$	$(-5,-1)$
$(-3,1)$	$(-3,7)$	$(3,-1)$	$(-3,-1)$	$(3,1)$	$(-1,1)$	$(-3,-7)$	$(1,-3)$	$(-1,3)$	$\left(\frac{9}{5},\frac{13}{5}\right)$	$\left(\frac{-3}{5},\frac{-1}{5}\right)$
$(3,0)$	$(-9,8)$	$(-3,0)$	$(3,0)$	$(-3,0)$	$(-7,0)$	$(3,-6)$	$(0,3)$	$(0,-3)$	$\left(\frac{-12}{5},\frac{-9}{5}\right)$	$(-5,4)$
$(0,-6)$	$(-6,14)$	$(0,6)$	$(0,6)$	$(0,-6)$	$(-4,-6)$	$(0,0)$	$(-6,0)$	$(6,0)$	$\left(\frac{18}{5},\frac{-24}{5}\right)$	$(-8,-2)$

B)

3.

	R_{α}	Doğru
I.	90°	$2y+x+5=0$
II.	180°	$2x-y-5=0$
III.	270°	$2y+x-5=0$

	R_{α}	Doğru
a)	-90°	$2y+x-5=0$
b)	-180°	$2x-y-5=0$
c)	-270°	$2y+x+5=0$

C) 4. B 5. E 6. A 7. E 8. E 9. C 10. E 11. B 12. A 13. E 14. D 15. C 16. A 17. E

Ç)

18. 8 19. $(-4,0)$ 20. $3x-5y-23=0$ 21. a) $(2,8)$ b) $\frac{72}{5}$ 22. 6

23. $(-3,-1)$ 24. a) $4\sqrt{5}$ b) $2\sqrt{17}$ 25. $3x-y-17=0$ 26. $\frac{5}{2}$ 27. 16

28. $\frac{7}{5}$ 29. 2 30. 135° 31. $y=2x+15$ 32. $A(0,10)$, $B(-5\sqrt{3},5)$, $C(5\sqrt{3},-5)$

CEVAP ANAHTARI

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 5

A) 1. I. $<$ II. $<$ III. $=$ IV. $=$ V. $<$ VI. $>$

B) 2. I-b, II-a, III-ç, IV-c

C) 3. D 4. C 5. B 6. C 7. A 8. A 9. B 10. E 11. E 12. D 13. D
14. B 15. A 16. D 17. B 18. E 19. D 20. A 21. B 22. E

Ç) 23. En büyük değer $\sqrt{2}$, en küçük değer $-\sqrt{2}$ 24. a) $-\frac{1}{3}$ b) 3 c) $-\frac{1}{3}$ ç) 0

25. a) $\frac{x\sin\left(2\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2-1}}$ b) $-2\tan x$ c) $3\cos(3x+1)e^{\sin(3x+1)}$ ç) $-\frac{18}{(x-2)^4}$

26. $-3, 1, 2, \sqrt{5}$ 27. 5 28. $-4, -2, 3, 5, 7$ 29. $2e^4$

30. $(-\infty, -5)\cup(-5, 3)\cup(5, \infty)$ aralığında dışbükey, $(3, 5)$ aralığında içbükey, dönüm noktalarının apsisleri: $x=3$ ve $x=5$

31. 1 32. 15 33. $\frac{9}{4}$ 34. $(4, 2), (-4, 2)$ 35. $\frac{(-1)^n n!\,3^{n-1}}{(3x+1)^{n+1}}$ 36. $-4\cdot e^x[\sin x+\cos x]$

37. $(-6, 6)$ 38. -34 39. $(-\infty, -4)\cup(-2, 2)\cup(3, 4)$ 40. $y=3x-2$ ve $x=1$

41. $\frac{2}{3}$ 42. 12 43. a) $L_0\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) 0 44. $\frac{4}{3}$

45. a) Marjinal gider: $2x+2$, Marjinal gelir: $20x$ b) Marjinal kâr: 88

46. 9 47. a) 5 m/sn b) 0 c) -5 48. 54 49. a) 51 b) 22
50. a) 256 m b) 16 sn

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 6

A) 1.

