ORTAÖĞRETİM

MATEMATİK

12

DERS KİTABI

YAZARLAR

Dr. Ahmet EMİN
Ahmet GERBOĞA
Gökhan GÜNEŞ
Mehmet KAYACIER

T.C. MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI

HAZIRLAYANLAR

Editör
Prof. Dr. Hülya GÜR

Dil Uzmanı
Yasemin TOKMAK

Program Geliştirme Uzmanları
Prof. Dr. Erdoğan TEZCİ
Doç. Dr. Hasan Hüseyin ŞAHAN

Rehberlik ve Psikolojik Danışmanlık Uzmanı
İlyas TİPİ

Görsel Tasarım Uzmanı
Mehmet ZEBER

Grafik Tasarım Uzmanı
Hacer ÖZÇELİK

İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl.
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl.

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,
Medeniyyet dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş, yurduma alçakları uğratma sakın;
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın;
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın.

Bastığın yerleri toprak diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki feda?
Şüheda fışkıracak toprağı sıksan, şüheda!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüda.

Ruhumun senden İlâhî, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar -ki şehadetleri dinin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,
Her cerîhamdan İlâhî, boşanıp kanlı yaşım,
Fışkırır ruh-ı mücerret gibi yerden na'şım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalan sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl;
Hakkıdır hür yaşamış bayrağımın hürriyet;
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif ERSOY

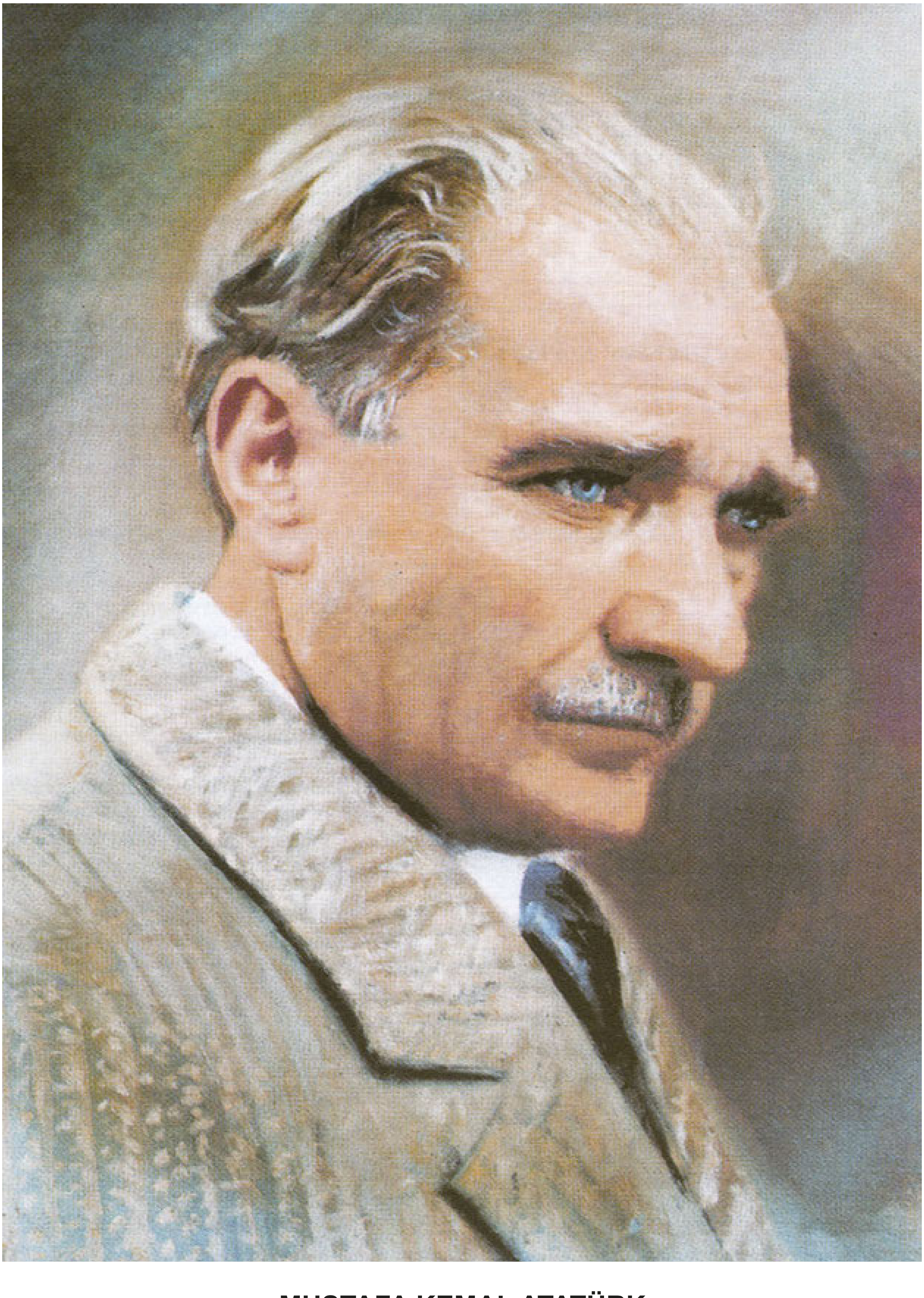
GENÇLİĞE HİTABE

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk Cumhuriyetini, ilelebet muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni bu hazineden mahrum etmek isteyecek dâhilî ve hâricî bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok namüsait bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dâhilinde iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlîlerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi vazifen, Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır. Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asil kanda mevcuttur.

Mustafa Kemal ATATÜRK



MUSTAFA KEMAL ATATÜRK

İÇİNDEKİLER

5

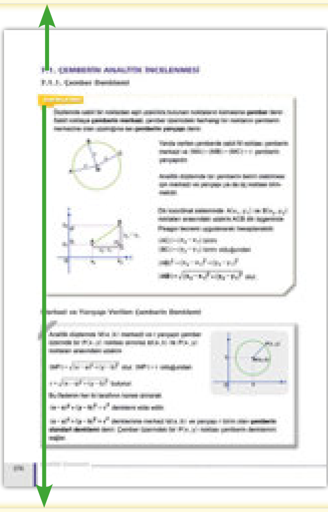
6

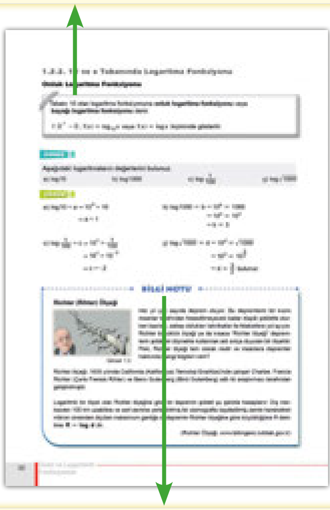
7

Alt öğrenme alanının içeriğine uygun görseli gösterir.

Konu başlıklarını gösterir.

Konuyla ilgili tanımları gösterir.

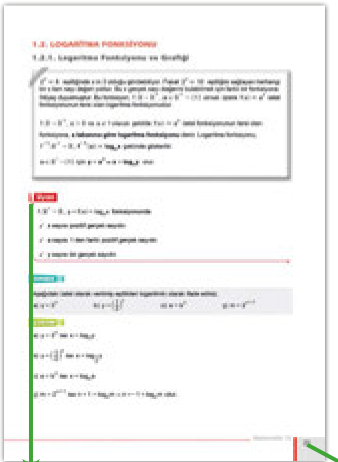




Alt öğrenme alanının numarasını ve adını gösterir.

Konuyla ilgili önceki bilgilerin hatırlatmasını gösterir.

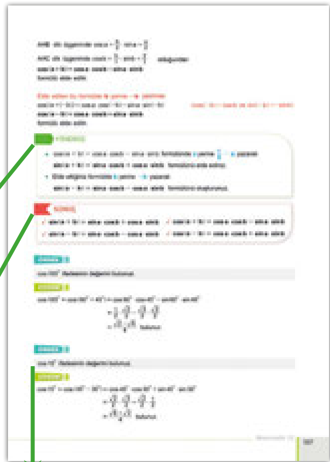
Konu anlatımı içerisinde doğrudan yer verilmeyen dikkat çekici bilgileri gösterir.



Etkileşimli kitap, video, ses, animasyon, uygulama, oyun, soru vb. ilave kaynaklara ulaşabileceğiniz karekodu gösterir. Daha fazlası için http://ogmmateryal.eba.gov.tr adresini ziyaret edebilirsiniz.

Öğrencinin ulaşması istenen formüllere giden adımları gösterir.

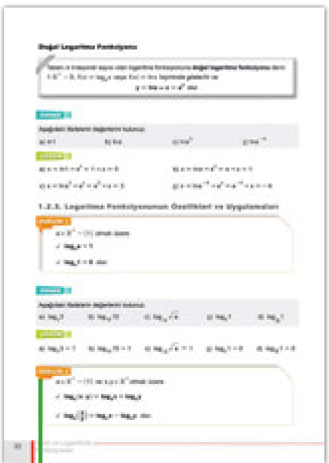
İşlem sonrasında elde edilen sonuçları gösterir.

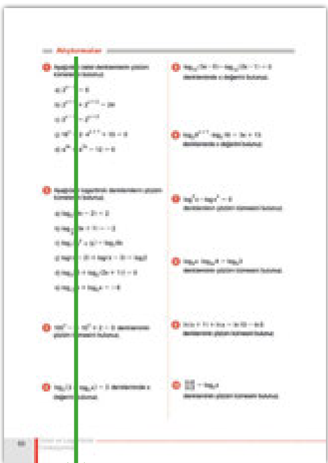


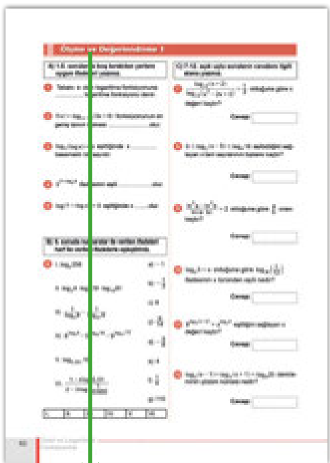
Dikkat edilmesi istenen temel bilgileri gösterir.

Sayfa numaralarını gösterir.

Bölüm içindeki örnek soru ve çözümleri gösterir.







Konuyla ilgili özellikleri gösterir.

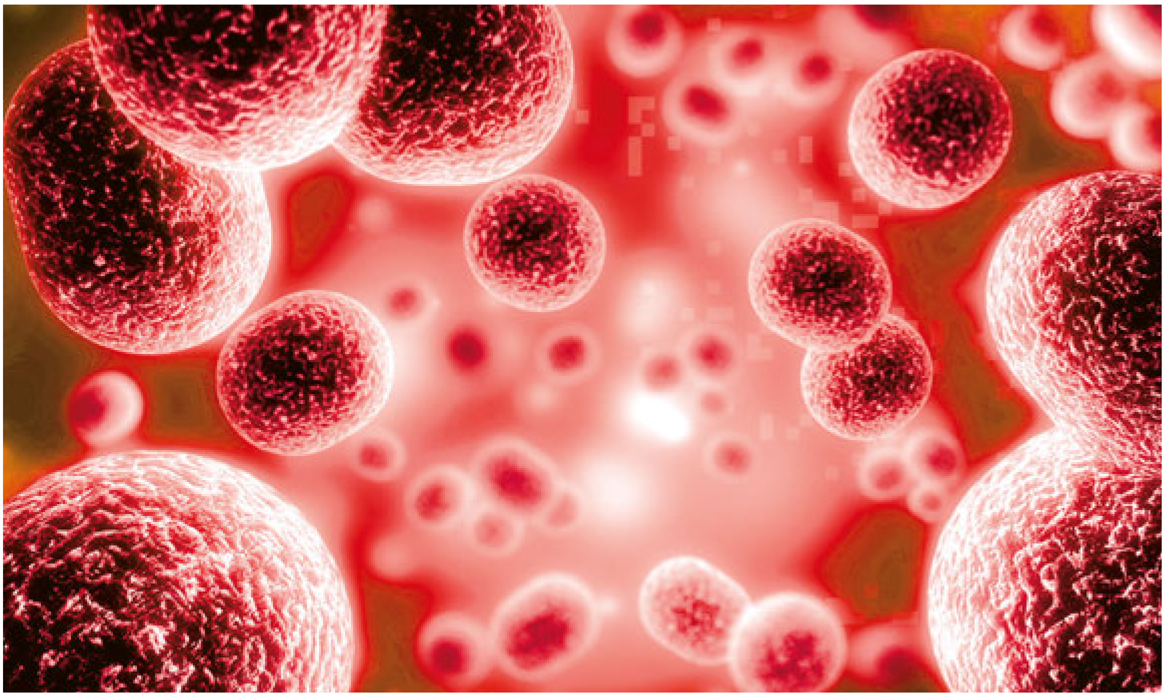
Öğrenilen konularla ilişkili çıkarımlarda bulunmayı ve yorum yapmayı sağlayacak soruları gösterir.

Öğrenme alanında anlatılan konularla ilgili öğrenilen bilgileri değerlendirmek amacıyla hazırlanan soruları gösterir.

SEMBOL VE GÖSTERİMLER

$\cong$	yaklaşık değeridir
$\mathbb{N}$	doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}^+$	pozitif rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}^-$	negatif rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	gerçek sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	pozitif gerçek sayılar kümesi
∞	sonsuz
$-\infty$	eksi sonsuz
φ	fi sayısı
e	e sayısı
λ	lambda sabiti
e^x	tabanı e olan üstel fonksiyon
R_α	alfa açısı kadar dönme dönüşümü
a^x	tabanı a olan üstel fonksiyon
$\log x$	x in 10 tabanına göre logaritması
$\log_a x$	x in a tabanına göre logaritması
$\ln x$	x in doğal logaritması
Σ	toplam sembolü
(a_n)	a_n dizisi
S_n	a_n dizisinin ilk n teriminin toplamı
(F_n)	Fibonacci dizisi
(a,b)	açık aralık
$(a,b]$	yarı açık aralık
$[a,b]$	kapalı aralık

$x \to a^+$	x, a ya sağdan yaklaşırken
$x \to a^-$	x, a ya soldan yaklaşırken
$x \to a$	x, a ya yaklaşırken
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$	x, a ya sağdan yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonunun limiti
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$	x, a ya soldan yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonunun limiti
$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	x, a ya yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonunun limiti
$f'(a^+)$	$f(x)$ fonksiyonunun a noktasında sağdan türevi
$f'(a^-)$	$f(x)$ fonksiyonunun a noktasında soldan türevi
$f'(x)$	$f(x)$ fonksiyonunun x e bağlı türevi
$f''(x)$	$f(x)$ fonksiyonunun x e bağlı ikinci türevi
$d\,f(x)$	$f(x)$ fonksiyonunun diferansiyeli
$\dfrac{dy}{dx}$	$y = f(x)$ fonksiyonunun x e bağlı 1. mertebeden türevi
$\dfrac{d^2y}{dx^2}$	$f(x)$ fonksiyonunun x e bağlı 2. mertebeden türevi
$\int f(x)dx$	$f(x)$ fonksiyonunun x e bağlı belirsiz integrali
$\int_a^b f(x)dx$	$f(x)$ fonksiyonunun x e bağlı belirli integrali



1

ÜSTEL VE LOGARİTMİK FONKSİYONLAR

1.1. ÜSTEL FONKSİYON
1.2. LOGARİTMA FONKSİYONU
1.3. ÜSTEL, LOGARİTMİK DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

HAZIRLIK ÇALIŞMALARI

- Bir fonksiyonun tersinin de bir fonksiyon olabilmesi için gerekli şartlar nelerdir?
- Bir fonksiyonun grafiği ile tersinin grafiğinin koordinat sistemindeki birbirlerine göre durumlarını açıklayınız.
- İkinci dereceden bir denklemin kökleri nasıl bulunur?

1.1. ÜSTEL FONKSİYON

1.1.1. Üstel Fonksiyon ve Üstel Fonksiyonun Grafiği

Üstel fonksiyonlar başta fizik, kimya, biyoloji, astronomi vb. doğa bilimleri olmak üzere birçok bilim dalında kullanılmaktadır. Bunun yanında günlük yaşamın değişik iş dalları olan sigortacılık, muhasebe, bankacılık ve finans gibi sektörlerde de üstel fonksiyonların uygulama alanı bulunmaktadır.

Bir bakteri kültüründe bakterilerin çoğalmasını araştıran bir biyolog, dünya nüfusundaki artışı inceleyen bir sosyolog, bir çözeltinin pH değerini ölçüp onun asidik veya bazik olduğunu bulmak isteyen bir kimyager, ses düzeyi birimi desibel (dB) olan ses şiddetini ölçmek isteyen bir fizikçi; çalışmalarını yürütürken üstel fonksiyonları kullanır. Ayrıca özel bir sismografla kaydedilmiş zemin hareketi sonucu oluşan maksimum genlik ile depremin büyüklüğü arasındaki ilişkiyi inceleyen bir jeolog, parasal konularda çalışan bir ekonomist ve okyanus coğrafyası (oşinografi) alanında plajın eğimi ile üzerindeki kum taneciklerinin boyutları arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmak isteyen bir araştırmacı da çalışmalarını modellerken üstel fonksiyonlardan yararlanmaktadır.

HATIRLATMA

$x \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere n tane x gerçek sayısının çarpımı

$$\underbrace{\mathbf{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}}_{\text{n tane}} = \mathbf{x^n}$$

biçiminde ifade edilir. Burada x^n ifadesine, tabanı x ve üssü n olan **üslü ifade** denir.

$x, y \in \mathbb{R}$ ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere üslü ifadelerle ilgili aşağıdaki özellikler vardır.

★ $\mathbf{x^1 = x}$

★ $x \neq 0$ olmak üzere $\mathbf{x^0 = 1}$

★ $x \neq 0$ ve $y \neq 0$ olmak üzere $\mathbf{x^{-n} = \frac{1}{x^n}}$ ve $\mathbf{\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n}$

★ $\mathbf{x^m \cdot x^n = x^{m+n}}$

★ $x \neq 0$ olmak üzere $\mathbf{\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}}$

★ $\mathbf{x^m \cdot y^m = (x \cdot y)^m}$

★ $x > 0$ olmak üzere $\mathbf{(x^m)^n = (x^n)^m = x^{m \cdot n}}$

★ $y \neq 0$ olmak üzere $\mathbf{\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}}$

★ $\mathbf{(-1)^{2n} = 1}$ ve $\mathbf{(-1)^{2n+1} = -1}$

★ $x \geq 0$ olmak üzere $\mathbf{x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m}$

★ $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathbf{a \cdot x^m \mp b \cdot x^m = (a \mp b) \cdot x^m}$

★ $x \neq 0$ ve $|x| \neq 1$ olmak üzere $\mathbf{x^m = x^n \Rightarrow m = n}$

ÖRNEK

$3^5 \cdot 9^2 \cdot 27^{-2}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$3^5 \cdot 9^2 \cdot 27^{-2} = 3^5 \cdot (3^2)^2 \cdot (3^3)^{-2} = 3^5 \cdot 3^4 \cdot 3^{-6} = 3^3 = 27$ bulunur.

ÖRNEK

$\dfrac{3^{2015} + 3^{2016}}{3^{2017} - 3^{2018}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}\frac{3^{2015} + 3^{2016}}{3^{2017} - 3^{2018}} &= \frac{3^{2015} + 3^{2015} \cdot 3^1}{3^{2015} \cdot 3^2 - 3^{2015} \cdot 3^3} \\ &= \frac{\cancel{3^{2015}} \cdot (1 + 3^1)}{\cancel{3^{2015}} \cdot (3^2 - 3^3)} \\ &= \frac{1+3}{9-27} \\ &= -\frac{2}{9} \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK

$\left(-\dfrac{1}{64}\right)^{-\frac{4}{3}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Pay ve payda yer değiştirdiğinde üs işaret değiştirir.

$\left(-\dfrac{1}{64}\right)^{-\frac{4}{3}} = \left(-\dfrac{64}{1}\right)^{\frac{4}{3}} = ((-4)^3)^{\frac{4}{3}} = (-4)^{\frac{12}{3}} = (-4)^4 = 256$ bulunur.

ÖRNEK

$2^x = a$, $5^x = b$ ve $7^x = c$ olduğuna göre 140^x in a, b ve c türünden eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

140 sayısı asal çarpanlarına ayrıldığında $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}140^x &= (2^2 \cdot 5 \cdot 7)^x \\ &= (2^x)^2 \cdot 5^x \cdot 7^x \\ &= a^2 \cdot b \cdot c \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK

$3^m = \frac{1}{2}$ olduğuna göre 3^{1-2m} ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$3^{1-2m} = \frac{3^1}{3^{2m}} = \frac{3}{(3^m)^2} = \frac{3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 3 \cdot 4 = 12 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$28^x = 7^{x+1}$ olduğuna göre 2^{2x-1} ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$28^x = 7^{x+1}$$

$$\cancel{7^x} \cdot 4^x = \cancel{7^x} \cdot 7^1$$

$4^x = 7$ olur. Bu durumda $2^{2x-1} = \frac{2^{2x}}{2^1} = \frac{4^x}{2} = \frac{7}{2}$ bulunur.

ÖRNEK

$\frac{3^{2,4}}{9^{-0,3}} + \frac{5^{-2}}{25^{-1,5}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}\frac{3^{2,4}}{9^{-0,3}} + \frac{5^{-2}}{25^{-1,5}} &= \frac{3^{2,4}}{(3^2)^{-0,3}} + \frac{5^{-2}}{(5^2)^{-1,5}} \\ &= \frac{3^{2,4}}{3^{-0,6}} + \frac{5^{-2}}{5^{-3}} \\ &= 3^{2,4+0,6} + 5^{-2+3} \\ &= 3^3 + 5^1 \\ &= 32 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK

$x = 3$ ve $y = -2$ olduğuna göre $y^{-x} + x^{-y}$ ifadesinin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}y^{-x} + x^{-y} = (-2)^{-3} + 3^{-(-2)} &= \frac{1}{(-2)^3} + 3^2 \\ &= -\frac{1}{8} + 9 \\ &= \frac{71}{8} \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK

$\dfrac{a^3+a^{13}+a^{23}}{a^{-3}+a^7+a^{17}}$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\dfrac{a^3+a^{13}+a^{23}}{a^{-3}+a^7+a^{17}}$ ifadesinin payı a^3, paydası a^{-3} parantezine alınacak olursa

$$\frac{a^3\cdot(\cancel{1+a^{10}+a^{20}})}{a^{-3}\cdot(\cancel{1+a^{10}+a^{20}})}=a^{3+3}=a^6 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

n pozitif bir tam sayı olmak üzere $\dfrac{3^{n+3}-2\cdot3^{n+2}-3^{n+1}}{3^{n+2}+3^{n+1}-6\cdot3^n}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{3^{n+3}-2\cdot3^{n+2}-3^{n+1}}{3^{n+2}+3^{n+1}-6\cdot3^n}=\frac{3^n\cdot3^3-2\cdot3^n\cdot3^2-3^n\cdot3^1}{3^n\cdot3^2+3^n\cdot3^1-6\cdot3^n}$$

(Pay ve payda 3^n parantezine alınır.)

$$=\frac{\cancel{3^n}\cdot(3^3-2\cdot3^2-3^1)}{\cancel{3^n}\cdot(3^2+3^1-6)}$$

$$=\frac{27-18-3}{9+3-6}$$

$$=1 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\dfrac{(-2^4)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^5}{(-2^{-2})^3\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)^{-2}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{(-2^4)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^5}{(-2^{-2})^3\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)^{-2}}=\frac{(-2^4)\cdot(-2^{-5})}{(-2^{-6})\cdot(-2^{-3})^{-2}}$$

$$=\frac{2^{4-5}}{(-2^{-6})\cdot2^6}$$

$$=\frac{2^{-1}}{-2^0}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{-1}$$

$$=-\frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ fonksiyonuna, **tabanı “a” olan üstel fonksiyon** denir.

ÖRNEK

Aşağıdaki fonksiyonlardan hangilerinin üstel fonksiyon olduğunu bulunuz.

a) $f(x) = 2^x$ **b)** $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ **c)** $h(x) = (-3)^{-x}$

ç) $k(x) = 1^x$ **d)** $s(x) = 2^{-x}$ **e)** $t(x) = x^5 + 5^x$

ÇÖZÜM

Bir fonksiyonun üstel fonksiyon olabilmesi için tabanının 1 den farklı bir pozitif gerçek sayı olması gerekmektedir. Verilen fonksiyonlardan $f(x) = 2^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ve $s(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonları bu koşulu sağladığından üstel fonksiyondur.

$h(x)$ ve $k(x)$ fonksiyonlarının tabanı 1 den farklı pozitif gerçek sayılar olmadığından üstel fonksiyon değildir. $t(x)$ fonksiyonu ise bir polinom fonksiyon ile üstel fonksiyonun toplamı biçiminde olduğundan üstel fonksiyon değildir.

ÖRNEK

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = (5m - 10)^x$ fonksiyonu, bir üstel fonksiyon olduğuna göre m nin en geniş değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x)$ bir üstel fonksiyon olduğu için üstel fonksiyonun tabanı 1 den farklı bir pozitif gerçek sayı olmalıdır. Buna göre $5m - 10 > 0$ ve $5m - 10 \neq 1$ olur.

$$5m - 10 > 0 \Rightarrow 5m > 10 \Rightarrow m > 2$$

$$5m - 10 \neq 1 \Rightarrow 5m \neq 11 \Rightarrow m \neq \frac{11}{5}$$

Bu durumda m nin en geniş değer aralığı $(2, \infty) - \left\{\frac{11}{5}\right\}$ bulunur.

ÖRNEK

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = 4^{x-1} + 3$ olduğuna göre $f(2)$ ve $f(-1)$ değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

- $f(2) = 4^{2-1} + 3 = 7$
- $f(-1) = 4^{-1-1} + 3 = \frac{1}{16} + 3 = \frac{49}{16}$ bulunur.

ÖRNEK

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = 2^x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

$f(x) = 2^x$ fonksiyonunda x e bazı değerler verilerek bir tablo oluşturulur.

$x = -2$ için $f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

$x = -1$ için $f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

$x = 0$ için $f(0) = 2^0 = 1$

$x = 1$ için $f(1) = 2^1 = 2$

$x = 2$ için $f(2) = 2^2 = 4$

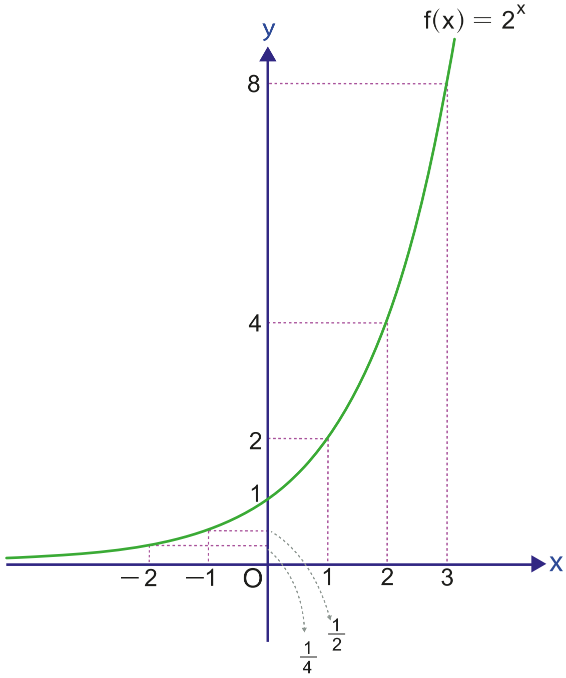
$x = 3$ için $f(2) = 2^3 = 8$

x	...	-2	-1	0	1	2	3	...
$f(x) = 2^x$	...	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	...

O hâlde $f(x) = 2^x$ fonksiyonu,

$\left(-2, \frac{1}{4}\right), \left(-1, \frac{1}{2}\right), (0, 1), (1, 2), (2, 4), (3, 8)$

noktalarından geçmektedir. Bu noktalar koordinat sisteminde işaretlenerek birleştirildiğinde grafik şekildeki gibi elde edilir.

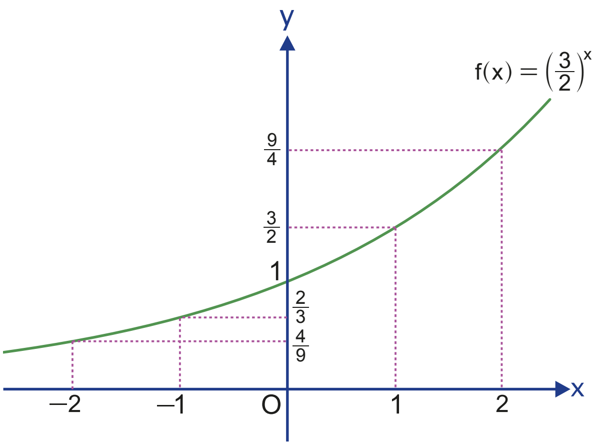


ÖRNEK

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz ve bu fonksiyonun bire bir ve örten olma durumunu inceleyiniz.

ÇÖZÜM

x	...	-2	-1	0	1	2	...
$f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$	...	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	...



- $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ve $x_1 \neq x_2$ için $\left(\frac{3}{2}\right)^{x_1} \neq \left(\frac{3}{2}\right)^{x_2}$ ise $f(x_1) \neq f(x_2)$ olduğundan $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ fonksiyonu bire birdir.

- $\forall y \in \mathbb{R}^+$ için $f(x) = y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ eşitliğini sağlayan en az bir tane $x \in \mathbb{R}$ değeri bulunduğundan $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ fonksiyonu örtendir.

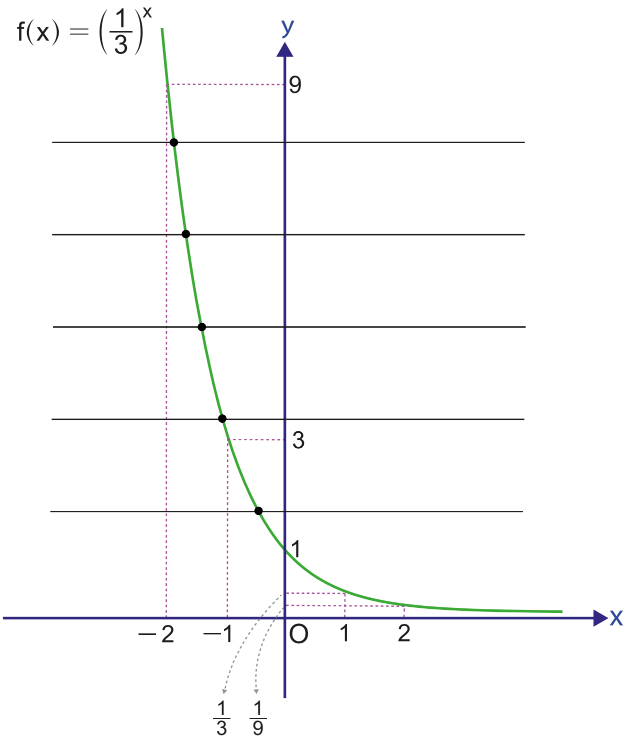
ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz ve bu fonksiyonun bire bir ve örten olma durumunu inceleyiniz.

ÇÖZÜM

$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ fonksiyonunun grafiği çizilerek incelendiğinde

x	...	−2	−1	0	1	2	...
$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$	...	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	...



1. Yol:

- f fonksiyonun grafiğine yatay doğru testi uygulandığında doğruların her birinin grafiği bir noktada kestiği görülmektedir. Buna göre f fonksiyonu bire birdir.
- Grafikte f fonksiyonunun görüntü kümesinin pozitif gerçek sayılar kümesi olduğu görülmektedir. Görüntü kümesi değer kümesine eşit olduğundan f fonksiyonu örten bir fonksiyondur.

2. Yol:

- $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ve $x_1 \neq x_2$ için $\left(\frac{1}{3}\right)^{x_1} \neq \left(\frac{1}{3}\right)^{x_2}$ olup $f(x_1)\neq f(x_2)$ dir.
  O hâlde f fonksiyonunun tanım kümesindeki farklı x değerlerinin görüntüleri de farklı olduğundan f fonksiyonu bire birdir.
- $\forall y \in \mathbb{R}^+$ için $f(x)=y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ eşitliğini sağlayan en az bir tane $x\in\mathbb{R}$ değeri vardır.
  O hâlde f fonksiyonu örtendir.

ÖRNEK

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+}$, $f(x) = a^{x}$ fonksiyonunun grafiğini, Dinamik Geometri ve Matematik Yazılımı programından yararlanarak çiziniz ve a nın değişimine göre grafiği yorumlayınız.

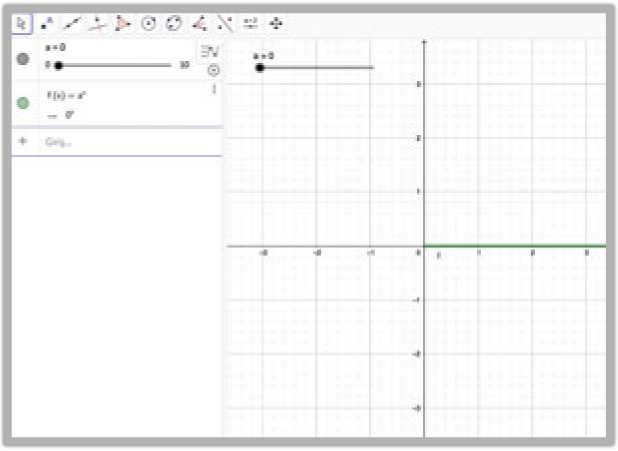
ÇÖZÜM

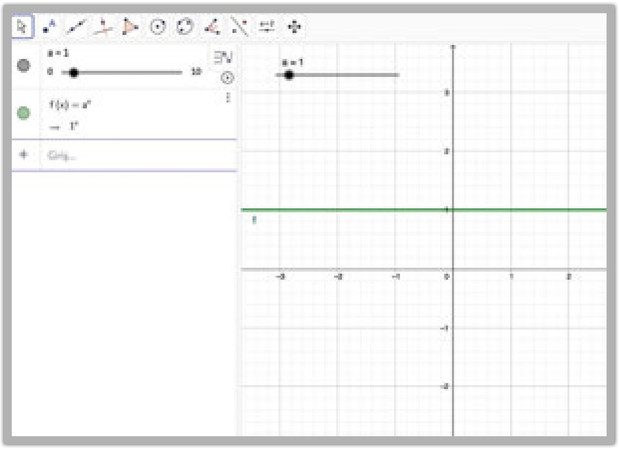
Dinamik Geometri ve Matematik Yazılımı programını açınız.

1. Adım: Üstteki araç çubuğunda butonuna tıklayınız. Sağdaki koordinat sistemi üzerinde herhangi bir noktaya sol tıklayınız. Açılan sürgü butonunda, minimum çubuğuna 0, maksimum çubuğuna 10 ve artış çubuğuna 0.1 yazarak Tamam butonuna tıklayınız. a sürgü çubuğu elde edilecektir.

2. Adım: Giriş çubuğuna alttaki ekran klavyesini kullanarak $f(x) = a^{x}$ yazınız ve enter tuşuna basınız. Fonksiyonun grafiği çizilecektir.

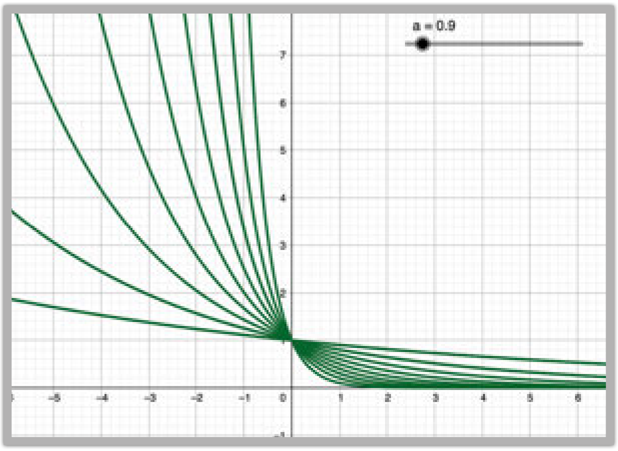
Üstel fonksiyonun tanımı gereği a, 1 den farklı pozitif bir gerçek sayı olmalıdır. Sürgüde $a = 0$ ve $a = 1$ için grafik aşağıdaki gibi görünecek ve bir üstel fonksiyon grafiği olmayacaktır.

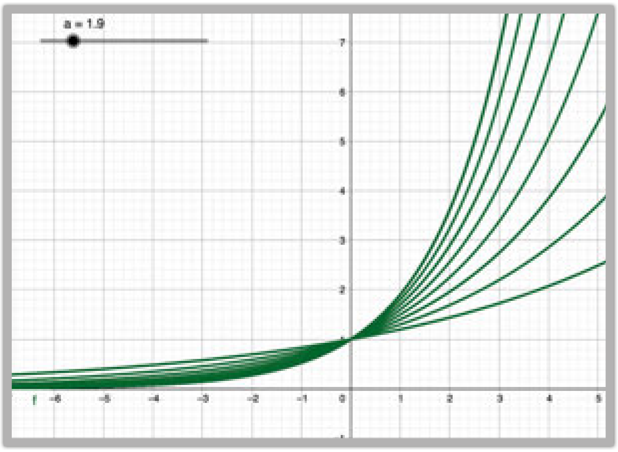




a sürgüsü 0.1 e getirilerek bir üstel fonksiyon grafiği elde edilir. Grafiğin üzerine sağ tıklanarak izi göster butonuna tıklanır. Daha sonra a sürgüsü 0 ile 1 arasında artırıldığında grafikteki değişim ekranda gözlenir.

a sürgüsü 1.1 e getirilerek bir üstel fonksiyon grafiği elde edilir. Grafiğin üzerine sağ tıklanarak izi göster butonuna tıklanır. Daha sonra a sürgüsü artırıldığında grafikteki değişim ekranda gözlenir.





$f(x) = a^{x}$ üstel fonksiyonunun grafiği $0 < a < 1$ için incelendiğinde fonksiyonun azalan olduğu ve a değerlerinin 1 e yaklaştıkça grafiğin y ekseninden uzaklaştığı görülür.

$f(x) = a^{x}$ üstel fonksiyonunun grafiği $1 < a$ için incelendiğinde fonksiyonun artan olduğu ve a değerlerinin büyüdükçe grafiğin y eksenine yaklaştığı görülür.

Alıştırmalar

1 $12^x = 3^{x+1}$ olduğuna göre 2^{4x} ifadesinin değerini bulunuz.

2 $3^m = \frac{1}{4}$ olduğuna göre 3^{2-3m} ifadesinin değerini bulunuz.

3 $\dfrac{2^{88} + 2^{89}}{2^{90} - 2^{89}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

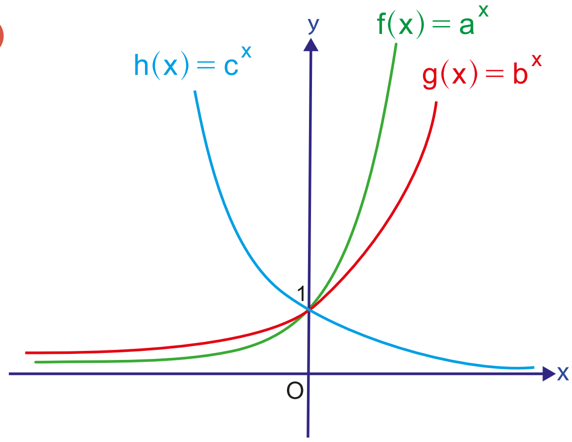
4 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = 3^{x+2} - 1$ olduğuna göre $f(1)$ ve $f(-3)$ değerlerini bulunuz.

5 Aşağıdaki üstel fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a) $f(x) = 3^x$ b) $f(x) = 5^x$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ ç) $f(x) = \left(\frac{5}{6}\right)^x$

6



Yukarıda f, g ve h üstel fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Buna göre a, b ve c arasındaki sıralamayı bulunuz.

7 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = (4m - 12)^x$ fonksiyonu üstel bir fonksiyon olduğuna göre m nin alabileceği en geniş değer aralığını bulunuz.

8 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ olmak üzere aşağıda verilen fonksiyonlardan hangisi veya hangilerinin üstel fonksiyon olduğunu bulunuz.

a) $f(x) = (-2)^x$ ç) $f(x) = \left(-\frac{1}{7}\right)^{x+1}$

b) $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$ d) $f(x) = 100^{x-1}$

c) $f(x) = 1^{x+2}$ e) $f(x) = (0,02)^x$

1.2. LOGARİTMA FONKSİYONU

1.2.1. Logaritma Fonksiyonu ve Grafiği

$2^x = 8$ eşitliğinde x in 3 olduğu görülmektedir. Fakat $2^x = 10$ eşitliğini sağlayan herhangi bir x tam sayı değeri yoktur. Bu x gerçek sayı değerini bulabilmek için farklı bir fonksiyona ihtiyaç duyulmuştur. Bu fonksiyon; $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ $f(x) = a^x$ üstel fonksiyonunun tersi olan logaritma fonksiyonudur.

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $a > 0$ ve $a \neq 1$ olacak şekilde $f(x) = a^x$ üstel fonksiyonunun tersi olan $f^{-1}(x)$ fonksiyonuna, **a tabanına göre logaritma fonksiyonu** denir. Logaritma fonksiyonu, $f^{-1}:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\mathbf{f^{-1}(x) = \log_a x}$ şeklinde gösterilir.

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ için $\mathbf{y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y}$ olur.

Uyarı

$f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $y = f(x) = \log_a x$ fonksiyonunda

- x sayısı pozitif gerçek sayıdır.
- a sayısı 1 den farklı pozitif gerçek sayıdır.
- y sayısı bir gerçek sayıdır.

ÖRNEK

Aşağıda verilen eşitliklerdeki x değerlerini logaritmik olarak ifade ediniz.

a) $y = 3^x$ **b)** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **c)** $y = 2^{x+1}$

ÇÖZÜM

$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$ olduğundan

a) $y = 3^x \Rightarrow x = \log_3 y$

b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow x = \log_{\frac{1}{2}} y$

c) $y = 2^{x+1} \Rightarrow x + 1 = \log_2 y$

$\Rightarrow x = -1 + \log_2 y$ olur.

ÖRNEK

Aşağıda verilen eşitliklerdeki x değerlerini logaritma kullanarak bulunuz.

a) $5^x = 9$ **b)** $2^x = 10$ **c)** $3^{x+1} = 5$ **ç)** $4^{x-1} = 7$ **d)** $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 6$

ÇÖZÜM

a) $5^x = 9 \Rightarrow x = \log_5 9$

b) $2^x = 10 \Rightarrow x = \log_2 10$

c) $3^{x+1} = 5 \Rightarrow x + 1 = \log_3 5$

$\Rightarrow x = -1 + \log_3 5$

ç) $4^{x-1} = 7 \Rightarrow x - 1 = \log_4 7$

$\Rightarrow x = 1 + \log_4 7$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 6 \Rightarrow x = \log_{\frac{1}{2}} 6$ bulunur.

ÖRNEK

Aşağıda verilen eşitliklerdeki x değerlerini bulunuz.

a) $x = \log_2 16$ **b)** $x = \log_6 1$ **c)** $\log_x 49 = 2$

ç) $\log_9 x = \frac{1}{2}$ **d)** $\log_4 (3x+1) = 2$ **e)** $\log_x 2 = \frac{1}{5}$

ÇÖZÜM

a) $x = \log_2 16 \Rightarrow 2^x = 16$

$\Rightarrow 2^x = 2^4$

$\Rightarrow x = 4$

b) $x = \log_6 1 \Rightarrow 6^x = 1$

$\Rightarrow x = 0$

c) $\log_x 49 = 2 \Rightarrow x^2 = 49$

$\Rightarrow x = 7$

$(x > 0$ olduğundan $x \neq -7)$

ç) $\log_9 x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 9^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow x = (3^2)^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow x = 3$

d) $\log_4 (3x+1) = 2 \Rightarrow 3x + 1 = 4^2$

$\Rightarrow 3x + 1 = 16$

$\Rightarrow 3x = 15$

$\Rightarrow x = 5$

e) $\log_x 2 = \frac{1}{5} \Rightarrow x^{\frac{1}{5}} = 2$

$\Rightarrow \left(x^{\frac{1}{5}}\right)^5 = 2^5$

$\Rightarrow x = 32$ bulunur.

Uyarı

$f(x) = \log_{g(x)} h(x)$ fonksiyonunun tanımlı olabilmesi için aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır.

- $h(x) > 0$
- $g(x) > 0$
- $g(x) \neq 1$

ÖRNEK

$f(x) = \log_3(x^2 - 5x + 6)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Logaritma fonksiyonu pozitif gerçek sayılarda tanımlı olduğundan $x^2 - 5x + 6 > 0$ olmalıdır. $(x-3)\cdot(x-2) > 0$ eşitsizliğinde kökler $x = 3$ ve $x = 2$ bulunur. İşaret tablosu aşağıdaki gibidir.

x	$-\infty$		2		3		∞
$x^2 - 5x + 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Bu durumda $f(x)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi $(-\infty, 2) \cup (3, \infty)$ bulunur.

ÖRNEK

$f(x) = \log_{(5-x)}(x - 3)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Logaritma fonksiyonunun tanımı gereği

$$\left.\begin{array}{l} x-3>0 \\ 5-x>0 \\ 5-x\neq 1 \end{array}\right\} \text{olmalıdır.} \qquad \begin{array}{l} x-3>0 \Rightarrow x>3 \ \text{olur.} \\ 5-x>0 \Rightarrow 5>x \ \text{olur.} \\ 5-x\neq 1 \Rightarrow x\neq 4 \ \text{olur.} \end{array}$$

Bu durumda $f(x)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi $(3, 5) - \{4\}$ bulunur.

ÖRNEK

$f(x) = \log_2(x^2 - 2mx + 4)$ fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R}$ için tanımlı bir fonksiyon olduğuna göre m nin alabileceği tam sayı değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x) = \log_2(x^2 - 2mx + 4)$ fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R}$ için tanımlı ise $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$x^2 - 2mx + 4 > 0$ olmalıdır.

$ax^2 + bx + c > 0$ eşitsizliğinin daima sağlanması için $a > 0$ ve $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ olmalıdır.

$a = 1$ olduğundan $a > 0$ sağlanır.

$$\begin{aligned} \Delta < 0 &\Rightarrow (-2m)^2 - 4\cdot 1\cdot 4 < 0 \\ &\Rightarrow 4m^2 - 16 < 0 \\ &\Rightarrow m^2 - 4 < 0 \\ &\Rightarrow m^2 < 4 \\ &\Rightarrow |m| < 2 \\ &\Rightarrow -2 < m < 2 \ \text{bulunur.} \end{aligned}$$

Böylece m nin alabileceği tam sayı değerleri -1, 0, 1 olarak elde edilir.

ÖRNEK

$f(x) = \log_{(3-x)}(x^2 - x - 12)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\left.\begin{aligned} x^2 - x - 12 &> 0 \\ 3 - x &> 0 \\ 3 - x &\neq 1 \end{aligned}\right\}$$ Eşitsizlik sisteminin sağlandığı aralığı bulmak için işaret tablosu oluşturulur.

$x^2 - x - 12 = 0$ ve $3 - x = 0$ denklemlerinin kökleri bulunmalıdır.

- $x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow (x-4)\cdot(x+3) = 0$
  $\Rightarrow x = 4$ veya $x = -3$
- $3 - x = 0 \Rightarrow x = 3$ olur.

x	$-\infty$		-3		3		4		∞
$x^2 - x - 12$		$+$	○	$-$		$-$	○	$+$	
$3 - x$		$+$		$+$	○	$-$		$-$	

İşaret tablosu incelendiğinde her iki fonksiyonun birlikte pozitif olduğu aralığın $(-\infty, -3)$ olduğu görülür. $3 - x \neq 1$ ise $x \neq 2$ olur. Buna göre $f(x) = \log_{(3-x)}(x^2 - x - 12)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi $(-\infty, -3)$ bulunur.

ÖRNEK

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = 2^{x+1}$ olduğuna göre $f^{-1}(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x) = 2^{x+1}$ fonksiyonu bire bir ve örten olduğundan tersi vardır. Verilen fonksiyonda $f(x)$ yerine x ve x yerine de $f^{-1}(x)$ yazıldıktan sonra $f^{-1}(x)$ yalnız bırakılarak fonksiyonun tersi bulunur.

$x = 2^{f^{-1}(x)+1} \Rightarrow f^{-1}(x) + 1 = \log_2 x$ $\quad$ $\left(a \in R^+ - \{1\}\text{ için } y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y\right)$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = -1 + \log_2 x$ bulunur.

ÖRNEK

$f(x) = \log_3(x-4) + 2$ olduğuna göre $f^{-1}(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x) = \log_3(x-4) + 2 \Leftrightarrow x = \log_3\left(f^{-1}(x) - 4\right) + 2$ olur.

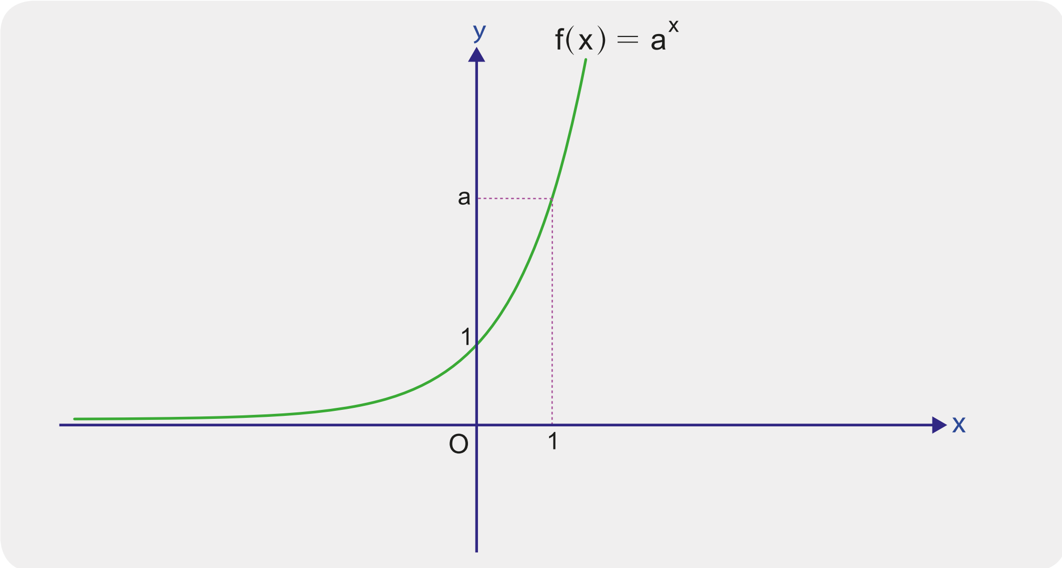
$x = \log_3\left(f^{-1}(x) - 4\right) + 2 \Rightarrow x - 2 = \log_3\left(f^{-1}(x) - 4\right)$

$\Rightarrow f^{-1}(x) - 4 = 3^{x-2}$

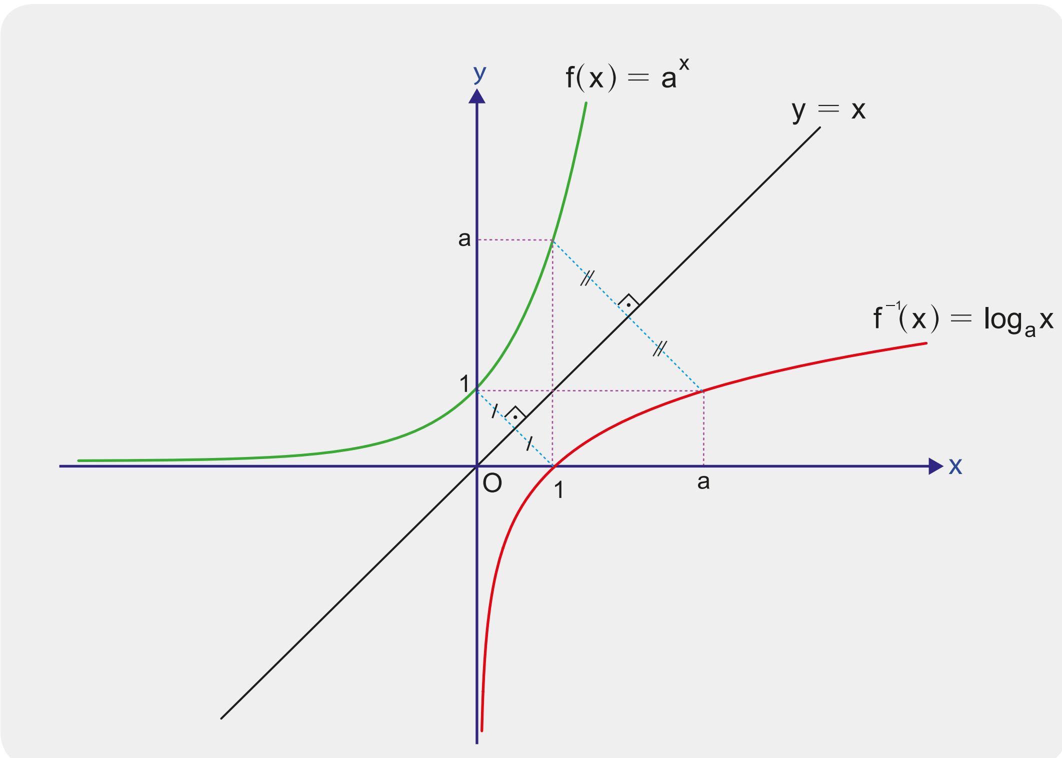
$\Rightarrow f^{-1}(x) = 3^{x-2} + 4$ bulunur.