$\int_1^2 \frac{3x+7}{x^2+6x+5}dx$	$\ln\frac{49}{24}$	$\int_0^1 \frac{1}{1+e^{-2x}}dx$	$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^2+1}{2}\right)$
$\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sec^2(2x)dx$	$\frac{1}{2}$	$\int_1^2 \frac{\ln x^2}{x}dx$	$(\ln 2)^2$
$\int_0^{\pi} x^2\cos x\,dx$	-2π	$\int_1^9 \frac{1}{\sqrt{t}}dt$	4

B) 2. I-d II-a III-b IV-c

C) 3. A 4. C 5. C 6. C 7. A 8. D 9. E 10. A 11. B 12. D 13. B 14. E
15. C 16. E 17. B 18. E 19. C 20. B 21. E

Ç) 22. $\frac{7}{6}$ 23. $x\cdot\cos 2-\sin 2\cdot\ln|\sin(x+2)|+c$ 24. $\frac{3^{3^x+1}}{\ln 3}+c$ 25. 2

26. $4\cdot\ln|x-3|-3\cdot\ln|x-2|+c$ 27. 0 28. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(3x^2+2x+1)^4}+c$ 29. a) -1 b) -5 c) 8

30. $\frac{\ln^2|\sin x|}{2}+c$ 31. $\frac{1}{2}\sqrt{x^4+2x^2+1}+c$ 32.0 33. $\frac{x}{2}+\ln|\cos x+\sin x|+c$ 34. $\frac{128}{3}$

35. $a\cdot b=-13$ 37. $\sin t-5\ln|\sin t-2|+10\ln|\sin t-3|+c$ 38. $8\ln 8-3\ln 3-5$ 39. $2\sqrt{2}$

D) 40. $a(t)=-10$ m/sn^2 $V(t)=50-10t$ m/sn $S(t)=-5t^2+50t+120$ m 41. 245 m

42. $t=12$ sn. 43. $a=6$ $b=1$ 44. 4 45. 60 birim ötelenecek

46. a) $\int_{300}^{900}\left(600-\frac{3}{x}\right)dx$ b) $360\,000-\ln 27$ 47. a) $A(t)=t^3-t^2+100$ b) 200 m^2 c) 23:00

48. $24-\frac{25\sqrt{10}}{6}$ 49. $\frac{16}{3}$ birim 50. a) 1800 kişi b) 8 seminer

CEVAP ANAHTARI

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 7

A)

1.

Çemberin Merkezinin Koordinatları	Çemberin Yarıçap Uzunluğu	Çemberin Standart Denklemi
$M(-2, 5)$	$r=3$	$(x+2)^2+(y-5)^2=9$
$M(1, 0)$	$r=2$	$(x-1)^2+y^2=4$
$M(0, 3)$	$r=5$	$x^2+(y-3)^2=25$
$M(-4, -1)$	$r=4$	$(x+4)^2+(y+1)^2=16$
$M(-7, 0)$	$r=6$	$(x+7)^2+y^2=36$
$M(1, 2)$	$r=1$	$(x-1)^2+(y-2)^2=1$

2.

Çemberin Standart Denklemi	Çemberin Merkezinin Koordinatları	Çemberin Yarıçap Uzunluğu
$x^2+(y-1)^2=25$	$M(0, 1)$	$r=5$
$(x-2)^2+y^2=1$	$M(2, 0)$	$r=1$
$x^2+y^2+6x-8y-33=0$	$M(-3, 4)$	$r=\sqrt{58}$
$x^2+y^2-4x-2y-20=0$	$M(2, 1)$	$r=5$

B) 3. a) 1, 4 ve 6 b) 2, 3 ve 5

C) 4. E 5. C 6. B 7. B 8. B 9. B 10. D 11. C 12. D 13. B

Ç)
14. $M(4, -1)$ $r=\sqrt{13}$ birim 15. -1 16. $r=2\sqrt{5}$ birim 17. $r=14$ veya $r=7$ birim
18. $r=\frac{10}{3}$ birim 19. $(x-6)^2+(y-3)^2=61$ 20. $\frac{31}{4}$ 21. $8\sqrt{15}$ birimkare
22. $(x-4)^2+(y-2)^2=20$ 23. $2\sqrt{2}$ birim 24. $r=3$ birim
25. a) $A(4,1)$ $B(-1,-4)$ b) $|AB|=5\sqrt{2}$ birim 26. $(x-3)^2+(y-4)^2=8$
27. $(x-32)^2+(y-10)^2=16$

SÖZLÜK

A

anlık hız : Bir hareketlinin belli bir zamandaki hızı.
aralık : Gerçek sayılar kümesinin farklı iki elemanı ile sınırlandırılmış alt kümesi.
aritmetik dizi : Ardışık terimleri arasındaki farkı sabit olan dizi.
artan fonksiyon : Bir fonksiyonda bağımsız değişken artarken bağımlı değişkenin de artması.
asimptot : Düzlemsel bir eğriye sonsuzda teğet olacak biçimde çizilebilen doğru veya eğri.
azalan fonksiyon : Bir fonksiyonda bağımsız değişken artarken bağımlı değişkenin azalması.