Logaritma Fonksiyonunun Grafiği

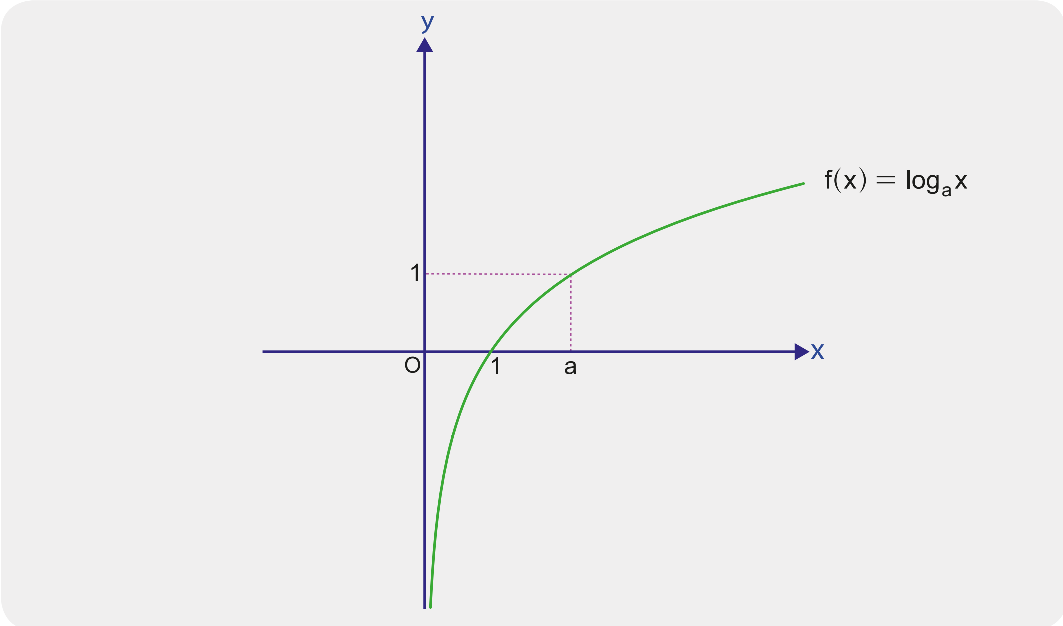
$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^{+}$, $a>1$ için $f(x)=a^{x}$ üstel fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



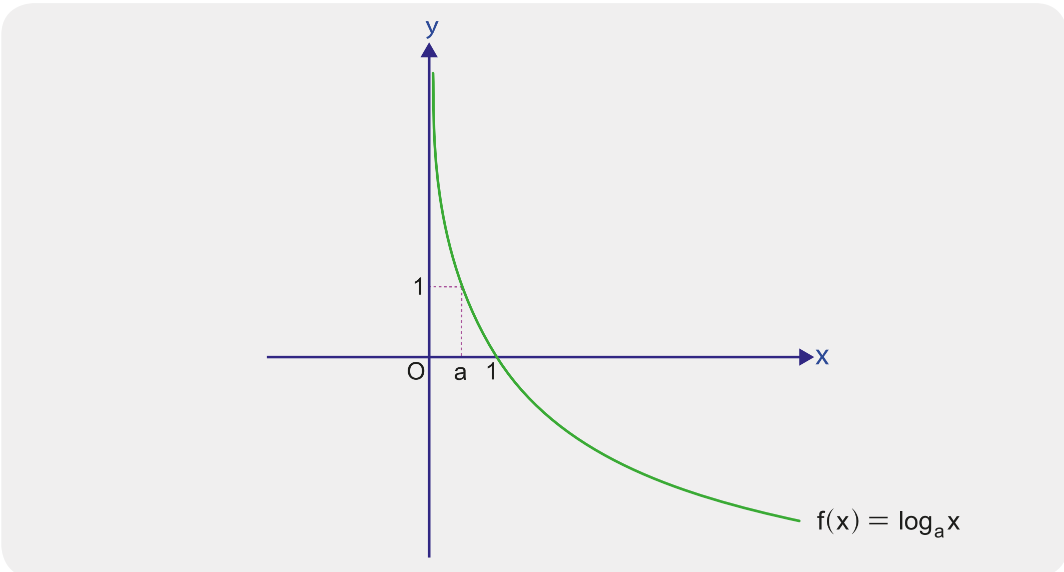
$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^{+}$, $a>1$ için $f(x)=a^{x}$ fonksiyonunun tersi $f^{-1}:\mathbb{R}^{+}\rightarrow\mathbb{R}$, $f^{-1}(x)=\log_{a}x$ fonksiyonudur. Birbirinin tersi olan iki fonksiyonun grafiği $y=x$ doğrusuna göre simetrik olduğundan önce $y=x$ doğrusu çizilir. Daha sonra $f(x)=a^{x}$ fonksiyonunun grafiğinin $y=x$ doğrusuna göre simetriği alınarak $f^{-1}(x)=\log_{a}x$ fonksiyonunun grafiği oluşturulur.



$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$ logaritma fonksiyonu, $a > 1$ için artan olup grafiği aşağıdaki gibidir.



$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$ logaritma fonksiyonu, $0 < a < 1$ için azalan olup grafiği aşağıdaki gibidir.

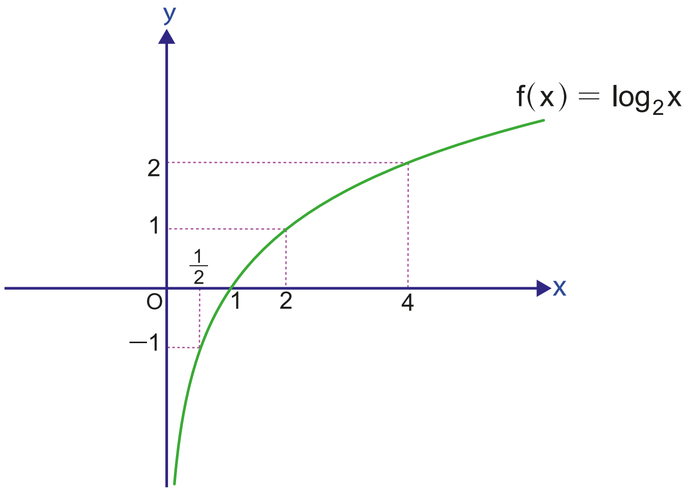


ÖRNEK

$f(x) = \log_2 x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz. Artan veya azalan olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

x	...	$\frac{1}{2}$	1	2	4	...
$f(x) = \log_2 x$	...	-1	0	1	2	...



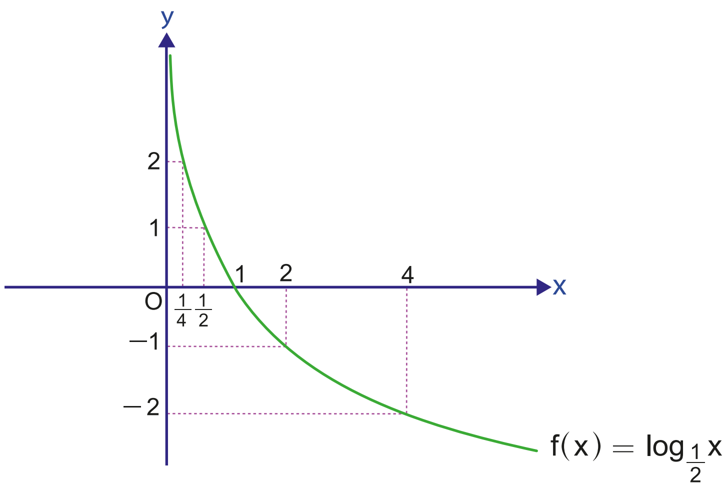
$f(x) = \log_2 x$ fonksiyonunun tabanı 1 den büyük olduğundan f fonksiyonu, artan bir fonksiyondur.

ÖRNEK

$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz. Artan veya azalan olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

x	...	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	...
$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$	...	2	1	0	-1	-2	...



$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ fonksiyonunun tabanı 0 ile 1 arasında olduğundan f fonksiyonu, azalan bir fonksiyondur.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$ fonksiyonunun grafiğini, Dinamik Geometri ve Matematik Yazılımı programından yararlanarak çiziniz ve a nın değişimine göre grafiği yorumlayınız.

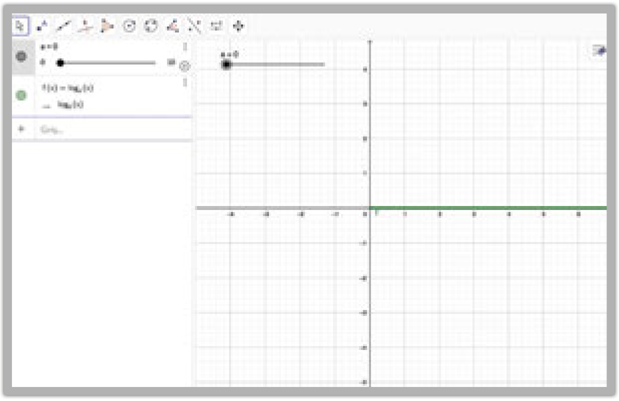
ÇÖZÜM

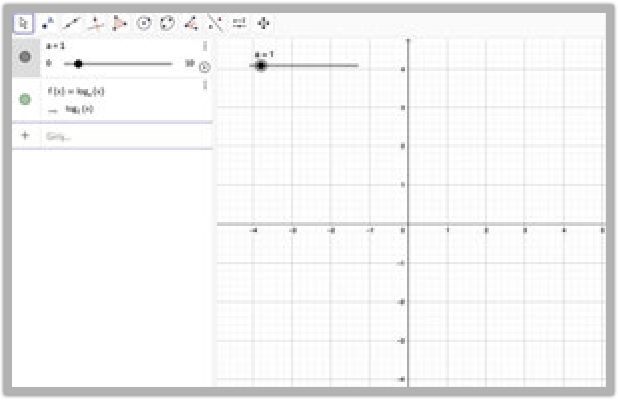
Dinamik Geometri ve Matematik Yazılımı programını açınız.

1. Adım: Üstteki araç çubuğunda  butonuna tıklayınız. Sağdaki koordinat sistemi üzerinde herhangi bir noktaya sol tıklayınız. Açılan sürgü butonunda, minimum çubuğuna 0, maksimum çubuğuna 10 ve artış çubuğuna 0.1 yazarak Tamam butonuna tıklayınız. a sürgü çubuğu elde edilecektir.

2. Adım: Giriş çubuğuna log yazarak log(<b> , <x>) ifadesini tıklayınız. Bu ifadeyi **log(a,x)** biçiminde yazınız ve enter tuşuna basınız. Fonksiyonun grafiği çizilecektir.

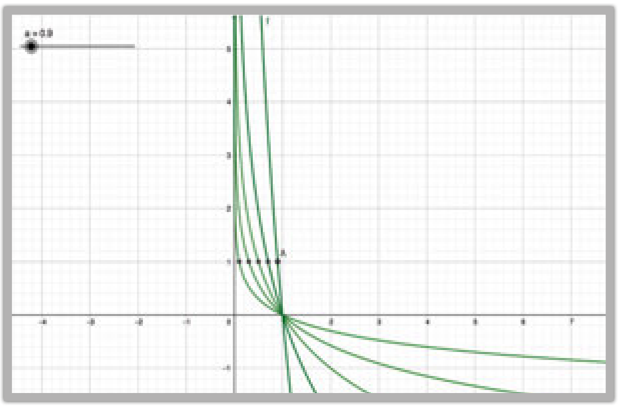
Logaritma fonksiyonunun tanımı gereği a, 1 den farklı pozitif bir gerçek sayı olmalıdır. Sürgüde $a = 0$ ve $a = 1$ için grafik aşağıdaki gibi görünecek ve bir logaritma fonksiyonu grafiği olmayacaktır.





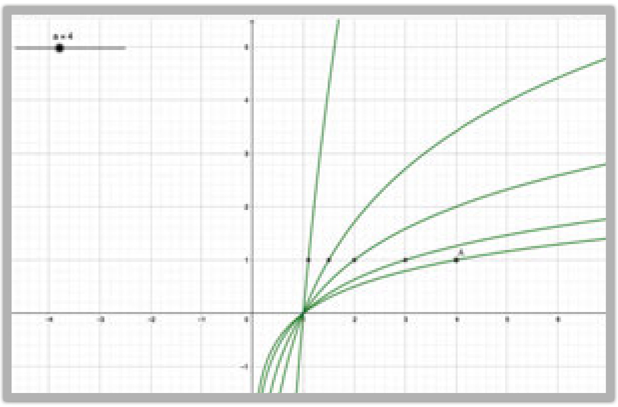
3. Adım: Giriş çubuğuna **(a,log(a,a))** yazınız ve enter tuşuna basınız. Fonksiyonun görüntüsünün 1 olduğu A noktası grafikte belirecektir.

a sürgüsü 0.1 e getirilerek bir logaritma fonksiyonu grafiği elde edilir. Grafiğin üzerine sağ tıklanarak izi göster butonuna tıklanır. Benzer şekilde A noktasının da izi açılır. Daha sonra a sürgüsü 0 ile 1 arasında artırıldığında grafikteki değişim ekranda gözlenir.



$f(x) = \log_a x$ logaritma fonksiyonunun grafiği $0 < a < 1$ için incelendiğinde fonksiyonun azalan olduğu ve a değerlerinin 1 e yaklaştıkça grafiğin y ekseninin pozitif tarafından uzaklaştığı görülür.

a sürgüsü 1.1 e getirilerek bir logaritma fonksiyonu grafiği elde edilir. Grafiğin üzerine sağ tıklanarak izi göster butonuna tıklanır. Benzer şekilde A noktasının da izi açılır. Daha sonra a sürgüsü artırıldığında grafikteki değişim ekranda gözlenir.



$f(x) = \log_a x$ logaritma fonksiyonunun grafiği $1 < a$ için incelendiğinde fonksiyonun artan olduğu ve a değerlerinin büyüdükçe grafiğin y ekseninin negatif tarafına yaklaştığı görülür.

John NAPIER (Con Nepyer) (1550-1617)

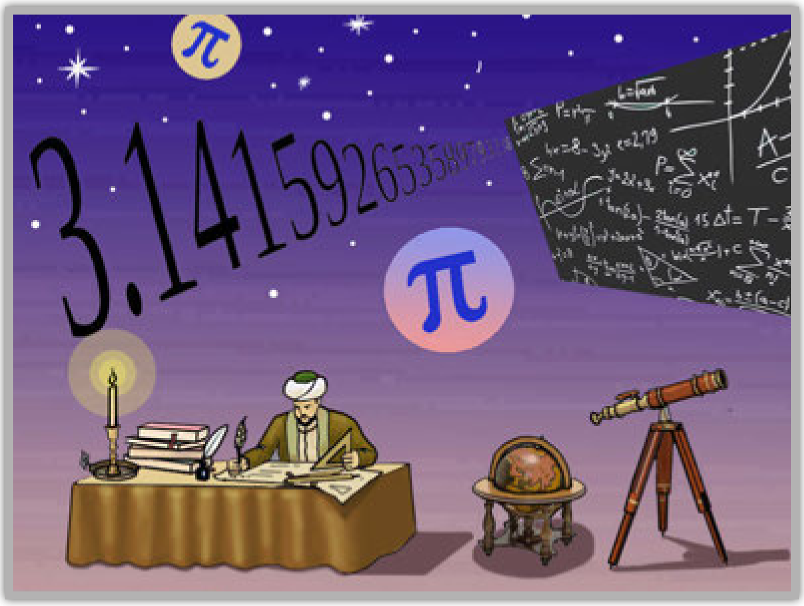
Görsel 1.1

Logaritmayı bulan İskoçyalı matematikçidir. Sayısal hesaplamaları kolaylaştıracak bir yol ararken önce Napier'in kemikleri olarak bilinen üzerlerine rakamlar yazılmış küçük değnekler yardımıyla yapılan bir çarpma veya bölme metodu buldu. 1614'te yazdığı "Logaritma Kurallarının Tanımı" adlı eserinde aritmetik dizi ile geometrik diziyi karşılaştırarak matematiğe logaritma kavramını kazandırmıştır. 1, 2, 3, ... biçimindeki aritmetik dizi ile buna karşılık gelen 10, 100, 1000, ... biçimindeki geometrik dizi arasındaki ilişkiyi fark etmiştir.

Napier logaritma sözcüğünü orantıların sayısı ya da algoritmik hesap anlamına gelen logos ve aritmos sözcüklerinden oluşturarak "logaritm" adını vermiştir.

(Meydan Larousse Büyük Lügat ve Ansiklopedisi,1992)

Gelenbevi İsmail Efendi (1730-1790)



Görsel 1.2

Daha çok matematik ve mantık alanındaki çalışmalarıyla tanınan Osmanlı âlimidir. 1730 yılında Manisa'nın Kırkağaç ilçesine bağlı Gelenbe'de doğdu. Asıl adı İsmail olmasına rağmen Gelenbevi olarak anılır. Gelenbevi, matematik konusundaki dehasını ve bu alanda meydana gelen yenilik ve gelişmeleri takip ettiğini, 1787 yılında İstanbul'a gelen bir Fransız mühendisinin Babıali'ye (Osmanlı Hükûmetine) sunduğu, ancak dönemin ilim adamlarınca pek anlaşılmayan bazı logaritma cetvellerinin nasıl kullanılacağı hususunda yazdığı, "Logaritma Şerhi" adıyla da tanınan "Şerh-i Cedâvili'l-ensâb" adlı Türkçe eseriyle ortaya koymuştur. Bu eser iki bölümden meydana gelmektedir. Birinci bölümde sayı sistemleri ve bunların özellikleri üzerinde dururlurken ikinci bölümde logaritma cetvellerinin nasıl oluştuğu ve bunların dayandıkları esaslar açıklanmıştır. Klasik İslam cebirinin Osmanlı dünyasındaki son temsilcisi olan Gelenbevi'nin matematik ve astronomi çalışmalarını içeren birçok eseri bulunmaktadır. "Mesail-i Sitte" ile klasik geleneğe bağlı cebir bilgilerini ele aldığı Türkçe cebir kitabı hakkında en ayrıntılı tanıtım Salih Zeki tarafından yapılmıştır.

(Gölcük ve Yurdagür, 1996)

1.2.2. 10 ve e Tabanında Logaritma Fonksiyonu

Onluk Logaritma Fonksiyonu

Tabanı 10 olan logaritma fonksiyonuna **onluk logaritma fonksiyonu** veya **bayağı logaritma fonksiyonu** denir.

$f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_{10} x$ veya $f(x) = \log x$ biçiminde gösterilir.

ÖRNEK

Aşağıdaki logaritmaların değerlerini bulunuz.

a) $\log 10$ b) $\log 1000$ c) $\log \dfrac{1}{100}$ ç) $\log \sqrt{1000}$

ÇÖZÜM

a) $\log 10 = a \Rightarrow 10^a = 10$

$\Rightarrow a = 1$

b) $\log 1000 = b \Rightarrow 10^b = 1000$

$\Rightarrow 10^b = 10^3$

$\Rightarrow b = 3$

c) $\log \dfrac{1}{100} = c \Rightarrow 10^c = \dfrac{1}{100}$

$\Rightarrow 10^c = 10^{-2}$

$\Rightarrow c = -2$

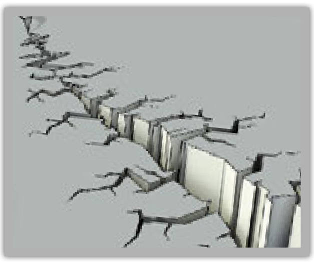
ç) $\log \sqrt{1000} = d \Rightarrow 10^d = \sqrt{1000}$

$\Rightarrow 10^d = 10^{\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow d = \dfrac{3}{2}$ bulunur.

BİLGİ NOTU

Richter (Rihter) Ölçeği



Görsel 1.3

Her yıl çok sayıda deprem oluyor. Bu depremlerin bir kısmı insanlar tarafından hissedilmeyecek kadar düşük şiddette olurken bazıları, sebep oldukları tahribatlar ile felaketlere yol açıyor.

Richter büyüklük ölçeği ya da kısaca "Richter ölçeği" depremlerin şiddetini ölçmekte kullanılan adı sıkça duyulan bir ölçektir. Peki, Richter ölçeği tam olarak nedir ve insanlara depremler hakkında hangi bilgileri verir?

Richter ölçeği, 1935 yılında California (Kaliforniya) Teknoloji Enstitüsü'nde çalışan Charles Francis Richter (Çarls Frensis Rihter) ve Beno Gutenberg (Bino Gutenberg) adlı iki araştırmacı tarafından geliştirilmiştir.

Logaritmik bir ölçek olan Richter ölçeğine göre bir depremin şiddeti şu şekilde hesaplanır: Dış merkezden 100 km uzaklıkta ve sert zemine yerleştirilmiş bir sismografla kaydedilmiş zemin hareketinin mikron cinsinden ölçülen maksimum genliğe d, depremin Richter ölçeğine göre büyüklüğüne R denilirse $\mathbf{R = \log d}$ dir.

(Richter Ölçeği, www.bilimgenc.tubitak.gov.tr)

e Sayısı ve Euler

Matematikte birçok matematiksel sabit vardır. Bu sabitlerin bazıları aşağıda yer almaktadır:

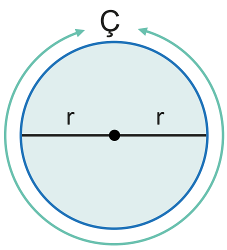
Pi sayısı : $\pi = 3,1415926535\ldots$

Altın oran (Fi sayısı) : $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887\ldots$

Pisagor sabiti : $\sqrt{2} = 1,4142135623\ldots$

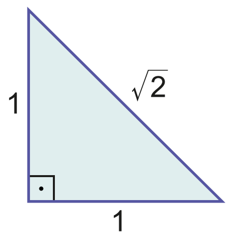
Euler sabiti (e sayısı) : $e = 2,718281828459\ldots$

Bu sayılar, virgülden sonraki ondalık basamakları sonsuza doğru tekrarı olmaksızın giden irrasyonel sayılardır. Pi sayısı, altın oran ve Pisagor sabiti, geometrik bir şekilden elde edilebilmektedir. Fakat e sayısı bu yönüyle diğerlerinden farklıdır.

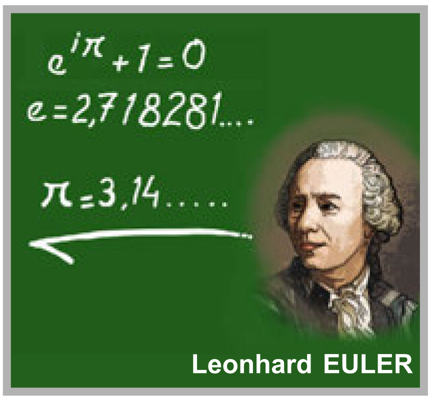


π sayısı bir çemberin çevresinin çapına oranıdır.

$$\pi = \frac{Ç}{2r}$$



Pisagor sabiti olan $\sqrt{2}$ sayısı, dik kenarlarının uzunluğu 1 birim olan ikizkenar dik üçgenin hipotenüs uzunluğudur.



Görsel 1.4

Altın oran ise bir kare üzerinde çeşitli sistematik işlemler yapılarak elde edilir. Fakat e sabiti böyle değildir. e sayısı artış miktarıyla ilgili matematik sabitidir. Peki, bu sabit sayı nasıl elde edilmiştir? 17. yüzyılın başlarında coğrafi keşiflerin de etkisiyle uluslararası ticarette ve finansal işlerde büyük bir artış olmuştur. Bileşik faiz fikri, basit faiz fikrinden daha fazla ilgi çekmeye başlamıştır. Bu durumu fark eden İsviçreli matematikçi Jacob BERNOULLİ (Ceykıp Bernolli), bileşik faiz ile ilgili hesaplamalar sonucunda e sayısının 2 ile 3 arasında bir sayıya eşit olduğunu tahmin edebiliyordu fakat bu sayıyı nasıl bulabileceğini tam olarak çözemiyordu.

Bernoulli'den 50 yıl sonra Leonhard EULER (Leonard Öyler) bu değerin 2,718281828459… şeklinde bir irrasyonel sayı olduğunu göstererek bu sayıyı

$$\mathbf{e} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \cdots$$

olarak formülleştirdi. Euler'in en önemli çalışmalarından biri de π sayısı ile e sayısı arasında bir ilişki yokken bu iki sabiti ve i karmaşık sayısını kullanarak $\mathbf{e}^{i\pi} + \mathbf{1} = \mathbf{0}$ eşitliğini bulmasıdır.

e sayısı matematikte ve diğer bilim dallarında da sıklıkla kullanılmaktadır. Örneğin matematik ve ekonomide bileşik faiz hesaplamalarında, tıpta ilaçların etki süresinin hesaplanmasında, kimyada buhar basıncı ve tepkime hızları hesaplamalarında, fizikte elektromotor kuvvetin hesaplanmasında e sayısı kullanılmaktadır.

Doğal Logaritma Fonksiyonu

Tabanı e irrasyonel sayısı olan logaritma fonksiyonuna **doğal logaritma fonksiyonu** denir.
$f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_e x$ veya $f(x) = \ln x$ biçiminde gösterilir ve

$$\mathbf{y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y} \text{ olur.}$$

ÖRNEK

Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) $\ln 1$ b) $\ln e$ c) $\ln e^3$ ç) $\ln e^{-4}$

ÇÖZÜM

a) $y = \ln 1 \Rightarrow e^y = 1 \Rightarrow y = 0$

b) $y = \ln e \Rightarrow e^y = e \Rightarrow y = 1$

c) $y = \ln e^3 \Rightarrow e^y = e^3 \Rightarrow y = 3$

ç) $y = \ln e^{-4} \Rightarrow e^y = e^{-4} \Rightarrow y = -4$ bulunur.

1.2.3. Logaritma Fonksiyonunun Özellikleri ve Uygulamaları

ÖZELLİK 1

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere

◇ $\mathbf{\log_a a = 1}$ ◇ $\mathbf{\log_a 1 = 0}$ olur.

$\log_a a = n \Rightarrow a = a^n$
$\Rightarrow n = 1$

$\log_a 1 = k \Rightarrow 1 = a^k$
$\Rightarrow k = 0$

Örnek olarak

- $\log_3 3 = 1$
- $\log_{15} 15 = 1$
- $\log_{\sqrt{e}} \sqrt{e} = 1$
- $\log_5 1 = 0$
- $\log_\pi 1 = 0$ olur.

ÖZELLİK 2

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $x, y \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

◇ $\mathbf{\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y}$ ◇ $\mathbf{\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y}$ olur.

$\log_a x = n$ ve $\log_a y = k$ olsun. Bu durumda $x = a^n$ ve $y = a^k$ olur.

$x \cdot y = a^n \cdot a^k \Rightarrow x \cdot y = a^{n+k}$
$\Rightarrow \log_a (x \cdot y) = n + k$
$\Rightarrow \log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

$\frac{x}{y} = \frac{a^n}{a^k} \Rightarrow \frac{x}{y} = a^{n-k}$
$\Rightarrow \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = n - k$
$\Rightarrow \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

ÖRNEK

$\log_{24}3 = x$ olduğuna göre $\log_{24}8$ ifadesinin x türünden eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\log_{24}8 = \log_{24}\left(\frac{24}{3}\right) = \log_{24}24 - \log_{24}3 = 1 - x$ bulunur.

ÖRNEK

$\log_3 36 + \log_3 10 - \log_3 40$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$\log_3\left(\frac{36 \cdot 10}{40}\right) = \log_3\left(\frac{360}{40}\right) = \log_3 9 = \log_3(3 \cdot 3) = \log_3 3 + \log_3 3 = 1 + 1 = 2$ bulunur.

ÖZELLİK 3

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\},\ x \in \mathbb{R}^+$ ve $n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathbf{\log_a x^n = n \cdot \log_a x}$ olur.

$$\log_a x^n = \log_a \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{n \text{ tane}} = \underbrace{\log_a x + \log_a x + \ldots + \log_a x}_{n \text{ tane}} = n \cdot \log_a x$$

ÖRNEK

$\log_3 9 + \log_3 27$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\log_3 9 + \log_3 27 = \log_3 3^2 + \log_3 3^3 = 2\log_3 3 + 3\log_3 3 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5$ bulunur.

ÖRNEK

$\log 2 = a$ ve $\log 3 = b$ olduğuna göre $\log 240$ ifadesinin a ve b türünden eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

240 sayısı asal çarpanlarına ayrılırsa $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ olur.

$$\begin{aligned}\log 240 &= \log(2^4 \cdot 3 \cdot 5)\\ &= \log 2^4 + \log 3 + \log 5 \qquad \left(\log 5 = \log\frac{10}{2} = \log 10 - \log 2\right)\\ &= 4\log 2 + \log 3 + \log 10 - \log 2\\ &= 4a + b + 1 - a\\ &= 3a + b + 1 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

ÖZELLİK 4

$a, c \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\mathbf{\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}}$ olur.

Bu özelliğe **taban değiştirme özelliği** denir.

$\log_a b = n$ ve $\log_c a = k$ olsun. Bu durumda $b = a^n$ ve $a = c^k$ olur.

$a = c^k \Rightarrow a^n = (c^k)^n$ (Eşitliğin her iki tarafının n. kuvveti alınır.)

$\Rightarrow b = c^{k \cdot n}$ $(a^n = b)$

$\Rightarrow \log_c b = k \cdot n$

$\Rightarrow \log_c b = \log_c a \cdot \log_a b$ $(n = \log_a b$ ve $k = \log_c a)$

$\Rightarrow \log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ (Eşitliğin her iki tarafı $\log_c a$ ile bölünür.)

SONUÇ

- $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere $\mathbf{\log_a b = \dfrac{\log_b b}{\log_b a} = \dfrac{1}{\log_b a}}$ olur.
- $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\mathbf{\log_a b = \dfrac{\log b}{\log a}}$ olur.
- $a, b, c, d, \ldots, m \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $n \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\mathbf{\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d \cdot \ldots \cdot \log_m n = \dfrac{\cancel{\log b}}{\log a} \cdot \dfrac{\cancel{\log c}}{\cancel{\log b}} \cdot \dfrac{\cancel{\log d}}{\cancel{\log c}} \cdot \ldots \cdot \dfrac{\log n}{\cancel{\log m}}}$$

$$\mathbf{= \dfrac{\log n}{\log a}}$$

$$\mathbf{= \log_a n} \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$x = \ln 5$ ve $y = \ln 2$ olduğuna göre $\log_8 5$ in x ve y türünden eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\log_8 5 = \frac{\log_e 5}{\log_e 8} = \frac{\ln 5}{\ln 8} = \frac{\ln 5}{\ln 2^3} = \frac{\ln 5}{3\ln 2} = \frac{x}{3y} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\dfrac{\log 16}{\log 12} + \dfrac{\log_7 9}{\log_7 12}$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{\log 16}{\log 12} + \frac{\log_7 9}{\log_7 12} = \log_{12} 16 + \log_{12} 9 = \log_{12}(16 \cdot 9)$$

$$= \log_{12} 144 = \log_{12} 12^2 = 2\log_{12} 12 = 2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\dfrac{1}{\log_{27}6} + \dfrac{1}{\log_2 6} + \dfrac{1}{\log_4 6}$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}\frac{1}{\log_{27}6} + \frac{1}{\log_2 6} + \frac{1}{\log_4 6} &= \log_6 27 + \log_6 2 + \log_6 4\\ &= \log_6(27\cdot 2\cdot 4)\\ &= \log_6 216\\ &= \log_6 6^3\\ &= 3\log_6 6\\ &= 3 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK

$\log_2 5 = a$ olduğuna göre $\log_{25}160$ ifadesinin a türünden eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\log_{25}160 = \frac{\log_2 160}{\log_2 25} = \frac{\log_2(2^5\cdot 5)}{\log_2 5^2} = \frac{\log_2 2^5 + \log_2 5}{2\log_2 5} = \frac{5+a}{2a} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\log_3 5\cdot\log_5 12\cdot\log_{12}81$ çarpımının sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\log_3 5\cdot\log_5 12\cdot\log_{12}81 = \frac{\cancel{\log 5}}{\log 3}\cdot\frac{\cancel{\log 12}}{\cancel{\log 5}}\cdot\frac{\log 81}{\cancel{\log 12}} = \frac{\log 81}{\log 3} = \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\log_2\sqrt{3}\cdot\log_3\sqrt[3]{5}\cdot\log_5 256$ çarpımının sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}\log_2\sqrt{3}\cdot\log_3\sqrt[3]{5}\cdot\log_5 256 &= \log_2 3^{\frac{1}{2}}\cdot\log_3 5^{\frac{1}{3}}\cdot\log_5 2^8\\ &= \frac{1}{2}\log_2 3\cdot\frac{1}{3}\log_3 5\cdot 8\log_5 2\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 8\cdot\log_2 3\cdot\log_3 5\cdot\log_5 2\\ &= \frac{4}{3}\cdot\frac{\cancel{\log 3}}{\cancel{\log 2}}\cdot\frac{\cancel{\log 5}}{\cancel{\log 3}}\cdot\frac{\cancel{\log 2}}{\cancel{\log 5}}\\ &= \frac{4}{3} \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK

$\log_3 5 = x$ ve $\log_5 2 = y$ olduğuna göre $\log 15$ ifadesinin x ve y türünden eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\log_3 5 = x$ ise taban değiştirme özelliği gereği $\log_5 3 = \frac{1}{x}$ olur.

$\log 15$ ifadesi 5 tabanında yazılırsa

$$\log 15 = \frac{\log_5 15}{\log_5 10} = \frac{\log_5(3\cdot 5)}{\log_5(2\cdot 5)} = \frac{\log_5 3 + \log_5 5}{\log_5 2 + \log_5 5} = \frac{\frac{1}{x}+1}{y+1} = \frac{x+1}{x}\cdot\frac{1}{y+1}$$

$$= \frac{x+1}{xy+x} \text{ bulunur.}$$

ÖZELLİK 5

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, $x \in \mathbb{R}^+$, $m, n \in \mathbb{R}$ ve $n \neq 0$ olmak üzere $\mathbf{\log_{a^n} x^m = \frac{m}{n}\log_a x}$ olur.

$$\log_{a^n} x^m = \frac{\log_a x^m}{\log_a a^n} = \frac{m\cdot\log_a x}{n\cdot\log_a a} = \frac{m}{n}\log_a x$$

ÖRNEK

$\log_{16} 4 + \log_{\sqrt{3}} 3$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\log_{16} 4 + \log_{\sqrt{3}} 3 = \log_{4^2} 4^1 + \log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^1 = \frac{1}{2}\log_4 4 + \frac{1}{\frac{1}{2}}\log_3 3 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\log_{0,2} 5 + \log_4 \frac{1}{4} + \ln e^2$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\log_{0,2} 5 + \log_4 \frac{1}{4} + \ln e^2 = \log_{5^{-1}} 5 + \log_4 4^{-1} + \ln e^2$$
$$= -1 - 1 + 2$$
$$= 0 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\log_a x = 6$ olduğuna göre $\log_{a^3} x^2 - \log_{\sqrt{a}} x^3$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\log_{a^3}x^2-\log_{\sqrt{a}}x^3=\log_{a^3}x^2-\log_{a^{\frac{1}{2}}}x^3$$
$$=\frac{2}{3}\cdot\log_a x-\frac{3}{\frac{1}{2}}\cdot\log_a x$$
$$=\frac{2}{3}\cdot 6-6\cdot 6$$
$$=-32 \text{ bulunur.}$$

ÖZELLİK 6

$b\in\mathbb{R}^+-\{1\}$ ve $a,c\in\mathbb{R}^+$ olmak üzere $\mathbf{a^{\log_b c}=c^{\log_b a}}$ olur.

- $c=1$ ise $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}=1$
- $c\neq 1$ ve $c>0$ ise $x=a^{\log_b c}\Rightarrow \log_c x=\log_c\left(a^{\log_b c}\right)$ (Her iki tarafın c tabanında logaritması alınır.)

$$\Rightarrow \log_c x=\log_b c\cdot\log_c a$$
$$\Rightarrow \log_c x=\frac{\cancel{\log c}}{\log b}\cdot\frac{\log a}{\cancel{\log c}}$$
$$\Rightarrow \log_c x=\frac{\log a}{\log b}$$
$$\Rightarrow \log_c x=\log_b a$$
$$\Rightarrow x=c^{\log_b a}$$

SONUÇ

$a\in\mathbb{R}^+-\{1\}$ ve $b\in\mathbb{R}^+$ olmak üzere $\mathbf{a^{\log_a b}=b^{\log_a a}=b^1=b}$ olur.

Aşağıdaki eşitlikleri inceleyiniz.

- $10^{\log 5}=5^{\log 10}=5$
- $3^{\log_3 8}=8^{\log_3 3}=8$
- $e^{\ln 4}=4^{\ln e}=4$
- $2^{\log_8 125}=125^{\log_8 2}=125^{\frac{1}{3}}=(5^3)^{\frac{1}{3}}=5$
- $e^{2+\ln 5}=e^2\cdot e^{\ln 5}=e^2\cdot 5=5e^2$
- $9^{2\log_{27}8}=9^{\log_{27}64}=64^{\log_{27}9}=(4^3)^{\frac{2}{3}\log_3 3}=(4^3)^{\frac{2}{3}}=16$ olur.

ÖRNEK

$\log_5\left(e^{\ln 9}+25^{\log_5 4}\right)$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\log_5\left(e^{\ln 9}+25^{\log_5 4}\right)=\log_5\left(9^{\ln e}+4^{\log_5 25}\right)$$
$$=\log_5\left(9+4^2\right)$$
$$=\log_5 25$$
$$=\log_5 5^2=2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\log_{27} m = \log_9 n$ olduğuna göre m ile n arasındaki ilişkiyi bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\log_{27} m = \log_9 n \Rightarrow \frac{\log m}{\log 27} = \frac{\log n}{\log 9}$$
$$\Rightarrow \frac{\log m}{3\cancel{\log 3}} = \frac{\log n}{2\cancel{\log 3}}$$
$$\Rightarrow 2\log m = 3\log n$$
$$\Rightarrow \log m^2 = \log n^3$$
$$\Rightarrow m^2 = n^3 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

log 23 sayısının hangi iki ardışık tam sayı arasında olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Logaritmanın tabanı 10 olduğundan 23 sayısının 10 un hangi kuvvetleri arasında olduğu yazıldıktan sonra eşitsizliğin her tarafının 10 tabanında logaritması alınır.

$$10^1 < 23 < 10^2$$
$$\log 10 < \log 23 < \log 10^2$$
$$1 < \log 23 < 2 \text{ bulunur.}$$

Buna göre log 23 sayısı 1 ile 2 ardışık tam sayıları arasındadır.

SONUÇ

10 un kuvveti olmayan bir gerçek sayının 10 tabanına göre logaritması ardışık iki tam sayı arasındadır.

ÖRNEK

$a = \log_3 10$, $b = \log_2 40$ ve $c = \log_5 150$ sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

ÇÖZÜM

- $3^2 < 10 < 3^3 \Rightarrow \log_3 3^2 < \log_3 10 < \log_3 3^3$
  $\Rightarrow 2 < \log_3 10 < 3$
  $\Rightarrow 2 < a < 3$
- $2^5 < 40 < 2^6 \Rightarrow \log_2 2^5 < \log_2 40 < \log_2 2^6$
  $\Rightarrow 5 < \log_2 40 < 6$
  $\Rightarrow 5 < b < 6$
- $5^3 < 150 < 5^4 \Rightarrow \log_5 5^3 < \log_5 150 < \log_5 5^4$
  $\Rightarrow 3 < \log_5 150 < 4$
  $\Rightarrow 3 < c < 4$ olur.

Bu durumda küçükten büyüğe sıralama $a < c < b$ olur.

Alıştırmalar

1 $f(x) = \log_{(5-x)}(x+4)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesindeki tam sayıların toplamını bulunuz.

2 $\log_8\left[\log_{\sqrt{5}}(\log_3 243)\right]$ ifadesinin değerini bulunuz.

3 $y \neq 1$ olmak üzere

$\log(x+y) = \log x + \log y$

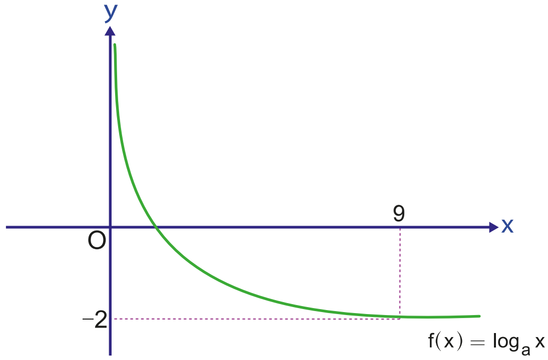
olduğuna göre x in y türünden eşitini bulunuz.

4 $\log_5 6 = x$ olduğuna göre $\log_6 1080$ ifadesinin x türünden eşitini bulunuz.

5 $\log 2 = x$ olduğuna göre log 250 nin x türünden eşitini bulunuz.

6 $3^{\frac{1}{\log_8 3}} + 6^{\frac{1}{\log_5 6}}$ toplamının sonucunu bulunuz.

7



Yukarıda $f(x) = \log_a x$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $f(3) + f\left(\frac{1}{27}\right)$ toplamını bulunuz.

8 $a = \log_3 7$, $b = \log_2 20$ ve $c = \log_5 140$ sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

9 $f(x) = \log_5(x-7)$ olduğuna göre $f^{-1}(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

10 $f(x) = \log_2(x^2 - 9x + 14)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz.

11 $\frac{\log 81}{\log 3} + \frac{\log 16}{\log 2} - \frac{\ln 25}{\ln 5}$ ifadesinin değerini bulunuz.

12 $\dfrac{3}{\log_5 40} + \dfrac{3}{\log_8 40}$ ifadesinin değerini bulunuz.

13 $\log_3 5 = a$ olduğuna göre $\dfrac{\ln 25}{\ln 9}$ ifadesinin a türünden eşitini bulunuz.

14 $\log_7(49!) = x$ olduğuna göre $\log_7(48!)$ ifadesinin x türünden eşitini bulunuz.

15 $\log_2 3 = a$ olduğuna göre $\log_3(4,5)$ ifadesinin a türünden eşitini bulunuz.

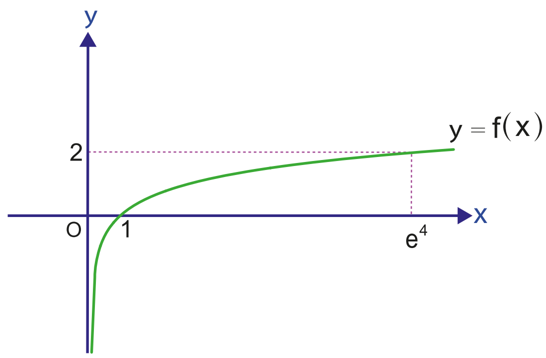
16 $f(x) = \dfrac{4}{2 - \log_3(x^2 - 16)}$ fonksiyonunu tanımsız yapan x doğal sayılarını bulunuz.

17 $\log_2 \sqrt{52 + 24\log_{36}\sqrt{33 + \log_3 27}}$ ifadesinin değerini bulunuz.

18 $\log_4(\ln e^2) + \ln(\log_4 4)$ işleminin sonucunu bulunuz.

19 $\log e = x$ olduğuna göre $\ln 100$ ifadesinin x türünden eşitini bulunuz.

20



Yukarıda $f(x) = \log_a x$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre a değerini bulunuz.

21 $f(x) = \ln(a - 3x)$ ve $f^{-1}(4) = 1$ olduğuna göre a değerini bulunuz.

22 $x, y \in \mathbb{Z}^+$ ve $x \neq 1$ olmak üzere

- $2^a = \dfrac{1}{5}$
- $3^b = \dfrac{1}{4}$
- $a \cdot b = \log_x y$

olduğuna göre $x + y$ toplamını bulunuz.

23 a ve b ardışık iki tam sayı olmak üzere $a < \log 2018 < b$ olduğuna göre $a \cdot b$ çarpımını bulunuz.

1.3. ÜSTEL, LOGARİTMİK DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

1.3.1. Üstel, Logaritmik Denklemlerin ve Eşitsizliklerin Çözüm Kümeleri

Üstel Denklemler

Tabanı 1 den farklı pozitif gerçek sayı olan ve bilinmeyenin üs olarak bulunduğu denklemlere **üstel denklemler** denir. Bu tür denklemlerin çözüm kümelerinin bulunmasında üslü sayıların veya logaritmik fonksiyonların özellikleri kullanılır.

ÖRNEK

$3^{2x+1} = \frac{1}{27}$ dekleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$3^{2x+1} = \frac{1}{27} \Rightarrow 3^{2x+1} = 3^{-3}$$
$$\Rightarrow 2x + 1 = -3$$
$$\Rightarrow 2x = -4$$
$\Rightarrow x = -2$ olur. Bu durumda $Ç = \{-2\}$ bulunur.

ÖRNEK

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} = \left(\frac{16}{81}\right)^{x}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4x} \Rightarrow x + 1 = 4x$$
$$\Rightarrow 3x = 1$$
$\Rightarrow x = \frac{1}{3}$ olur. Bu durumda $Ç = \left\{\frac{1}{3}\right\}$ bulunur.

ÖRNEK

$2^{2x-4} = 3$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$2^{2x-4} = 3 \Rightarrow 2x - 4 = \log_2 3$$
$$\Rightarrow 2x = 4 + \log_2 3$$
$$\Rightarrow 2x = \log_2 16 + \log_2 3$$
$$\Rightarrow 2x = \log_2 48$$
$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\log_2 48$$
$\Rightarrow x = \log_4 48$ olur. Bu durumda $Ç = \{\log_4 48\}$ bulunur.

ÖRNEK

$6^{x-1} = 2^{x+1}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$6^{x-1} = 2^{x+1} \Rightarrow \frac{6^x}{6} = 2^x \cdot 2$$

$$\Rightarrow \frac{6^x}{2^x} = 6 \cdot 2$$

$$\Rightarrow 3^x = 12$$

$$\Rightarrow x = \log_3 12 \text{ olur.}$$

Bu durumda $Ç = \{\log_3 12\}$ bulunur.

ÖRNEK

$9^x - 7 \cdot 3^x + 12 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$9^x - 7 \cdot 3^x + 12 = 0 \Rightarrow (3^x)^2 - 7 \cdot 3^x + 12 = 0$$

$$\Rightarrow t^2 - 7t + 12 = 0 \qquad (3^x = t \text{ dönüşümü yapılır.})$$

$$\Rightarrow (t-4)(t-3) = 0$$

$$\Rightarrow t = 4 \text{ veya } t = 3$$

$$\Rightarrow 3^x = 4 \text{ veya } 3^x = 3$$

$$\Rightarrow x = \log_3 4 \text{ veya } x = 1 \text{ olur.}$$

Bu durumda $Ç = \{1, \log_3 4\}$ bulunur.

ÖRNEK

$e^x + 7 \cdot e^{-x} - 8 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$e^x + 7 \cdot e^{-x} - 8 = 0 \Rightarrow t + 7 \cdot \frac{1}{t} - 8 = 0 \qquad \left(e^x = t \text{ dönüşümü yapılır ve } e^{-x} = \frac{1}{t} \text{ olur.}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{t^2 + 7 - 8t}{t} = 0$$

$$\Rightarrow t^2 - 8t + 7 = 0$$

$$\Rightarrow (t-7)(t-1) = 0$$

$$\Rightarrow t = 7 \text{ veya } t = 1$$

$$\Rightarrow e^x = 7 \text{ veya } e^x = 1$$

$$\Rightarrow x = \ln 7 \text{ veya } x = 0 \text{ olur.}$$

Bu durumda $Ç = \{0, \ln 7\}$ bulunur.

ÖRNEK

$e^{2x-1} = 2^{x+2}$ denkleminin kökünü bulunuz.

ÇÖZÜM

$$
\begin{aligned}
e^{2x-1} = 2^{x+2} &\Rightarrow \ln(e^{2x-1}) = \ln(2^{x+2}) \\
&\Rightarrow (2x-1)\cdot \ln e = (x+2)\cdot \ln 2 \\
&\Rightarrow 2x - 1 = x\ln 2 + 2\ln 2 \\
&\Rightarrow 2x - x\ln 2 = 1 + 2\ln 2 \\
&\Rightarrow x(2-\ln 2) = 1 + 2\ln 2 \\
&\Rightarrow x = \frac{1+2\ln 2}{2-\ln 2} \text{ bulunur.}
\end{aligned}
$$

(Her iki tarafın e tabanında logaritması alınır.)

Logaritmik Denklemler

İçinde bilinmeyenin logaritmasını bulunduran denklemlere **logaritmik denklemler** denir. Bu tür denklemlerin çözüm kümelerinin bulunmasında logaritma fonksiyonunun özelliklerinden yararlanılır. Logaritmik denklemlerde logaritması alınan ifadelerin pozitif olması şartının yanı sıra taban x e bağlı bir fonksiyon ise tabanın da pozitif ve 1 den farklı olması şartı aranır. Bulunan x değerlerinin bu şartları sağlamasına göre çözüm kümesi oluşturulur.

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

✓ $\mathbf{\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b}$ $\quad (f(x) > 0)$

✓ $\mathbf{\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)}$ $\quad (f(x) > 0,\ g(x) > 0)$

✓ $\mathbf{\log_{f(x)} g(x) = b \Leftrightarrow g(x) = (f(x))^b}$ $\quad (f(x) > 0,\ g(x) > 0 \text{ ve } f(x) \neq 1)$

ÖRNEK

$\log_2(5x-7) = 3$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$
\begin{aligned}
\log_2(5x-7) = 3 &\Rightarrow 5x - 7 = 2^3 \\
&\Rightarrow 5x - 7 = 8 \\
&\Rightarrow 5x = 15 \\
&\Rightarrow x = 3 \text{ olur.}
\end{aligned}
$$

Ayrıca logaritmanın tanımı gereği $5x - 7 > 0$ olmalıdır.

$5x - 7 > 0 \Rightarrow x > \frac{7}{5}$ olur.

Bulunan x değeri bu koşulu sağladığından $Ç = \{3\}$ bulunur.

ÖRNEK

$\log(x+2)-\log(x-3)=1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\log(x+2)-\log(x-3)=1 \Rightarrow \log\left(\frac{x+2}{x-3}\right)=1$$
$$\Rightarrow \frac{x+2}{x-3}=10^1$$
$$\Rightarrow x+2=10x-30$$
$$\Rightarrow 32=9x \Rightarrow x=\frac{32}{9} \text{ olur.}$$

Ayrıca logaritmanın tanımı gereği $x+2>0$ ve $x-3>0$ olmalıdır.

$\left.\begin{array}{l} x+2>0 \Rightarrow x>-2 \\ x-3>0 \Rightarrow x>3 \end{array}\right\}$ olur. Bulunan x değeri bu koşulları sağladığından $Ç=\left\{\frac{32}{9}\right\}$ bulunur.

ÖRNEK

$(\log_3 x)^2-\log_3 9x=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$(\log_3 x)^2-\log_3 9x=0 \Rightarrow (\log_3 x)^2-(\log_3 9+\log_3 x)=0$$
$$\Rightarrow t^2-t-2=0 \qquad (\log_3 x = t \text{ dönüşümü yapılır.})$$
$$\Rightarrow (t-2)(t+1)=0$$
$$\Rightarrow t=2 \text{ veya } t=-1$$
$$\Rightarrow \log_3 x=2 \text{ veya } \log_3 x=-1$$
$$\Rightarrow x=9 \text{ veya } x=\frac{1}{3} \text{ olur.}$$

Ayrıca logaritmanın tanımı gereği $x>0$ olmalıdır.

Bulunan x değerleri sıfırdan büyük olduğundan $Ç=\left\{\frac{1}{3},9\right\}$ bulunur.

ÖRNEK

$\log_2 x+\log_4 x-\log_8 x=\frac{7}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\log_2 x+\log_4 x-\log_8 x=\frac{7}{2} \Rightarrow \log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x-\frac{1}{3}\log_2 x=\frac{7}{2} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot\log_2 x=\frac{7}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{7}{6}\cdot\log_2 x=\frac{7}{2}$$
$$\Rightarrow \log_2 x=3$$
$$\Rightarrow x=2^3$$
$$\Rightarrow x=8 \text{ olur.}$$

Ayrıca logaritmanın tanımı gereği $x>0$ olmalıdır.
Bulunan x değeri sıfırdan büyük olduğundan $Ç=\{8\}$ bulunur.

ÖRNEK

$\log_x(30+x)=2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}\log_x(30+x)=2 &\Rightarrow x^2=30+x\\ &\Rightarrow x^2-x-30=0\\ &\Rightarrow (x-6)(x+5)=0\\ &\Rightarrow x=6 \text{ veya } x=-5 \text{ olur.}\end{aligned}$$

Ayrıca logaritmanın tanımı gereği $x+30>0$, $x>0$ ve $x\neq 1$ olmalıdır.
Bulunan x değerlerinden 6 sayısı bu koşulları sağladığından $Ç=\{6\}$ bulunur.

ÖRNEK

$\log_6\left(35+\log_3(2+\log_4(6-x))\right)=2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}\log_6\left(35+\log_3(2+\log_4(6-x))\right)=2 &\Rightarrow 35+\log_3(2+\log_4(6-x))=6^2\\ &\Rightarrow \log_3(2+\log_4(6-x))=1\\ &\Rightarrow 2+\log_4(6-x)=3\\ &\Rightarrow \log_4(6-x)=1\\ &\Rightarrow 6-x=4\\ &\Rightarrow x=2 \text{ olur.}\end{aligned}$$

Ayrıca logaritmanın tanımı gereği
$35+\log_3(2+\log_4(6-x))>0$, $2+\log_4(6-x)>0$ ve $6-x>0$ olmalıdır.
Bulunan x değeri bu koşulları sağladığından $Ç=\{2\}$ bulunur.

ÖRNEK

$\log_2(x+2)+5\cdot\log_{(x+2)}2=6$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}\log_2(x+2)+5\cdot\log_{(x+2)}2=6 &\Rightarrow t+\frac{5}{t}=6 \qquad (\log_2(x+2)=t \text{ dönüşümü yapılır.})\\ &\Rightarrow t^2-6t+5=0\\ &\Rightarrow (t-5)(t-1)=0\\ &\Rightarrow t=5 \text{ veya } t=1\\ &\Rightarrow \log_2(x+2)=5 \text{ veya } \log_2(x+2)=1\\ &\Rightarrow x+2=2^5 \text{ veya } x+2=2^1\\ &\Rightarrow x=30 \text{ veya } x=0\end{aligned}$$

Ayrıca logaritmanın tanımı gereği $x+2>0$ ve $x+2\neq 1$ olmalıdır.
Bulunan x değeri bu koşulları sağladığından $Ç=\{0,30\}$ bulunur.

ÖRNEK

$\log_3 4x + \log_9 x^2 = 2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\log_3 4x + \log_9 x^2 = 2 \Rightarrow \log_3 4x + \log_{3^2} x^2 = 2$$
$$\Rightarrow \log_3 4x + \log_3 x = 2$$
$$\Rightarrow \log_3 (4x \cdot x) = 2$$
$$\Rightarrow 4x^2 = 3^2$$
$$\Rightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ veya } x = -\frac{3}{2} \text{ olur.}$$

Ayrıca logaritmanın tanımı gereği $4x > 0$ olması gerektiğinden $Ç = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ bulunur.

ÖRNEK

$4^{\log_3 x} + 4^{1 - \log_3 x} = 5$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$4^{\log_3 x} + 4^{1-\log_3 x} = 5 \Rightarrow 4^{\log_3 x} + \frac{4}{4^{\log_3 x}} = 5$$

($4^{\log_3 x} = a$ dönüşümü yapılır.)

$$\Rightarrow a + \frac{4}{a} = 5$$
$$\Rightarrow a^2 - 5a + 4 = 0$$
$$\Rightarrow (a-4)(a-1) = 0$$
$$\Rightarrow a = 4 \text{ veya } a = 1$$
$$\Rightarrow 4^{\log_3 x} = 4 \text{ veya } 4^{\log_3 x} = 1$$
$$\Rightarrow \log_3 x = 1 \text{ veya } \log_3 x = 0$$
$$\Rightarrow x = 3 \text{ veya } x = 1 \text{ olur.}$$

Ayrıca logaritmanın tanımı gereği $x > 0$ olmalıdır. Bulunan x değerleri sıfırdan büyük olduğundan $Ç = \{1, 3\}$ bulunur.

ÖRNEK

$$\begin{aligned} \ln x + \ln y &= 5 \\ \ln x^2 + \ln y^3 &= 12 \end{aligned}$$

Yukarıda verilen denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\left.\begin{aligned} \ln x + \ln y &= 5 \\ \ln x^2 + \ln y^3 &= 12 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -2/\ \ln x + \ln y &= 5 \\ 2\ln x + 3\ln y &= 12 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} -2\ln x - 2\ln y &= -10 \\ +\quad 2\ln x + 3\ln y &= 12 \\ \hline \end{aligned}$$

$$\ln y = 2 \Rightarrow y = e^2 \text{ bulunur.}$$

$\ln x + \ln y = 5$ denkleminde $\ln y = 2$ yazılırsa $\ln x = 3 \Rightarrow x = e^3$ olur.

Ayrıca logaritmanın tanımı gereği $x > 0$ ve $y > 0$ olmalıdır.