SÖZLÜK

B

belirli integral	:	Alt ve üst sınırları olan integral.
belirsiz integral	:	Bir f fonksiyonu için türevi f ye eşit olan fonksiyonların hepsi.
bir noktada limit	:	Bir fonksiyondaki değişkenin yaklaştığı bir değere karşılık fonksiyonun yaklaştığı değer.
büküm noktası	:	Fonksiyon grafiğinde eğrinin bükülme yönünün değiştiği nokta.

D

dizi	:	Öğeleri sayılabilir bir kümeyle damgalanmış olan küme.
doğal logaritma	:	e tabanına göre logaritma.
dönme	:	Bir cismin her noktası bir çember ya da kapalı bir eğri çizecek biçimde devinmesi.
dönme açısı	:	Dönme dönüşümü esnasında oluşan açı.
dönme merkezi	:	Dönme dönüşümü esnasında konumu değişmeyen nokta.
dönüm (büküm. noktası	:	Bir fonksiyonun grafiğinde çukurluk yönünün yön değiştirdiği ve sürekli olduğu nokta.
dönüşüm	:	Belirli yapı ve özellikler dizisinin başka bir yapı ve özellikler dizisine dönüşmesi olayı.

E

ekstremum değer	:	Fonksiyonun en büyük veya en küçük değerlerinden her biri.
ekstremum nokta	:	Fonksiyonun en büyük veya en küçük değerlerini aldığı nokta.

F

Fibonacci dizisi	:	Elemanları Fibonacci sayıları olan bir dizi.

G

geometrik dizi	:	Her sayısı bir öncekinin sabit bir değerle çarpımından oluşan dizi.

İ

integral sabiti	:	İntegral bulunduktan sonra fonksiyona eklenen sabit sayı.
ilkel fonksiyon	:	Türevi bilinen bir fonksiyonun aslı.
integral	:	Türevi bilinen bir fonksiyonu (ilkelini) bulma işlemi.

K

konkav (içbükey)	:	Bir fonksiyonun bir aralıktaki grafiğinin çukurluk yönünün aşağıya doğru olması.
konveks (dışbükey)	:	Bir fonksiyonun bir aralıktaki grafiğinin çukurluk yönünün yukarıya doğru olması.

L

limit	:	Değişken bir niceliğin istenilene çok yakın olarak yaklaştığı bir başka nicelik.
logaritmik denklem	:	Bilinmeyenin logaritmasını içeren denklem.

SÖZLÜK

M

maksimum değer : Sürekli bir fonksiyonun bir aralıkta aldığı en büyük değer.
minimum değer : Sürekli bir fonksiyonun bir aralıkta aldığı en küçük değer.
minimum nokta : Sürekli bir fonksiyonun bir aralıkta aldığı en büyük değerin bulunduğu nokta.
mutlak maksimum : Sürekli bir fonksiyonun bir aralıkta aldığı değerlerin en büyüğü.

Ö

öteleme : Bir uzayı ya da uzay içindeki nesneyi, aynı doğrultuda bir yerden başka yere götürme işlemi.

P

parametrik denklem : Doğru üzerindeki noktaların bileşenlerinin bir parametreye bağlı olarak ifadesi.

S

sabit dizi : c gerçek sayı olmak üzere her n pozitif tamsayısı için $(a_n) = c$ koşulunu sağlayan dizi.
sağdan limit : Verilen bir f fonksiyonu için bir noktadaki sağından yaklaşımla bulunan limit.
sağdan türev : Bir noktanın sağından yaklaşımla elde edilen türevi.
soldan limit : Verilen bir f fonksiyonu için bir noktadaki solundan yaklaşımla bulunan limit.
soldan türev : Bir noktanın solundan yaklaşımla elde edilen türevi.
süreklilik : Bir fonksiyonun $x = 0$ noktasındaki limiti ile o noktadaki görüntüsünün eşit olması.

T

ters türev : İntegral alma işlemi.
trigonometrik denklem : Bilinmeyeni trigonometrik fonksiyonların değişkeni olarak içeren denklem.
türev : Değişken artması sıfıra giderken işlevin artmasının değişken artmasına oranının değeri.
türevlenebilir fonksiyon : Tanım kümesindeki her (a, b) nin her noktasında türevi tanımlı olan bir fonksiyon.