Bulunan x ve y değerleri sıfırdan büyük olduğundan $Ç = \left\{\left(e^3, e^2\right)\right\}$ bulunur.

ÖRNEK

1 den farklı a, b ve c pozitif gerçek sayıları için $\log_b c = 3$ ve $\log_b a = \frac{1}{2}$ olduğuna göre $\log_3 x = \log_a\left(\frac{a^2}{b \cdot \sqrt[6]{c}}\right)$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}
\log_3 x = \log_a\left(\frac{a^2}{b \cdot \sqrt[6]{c}}\right) &= \log_a a^2 - \log_a b - \log_a \sqrt[6]{c} \\
&= 2 \cdot \underbrace{\log_a a}_{1} - \underbrace{\frac{1}{\log_b a}}_{2} - \frac{1}{6} \cdot \log_a c \\
&= 2 \cdot 1 - 2 - \frac{1}{6} \cdot \frac{\log_b c}{\log_b a} \\
&= 2 - 2 - \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{\frac{1}{2}} \\
&= -1 \text{ olur.}
\end{aligned}$$

$\log_3 x = -1 \Rightarrow x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$ olduğundan $Ç = \left\{\frac{1}{3}\right\}$ bulunur.

Üstel ve Logaritmalı Eşitsizlikler

Üstel eşitsizliklerde $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$ için

✓ $\mathbf{a > 1}$ **ise** $\mathbf{f(x) \geq g(x)}$ olur.

✓ $\mathbf{0 < a < 1}$ **ise** $\mathbf{f(x) \leq g(x)}$ olur. ($0 < a < 1$ ise eşitsizlik yön değiştirir.)

Logaritmalı eşitsizliklerde $\log_a f(x) \leq \log_a g(x)$ için

✓ $\mathbf{a > 1}$ **ise** $\mathbf{f(x) \leq g(x)}$ olur.

($a > 1$ ise logaritma fonksiyonu artandır. Bu durumda eşitsizlik yön değiştirmez.)

✓ $\mathbf{0 < a < 1}$ **ise** $\mathbf{f(x) \geq g(x)}$ olur.

($0 < a < 1$ ise logaritma fonksiyonu azalandır. Bu durumda eşitsizlik yön değiştirir.)

Ayrıca logaritmanın tanımı gereği $f(x) > 0$ ve $g(x) > 0$ olmalıdır.

ÖRNEK

$3^x - 27 > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}
3^x - 27 > 0 &\Rightarrow 3^x > 27 \\
&\Rightarrow 3^x > 3^3 \\
&\Rightarrow x > 3 \text{ olur. Bu durumda } Ç = (3, \infty) \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

ÖRNEK

$\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-1} \geq \left(\frac{9}{16}\right)^{-3x-4}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-1} \geq \left(\frac{9}{16}\right)^{-3x-4} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{2x-1} \geq \left(\frac{3}{4}\right)^{-6x-8}$ $\left(0 < \frac{3}{4} < 1\right.$ olduğundan eşitsizlik yön değiştirir.)

$\Rightarrow 2x - 1 \leq -6x - 8$

$\Rightarrow 8x \leq -7$

$\Rightarrow x \leq -\frac{7}{8}$ olur.

Bu durumda $Ç = \left(-\infty, -\frac{7}{8}\right]$ bulunur.

ÖRNEK

$3^{x-1} < \left(\frac{1}{81}\right)^{x-2}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Eşitsizliğin sağ tarafındaki $\frac{1}{81}$ sayısı 3^{-4} şeklinde yazılırsa

$3^{x-1} < \left(3^{-4}\right)^{x-2} \Rightarrow 3^{x-1} < 3^{-4x+8}$

$\Rightarrow x - 1 < -4x + 8$

$\Rightarrow 5x < 9$

$\Rightarrow x < \frac{9}{5}$ olur.

Bu durumda $Ç = \left(-\infty, \frac{9}{5}\right)$ bulunur.

ÖRNEK

$(x^2 - 9)(3^{x-2} - 9) \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(x^2 - 9)(3^{x-2} - 9) \geq 0$ eşitsizliğinin işaret tablosunu yapmak için öncelikle

$(x^2 - 9)(3^{x-2} - 9) = 0$ denkleminin kökleri bulunur.

$(x^2 - 9)(3^{x-2} - 9) = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0$ veya $3^{x-2} - 9 = 0$

$\Rightarrow (x-3)(x+3) = 0$ veya $3^{x-2} = 3^2$

$\Rightarrow x = 3 \vee x = -3 \vee x = 4$ olur.

$x < 4$ ise $3^{x-2} - 9 < 0$ ve $x > 4$ ise $3^{x-2} - 9 > 0$ olacağından $3^{x-2} - 9$ ifadesi eşitsizlik tablosunda 4 ün sağında pozitif ve 4 ün solunda negatif değerler alacaktır.

x	$-\infty$		-3		3		4		∞
$3^{x-2}-9$		$-$		$-$		$-$	●	$+$	
x^2-9		$+$	●	$-$	●	$+$		$+$	
$(3^{x-2}-9)\cdot(x^2-9)$		$-$	●	$+$	●	$-$	●	$+$	

Bu durumda $Ç = [-3, 3] \cup [4, \infty)$ bulunur.

ÖRNEK

$\log_2(2x-3) \leq 4$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} \log_2(2x-3) \leq 4 &\Rightarrow \log_2(2x-3) \leq \log_2 16 \\ &\Rightarrow 2x-3 \leq 16 \\ &\Rightarrow 2x \leq 19 \\ &\Rightarrow x \leq \frac{19}{2} \text{ olur.} \end{aligned}$$

Ayrıca logaritmanın tanımı gereği $2x-3>0$ olacağından $x > \frac{3}{2}$ olur.

Bu durumda $Ç = \left(\frac{3}{2}, \frac{19}{2}\right]$ bulunur.

ÖRNEK

$\log_{\frac{1}{2}}(3x-4) > -1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{2}}(3x-4) > -1 &\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(3x-4) > \log_{\frac{1}{2}} 2 \\ &\Rightarrow 3x-4 < 2 \\ &\Rightarrow 3x < 6 \\ &\Rightarrow x < 2 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Ayrıca logaritmanın tanımı gereği $3x-4>0$ olacağından $x > \frac{4}{3}$ olur.

Bu durumda $Ç = \left(\frac{4}{3}, 2\right)$ bulunur.

ÖRNEK

$\log(x-5) > 2$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} \log(x-5) > 2 &\Rightarrow \log(x-5) > \log 100 \\ &\Rightarrow x-5 > 100 \\ &\Rightarrow x > 105 \end{aligned}$$

Ayrıca logaritmanın tanımı gereği $x-5>0$ olacağından $x>5$ olur.

Bu durumda $Ç = (105, \infty)$ bulunur.

ÖRNEK

$\log_2(x^2-3x+8)-\log_2(x+1)>1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\log_2(x^2-3x+8)-\log_2(x+1)>1 \Rightarrow \log_2\left(\frac{x^2-3x+8}{x+1}\right)>\log_2 2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-3x+8}{x+1}>2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-3x+8}{x+1}-2>0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-3x+8-2x-2}{x+1}>0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-5x+6}{x+1}>0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-3)(x-2)}{x+1}>0 \text{ olur.}$$

x	$-\infty$	-1		2		3	∞
$\frac{x^2-5x+6}{x+1}$	$-$	o	$+$	o	$-$	o	$+$

$Ç_1=(-1,\ 2)\cup(3,\ \infty)$

Ayrıca logaritmanın tanımı gereği $x^2-3x+8>0$ eşitsizliği $\Delta<0$ ve x^2 nin katsayısı pozitif olduğundan her x gerçek sayısı için sağlanır. Bu durumda $Ç_2=\mathbb{R}$ olur.

Yine logaritmanın tanımı gereği $x+1>0$ olacağından $Ç_3=(-1,\infty)$ olur.

Buna göre $Ç=Ç_1\cap Ç_2\cap Ç_3$ olduğundan $Ç=(-1,\ 2)\cup(3,\infty)$ bulunur.

ÖRNEK

$\log_2(\log_3(x-4))<1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\log_2(\log_3(x-4))<1 \Rightarrow \log_3(x-4)<2^1$$

$$\Rightarrow x-4<3^2$$

$$\Rightarrow x-4<9$$

$$\Rightarrow x<13 \text{ olur.}$$

Ayrıca logaritmanın tanımı gereği $x-4>0$ ve $\log_3(x-4)>0$ olmalıdır.

- $x-4>0 \Rightarrow x>4$ olur.
- $\log_3(x-4)>0 \Rightarrow x-4>1$
  $\Rightarrow x>5$ olur.

$$\left.\begin{array}{l} x<13 \\ x>4 \\ x>5 \end{array}\right\} \text{ olduğundan } Ç=(5,13) \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$2 < \log_2(x+3) \leq 3$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$2 < \log_2(x+3) \leq 3 \Rightarrow \log_2 4 < \log_2(x+3) \leq \log_2 8$$
$$\Rightarrow 4 < x+3 \leq 8$$
$$\Rightarrow 1 < x \leq 5$$

Ayrıca logaritmanın tanımı gereği $x+3 > 0 \Rightarrow x > -3$ olmalıdır.

Bu durumda çözüm kümesi $Ç = (1,\ 5]$ bulunur.

ÖRNEK

$\log_2\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right) < 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\log_2\left(\frac{x+2}{x-3}\right) < 1 \Rightarrow \frac{x+2}{x-3} < 2$$
$$\Rightarrow \frac{x+2}{x-3} - 2 < 0$$
$$\Rightarrow \frac{x+2-2x+6}{x-3} < 0$$
$$\Rightarrow \frac{8-x}{x-3} < 0 \text{ ....(1) bulunur.}$$

Ayrıca logaritmanın tanımı gereği $\dfrac{x+2}{x-3} > 0$ ....(2) olmalıdır.

(1) ve (2) eşitsizlikleri için işaret tablosu oluşturulursa

x	$-\infty$ … -2	-2 … 3	3 … 8	8 … ∞
$\dfrac{8-x}{x-3}$	$-$	$-$	$+$	$-$
$\dfrac{x+2}{x-3}$	$+$	$-$	$+$	$+$
	çözüm kümesi			çözüm kümesi

$Ç = (-\infty,\ -2) \cup (8,\ \infty)$ bulunur.

ÖRNEK

$\log_2(x-1) + \log_2(x+1) < \log_2 6 + \log_2 4$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\log_2(x-1) + \log_2(x+1) < \log_2 6 + \log_2 4 \Rightarrow \log_2[(x-1)(x+1)] < \log_2(6 \cdot 4)$$
$$\Rightarrow \log_2(x^2-1) < \log_2 24$$
$$\Rightarrow x^2 - 1 < 24$$
$$\Rightarrow x^2 < 25$$
$$\Rightarrow -5 < x < 5 \text{ olur.}$$

Ayrıca logaritmanın tanımı gereği $x-1 > 0$ ve $x+1 > 0$ koşulları da sağlanmalıdır. Bu iki koşuldan $x > 1$ olur. Bu durumda $Ç = (1,\ 5)$ bulunur.

1.3.2. Gerçek Hayat Durumları ile İlgili Üstel ve Logaritmik Fonksiyon Problemleri

Radyoaktif bir maddenin yarılanma süresi, başlangıçta mevcut olan çekirdeklerin yarısının bozunması için geçen süredir. Bir radyoaktif çekirdeğin birim zamandaki bozunma olasılığına radyoaktif bozunma sabiti adı verilir ve “λ” (Lambda) ile gösterilir. Bu durumda radyoaktif bir maddenin **yarılanma süresi** $\mathbf{t} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$ formülüyle hesaplanır.

(Eliot ve Young, 1959)

Görsel 1.5

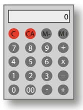
ÖRNEK

Bir radyoaktif maddenin yarılanma süresi 18 yıl olduğuna göre λ bozunma sabitinin yaklaşık değerini bulunuz. $(\ln 2 \cong 0{,}693)$

ÇÖZÜM

$t = \dfrac{\ln 2}{\lambda} \Rightarrow 18 \cong \dfrac{0{,}693}{\lambda} \Rightarrow 18\lambda \cong 0{,}693$

$\Rightarrow \lambda \cong 0{,}0385$ bulunur.



ÖRNEK

Radyoaktif bir maddenin başlangıçtaki miktarı N_0 (gram), bozunması sonucu kalan madde miktarı N (gram) ve zaman t (saat) olmak üzere e sabiti kullanılarak

$$N = N_0 \cdot e^{-\frac{1}{40} \cdot t}$$

denklemi ile modellenmektedir. Buna göre başlangıçta 1365 gram olan bir radyoaktif maddeden 120 saat sonra kaç gram kalacağını bulunuz.

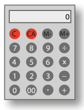
ÇÖZÜM

$N_0 = 1365$ g

$t = 120$ saat

$N = N_0 \cdot e^{-\frac{1}{40} \cdot t} \Rightarrow N = 1365 \cdot e^{-\frac{1}{40} \cdot 120}$

$= 1365 \cdot e^{-3} \cong 68$ g bulunur.



Genlik, bir dalganın normal konumundan yükselme ve alçalma mesafesidir. Uzanımın en büyük ve en küçük olduğu konumlar diye tarif edilebilir. Genlik, dalgayı ortaya çıkaran enerjinin miktarına bağlıdır. Dalganın enerjisi artarken genlik de artar. Depremin büyüklüğü artarsa meydana gelen dalga dolayısıyla genlik de artar. Depremin büyüklüğü deprem merkez üssünden 100 km uzaklıktaki sismograf tarafından kaydedilen dalgaların maksimum genliklerinden yararlanılarak hesaplanır.

Mikron cinsinden ölçülen maksimum genliğe d ve depremin Richter ölçeğine göre büyüklüğüne R denilirse $\mathbf{R = \log d}$ ile hesaplanır.

(Kılıçkaya, 1996)

ÖRNEK

Maksimum genliği 90 mm olarak ölçülen bir depremin Richter ölçeğine göre büyüklüğünü yaklaşık olarak bulunuz. $(\log 3 \cong 0,477$ ve $1 \text{ mm} = 10^3$ mikron$)$

ÇÖZÜM

$90 \text{ mm} = 90 \cdot 10^3$ mikron $\Rightarrow d = 9 \cdot 10^4$ mikron olur.

$$
\begin{aligned}
R = \log d &= \log(9 \cdot 10^4) \\
&= \log 9 + \log 10^4 \\
&= \log 3^2 + \log 10^4 \\
&= 2\log 3 + 4\log 10 \\
&\cong 2 \cdot 0,477 + 4 \cdot 1 \\
&\cong 0,954 + 4 \\
&\cong 5 \text{ olur.}
\end{aligned}
$$

O hâlde bu depremin Richter ölçeğine göre büyüklüğü yaklaşık olarak 5 şiddetinde bulunur.

ÖRNEK

17 Ağustos 1999, saat 03.02'de meydana gelen merkez üssü Kocaeli'nin Gölcük İlçesi olan ve 45 saniye süren deprem; Kocaeli, Gölcük, Düzce, Sakarya, İstanbul ve Yalova'da büyük can ve mal kaybına neden oldu. Depremde resmî verilere göre 17 bin 480 kişi hayatını kaybederken on binlerce kişi de yaralandı.

Görsel 1.6

Bu zor günlerde vatandaşlarımız her zaman olduğu gibi yine bir araya geldi ve kenetlendi. Ülkemizin her yerinden bölgeye gönderilmek üzere insani yardım toplandı. Birçok kişi deprem bölgesine giderek enkaz kaldırma çalışmalarına katıldı. Acil olarak kana ihtiyaç duyan hastalara kan vermek için hastanelerin önünde uzun kuyruklar oluştu. Türk milleti daha önce olduğu gibi bu depremde de yardımsever bir millet olduğunu herkese gösterdi.

Bu depremin ölçülen maksimum genliği yaklaşık 25 m olduğuna göre depremin büyüklüğünün Richter ölçeğine göre yaklaşık kaç şiddetinde olduğunu bulunuz. $(\log 5 \cong 0,7)$

ÇÖZÜM

$25 \text{ m} = 25\,000 \text{ mm} = 25 \cdot 10^3 \cdot 10^3$ mikron $\Rightarrow d = 25 \cdot 10^6$ mikron olur.

$$
\begin{aligned}
R = \log d &\Rightarrow R = \log(25 \cdot 10^6) \\
&\Rightarrow R = \log 25 + \log 10^6 \\
&\Rightarrow R = \log 5^2 + 6 \cdot \log 10 \\
&\Rightarrow R = 2 \cdot \log 5 + 6 \\
&\Rightarrow R \cong 2 \cdot (0,7) + 6 \\
&\Rightarrow R \cong 1,4 + 6 \\
&\Rightarrow R \cong 7,4 \text{ olur.}
\end{aligned}
$$

O hâlde 17 ağustos depreminin Richter ölçeğine göre büyüklüğü yaklaşık olarak 7,4 şiddetinde bulunur.

Canlı iken kemikte bulunan Carbon (Karbon) 14 adıyla anılan atomlar canlının ölümünden sonra düzenli bozunarak Carbon 12 atomu hâline dönüşürler. 5730 yılda bozunmayan Carbon 14 atomlarının sayısı yarıya iner. Diğer yarısı Carbon 12 atomu hâline dönüşür. Bu süreye yarılanma süresi denir. Kemik fosilindeki bu iki cins atomların miktarları ölçülerek canlının yaklaşık kaç yıl önce öldüğü anlaşılabilmektedir. Carbon 14 atomlarının zaman içinde yarılanma süresi

Görsel 1.7

$$\mathbf{y = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}}\right]^{x}}$$

üstel fonksiyonu ile hesaplanır. Burada x, yıl olarak zamanı belirtirken y de Carbon 14 miktarının, tüm karbonların miktarına oranını göstermektedir. Bu eşitlik düzenlenerek bir fosilin yaşı

$$\mathbf{x = -5730 \cdot \frac{\log y}{\log 2}}$$

denklemi ile modellenebilmektedir.

(Üstel Fonksiyon ve Logaritma Fonksiyonu, www.eba.gov.tr)

ÖRNEK

Canlı bir örneğin %20 si kadar Carbon 14 içeren bir fosilin,

a) Yaşını yaklaşık olarak bulunuz.

b) Yaklaşık olarak kaç yıl sonra Carbon 14 oranının %20 den %10 a düşeceğini bulunuz.

$(\log 2 \cong 0,3)$

ÇÖZÜM

a) $x = -5730 \cdot \frac{\log y}{\log 2} \Rightarrow x = -5730 \cdot \frac{\log \frac{20}{100}}{\log 2}$ $\quad \left(y = \frac{20}{100}\right)$

$\Rightarrow x = -5730 \cdot \frac{\log 20 - \log 100}{\log 2}$

$\Rightarrow x = \frac{-5730 \cdot (\log 2 + \log 10 - \log 100)}{\log 2}$

$\Rightarrow x \cong \frac{-5730 \cdot (0,3 + 1 - 2)}{0,3}$ $\quad (\log 10 = 1, \log 100 = 2 \text{ ve } \log 2 \cong 0,3)$

$\Rightarrow x \cong \frac{-5730 \cdot (-0,7)}{0,3}$

$\Rightarrow x \cong 13\,370$ olur.

Buna göre fosilin yaşı yaklaşık olarak 13 370 bulunur.

b) $x = -5730 \cdot \frac{\log y}{\log 2} \Rightarrow x = -5730 \cdot \frac{\log \frac{10}{100}}{\log 2}$ $\quad \left(y = \frac{10}{100}\right)$

$\Rightarrow x = -5730 \cdot \frac{\log 10 - \log 100}{\log 2}$

$\Rightarrow x \cong -5730 \cdot \frac{1 - 2}{0,3}$ $\quad (\log 10 = 1, \log 100 = 2 \text{ ve } \log 2 \cong 0,3)$

$\Rightarrow x \cong 19\,100$

Bu durumda fosildeki Carbon 14 oranı $19\,100 - 13\,370 = 5730$ yıl sonra %10 a düşer.

pH, bir sulu çözeltideki H^+ (hidrojen iyonu) konsantrasyonunu veren bir değerdir.

1 litre çözeltideki çözünmüş maddenin mol sayısına **derişim** denir ve birimi **mol/L** dir. Hidrojen iyonunun derişimi $[H^+]$ olmak üzere

$$\mathbf{pH = -\log[H^+]}$$

Görsel 1.8

formülü ile bir çözeltinin asidik veya bazik olduğu belirlenir.

Eğer $pH < 7$ ise çözelti asidik, $pH = 7$ ise çözelti nötral ve $pH > 7$ ise çözelti bazik olur.

ÖRNEK

Bir çözeltideki hidrojen iyonunun derişimi $[H^+] = 10^{-3}$ mol/L olduğuna göre bu çözeltinin pH değerini bulunuz ve asidik veya bazik olduğunu belirleyiniz.

ÇÖZÜM

$$pH = -\log[H^+] \Rightarrow pH = -\log(10^{-3})$$
$$\Rightarrow pH = -(-3)\log 10$$
$$\Rightarrow pH = 3 \text{ bulunur.}$$

Bulunan pH değeri 7 den küçük olduğundan bu çözelti asidik bir çözeltidir.

ÖRNEK

pH değeri 4 olan bir portakaldaki hidrojen iyonunun derişimini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$pH = -\log[H^+] \Rightarrow 4 = -\log[H^+]$$
$$\Rightarrow \log[H^+] = -4$$
$$\Rightarrow [H^+] = 10^{-4} \text{ mol/L bulunur.}$$

ÖRNEK

Asidik veya bazik olmayan bir çözeltide hidrojen iyonunun derişimini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$pH = -\log[H^+] \Rightarrow 7 = -\log[H^+]$$
$$\Rightarrow \log[H^+] = -7$$
$$\Rightarrow [H^+] = 10^{-7} \text{ mol/L bulunur.}$$

İnsan kulağının zarar görmeden duyabileceği en büyük ses şiddeti $1\,\text{watt/m}^2$ iken duyarlı olduğu en düşük ses şiddeti 10^{-12} watt/m^2 dir. Bu yüzden insanlar karıncanın ayak seslerini, uzaydaki gezegenlerin veya yıldızların hareketlerinin seslerini duyamazlar.

Görsel 1.9

I : Kaynağın ses şiddeti

$\mathbf{I_0}$: 10^{-12} watt/m^2

L : Ses düzeyi

olmak üzere dB (desibel) türünden ses düzeyi $\mathbf{L = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)}$ dB formülü ile hesaplanır.

ÖRNEK

Açık havada yapılan bir düğünde kullanılan davuldan gelen ses düzeyinin 120 dB olduğu tespit edilmiştir. Buna göre davuldan gelen sesin şiddetinin kaç watt/m^2 olduğunu bulunuz. $\left(I_0 = 10^{-12}\ \text{watt/m}^2\right)$

ÇÖZÜM

$\left(L = 120 \text{ ve } I_0 = 10^{-12} \text{ watt/m}^2\right)$

$$
\begin{aligned}
L = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right) &\Rightarrow 120 = 10\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)\\
&\Rightarrow 12 = \log I - \log 10^{-12}\\
&\Rightarrow 12 = \log I + 12\log 10\\
&\Rightarrow 0 = \log I\\
&\Rightarrow I = 10^0\\
&\Rightarrow I = 1 \text{ watt/m}^2 \text{ bulunur.}
\end{aligned}
$$

ÖRNEK

Bir radyodan gelen sesin şiddeti 4 katına çıkarsa oluşan gürültünün yaklaşık olarak kaç dB artacağını bulunuz. $(\log 4 \cong 0{,}6)$

ÇÖZÜM

$\left(L_1 = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right) \text{ ve } L_2 = 10\log\left(\frac{4I}{I_0}\right)\right)$

$$
\begin{aligned}
L_2 - L_1 &= 10\log\left(\frac{4I}{I_0}\right) - 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)\\
&= 10\log(4I) - \cancel{10\log I_0} - 10\log I + \cancel{10\log I_0}\\
&= 10\log(4I) - 10\log I\\
&= 10(\log 4 + \log I) - 10\log I\\
&= 10\log 4 + \cancel{10\log I} - \cancel{10\log I}\\
&= 10\log 4\\
&\cong 10 \cdot 0{,}6 \cong 6
\end{aligned}
$$

Buna göre gürültü yaklaşık olarak 6 dB artar.

ÖRNEK

Bakteriler yaşadığı ortamda yeterli su ve besin maddesi bulduğunda ve sıcaklığın uygun olduğu durumlarda hızla bölünerek çoğalırlar.
Bir bakteri kültüründe,

m: Bölünmeye başlamadan önceki bakteri sayısı

t: Çoğalma için geçen süre (dakika)

olmak üzere çoğalma sonunda kültürdeki bakteri sayısı

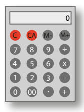
$\mathbf{B(t) = m \cdot e^{10^{-2} \cdot t}}$ biçiminde modellenmiştir.

Bu bakteri kültüründe başlangıçta 40 bakteri olduğuna göre 200 dakika sonra ortamdaki bakteri sayısını yaklaşık olarak bulunuz. $(e \cong 2{,}71)$

Görsel 1.10

ÇÖZÜM

$B(t) = m \cdot e^{10^{-2} \cdot t} \Rightarrow B(200) = 40 \cdot e^{10^{-2} \cdot 200}$ $(m = 40 \text{ ve } t = 200)$



$= 40 \cdot e^2$

$\cong 40 \cdot (2{,}71)^2$

$\cong 294$ bulunur.

P_0 : Bölgenin başlangıçtaki nüfusu

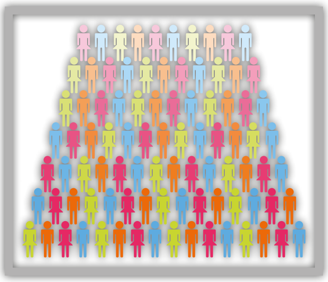
P : Bölgenin başlangıçtan **t** yıl sonraki nüfusu

m : Bölgenin yıllık nüfus artış hızı

olmak üzere bir bölgenin nüfusu

$$\mathbf{P = P_0 \cdot (1 + m)^t}$$

biçiminde modellenebilmektedir.



Görsel 1.11

ÖRNEK

Türkiye'deki nüfus artış hızını bulmak isteyen bir sosyolog, Türkiye İstatistik Kurumunun açıkladığı verilerden yararlanmak istemektedir. Bu verilere göre 31 Aralık 2016 tarihi itibariyle 79 milyon 814 bin 871 olan Türkiye nüfusu 31 Aralık 2017 tarihi itibari ile 80 milyon 810 bin 525 kişi olmuştur. Buna göre Türkiye'nin 1 yıl içindeki nüfus artış hızının yaklaşık olarak binde kaç olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

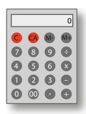
$P = P_0 \cdot (1 + m)^t \Rightarrow 80\ 810\ 525 = 79\ 814\ 871 \cdot (1 + m)^1$

$\left(\begin{array}{l} t = 2017 - 2016 = 1 \\ P_0 = 79\ 814\ 871 \\ P = 80\ 810\ 525 \end{array} \right)$

$\Rightarrow \dfrac{80\ 810\ 525}{79\ 814\ 871} = 1 + m$

$\Rightarrow 1 + m \cong 1{,}0125$

$\Rightarrow m \cong 0{,}0125$



Buna göre Türkiye'nin bir yıl içerisindeki nüfus artış hızı $m \cong {}^0\!/_{00}\, 12{,}5$ (yaklaşık olarak binde 12,5) olarak gerçekleşmiştir.

ÖRNEK

Bir okulda sosyal sorumluluk projesi kapsamında çalışmalar yapan bir grup öğrenciye danışman öğretmen Gürkan Bey, Gıda,Tarım ve Hayvancılık Bakanlığının hazırlamış olduğu bir kamu spotunu izletir. Bu kamu spotuna göre 250 gramlık standart ekmek üzerinden Türkiye'de ekmek israfı günde 1223 ton, yılda 447 bin ton, günde 4,9 milyon adet, yılda 1,79 milyar adettir.

Görsel 1.12

Bir günde israf edilen 4,9 milyon adet ekmeğin;

- 3 milyonu fırınlarda (%62,1),
- 1,4 milyonu hanelerde (%27,7),
- 0,5 milyonu personel ve öğrenci yemekhaneleri ile lokanta ve otellerde (%10,2) israf edilmektedir.

(Araştırma Sonuçları-2013, www.ekmekisrafetme.com)

Bu kamu spotunu izleyen öğrenciler, Gürkan Öğretmen danışmanlığında bir proje hazırlar. Bu proje kapsamında bir yıl içerisinde Türkiye'deki tüm fırınlara, otellere, yurtlara ve hanelere israfın azaltılması için hazırladıkları broşürleri ulaştırmayı planlamışlardır. Öğrenciler

1. ayın sonunda günlük ekmek israfını 1000 adet,
2. ayın sonunda günlük ekmek israfını 2000 adet,
3. ayın sonunda günlük ekmek israfını 4000 adet,
4. ayın sonunda günlük ekmek israfını 8000 adet

olacak şekilde her ay bir önceki aya göre ekmek israfını 2 kat azaltmayı hedeflemektedirler. Öğrencilerin hedeflediği şekilde israfı azaltmaları durumunda;

a) Bir yılın sonunda Türkiye'de günlük israf edilen ekmek sayısının kaç adede düşeceğini bulunuz.

b) n. ayın sonunda günlük ekmek israfının azalma miktarını veren fonksiyonun grafiğini, Dinamik Geometri ve Matematik Yazılımı programını kullanarak çiziniz. İkinci, üçüncü ve beşinci aylardaki israf edilmeyen ekmek sayısını grafik üzerinde gösteriniz.

ÇÖZÜM

a) 1. ayın sonunda günlük $1000 = 2^0 \cdot 10^3$ adet,
2. ayın sonunda günlük $2000 = 2^1 \cdot 10^3$ adet,
3. ayın sonunda günlük $4000 = 2^2 \cdot 10^3$ adet,
4. ayın sonunda günlük $8000 = 2^3 \cdot 10^3$ adet ekmek israfı önlenir.
$\vdots$
x. ayın sonunda günlük $2^{x-1} \cdot 10^3$ adet ekmek israfını önleme çalışması yapılmış olur.

Bu çalışma $f(x) = 2^{x-1} \cdot 10^3$ biçiminde üstel fonksiyon olarak modellenebilir.

O hâlde 12. ayın sonunda $x = 12$ için

$f(12) = 2^{12-1} \cdot 10^3 = 2\,048\,000$ adet ekmek israfı önlenir.

Bu durumda günlük ekmek israfı $4\,900\,000 - 2\,048\,000 = 2\,852\,000$ adede düşmüş olur.

b) Dinamik Geometri ve Matematik Yazılımı programını açınız.

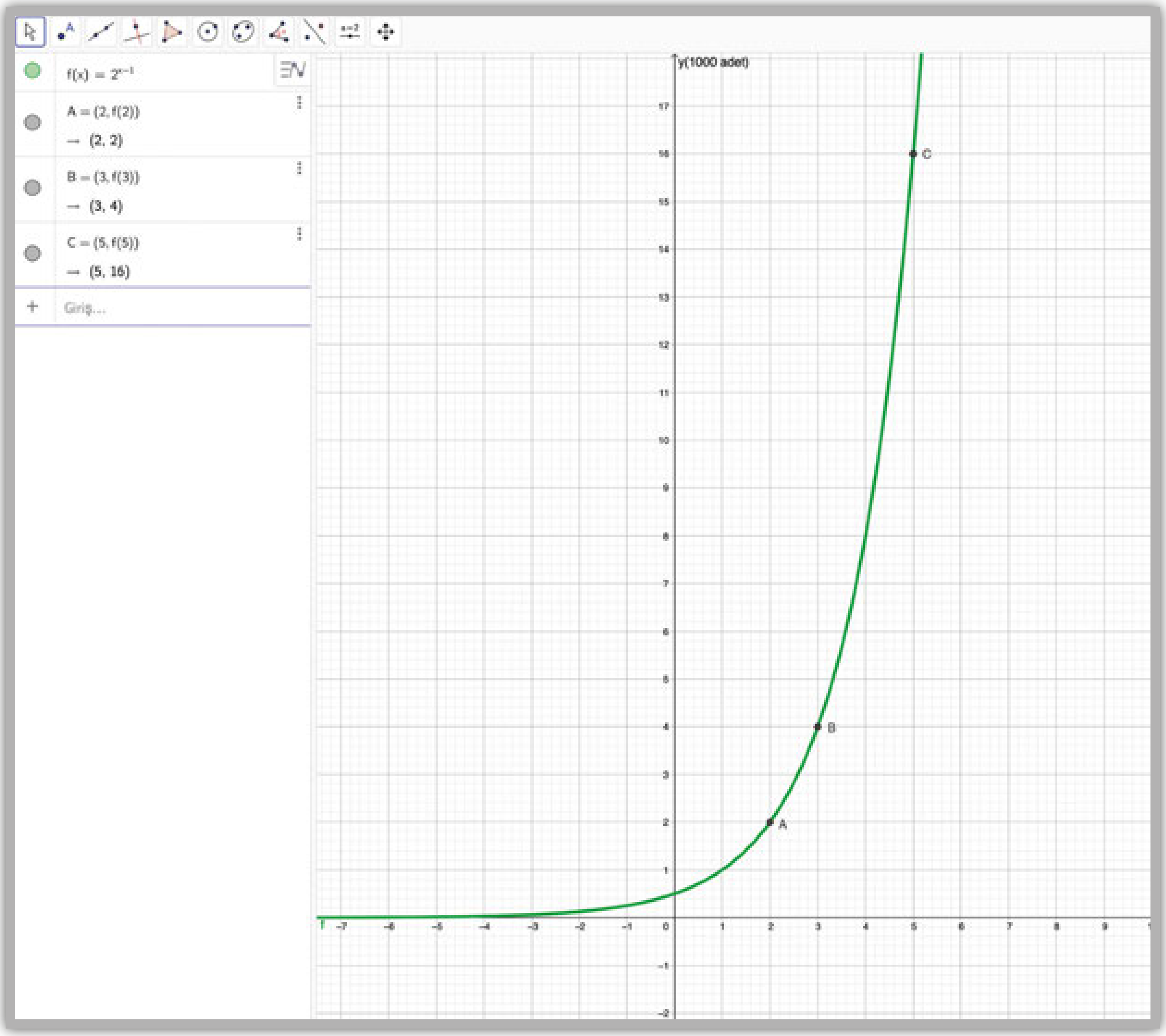
1. Adım: Giriş çubuğuna alttaki ekran klavyesini kullanarak 2^{x-1} yazarak enter tuşuna basıldığında grafik ekrana gelecektir.

2. Adım: Ekranda sağ tıklanarak açılan menüden en altta bulunan Grafik seçilir. Açılan pencerede üstteki araç çubuğunda yEkseni tıklanır. Etiket alanına y (1000 adet) yazılır ve pencere kapatılır.

3. Adım: Giriş çubuğuna $(2, f(2))$ yazılır ve enter tuşuna basılırsa grafikte **A** noktası belirirken giriş çubuğunda (2,2) görünecektir.

4. Adım: Giriş çubuğuna $(3, f(3))$ yazılır ve enter tuşuna basılırsa grafikte **B** noktası belirirken giriş çubuğunda (3,4) görünecektir.

5. Adım: Giriş çubuğuna $(5, f(5))$ yazılır ve enter tuşuna basılırsa grafikte **C** noktası belirirken giriş çubuğunda (5,16) görünecektir.



y eksenindeki değerler çarpı 1000 Adet olduğundan

2. ay $2 \cdot 1000 = 2000$ adet ekmek israfı önlenir.

3. ay $4 \cdot 1000 = 4000$ adet ekmek israfı önlenir.

5. ay $16 \cdot 1000 = 16\,000$ adet ekmek israfı önlenir.

Alıştırmalar

1 Aşağıdaki üstel denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $2^{x-7} = 6$

b) $2^{x+1} + 2^{x+2} = 24$

c) $3^{x-1} = 2^{x+2}$

ç) $16^{x} - 2 \cdot 4^{x+1} + 15 = 0$

d) $e^{4x} + e^{2x} - 12 = 0$

2 Aşağıdaki logaritmik denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $\log_5(4x - 2) = 2$

b) $\log_{\frac{1}{4}}(3x + 1) = -2$

c) $\log_7\left(x^2 + 5\right) = \log_7 6x$

ç) $\log(x - 2) + \log(x - 3) = \log 2$

d) $\log_3\left(5 + \log_2(2x + 1)\right) = 0$

e) $\log_{\sqrt{5}} x + \log_5 x = -6$

3 $100^{x} - 3 \cdot 10^{x} + 2 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

4 $\log_2\left(3 + \log_2 x\right) = 3$ denkleminde x değerini bulunuz.

5 $\log_{13}(3x-5) - \log_{13}(2x-1) = 0$

denkleminde x değerini bulunuz.

6 $\log_2 9^{x+1} \cdot \log_3 16 = 3x + 13$

denkleminde x değerini bulunuz.

7 $(\log x)^2 - \log x^4 = 0$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

8 $\log_4 x \cdot \log_{2x} 4 = \log_9 3$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

9 $\ln(x + 1) + \ln x = \ln 10 - \ln 5$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

10 $\dfrac{\ln 4}{\ln 3} = \log_9 x$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

11 Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $16^{x+3} < 4$

b) $8^{x-1} \geq 2^{x+5}$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} \leq 27^{x-2}$

ç) $\log\left(\frac{2x-1}{3}\right) < 0$

d) $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) \leq -3$

e) $\log_4(3x+2) \geq 0$

f) $\log_3\left(x^2 - 5x + 7\right) > 0$

g) $3 \leq \log_2(2x-4) < \log_2 18$

12 $0 \leq \log_2(x-3) \leq 2$

eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının toplamını bulunuz.

13 $\log_9 16 + \log_3(a-2) < 3$

eşitsizliğini sağlayan kaç tane a tam sayısı olduğunu bulunuz.

14 $1 < \log_2(2x-3) < 3$

eşitsizliğini sağlayan <u>en büyük</u> x tam sayısını bulunuz.

15 $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x+1}{x-2}\right) < 0$

eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

16 Bir bakteri türünün sayısı her saatte 3 katına çıkmaktadır. Başlangıçtaki bakteri sayısı 10 olduğuna göre bu bakteri türünün yaklaşık kaç saat sonra başlangıçtaki sayısının 10 000 katı olacağını bulunuz.
$(\log 3 \cong 0,477)$

17 L ses düzeyi ve I ses şiddeti olmak üzere bir insanın normal konuşma ses düzeyi 70 dB olduğuna göre normal konuşmanın ses şiddetinin kaç watt/m^2 olduğunu bulunuz.

$$\left(\begin{array}{l} L = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right) \text{ dB} \\ I_0 = 10^{-12} \text{ watt/m}^2 \end{array}\right)$$

18 HCl çözeltisinin pH değeri 3 olduğuna göre bu çözeltideki $[H^+]$ derişiminin kaç molarite olduğunu bulunuz.
$(pH = -\log[H^+])$

19 Mikron cinsinden ölçülen maksimum genliğe d ve depremin Richter ölçeğine göre büyüklüğüne R denilirse $R = \log d$ ile hesaplanır. Buna göre genliği 80 mm olarak ölçülen depremin Richter ölçeğine göre büyüklüğünü yaklaşık olarak bulunuz.
$(\log 2 \cong 0,3 \text{ ve } 1\text{mm} = 10^3 \text{ mikron})$

Ölçme ve Değerlendirme 1

A) 1-5. sorularda boş bırakılan yerlere uygun ifadeleri yazınız.

1 Tabanı e olan logaritma fonksiyonuna .... logaritma fonksiyonu denir.

2 $f(x) = \log_{(x-3)}(3x+6)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi ....olur.

3 $\log_3(\log x) = 4$ eşitliğinde x .... basamaklı bir sayıdır.

4 $3^{3+\log_3 4}$ ifadesinin eşiti ....olur.

5 $\log(1+\log x) = 0$ eşitliğinde x ....olur.

B) 6. soruda numaralar ile verilen ifadeleri harf ile verilen sonuçlarla eşleştiriniz.

6 I. $\log_2 256$

II. $\log_3 4 \cdot \log_4 19 \cdot \log_{19} 81$

III. $\dfrac{1}{\log_3 9} - \dfrac{1}{\log_{27} 9}$

IV. $8^{\log_2 5} - 5^{\log_{25} 16} - 9^{\log_3 \sqrt{11}}$

V. $\log_{0,001} 10$

VI. $\dfrac{1 - 4\log 0,01}{2 - 3\log \dfrac{1}{10\,000}}$

a) -1

b) $-\dfrac{1}{3}$

c) 8

ç) $\dfrac{9}{14}$

d) $-\dfrac{5}{6}$

e) 4

f) $\dfrac{1}{4}$

g) 110

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.

C) 7-12. açık uçlu soruları cevaplandırınız.

7 $\dfrac{\log_{\sqrt{2}}(x+2)}{\log_{\sqrt{2}}(x^2-2x+3)} = \dfrac{1}{2}$ olduğuna göre x değeri kaçtır?

8 $0 \le \log_2(x-5) \le \log_4 16$ eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının toplamı kaçtır?

9 $\dfrac{\ln^2 a - \ln^2 b}{\ln(a \cdot b)} = 2$ olduğuna göre $\dfrac{a}{b}$ oranı kaçtır?

10 $\log_2 3 = x$ olduğuna göre $\log_{36}\left(\dfrac{1}{12}\right)$ ifadesinin x türünden eşiti nedir?

11 $9^{\log_3(x+2)} = x^{\log_2 4}$ eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?

12 $\log_3(x-1) + \log_3(x+1) = \log_9 25$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

D) 13-32. çoktan seçmeli soruları çözünüz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

13 $f(x) = 3^{x-4}$

olduğuna göre $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3 + \log_4 x$ B) $3 + \log_2 x$ C) $4 + \log_3 x$ D) $4 + \log_2 x$ E) $3 + \log(x-4)$

14 $f(x) = \log_3(x-4)$

olduğuna göre $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $4^x + 3$ B) $3^x - 4$ C) $3^x - 2$ D) $4^x - 3$ E) $3^x + 4$

15 $f(x) = \log_x(5-x)$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesindeki doğal sayıların toplamı kaçtır?

A) 15 B) 10 C) 9 D) 6 E) 5

16 $3^{x+1} - 3^x = 12$

denklemini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\log_2 3$ B) $\log_2 6$ C) $\log_3 5$ D) $\log_3 6$ E) $\log_3 12$

17 **Aşağıdakilerden hangisi üstel fonksiyon <u>olamaz</u>?**

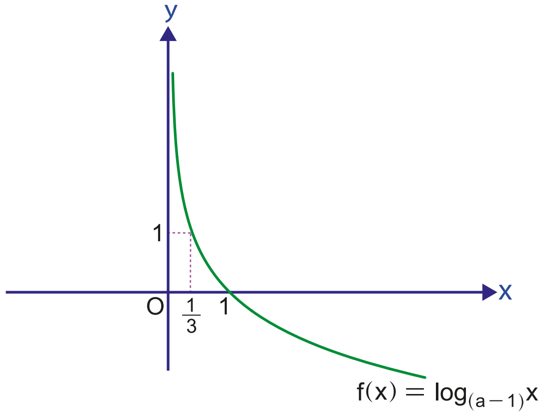
A) 2^x B) $\left(\frac{4}{3}\right)^x$ C) $(-3)^{2x}$ D) $(-2)^x$ E) e^{-x}

18 $\log 315 = x$
$\log 3 = y$
$\log 5 = z$

olduğuna göre $\log 7$ nin x, y ve z türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x - y - z$
B) $x - 2y - z$
C) $x - y - 2z$
D) $x - 2y - 2z$
E) $x - 2y + z$

19



Yukarıdaki şekilde $f(x) = \log_{(a-1)}x$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre $(f \circ f)\left(\frac{a}{36}\right)$ değeri kaçtır?

A) -3 B) -2 C) -1 D) 1 E) 2

20 $9^{\ln x} - 2 \cdot 3^{1+\ln x} + 9 = 0$

denklemini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) e C) e^2 D) 10 E) 100

21 $\log_2 5 = x$

olduğuna göre 16^{x-1} ifadesinin değeri kaçtır?

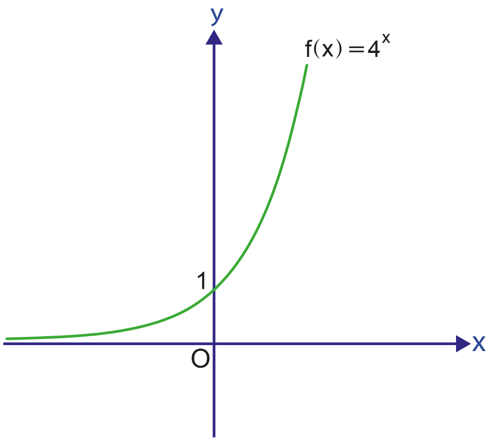
A) $\frac{16}{625}$ B) $\frac{16}{125}$ C) $\frac{25}{16}$ D) $\frac{125}{16}$ E) $\frac{625}{16}$

22 $\log 2 \cong 0,301$

olduğuna göre $\log 25$ in yaklaşık değeri kaçtır?

A) 0,398 B) 0,602 C) 1,398 D) 1,602 E)1,798

23



Yukarıdaki şekilde $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ da tanımlı $f(x) = 4^x$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $f(x)$ fonksiyonu artandır.

B) $f(x)$ fonksiyonu bire bir ve örtendir.

C) $f(2) < f(3)$ tür.

D) $f(x)$ in görüntü kümesi $(1, \infty)$ dur.

E) $f(x)$ in tersi $f^{-1}(x) = \log_4 x$ tir.

24 $x = \ln 3 + \ln 2$

$y = \ln 27 + \ln 4$

olduğuna göre $\ln 9$ un x ve y türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y - 2x$ B) $2y - 4x$ C) $3y - 6x$ D) $y + 2x$ E) $2y + x$

25 $\log_2 x = a$ ve $\log_2 y = b$

olduğuna göre $\log_4\left(\frac{x^2}{y}\right)$ ifadesinin a ve b türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a - \frac{b}{2}$ B) $a - b$ C) $a - 2b$ D) $2a - b$ E) $\frac{a}{2} - b$

26 $e^{2x} - 14e^x + 49 = 0$

denklemini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\ln 2$ B) $\ln 7$ C) $\ln 14$ D) $2\ln 7$ E) $3\ln 7$

27 $\log 12 = a$

$\log 3 = b$

olduğuna göre $\log 5$ in a ve b türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $1 - a + b$ B) $2 - a + b$ C) $\frac{1 - a + b}{2}$ D) $\frac{2 - a + b}{2}$ E) $\frac{2 - a + b}{3}$

28 $2^{x+4} = 80$

denklemini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\log_2 5$ B) $\log_2 10$ C) $\log_4 5$

D) $\log_4 10$ E) $\log_2 20$

29 $e^{x-1} = 4$

denklemini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\ln 2$ B) $\ln 4$ C) $\ln 2e$

D) $\ln 4e$ E) $\ln 8e$

30 $\ln[5 - \log_2(x-1)] = 0$

denklemini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3 B) 9 C) 11 D) 13 E) 17

31 $\log(2x+y) = \log 3x + \log 2y$

olduğuna göre y nin x türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{x}{3x-1}$ B) $\dfrac{2x}{6x-1}$ C) $\dfrac{2x}{3x-1}$

D) $\dfrac{3x}{6x-1}$ E) $\dfrac{2x}{9x-1}$

32 $\log_3(x+6) \cdot \log_x 3 = 2$

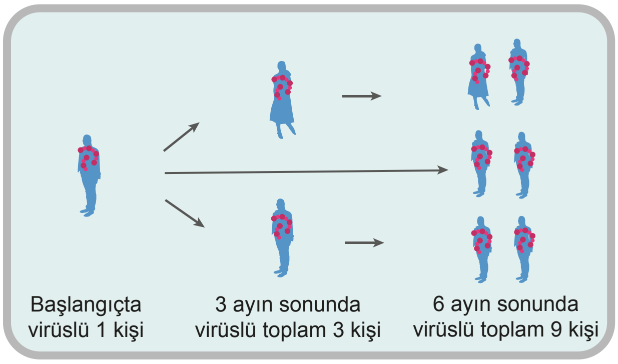
denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-2, 3\}$ B) $\{1, 3\}$ C) $\{2, 3\}$

D) $\{2\}$ E) $\{3\}$

E) 33-35. üst düzey beceri sorularını şekle ve metne göre cevaplayınız.

Bir bölgede yeni tespit edilen bir tür virüsün o bölgede yaşayan insanlara bulaşmaya başladığı görülmüştür.



Bir sağlık örgütü; virüs bulaşan her kişinin, virüsü 3 ayın sonunda 2 kişiye bulaştıracağını öngörmüştür.

Bu virüs ilk olarak 10 kişide tespit edilmiştir.

33 Bir yılın sonunda virüsün kaç kişiye bulaşacağı öngörülür?

34 n. yılın sonunda virüsün kaç kişiye bulaşacağını veren matematiksel model nedir?

35 Bu sağlık örgütünün virüsün yayılmasını önlemek için yaptığı tedavi ve önleme çalışmaları sonucunda virüsün ilk tespit edildiği andan 1 yıl sonra yayılma hızı düşmeye başlamıştır.

Birinci yılın ardından virüs bulaşan her kişinin virüsü 4 ayın sonunda 1 kişiye bulaştıracağı öngörülüyor.

Buna göre iki yılın sonunda sağlık örgütünün aldığı önlemler sonucunda virüsten etkilenen insan sayısının kaç kişi azalacağı öngörülür?

Ölçme ve Değerlendirme 2

A) 1-5. sorularda boş bırakılan yerlere uygun ifadeleri yazınız.

1 $\log_2 96 + \log_2 16 - \log_2 3$ işleminin sonucu .... olur.

2 $\log_{20} 16 + \log_{20} 25$ işleminin sonucu .... olur.

3 $f(x) = \log_4 (3x + 10)$ fonksiyonu için $f^{-1}(3) =$.............olur.

4 $\log(x \cdot y) = 6$ ve $\log\left(x^3 \cdot y^2\right) = 14$ olduğuna göre $x + y$ toplamı .... olur.

5 $3^{\log_x 5} = 5$ olduğuna göre x değeri ..... olur.

B) 6. soruda numaralar ile verilen eşitliklerdeki x değerlerini bularak harf ile verilen sonuçlarla eşleştiriniz.

6

I. $3^x = 81$

II. $2^x = 10$

III. $\log_4 x = 3$

IV. $\ln x = 4$

V. $\log_x 243 = 5$

VI. $4^{\log_5 x} + x^{\log_5 4} = 128$

VII. $\ln\left(e^{\log_5(\log_2 32)}\right) = x$

a) e^4

b) 125

c) $\log_2 10$

ç) 1

d) 4

e) $\log 2$

f) 64

g) e^2

h) 3

k) 81

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.

C) 7-12. açık uçlu soruları cevaplandırınız.

7 $\ln 3 + \ln a + \ln 2b = \ln(3a + b)$ olduğuna göre b nin a türünden eşiti nedir?

8 $f(x) = 2^x$ ve $(g o f)(x) = 3^x$ ise $g^{-1}(9)$ değeri kaçtır?

9 $f(x) = \log_7\left(-x^2 + 8x - 15\right)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?

10 $\log_{\frac{1}{2}}(x - 3) < 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

11 $\log_4\left(x^2 - 1\right) - \log_4(x - 1) = 1$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

12 $\ln^2 x - \ln\sqrt[3]{x} = 0$ denkleminin köklerinin çarpımı nedir?

D) 13-26. çoktan seçmeli soruları çözünüz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

13 $\log 5 = x$

olduğuna göre log 500 ün x türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $1 + x$ B) $2 + x$ C) $2 - x$ D) $2x$ E) $5 + x$

14 $\log_5[\log_3(\log_6 216)]$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

15 $\log_5 7 \cdot \log_{49} 125$

işleminin sonucu kaçtır?

A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{5}{2}$

16 $e^x = 2,\ e^y = 5$

olduğuna göre $\frac{y-x}{x+y}$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\log \frac{2}{5}$ B) $\log \frac{5}{2}$ C) $\log 2$ D) $\log 3$ E) $\log 5$

17 $a = \log_2 \sqrt[3]{2}$
$b = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$
$c = \log_e 1$

olduğuna göre $a + b + c$ toplamı kaçtır?

A) $-\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{5}{6}$

18 $5^{\log_{\sqrt{5}} 3} - 2^{\log_8 125}$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 14 B) 8 C) 6 D) 5 E) 4

19 $\log_{54} 8 = \frac{1}{x}$

olduğuna göre $\log_4 27$ nin x türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{3x-1}{6}$ B) $\frac{3x-1}{3}$ C) $\frac{3x-2}{3}$ D) $\frac{3x-2}{2}$ E) $\frac{3x-1}{2}$

20 $\log_4 100 = x$

olduğuna göre log 25 ifadesinin x türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $1 + \frac{1}{x}$ B) $1 + \frac{2}{x}$ C) $1 - \frac{2}{x}$ D) $2 - \frac{2}{x}$ E) $2 + \frac{2}{x}$

21 $\log_2 200$

sayısı hangi iki ardışık tam sayı arasında değer alır?

A) 3 ile 4 B) 4 ile 5 C) 5 ile 6 D) 6 ile 7 E) 7 ile 8

22 $\log_3 (x + 5) \geq 2$

eşitsizliğini sağlayan <u>en küçük</u> x tam sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

23 $\log_3(x^2-9)<3$

eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-6, 6)-[-3, 3]$

B) $(-6, 6)-(-3, 3)$

C) $(-6, 6)-(-3, 3]$

D) $[-6, 6]-[-3, 3]$

E) $[-6, 6]-(-3, 3)$

24 $\log_x(6x+7)=2$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-1, 7\}$ B) $\{2, 7\}$ C) $\{7\}$

D) $\{2\}$ E) $\{7, 49\}$

25 $\log_4(4^x-60)+x-4=0$

denklemini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

26 $\log_3(ax-2)=\log_9(2x+a)$

denkleminin kökü $x=2$ olduğuna göre a kaçtır?

A) 1 B) $\frac{5}{2}$ C) 2 D) 3 E) $\frac{9}{4}$

E) 27-29. üst düzey beceri sorularını metne göre cevaplayınız.

İnsanların birçok davranışının modellenmesinde logaritmik fonksiyonlardan yararlanılmaktadır. Bu davranışlardan bir tanesi de daha önce öğrenilmiş olan bilgilerin ne kadar sürede unutulduğu ile ilgilidir.

Örneğin belirli bir seviyede öğrenilmiş olan bir konuya ait bilgilerin belirli aralıklarla tekrar edilmemesi durumunda bu bilgilerin bir kısmı zamanla unutulabilir.

P_0: Bir konuya ait ölçülmüş olan ilk bilgi yüzdesi (Örneğin öğrencinin matematik dersinde sınava hazırlanması sonucunda %90 başarı göstermesi).

t: Öğrenilmiş bir bilginin üzerinden tekrar edilmeden geçen süre (ay).