U

uzay : Tüm noktaların oluşturduğu küme.

Ü

üstel denklem : Belirsiz değişkeni kuvvet şeklinde içeren denklem.
üstel fonksiyon : İçinde üstel bir ifade bulunan ve bu ifadenin üstü veya hem üstü hem tabanı değişken olan bir fonksiyon.

Y

yerel ekstremum : Bir fonksiyonun sürekli olduğu belli aralıktaki en büyük veya en küçük değeri.

KAYNAKÇA

A. NESİN, Analiz I, İstanbul: Nesin Yayıncılk A. Ş., 2017.
A. NESİN, Analiz II, İstanbul: Nesin Yayıncılk A. Ş., 2015.
A. DEMİRTAŞ, Ansiklopedik Matematik Sözlüğü, Ankara: Bilim Teknik Kültür Yayınları, 1986.
C. Y. YOUNG, Algebra and Trigonometry, Florida: Wiley Plus, 2013.
D. G. Z.-W. S. WRIGHT, Matematik, Cilt 1, Ankara: Nobel Yayıncılık, 2015.
D. J. STRUIK, Kısa Matematik Tarihi, İstanbul: Doruk Yayımcılık, 2011.
E. ÇELİK, Müslüman ve Türk Bilim Adamları, Ankara: Tutku Yayınevi, 2016.
F. CAJORI, Matematik Tarihi, Ankara: ODTÜ Geliştirme Vakfı Yayıncılık ve İletişim A. Ş., 2014.
G. M. K. Daniel C. ALEXANDER, Elementary Geometry For College Students, Belmond: Brooks/cole, 2011.
I. JAMES, Büyük Matematikçiler Euler'den Von Neumann'a, İstanbul: Türkiye İş Bankası Kültür Yayınları, 2013.
J. A. C. Earl W. SWOKOWSKIS, Algebra and Trigonometry With Analytic Geometry, Belmont: Brooks/Cole, 2010.
L. R. S. W. James STEWART, Precalculus Mathematics For Calculus, Boston: Cengage Learning, 2016.
M. BALCI, Genel Matematik I, Ankara: Palme Yayıncılık, 2016.
M. BAYRAKDAR, İslâm Bilim Adamları, İstanbul: İnkılâb Yayınları, 2012.
M. D. W. J. R. H. George B. THOMAS, Thomas Kalkülüs, Cilt 1, İstanbul: Pearson Eğitim Çözümleri Tic. Ltd. Şti, 2013.
Milli Eğitim Bakanlığı, Ortaöğretim Fen Lisesi Matematik Dersi Öğretim Programı, Ankara: Milli Eğitim Yaıyınları, 2018.
M. SULLIVAN, Ptecalculus, Boston: Pearson Educatiaon, 2012.
M. S. Metin ARIK, Pentapleks Kaplamalar, Ankara: Korza Yayıncılık, 2012.
R. BLITZ, College Algebra: Essentials, Boston: Pearson Education, 2014.
R. LARSON, Precalculus With Limits, Boston: Brooks/Cole, 2014.
R. NARASIMHANN, College Algebra: Building Concepts and Connections, Belmont: Brooks/Cole, 2010.
Türk Dil Kurumu, Yazım Kılavuzu, Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları, 2012.

GENEL AĞ KAYNAKÇASI

«http://dergipark.gov.tr/download/article-file/201321,» [Çevrimiçi]. [Erişildi: 15 01 2018].
«http://www.islamansiklopedisi.info/dia/pdf/c01/c010275.pdf,» [Çevrimiçi]. [Erişildi: 15 01 2018].
«http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_bts&view=bts,» [Çevrimiçi]. [Erişildi: 05 01 2018].
«http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_yazimkilavuzu&view=yazimkilavuzu,» [Çevrimiçi]. [Erişildi: 05 01 2018].
«http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_gts&view=gts,» [Çevrimiçi]. [Erişildi: 05 01 2018] .
«http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_bilimsanat&view=bilimsanat,» [Çevrimiçi]. [Erişildi: 05 01 2018].
«http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_bati&view=bati,» [Çevrimiçi]. [Erişildi: 05 01 2018].
«https://www.tubitak.gov.tr/,» [Çevrimiçi]. [Erişildi: 05 01 2018].