P: t ay sonra ölçülen bilgi seviyesi.

c: Bir konuya ait bilginin unutulma katsayısı olmak üzere

$$\log P=\log P_0-c\cdot\log(t+1)$$

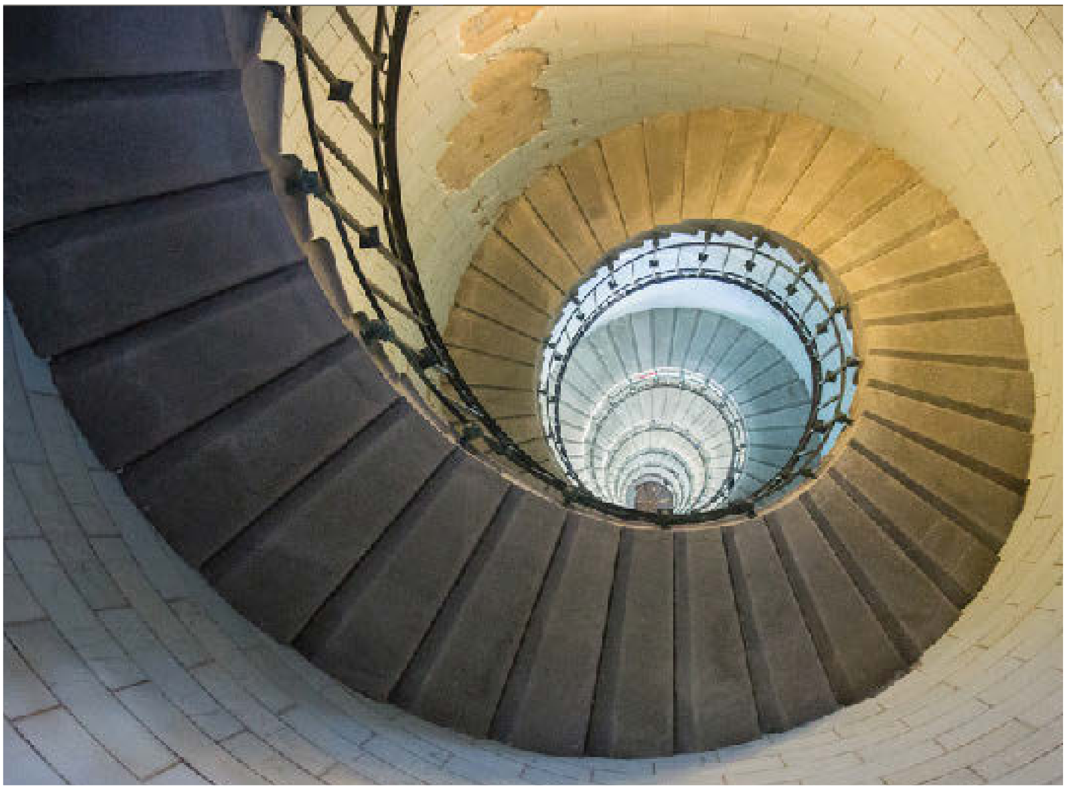
formülü ile t süre sonra bir bilginin hatırlanma seviyesi ölçülebilir.

Bir öğrencinin aynı gün girmiş olduğu matematik ve tarih sınavlarında bilgi seviyesi sırasıyla %80 ve %90 olarak ölçülmüştür. Bu sınavlarda matematik bilgisinin unutulma katsayısı 0,25 ve tarih bilgisinin unutulma katsayısı 0,5 olduğuna göre;

27 8 ay sonra aynı seviyedeki bir tarih sınavında bilgi seviyesi yüzde kaç olarak ölçülür?

28 Kaç ay sonra aynı seviyedeki bir matematik sınavında bilgi seviyesi %40 olarak ölçülür?

29 Öğrencinin matematik bilgi seviyesi ile tarih bilgi seviyesi kaç gün sonra eşit olur?



2

DİZİLER

2.1. GERÇEK SAYI DİZİLERİ

HAZIRLIK ÇALIŞMALARI

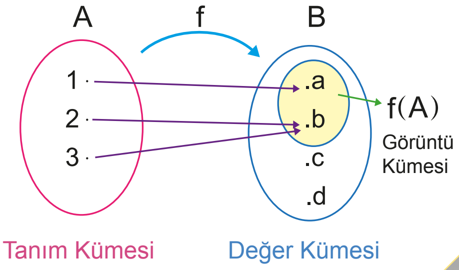
- Fonksiyon nedir?
- Tanım kümesi nedir?
- Bir fonksiyonun tanım kümesindeki elemanlarının görüntüleri nasıl bulunur?
- Ardışık sayılar arasında nasıl bir ilişki vardır?
- Ardışık sayıların toplamı nasıl bulunur?

2.1. GERÇEK SAYI DİZİLERİ

2.1.1. Dizi ve Fonksiyon Kavramları Arasındaki İlişki

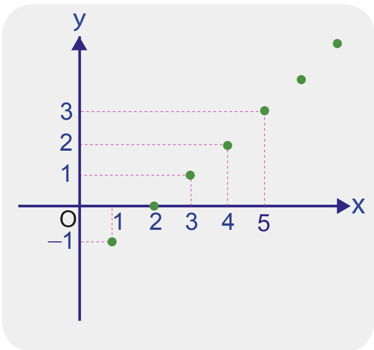
HATIRLATMA

A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere A kümesinin her bir elemanını, B kümesinin bir ve yalnız bir elemanı ile eşleyen ilişkiye A dan B ye tanımlı bir **fonksiyon** denir. f, g, h, ... harflerinden birisi ile $f: A \to B$ biçiminde gösterilir.

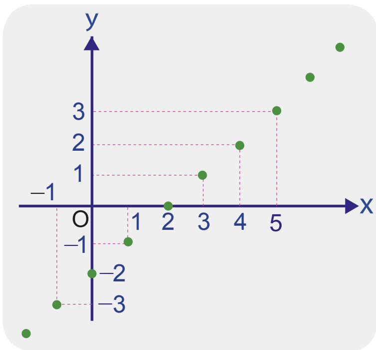


Aşağıda tanım ve değer kümeleri verilen fonksiyonların grafiklerini inceleyiniz.

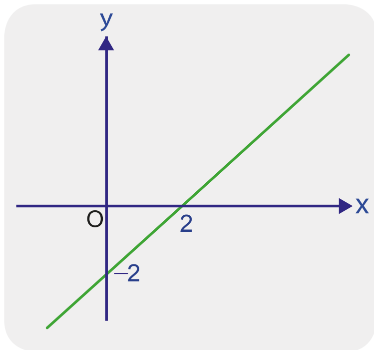
$f: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = x - 2$



$g: \mathbb{Z} \to \mathbb{R},\ g(x) = x - 2$



$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = x - 2$



Yukarıda grafikleri verilen f, g ve h fonksiyonları incelendiğinde tanım kümesi pozitif tam sayılar kümesi olan $f(x)$ fonksiyonunda

$$\mathbf{f(1) = -1,\ f(2) = 0,\ f(3) = 1,\ f(4) = 2,\ \dots,\ f(n) = n - 2, \dots}$$

gibi değerler almıştır. Pozitif tam sayılar kümesinden gerçek sayılar kümesine tanımlanan her fonksiyona **gerçek sayı dizisi** ya da kısaca **dizi** denir. Diziler genel olarak (a_n) ile gösterilir.

$n \in \mathbb{Z}^+$ için $f(n) = a_n$ ifadesine dizinin **n. terimi** veya **genel terimi** denir. Genel terimi verilmeyen sayı grupları dizi belirtmez.

$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ dizisinde $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ gerçek sayılarına **dizinin terimleri** denir.

Yukarıda verilen $f(x)$ fonksiyonu genel terimi a_n olan bir dizi olarak ifade edilirse $a_n: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R},\ (a_n) = (n - 2)$ biçiminde tanımlanır.

$f(1) = \mathbf{a_1 = -1}$ (a_1 dizinin birinci terimi)

$f(2) = \mathbf{a_2 = 0}$ (a_2 dizinin ikinci terimi)

$f(3) = \mathbf{a_3 = 1}$ (a_3 dizinin üçüncü terimi)

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$f(n) = \mathbf{a_n = n - 2}$ (a_n dizinin n inci terimi) olur.

ÖRNEK

$f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = 2n - 1$ ve $g: \mathbb{Z}^+ - \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(n) = \dfrac{2n+1}{n-3}$ fonksiyonunun bir dizi belirtip belirtmediğini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = 2n - 1$ fonksiyonunun tanım kümesi pozitif tam sayılar kümesi olduğundan genel terimi $a_n = 2n - 1$ olan bir dizi belirtir.
Tanım kümesi $\mathbb{Z}^+$ olan fonksiyonlar dizi belirtir. Oysa $n = 3$ için $g(n) = \dfrac{2n+1}{n-3}$ fonksiyonu tanımsız olmaktadır. $g(n)$ fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{Z}^+ - \{3\}$ olduğundan bu fonksiyon bir dizi belirtmez.

ÖRNEK

$(4, 8, 12, ...)$ ifadesinin bir dizi belirtip belirtmediğini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(4, 8, 12, ...)$ ifadesinde 4. terim 16 olmak zorunda değildir. Örneğin $a_n = (n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3) + 4n$ ifadesinde $a_1 = 4$, $a_2 = 8$, $a_3 = 12$ olmasına rağmen $a_4 = 22$ olmaktadır. Bu durumda 3. terimden sonraki terimlerin ancak genel terimin verilmesi ile bulunabileceği görülür. Buna göre bu ifade bir dizi belirtmez.

ÖRNEK

Aşağıda verilen ifadelerin bir dizinin genel terimi olup olmadığını bulunuz.

a) $a_n = \dfrac{n}{n+5}$ **b)** $b_n = \dfrac{3n}{n-2}$ **c)** $c_n = \sqrt{5-n}$

ç) $d_n = \log(n-2)$ **d)** $k_n = n^2 + 2n - 1$

ÇÖZÜM

a) $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $a_n \in \mathbb{R}$ olduğundan $a_n = \dfrac{n}{n+5}$ ifadesi bir gerçek sayı dizisinin genel terimidir.

b) $2 \in \mathbb{Z}^+$ için $b_2 \notin \mathbb{R}$ olduğundan $b_n = \dfrac{3n}{n-2}$ ifadesi bir gerçek sayı dizisinin genel terimi değildir.

c) $n > 5$ için $c_n = \sqrt{5-n}$ ifadesinde karekök içerisi sıfırdan küçük olmaktadır. Bu durumda $c_n \notin \mathbb{R}$ olduğundan $c_n = \sqrt{5-n}$ ifadesi bir gerçek sayı dizisinin genel terimi değildir.

ç) $n = 1$ ve $n = 2$ için $\log(n-2) \notin \mathbb{R}$ olduğundan $d_n = \log(n-2)$ ifadesi bir gerçek sayı dizisinin genel terimi değildir.

d) $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $k_n \in \mathbb{R}$ olduğundan $k_n = n^2 + 2n - 1$ ifadesi bir gerçek sayı dizisinin genel terimidir.

$k \in \mathbb{Z}^+$ ve $A_k = \{1,2,3,...,k\} \subseteq \mathbb{Z}^+$ olmak üzere tanım kümesi A_k olan her fonksiyona **sonlu dizi** denir.

ÖRNEK

$A_3 = \{1,2,3\}$ olmak üzere $a_n : A_3 \to \mathbb{R}$, $(a_n) = (n^3 - 1)$ sonlu dizisinin terimlerinin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

A_3, üç elemanlı bir küme olduğundan $(a_n) = (n^3 - 1)$ dizisinin üç terimi vardır.
$a_1 = 0,\ a_2 = 7,\ a_3 = 26$ terimlerinin toplamı $0 + 7 + 26 = 33$ olarak bulunur.

ÖRNEK

$A_6 = \{1,2,3,4,5,6\}$ olmak üzere $a_n : A_6 \to \mathbb{R}$, $(a_n) = (3n - 10)$ dizisinin pozitif olan terimlerinin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$a_n > 0 \Rightarrow 3n - 10 > 0 \Rightarrow n > \frac{10}{3}$ olmalıdır. O hâlde n yerine 4, 5 ve 6 yazılabilir.

$$\left.\begin{aligned} a_4 &= 3 \cdot 4 - 10 = 2 \\ a_5 &= 3 \cdot 5 - 10 = 5 \\ a_6 &= 3 \cdot 6 - 10 = 8 \end{aligned}\right\}$$ olduğundan pozitif terimlerin toplamı $2 + 5 + 8 = 15$ bulunur.

$c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için genel terimi $a_n = c$ olan diziye **sabit dizi** denir ve
$\mathbf{a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = c}$ olur.

ÖRNEK

Aşağıda verilen dizilerin sabit dizi olup olmadıklarını bulunuz.

a) $(a_n) = ((-1)^{2n})$ **b)** $(b_n) = (4)$ **c)** $(c_n) = (\cos(n\pi))$ **ç)** $(d_n) = (n^2 - 3n + 8)$

ÇÖZÜM

a) $(a_n) = ((-1)^{2n}) = (1) = (1, 1, 1, \ldots)$ sabit dizidir.

b) $(b_n) = (4) = (4, 4, 4, \ldots)$ sabit dizidir.

c) $(c_n) = (\cos(n\pi)) = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$ sabit dizi değildir.

ç) $(d_n) = (n^2 - 3n + 8) = (6, 6, 8, 12, \ldots)$ sabit dizi değildir.

ÖRNEK

$(a_n) = ((x-2)\cdot n^2 + (y-5)\cdot n + 4)$ dizisi sabit dizi olduğuna göre x ve y değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

(a_n) dizisinin sabit dizi olması için n^2 ve n nin katsayıları "0" olmalıdır.

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$y - 5 = 0 \Rightarrow y = 5$ bulunur.

ÖRNEK

$(a_n) = \left(\dfrac{3n+k}{6n+3}\right)$ dizisinin sabit dizi olması için k nin alabileceği değeri bulunuz.

ÇÖZÜM

1. Yol: (a_n) sabit dizi ise $a_1 = a_2$ olmalıdır. $a_1 = \dfrac{3+k}{6+3}$ ve $a_2 = \dfrac{6+k}{12+3}$ olduğundan

$$a_1 = a_2 \Rightarrow \frac{3+k}{9} = \frac{6+k}{15} \Rightarrow 15k + 45 = 54 + 9k$$
$$\Rightarrow 6k = 9$$
$$\Rightarrow k = \frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

2. Yol: $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ fonksiyonu sabit fonksiyon ise $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$ olur. (a_n) dizisi tanım kümesi $\mathbb{Z}^+$ olan bir fonksiyon olduğundan $(a_n) = \left(\dfrac{3n+k}{6n+3}\right)$ dizisi sabit dizi ise $\dfrac{3}{6} = \dfrac{k}{3}$ olmalıdır. Bu eşitlikten $k = \dfrac{3}{2}$ bulunur.

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $a_n = b_n$ oluyorsa (a_n) ve (b_n) dizilerine **eşit diziler** denir ve $(\mathbf{a_n}) = (\mathbf{b_n})$ şeklinde gösterilir.

ÖRNEK

$(a_n) = \left(\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)\right)$ dizisinin $(b_n) = \left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}(3+n)\right)\right)$ dizisine eşit olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

$$b_n = \cos\left(\frac{\pi}{2}(3+n)\right)$$
$$= \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{n\pi}{2}\right) \qquad \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x\right)$$
$$= \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$
$$= a_n \text{ olur.}$$

(a_n) ve (b_n) dizilerinin genel terimleri eşit olduğundan bu diziler eşit dizilerdir.

2.1.2. Genel Terimi veya İndirgeme Bağıntısı Verilen Bir Sayı Dizisinin Terimleri

Bir terimi kendinden önceki bir veya birkaç terim cinsinden tanımlanabilen dizilere **indirgemeli dizi**, tanımlama bağıntısına da **indirgeme bağıntısı** denir.

ÖRNEK

$(a_n) = (2n + 3)$ dizisine ait birkaç indirgeme bağıntısı bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} a_n = 2n + 3 &\Rightarrow a_{n+1} = 2(n+1) + 3 \\ &\Rightarrow a_{n+1} = 2n + 2 + 3 \\ &\Rightarrow a_{n+1} = 2n + 3 + 2 \\ &\Rightarrow a_{n+1} = a_n + 2 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Bu bağıntı, (a_n) dizisine ait bir indirgeme bağıntısıdır.

$a_{n+1} = a_n + 2$ indirgeme bağıntısında n yerine n ye bağlı ifadeler yazılarak yeni indirgeme bağıntıları elde edilebilir.

$a_{n+1} = a_n + 2$ ifadesinde n yerine $n + 2$ yazıldığında $a_{n+3} = a_{n+2} + 2$ biçiminde başka bir indirgeme bağıntısı elde edilmiş olur.

Ayrıca $a_{n+3} = a_{n+2} + 2$ ve $a_{n+1} = a_n + 2$ bağıntıları taraf tarafa çıkarılırsa

$$\begin{array}{rl} & a_{n+3} = a_{n+2} + 2 \\ - & a_{n+1} = a_n + 2 \\ \hline a_{n+3} - & a_{n+1} = a_{n+2} - a_n \end{array} \quad \text{olur.}$$

Buradan $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n$ biçiminde sabit sayı içermeyen yeni bir indirgeme bağıntısı elde edilmiş olur.

ÖRNEK

Bir (a_n) dizisinde $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $a_{n+1} = a_n + 4$ ve $a_4 = -10$ olduğuna göre a_{10} değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$n = 4$ için $a_5 = a_4 + 4 = -10 + 4 = -6$

$n = 5$ için $a_6 = a_5 + 4 = -6 + 4 = -2$

$n = 6$ için $a_7 = a_6 + 4 = -2 + 4 = 2$

$n = 7$ için $a_8 = a_7 + 4 = 2 + 4 = 6$

$n = 8$ için $a_9 = a_8 + 4 = 6 + 4 = 10$

$n = 9$ için $a_{10} = a_9 + 4 = 10 + 4 = 14$ bulunur.

ÖRNEK

$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \ (n \geq 1, n \in \mathbb{Z})$ indirgeme bağıntısı ile verilen bir dizide $a_1 = 2$ ve $a_2 = 5$ olduğuna göre a_4 değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$n = 1 \Rightarrow a_3 = a_2 - a_1 \Rightarrow a_3 = 5 - 2 \Rightarrow a_3 = 3$

$n = 2 \Rightarrow a_4 = a_3 - a_2 \Rightarrow a_4 = 3 - 5 \Rightarrow a_4 = -2$ bulunur.

ÖRNEK

$a_{n+1} = a_n + n - 1 \ (n \geq 1, n \in \mathbb{Z})$ indirgeme bağıntısı ile verilen bir dizide $a_1 = 3$ olduğuna göre a_{30} değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\left.\begin{array}{lll} n = 1 & \Rightarrow \cancel{a_2} = & a_1 + 1 - 1 \\ n = 2 & \Rightarrow \cancel{a_3} = & \cancel{a_2} + 2 - 1 \\ n = 3 & \Rightarrow \cancel{a_4} = & \cancel{a_3} + 3 - 1 \\ \vdots & & \vdots \\ n = 29 & \Rightarrow a_{30} = & \cancel{a_{29}} + 29 - 1 \end{array}\right\} \text{(Eşitlikler taraf tarafa toplanır.)}$$

$+$

$$a_{30} = \underbrace{a_1}_{3} + \underbrace{1 + 2 + 3 + \ldots + 29}_{\frac{29 \cdot 30}{2}} \underbrace{-1 - 1 - 1 - \ldots - 1}_{29 \text{ tane}} \qquad \left(1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= 3 + 435 - 29$$

$$= 409 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

Bir (a_n) dizisinde $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $a_{n+1} = 3^n \cdot a_n$ ve $a_3 = 9$ olduğuna göre a_{13} değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\left.\begin{array}{lll} n = 3 & \Rightarrow & \cancel{a_4} = 3^3 \cdot a_3 \\ n = 4 & \Rightarrow & \cancel{a_5} = 3^4 \cdot \cancel{a_4} \\ n = 5 & \Rightarrow & \cancel{a_6} = 3^5 \cdot \cancel{a_5} \\ \vdots & & \vdots \\ n = 12 & \Rightarrow & a_{13} = 3^{12} \cdot \cancel{a_{12}} \end{array}\right\} \text{(Eşitlikler taraf tarafa çarpılır.)}$$

$\times$

$$a_{13} = 3^3 \cdot 3^4 \cdot 3^5 \cdot \ldots \cdot 3^{12} \cdot a_3$$

$$= 3^{3+4+5+\ldots+12} \cdot a_3$$

$$= 3^{3+4+5+\ldots+12} \cdot 9$$

$$= 3^{75} \cdot 3^2 = 3^{77} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$a_n = a_{n-1} - 2$ $(n \geq 2, n \in \mathbb{Z})$ indirgeme bağıntısı ile verilen bir dizide $a_1 = 1$ olduğuna göre bu dizinin genel terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen $a_n = a_{n-1} - 2$ indirgeme bağıntısına göre

$$\left.\begin{array}{ll} n = 2 \Rightarrow & \cancel{a_2} = a_1 - 2 \\ n = 3 \Rightarrow & \cancel{a_3} = \cancel{a_2} - 2 \\ n = 4 \Rightarrow & \cancel{a_4} = \cancel{a_3} - 2 \\ \vdots & \quad\vdots \\ n = n \Rightarrow + & a_n = \cancel{a_{n-1}} - 2 \end{array}\right\} \text{(Eşitlikler taraf tarafa toplanır.)}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \underbrace{a_1}_{1} \underbrace{-2-2-2\ldots-2}_{n-1 \text{ tane}} \\ &= 1 - 2(n-1) \\ &= 3 - 2n \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

$$a_n = \begin{cases} (n-1)! & , \quad n \text{ tek ise} \\ n \cdot (n+1) & , \quad n \text{ çift ise} \end{cases}$$

biçiminde genel terimi verilen (a_n) dizisinde $\frac{a_8}{a_5}$ oranını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{a_8}{a_5} = \frac{8 \cdot 9}{(5-1)!} = \frac{72}{24} = 3 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$(a_n) = \left(\frac{2n+10}{n+1}\right)$ dizisinin tam sayı olan terimlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$(a_n) = \left(\frac{2n+10}{n+1}\right) = \left(\frac{2n+2+8}{n+1}\right) = \left(\frac{2n+2}{n+1} + \frac{8}{n+1}\right) = \left(\frac{2\cancel{(n+1)}}{\cancel{n+1}} + \frac{8}{n+1}\right)$$

$$= \left(2 + \frac{8}{n+1}\right) \text{ olur.}$$

Bu durumda (a_n) nin terimlerinin tam sayı olması için $\frac{8}{n+1}$ ifadesi tam sayı olmalıdır. Bu ifadenin tam sayı olması için n yerine 1, 3 ve 7 yazılabilir. Buna göre (a_n) dizisinin tam sayı terimleri a_1, a_3 ve a_7 olur. Bu terimler

$$a_1 = \frac{2 \cdot 1 + 10}{1+1} = 6$$

$$a_3 = \frac{2 \cdot 3 + 10}{3+1} = 4$$

$$a_7 = \frac{2 \cdot 7 + 10}{7+1} = 3 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$(a_n) = \left(\dfrac{n^2 - 10n + 21}{2n - 11}\right)$ dizisinin kaç teriminin negatif olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$\dfrac{n^2 - 10n + 21}{2n - 11} < 0$ eşitsizliğini sağlayan n pozitif tam sayıları bulunmalıdır.

$\dfrac{(n-3)(n-7)}{2n-11} < 0$ eşitsizliğinde kökler 3, 7 ve $\dfrac{11}{2}$ dir.

n	$-\infty$	3		$\frac{11}{2}$		7		∞
a_n	$-$		$+$		$-$		$+$	

Boyalı kısımlardaki n pozitif tam sayıları 1, 2 ve 6 dır. Bu dizide a_1, a_2 ve a_6 negatif olduğundan (a_n) dizisinin 3 terimi negatiftir.

ÖRNEK

$(a_n) = \left(\dfrac{20 - 2n}{2n - 13}\right)$ dizisinin hangi terimlerinin pozitif olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$\dfrac{20 - 2n}{2n - 13} > 0$ eşitsizliğini sağlayan n pozitif tam sayıları bulunmalıdır.

Bu eşitsizlikte kökler 10 ve $\dfrac{13}{2}$ dir.

n	$-\infty$		$\frac{13}{2}$		10		∞
a_n		$-$		$+$		$-$	

Boyalı kısımdaki n pozitif tam sayıları 7, 8 ve 9 olduğundan (a_n) dizisinde a_7, a_8 ve a_9 terimleri pozitiftir.

ÖRNEK

$(a_n) = (n^2 - 4n - 12)$ dizisinin en küçük terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolü en büyük veya en küçük değerini tepe noktasında alır.

$a > 0$ ise $r = -\dfrac{b}{2a}$ ve $k = f(r)$ olduğundan f fonksiyonunun en küçük değeri $k = f(r)$ olur.

$(a_n) = (an^2 + bn + c)$ dizisinin tanım kümesi $\mathbb{Z}^+$ olduğundan $r = -\dfrac{b}{2a} \in \mathbb{Z}^+$ ise (a_n) dizisinin en küçük terimi a_r olur. $r = -\dfrac{b}{2a} \notin \mathbb{Z}^+$ ise r yerine en yakın pozitif tam sayı alınarak a_n nin en büyük ya da en küçük değeri bulunur. $a_n = (n^2 - 4n - 12)$ ise $r = -\dfrac{b}{2a} = 2$ olur.

Bu durumda dizinin en küçük terimi $k = a_2 = -16$ bulunur.

Alıştırmalar

1 Aşağıda verilen ifadelerin, bir dizinin genel terimi olup olmadığını bulunuz.

a) $a_n = \dfrac{5n}{n-5}$

b) $b_n = n^2 + 6n + 100$

c) $c_n = \log(n^2 - 36)$

ç) $d_n = \sqrt[4]{n+24}$

d) $e_n = n^2 - n! + \log\left(n - \dfrac{3}{2}\right)$

2 $A_4 = \{1,2,3,4\}$ olmak üzere

$a_n : A_4 \to \mathbb{R},\ (a_n) = (n^2 - 2)$

sonlu dizisinin terimleri toplamını bulunuz.

3 $(a_n) = \left(\dfrac{3n^2 - mn + 5}{n^2 + pn + k}\right)$ dizisi sabit dizi olduğuna göre $\dfrac{p}{m} + k$ toplamını bulunuz.

4 $A_{12} = \{1,2,3,...,12\}$ kümesi verilliyor.

$a_n : A_{12} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $(a_n) = (2n)$ dizisinin terimleri toplamını bulunuz.

5 $a_{n+1} = a_n + 6n$ indirgeme bağıntısı ile verilen (a_n) dizisinde $a_1 = 4$ olduğuna göre (a_n) dizisinin genel terimini bulunuz.

6 $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 5a_n \quad (n \geq 1)$

biçiminde indirgeme bağıntısı verilen (a_n) dizisinde $a_2 = 1$ ve $a_3 = 3$ olduğuna göre $a_6 + a_7$ toplamını bulunuz.

7 $(a_n) = \left(\dfrac{n^2 - 8n + 12}{n + 3}\right)$ dizisinin kaç teriminin negatif olduğunu bulunuz.

8 $(a_n) = (\log_3(n+4))$ dizisinin kaç teriminin 4 ten küçük olduğunu bulunuz.

9 $(a_n) = \left(\dfrac{24}{n^2 - 6n + 10}\right)$ dizisinin <u>en büyük</u> terimini bulunuz.

10
- $(a_n) = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)$
- $(b_n) = \left(\dfrac{x \cdot n^2 + 2n}{y - 1}\right)$
- $(a_n) = (b_n)$

olduğuna göre $x + y$ toplamını bulunuz.

2.1.3. Aritmetik, Geometrik Diziler ve Özellikleri

Toplam Sembolü $\left(\sum\right)$

$f:\mathbb{Z}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(k)=a_k$, $r\le n$ ve $r, n\in\mathbb{Z}$ olmak üzere

$\sum\limits_{k=r}^{n} a_k = a_r + a_{r+1} + a_{r+2} + \ldots + a_n$ olur.

Bu ifadede k ye **indis** ya da **değişken**, r ye **alt sınır**, n ye ise **üst sınır** denir.

Aşağıda toplam sembolü ile verilen eşitlikleri inceleyiniz.