GÖRSEL KAYNAKÇA

DREAMSTİME SİTESİNDEN TELİF HAKKI ÖDENEREK ALINAN GÖRSELLER

1. bölüm kapak görseli (92267539)
Sayfa 22 (1941883)
Sayfa 36 (19622677)
Sayfa 65 (2637381)
Sayfa 66 (35559055)
Sayfa 70 (11158205, 23075606)
Sayfa 72 (59660588, 32316234, 29525055, 18886404)
Sayfa 102 (11184893)
Sayfa 104 (29639660)
Sayfa 111 (11707135)
Sayfa 118 (145388851, 3799673, 76494977, 46230540, 31900386)
Sayfa 126 (25118409)
3. bölüm kapak görseli (33870931)
Sayfa 128 (53023754)
Sayfa 137 (81636838)
Sayfa 154 (41249358)
Sayfa 186/Soru görseli (1867860555)
4. bölüm kapak görseli (46241733)
Sayfa 222 (99280493, 14407782, 44190990,217025533, 12034277)
Sayfa 222 (3823661, 14407782, 44190990, 2034277)
Sayfa 223/Soru görseli
Sayfa 232 (246961144)

SHUTTERSTOCK SİTESİNDEN TELİF HAKKI ÖDENEREK ALINAN GÖRSELLER

Sayfa 70 (259423997, 212362420, 66554770)
Sayfa 71 (389792998)
2. bölüm kapak görseli (306675146)
Sayfa 222 (199074842)
Görsel 4.10 (217025533)
5. bölüm kapak görseli (598640468)
Sayfa 247 (224884381)
Sayfa 266 (691876342)
6. bölüm kapak görseli (158391962)
Sayfa 326 (163428554)
Sayfa 380 (373194472)
7. bölüm kapak görseli (570257470)

GÖRSEL TASARIM UZMANI TARAFINDAN HAZIRLANAN GÖRSELLER

Sayfa 138/Soru görseli
Sayfa 139/Soru görseli
Sayfa 151/Soru görseli
Sayfa 153/Soru görseli
Sayfa 176/Soru görseli (1.)
Sayfa 177/Soru görseli
Sayfa 184/Soru görseli (1, 2.)
Sayfa 185/Soru görseli (2.)
Sayfa 229/Soru görseli
Sayfa 230/Soru görseli
Sayfa 232/Görsel 5.2
Sayfa 261/Görsel 5.4
Sayfa 323/Soru görseli
Sayfa 324/Soru görseli

GRAFİK TASARIM UZMANI TARAFINDAN HAZIRLANAN GÖRSELLER

Sayfa 12/Görsel 1.1
Sayfa 31/Görsel 1.3
Sayfa 36/Görsel 1.4
Sayfa 84/Görsel 2.1
Sayfa 84/Görsel 2.2
Sayfa 117/Görsel 2.5
Sayfa 117/Görsel 2.6
Sayfa 117/Görsel 2.7
Sayfa 120/Soru görseli (1, 2.)
Sayfa 125/Soru görseli
Sayfa 172/Görsel 3.3
Sayfa 174/Soru görseli
Sayfa 175/Soru görseli
Sayfa 176/Soru görseli (2, 3, 4, 5 ve 6.)
Sayfa 185/Soru görseli (1.)
Sayfa 186/Soru görseli (2.)
Sayfa 188/Görsel 4.1
Görsel 4.2, Görsel 4.3, Görsel 4.4
Sayfa 223/Soru görseli
Sayfa 224/Soru görseli (2.)
Sayfa 227/Soru görseli (1, 2, 3, 4, 5 ve 6.)
Sayfa 228/Soru görseli
Sayfa 235/Görsel 5.2
Sayfa 277/Görsel 5.6
Sayfa 419/Soru görseli
Sayfa 422/Soru görselleri
Sayfa 423/Soru görselleri (1, 2.)

GÖRSEL KAYNAKÇA

GENEL AĞ ADRESLERİ

Sayfa 222/Görsel 4.6: «http://www.edremit.bel.tr/index.php/2016/10/01/antandros/» [Çevrimiçi]. [Erişildi: 21 12 2017].
Sayfa 445/Görsel 8.2: «http://www-history.mcs.st-and)ac)uk/Biographies/Arf)html» [Çevrimiçi]. [Erişildi: 01 01 2017].

YAZARLAR TARAFINDAN HAZIRLANAN GÖRSELLER

Sayfa 119/Soru görseli (1, 2 ve 3.)