- $\sum\limits_{k=1}^{6} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$
- $\sum\limits_{k=1}^{12} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 12^2$
- $\sum\limits_{k=1}^{7} k = 1+2+3+4+5+6+7$
- $\sum\limits_{k=2}^{9} (3k+1) = 7+10+13+\ldots+28$
- $\sum\limits_{k=5}^{8} 2k = 10+12+14+16$
- $\sum\limits_{k=1}^{10} 2^k = 2^1+2^2+2^3+\ldots+2^{10}$
- $2+4+6+\ldots+26 = \sum\limits_{k=1}^{13} 2k$
- $20+21+22+\ldots+32 = \sum\limits_{k=20}^{32} k$
- $5+7+9+\ldots+19 = \sum\limits_{k=1}^{8} (2k+3)$
- $a_6 + a_7 + a_8 + \ldots + a_{30} = \sum\limits_{k=6}^{30} a_k$

Aritmetik Diziler ve Özellikleri

Ardışık terimleri arasındaki farkın sabit olduğu dizilere **aritmetik dizi** denir.

(a_n) aritmetik dizisinde

$$\mathbf{a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = a_{n+1} - a_n = d}$$

olacak şekilde bir d gerçek sayısı vardır. Bu d sayısına **aritmetik dizinin ortak farkı** denir.

İlk terimi a_1 ve ortak farkı d olan bir (a_n) aritmetik dizisinin genel terimi

$$\mathbf{a_n = a_1 + (n-1)\cdot d} \text{ olur.}$$

(a_n) aritmetik dizisinin ardışık terimleri arasındaki fark sabit ve d olduğundan

$$\left.\begin{aligned}
\cancel{a_2} - a_1 &= d\\
\cancel{a_3} - \cancel{a_2} &= d\\
\cancel{a_4} - \cancel{a_3} &= d\\
&\vdots\\
+\quad a_n - \cancel{a_{n-1}} &= d
\end{aligned}\right\}\ \text{(Elde edilen } n-1 \text{ tane eşitlik taraf tarafa toplanır.)}$$

$$a_n - a_1 = \underbrace{d + d + \ldots + d}_{n-1\ \text{tane}} \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$

ÖRNEK

İlk terimi $a_1 = 7$ ve ortak farkı $d = 4$ olan bir aritmetik dizinin genel terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\cdot d \qquad (a_1 = 7 \text{ ve } d = 4) \\ &= 7 + (n-1)\cdot 4 \\ &= 7 + 4n - 4 \\ &= 4n + 3 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖZELLİK 1

Bir aritmetik dizide $p \in \mathbb{Z}^+$ ve $p < n$ olmak üzere

$$\mathbf{a_n = a_p + (n - p)\cdot d} \text{ olur.}$$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\cdot d \\ - \quad a_p &= a_1 + (p-1)\cdot d \end{aligned}\right\} \text{(Eşitlikler taraf tarafa çıkarılır.)}$$

$$\begin{aligned} a_n - a_p &= \cancel{a_1} - \cancel{a_1} + (n-1)\cdot d - (p-1)\cdot d \\ a_n - a_p &= n\cdot d - \cancel{d} - p\cdot d + \cancel{d} \\ a_n - a_p &= (n-p)\cdot d \\ a_n &= a_p + (n-p)\cdot d \end{aligned}$$

ÖRNEK

(a_n) bir aritmetik dizi olmak üzere $a_5 = 14$ ve $a_{11} = 29$ olduğuna göre a_{19} değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} a_n = a_p + (n-p)\cdot d &\Rightarrow a_{11} = a_5 + (11-5)\cdot d \\ &\Rightarrow 29 = 14 + 6d \\ &\Rightarrow d = \frac{5}{2} \text{ olur.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{19} &= a_{11} + (19-11)\cdot d \\ &= 29 + 8\cdot\frac{5}{2} \\ &= 49 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

(a_n) bir aritmetik dizi olmak üzere $\dfrac{a_5 - a_2 + a_{10}}{a_{13}}$ ifadesinin en sade biçimini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} a_5 &= a_1 + 4d \\ a_2 &= a_1 + d \\ a_{10} &= a_1 + 9d \\ a_{13} &= a_1 + 12d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{a_5 - a_2 + a_{10}}{a_{13}} &= \frac{a_1 + 4d - (a_1 + d) + a_1 + 9d}{a_1 + 12d} \\ &= \frac{\cancel{a_1} + 4d - \cancel{a_1} - d + a_1 + 9d}{a_1 + 12d} \\ &= \frac{a_1 + 12d}{a_1 + 12d} = 1 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖZELLİK 2

Bir aritmetik dizinin n. terimi a_n, p. terimi a_p olmak üzere bu dizinin ortak farkı

$$\mathbf{d = \frac{a_n - a_p}{n - p}} \text{ olur.}$$

$$a_n = a_p + (n-p)\cdot d \Rightarrow a_n - a_p = (n-p)\cdot d \Rightarrow d = \frac{a_n - a_p}{n-p}$$

ÖRNEK

Üçüncü terimi 17 ve onuncu terimi 73 olan bir aritmetik dizinin ortak farkını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$d = \frac{a_n - a_p}{n - p} \Rightarrow d = \frac{a_{10} - a_3}{10 - 3} \qquad (n = 10 \text{ ve } p = 3)$$

$$\Rightarrow d = \frac{73 - 17}{10 - 3} \qquad (a_{10} = 73 \text{ ve } a_3 = 17)$$

$$\Rightarrow d = 8 \text{ bulunur.}$$

ÖZELLİK 3

Sonlu bir aritmetik dizide baştan ve sondan eşit uzaklıkta bulunan terimlerin toplamı birbirine eşittir. $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n)$ dizisinde

$$\mathbf{a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = ... = a_k + a_{n-k+1}} \text{ olur.}$$

$$a_1 + a_n = a_1 + a_1 + (n-1)\cdot d = 2a_1 + (n-1)\cdot d$$

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_1 + (n-2)\cdot d = 2a_1 + (n-1)\cdot d$$

$$\vdots$$

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + (k-1)\cdot d + a_1 + (n-k+1-1)\cdot d = 2a_1 + (n-1)\cdot d$$

ÖRNEK

11 terimli bir aritmetik dizinin 2. terimi 5 ve 10. terimi 37 dir. Bu aritmetik dizinin 5. ve 7. terimlerinin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11})$ sonlu aritmetik dizisinde

$a_1 + a_{11} = a_2 + a_{10} = a_3 + a_9 = a_4 + a_8 = a_5 + a_7$ olur. Buna göre

$$a_5 + a_7 = a_2 + a_{10}$$
$$= 5 + 37$$
$$= 42 \text{ bulunur.}$$

SONUÇ

Bir aritmetik dizide k, p, s, $t \in \mathbb{Z}^+$ için $k + p = s + t$ ise $a_k + a_p = a_s + a_t$ olur.

ÖRNEK

Sonlu bir aritmetik dizide $a_8 = 10$, $a_3 + a_{21} = 40$ olduğuna göre a_{16} değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$a_3 + a_{21} = a_8 + a_{16}$$
$$40 = 10 + a_{16}$$
$$a_{16} = 30 \text{ bulunur.}$$

ÖZELLİK 4

Bir aritmetik dizide her terim kendisinden eşit uzaklıktaki terimlerin aritmetik ortalamasına eşittir. $k < p$ için

$$\mathbf{a_p = \frac{a_{p+k} + a_{p-k}}{2}} \text{ olur.}$$

$$a_{p+k} + a_{p-k} = a_1 + (p+k-1)\cdot d + a_1 + (p-k-1)\cdot d$$
$$a_{p+k} + a_{p-k} = 2a_1 + (p + \cancel{k} - 1 + p - \cancel{k} - 1)\cdot d$$
$$a_{p+k} + a_{p-k} = 2a_1 + 2(p-1)\cdot d$$
$$a_{p+k} + a_{p-k} = 2\underbrace{(a_1 + (p-1)\cdot d)}_{a_p}$$
$$a_{p+k} + a_{p-k} = 2a_p$$
$$a_p = \frac{a_{p+k} + a_{p-k}}{2}$$

ÖRNEK

Bir aritmetik dizide $a_7 = 4$ ve $a_{19} = 28$ olduğuna göre a_{13} değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

a_{13} terimi, a_7 ve a_{19} terimlerine eşit uzaklıktadır. Bu durumda

$$a_{13} = \frac{a_7 + a_{19}}{2} = \frac{4 + 28}{2} = 16 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

İlk üç terimi sırasıyla $3x - 4$, $x + 5$ ve $4x - 1$ olan aritmetik dizinin ortak farkını bulunuz.

ÇÖZÜM

$a_1 = 3x - 4$, $a_2 = x + 5$ ve $a_3 = 4x - 1$ olur.

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} \Rightarrow x + 5 = \frac{3x - 4 + 4x - 1}{2}$$
$$\Rightarrow 7x - 5 = 2x + 10$$
$$\Rightarrow x = 3 \text{ olur.}$$

Bu durumda ilk üç terim 5, 8, 11 olduğundan ortak fark 3 bulunur.

ÖRNEK

Bir beşgende iç açılar bir aritmetik dizinin ardışık terimleridir. Bu beşgenin en küçük iç açısının ölçüsü 90° olduğuna göre en büyük iç açısının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Beşgenin iç açılarının ölçüleri toplamı $(5-2)\cdot 180^\circ = 540^\circ$ olduğundan

$$\begin{aligned} a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 &= 540^\circ \\ 90^\circ+(90^\circ+d)+(90^\circ+2d)+(90^\circ+3d)+(90^\circ+4d) &= 540^\circ \\ 450^\circ+10d &= 540^\circ \\ 10d &= 90^\circ \\ d &= 9^\circ \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Böylece en büyük iç açısının ölçüsü $a_5 = 90^\circ + 4d = 90^\circ + 4\cdot 9^\circ = 90^\circ + 36^\circ = 126^\circ$ bulunur.

Bir Aritmetik Dizinin İlk n Teriminin Toplamı

Ortak farkı d olan bir aritmetik dizinin ilk n teriminin toplamı S_n ile gösterilirse

$$\begin{aligned} \mathbf{S_n} &= \mathbf{\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)\cdot d)} \\ &= \mathbf{\frac{n}{2}(a_1+a_n)} \text{ olur.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= a_1+a_2+a_3+\dots+a_n \\ &= a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\dots+(a_1+(n-1)d) \\ &= \underbrace{(a_1+a_1+a_1+\dots+a_1)}_{n \text{ tane}}+\underbrace{(d+2d+\dots+(n-1)d)}_{(1+2+\dots+n-1)\cdot d} \\ &= n\cdot a_1+\frac{(n-1)\cdot n}{2}\cdot d \\ &= \frac{2n\cdot a_1+(n-1)\cdot n\cdot d}{2} \\ &= \frac{n}{2}(2a_1+(n-1)\cdot d) \\ &= \frac{n}{2}(a_1+\overbrace{a_1+(n-1)\cdot d}^{a_n}) \\ &= \frac{n}{2}(a_1+a_n) \end{aligned}$$

ÖRNEK

$(a_n) = (3n-8)$ aritmetik dizisinin ilk 10 teriminin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

Dizinin ilk terimi $a_1 = 3\cdot 1 - 8 = -5$ ve 10. terimi $a_{10} = 3\cdot 10 - 8 = 22$ olduğundan

$S_{10} = \frac{10}{2}(a_1+a_{10}) \Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}(-5+22) = 5\cdot 17 = 85$ bulunur.

ÖRNEK

2. terimi 7, 11. terimi 43 olan bir aritmetik dizinin ilk 20 teriminin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$d = \frac{a_k - a_p}{k - p} = \frac{a_{11} - a_2}{11 - 2} = \frac{43 - 7}{9} = 4 \text{ olur.}$$

$$a_2 = a_1 + d$$
$$7 = a_1 + 4$$
$$a_1 = 3 \text{ bulunur.}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)\cdot d)$$
$$S_{20} = \frac{20}{2}(2\cdot 3 + (20-1)\cdot 4) = 10\cdot 82 = 820 \text{ bulunur.}$$

Uyarı

S_n bir (a_n) dizisinin ilk n teriminin toplamı olmak üzere

- $\mathbf{S_{n+1} - S_n} = (\cancel{a_1} + \cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \ldots + \cancel{a_n} + \mathbf{a_{n+1}}) - (\cancel{a_1} + \cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \ldots + \cancel{a_n})$
  $= \mathbf{a_{n+1}}$ olur.

- $p \in \mathbb{Z}^+$ ve $p < n$ olmak üzere
  $\mathbf{S_n - S_p} = (\cancel{a_1} + \cancel{a_2} + \ldots + \cancel{a_p} + \mathbf{a_{p+1}} + \mathbf{a_{p+2}} + \ldots + \mathbf{a_n}) - (\cancel{a_1} + \cancel{a_2} + \ldots + \cancel{a_p})$
  $= \mathbf{a_{p+1}} + \mathbf{a_{p+2}} + \ldots + \mathbf{a_n}$ olur.

ÖRNEK

İlk n teriminin toplamı $S_n = n^2 - 3n$ olan (a_n) aritmetik dizisinde aşağıdaki ifadelerin değerini bulunuz.

a) a_{11}

b) $a_3 + a_4 + a_5 + a_6$

ÇÖZÜM

a) $a_{11} = S_{11} - S_{10}$
$= (11^2 - 3\cdot 11) - (10^2 - 3\cdot 10)$
$= 88 - 70$
$= 18$ bulunur.

b) $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = S_6 - S_2$
$= (6^2 - 3\cdot 6) - (2^2 - 3\cdot 2)$
$= 18 - (-2)$
$= 20$ bulunur.

ÖRNEK

İlk n teriminin toplamı $S_n = \dfrac{n^2 + 3n}{2}$ olan bir aritmetik dizinin ortak farkını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$a_1 = S_1 = \frac{1^2 + 3\cdot 1}{2} = 2$$

$$a_2 = S_2 - S_1 = \frac{2^2 + 3\cdot 2}{2} - \frac{1^2 + 3\cdot 1}{2} = 3 \text{ olur.}$$

$d = a_2 - a_1 = 3 - 2 = 1$ bulunur.

Alıştırmalar

1 $5 + 8 + 11 + 14 + ... + 122$ toplamının Σ sembolü ile gösterimini bulunuz.

2 10. terimi 66 ve 3. terimi -4 olan bir aritmetik dizinin ortak farkını bulunuz.

3 18. terimi, 11. teriminden 105 fazla olan bir aritmetik dizide 20. terim ile 15. terim arasındaki farkı bulunuz.

4 36 ile -24 sayıları arasına, bu sayılarla birlikte azalan bir aritmetik dizi oluşturacak şekilde 8 terim yerleştiriliyor. Buna göre oluşan bu dizinin 6. terimini bulunuz.

5 (a_n) bir aritmetik dizi olmak üzere $a_2 + a_6 + a_{10} = 15$ olduğuna göre $a_1 + a_{11}$ toplamını bulunuz.

6 İlk terimi 5 olan bir aritmetik dizinin ilk 30 teriminin toplamı 1020 olduğuna göre bu dizinin 5. terimini bulunuz.

7 İlk terimi $a_1 = -4$, ortak farkı $d = 5$ ve son terimi 91 olan sonlu aritmetik dizinin terim sayısını bulunuz.

8 8 terimli bir aritmetik dizinin ilk beş teriminin toplamı, son üç teriminin toplamının $\frac{2}{3}$ katına eşittir. Buna göre bu dizinin 7. teriminin 3. terimine oranını bulunuz.

9 Bir aritmetik dizinin ilk üç terimi $x + 7$, $2x + 5$ ve $4x - 3$ olduğuna göre bu dizinin ilk 7 teriminin toplamını bulunuz.

10 İlk n teriminin toplamı $n^2 + 2n$ olan bir aritmetik dizinin 16. terimini bulunuz.

Geometrik Diziler ve Özellikleri

Ardışık terimleri arasındaki oranı sabit olan dizilere **geometrik dizi** denir.

Bir (a_n) geometrik dizisinde $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$ $(a_n \neq 0)$ ise r gerçek sayısına (a_n) geometrik dizisinin **ortak çarpanı** denir. İlk terimi a_1 ve ortak çarpanı r olan (a_n) geometrik dizisinin genel terimi

$$\mathbf{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}} \text{ olur.}$$

(a_n) geometrik dizisinin ardışık terimleri arasındaki oran sabit ve r olduğundan

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \Rightarrow a_{n+1} = a_n \cdot r$$

$$\left.\begin{aligned} \cancel{a_2} &= a_1 \cdot r \\ \cancel{a_3} &= \cancel{a_2} \cdot r \\ \cancel{a_4} &= \cancel{a_3} \cdot r \\ &\vdots \\ \times \quad a_n &= \cancel{a_{n-1}} \cdot r \end{aligned}\right\} \text{(Elde edilen } n-1 \text{ tane eşitlik taraf tarafa çarpılır.)}$$

$$a_n = a_1 \cdot \underbrace{r \cdot r \cdot \ldots \cdot r}_{n-1 \text{ tane}}$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

ÖRNEK

Aşağıdaki dizilerden geometrik dizi olanı bulunuz.

a) $(a_n) = (3n + 5)$ **b)** $(c_n) = (2^{n+2})$

ÇÖZÜM

a) $r = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{3(n+1)+5}{3n+5} = \dfrac{3n+8}{3n+5}$ ifadesinin değeri n nin alacağı değerlere göre değişir. $\dfrac{3n+8}{3n+5}$ ifadesi sabit sayı olmadığından bir geometrik dizinin ortak çarpanı olamaz. O hâlde (a_n) bir geometrik dizi değildir.

b) $r = \dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{2^{n+1+2}}{2^{n+2}} = 2$ olduğundan (c_n) ortak çarpanı $r = 2$ olan bir geometrik dizidir.

ÖRNEK

İlk terimi 5, ortak çarpanı 3 olan bir geometrik dizinin 5. terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

$a_1 = 5$ ve $r = 3$ olduğundan $a_5 = a_1 \cdot r^{5-1} = 5 \cdot 3^4 = 5 \cdot 81 = 405$ bulunur.

ÖRNEK

Pozitif terimli bir geometrik dizide $\dfrac{a_2 + a_3}{a_4 + a_5} = \dfrac{1}{36}$ olduğuna göre bu dizinin ortak çarpanını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2}{a_1 \cdot r^3 + a_1 \cdot r^4} = \frac{1}{36} \Rightarrow \frac{\cancel{a_1} \cdot r \cdot \cancel{(1+r)}}{\cancel{a_1} \cdot r^3 \cdot \cancel{(1+r)}} = \frac{1}{36}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{1}{36} \Rightarrow r^2 = 36 \Rightarrow r = 6 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

(a_n) geometrik dizisinde 20. terimin 17. terime oranı 27 olduğuna göre bu dizinin ortak çarpanını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{a_{20}}{a_{17}} = 27 \Rightarrow \frac{\cancel{a_1} \cdot r^{19}}{\cancel{a_1} \cdot r^{16}} = 27 \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3 \text{ bulunur.}$$

ÖZELLİK 1

Ortak çarpanı r olan (a_n) geometrik dizisinde $1 \leq k < n$ ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$\mathbf{a_n = a_k \cdot r^{n-k}} \text{ olur.}$$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= a_1 \cdot r^{n-1} \\ a_k &= a_1 \cdot r^{k-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{a_n}{a_k} = \frac{\cancel{a_1} \cdot r^{n-1}}{\cancel{a_1} \cdot r^{k-1}} = r^{n-k} \quad \text{(Eşitlikler taraf tarafa bölünür.)}$$

$$\Rightarrow a_n = a_k \cdot r^{n-k}$$

ÖRNEK

Bir geometrik dizide 2. terim 36, ortak çarpan $\dfrac{2}{3}$ ise dizinin 7. terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$a_n = a_k \cdot r^{n-k} \Rightarrow a_7 = a_2 \cdot r^{7-2}$$

$$= 36 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

$$= 36 \cdot \frac{32}{243} = \frac{128}{27} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

Bir (a_n) geometrik dizisinde $a_5 = \frac{10}{9}$ ve $a_{10} = 270$ olduğuna göre a_{12} değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$a_n = a_k \cdot r^{n-k} \Rightarrow a_{10} = a_5 \cdot r^{10-5}$$
$$\Rightarrow 270 = \frac{10}{9} \cdot r^5$$
$$\Rightarrow 243 = r^5$$
$$\Rightarrow 3^5 = r^5$$
$$\Rightarrow r = 3 \text{ olur.}$$

$$a_n = a_k \cdot r^{n-k} \Rightarrow a_{12} = a_{10} \cdot r^2$$
$$= 270 \cdot 3^2$$
$$= 2430 \text{ bulunur.}$$

ÖZELLİK 2

Sonlu bir geometrik dizide baştan ve sondan eşit uzaklıkta bulunan terimlerin çarpımı birbirine eşittir.

$$\mathbf{a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = \ldots = a_k \cdot a_{n-k+1}}$$

$$a_1 \cdot a_n = a_1 \cdot a_1 \cdot r^{n-1} = a_1^2 \cdot r^{n-1}$$
$$a_2 \cdot a_{n-1} = a_1 \cdot r \cdot a_1 \cdot r^{n-2} = a_1^2 \cdot r^{n-1}$$
$$\vdots$$
$$a_k \cdot a_{n-k+1} = a_1 \cdot r^{k-1} \cdot a_1 \cdot r^{n-k} = a_1^2 \cdot r^{n-1}$$

ÖRNEK

$(a_n) = \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, a, b, c, d, e, 243\right)$ sonlu geometrik dizisi veriliyor. Buna göre $b \cdot c$ çarpımını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$a_1 \cdot a_8 = a_2 \cdot a_7 = a_3 \cdot a_6 = a_4 \cdot a_5 \Rightarrow \frac{1}{9} \cdot 243 = \frac{1}{3} \cdot e = a \cdot d = b \cdot c \text{ olur.}$$
$$\Rightarrow b \cdot c = \frac{243}{9} = 27 \text{ bulunur.}$$

ÖZELLİK 3

Pozitif terimli bir geometrik dizide $k > p$ için k. terim a_k ve p. terim a_p olmak üzere dizinin ortak çarpanı

$$\mathbf{r = \sqrt[k-p]{\frac{a_k}{a_p}}} \text{ olur.}$$

$$a_k = a_p \cdot r^{k-p} \Rightarrow r^{k-p} = \frac{a_k}{a_p}$$ (Her iki tarafın $(k-p)$. dereceden kökü alınır.)

$$\Rightarrow r = \sqrt[k-p]{\frac{a_k}{a_p}}$$

ÖRNEK

Bir (a_n) geometrik dizisinde $a_7 = 1458$ ve $a_3 = 18$ olduğuna göre bu dizinin ortak çarpanını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$r = \sqrt[k-p]{\frac{a_k}{a_p}} \Rightarrow r = \sqrt[7-3]{\frac{1458}{18}} \qquad (k = 7,\ p = 3,\ a_7 = 1458,\ a_3 = 18)$$

$$\Rightarrow r = \sqrt[4]{81}$$

$$\Rightarrow r = 3 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$(a_n) = (4, a, b, c, 16, d, e, f)$ sonlu geometrik dizisinde f yi bulunuz.

ÇÖZÜM

$$r = \sqrt[k-p]{\frac{a_k}{a_p}} \Rightarrow r = \sqrt[5-1]{\frac{16}{4}} \qquad (k = 5,\ p = 1,\ a_5 = 16,\ a_1 = 4)$$

$$\Rightarrow r = \sqrt[4]{4}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{2} \text{ bulunur.}$$

$f = a_8 = a_5 \cdot r^3 = 16 \cdot (\sqrt{2})^3 = 16 \cdot 2\sqrt{2} = 32\sqrt{2}$ bulunur.

ÖRNEK

İlk üç terimi $3x - 5$, 4, $2y - 6$ olan (a_n) dizisi hem aritmetik hem de geometrik dizidir. İlk terimi x, beşinci terimi y olan (b_n) aritmetik dizisi ile ilk terimi x, ikinci terimi y olan (c_n) geometrik dizisi veriliyor. Buna göre b_{13} ve c_3 değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

(a_n) aritmetik dizi olduğundan $a_{n+1} = a_n + d$ ....(1)
(a_n) geometrik dizi olduğundan $a_{n+1} = a_n \cdot r$ ....(2) olur.

(1) ve (2) den $a_n + d = a_n \cdot r$ olmalıdır. Bu eşitlik $d = 0$ ve $r = 1$ olması durumunda her n pozitif tam sayısı için sağlanır. $d = 0$ ve $r = 1$ ise (a_n) sabit dizi olur.

Sonuç olarak bir dizi hem aritmetik hemde geometrik bir dizi ise bu dizi sabit dizidir.

(a_n) sabit dizi olduğundan $3x - 5 = 4 = 2y - 6$ olmalıdır.

$3x - 5 = 4 \Rightarrow x = 3$

$2y - 6 = 4 \Rightarrow y = 5$ bulunur.

(b_n) aritmetik dizisinde $b_1 = 3$ ve $b_5 = 5 \Rightarrow d = \dfrac{b_5 - b_1}{5 - 1} = \dfrac{5 - 3}{4} = \dfrac{1}{2}$ olur.

$b_{13} = b_1 + 12d = 3 + 12 \cdot \dfrac{1}{2} = 9$ olarak elde edilir.

(c_n) geometrik dizisinde $c_1 = 3$ ve $c_2 = 5 \Rightarrow r = \dfrac{c_2}{c_1} = \dfrac{5}{3}$ olur.

$c_3 = c_1 \cdot r^2 = 3 \cdot \dfrac{25}{9} = \dfrac{25}{3}$ bulunur.

İlk terimi a_1 ve ortak çarpanı r olan (a_n) geometrik dizisinin ilk n teriminin toplamı

$$\mathbf{S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}} \text{ olur.}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \Rightarrow S_n = a_1 + a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3 + \ldots + a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$\Rightarrow r \cdot S_n = a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3 + a_1 \cdot r^4 + \ldots + a_1 \cdot r^n$$

$$\begin{array}{rl} S_n = & a_1 + \cancel{a_1 \cdot r} + \cancel{a_1 \cdot r^2} + \cancel{a_1 \cdot r^3} + \ldots + \cancel{a_1 \cdot r^{n-1}} \\ - \quad r \cdot S_n = & \cancel{a_1 \cdot r} + \cancel{a_1 \cdot r^2} + \cancel{a_1 \cdot r^3} + \cancel{a_1 \cdot r^4} + \ldots + a_1 \cdot r^n \\ \hline \end{array}$$

$$S_n - r \cdot S_n = a_1 - a_1 \cdot r^n$$

$$(1-r) \cdot S_n = a_1 \cdot (1 - r^n)$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$$

ÖRNEK

İlk terimi 1 ve ortak çarpanı $r = 2$ olan bir geometrik dizinin ilk 9 teriminin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow S_9 = 1 \cdot \frac{1-2^9}{1-2} \qquad (a_1 = 1 \text{ ve } r = 2)$$

$$= \frac{-511}{-1} = 511 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

Bir geometrik dizinin ilk 8 teriminin toplamının, ilk 4 teriminin toplamına oranı $\frac{97}{16}$ olduğuna göre r nin pozitif değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{S_8}{S_4} = \frac{97}{16} \Rightarrow \frac{\cancel{a_1} \cdot \frac{1-r^8}{\cancel{1-r}}}{\cancel{a_1} \cdot \frac{1-r^4}{\cancel{1-r}}} = \frac{97}{16} \Rightarrow \frac{1-r^8}{1-r^4} = \frac{97}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{(1-r^4)} \cdot (1+r^4)}{\cancel{1-r^4}} = \frac{97}{16}$$

$$\Rightarrow r^4 = \frac{97}{16} - 1$$

$$\Rightarrow r^4 = \frac{81}{16}$$

$$\Rightarrow r = \frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

Alıştırmalar

1 İlk terimi 5 ve ortak çarpanı $\frac{1}{25}$ olan bir geometrik dizinin genel terimini bulunuz.

2 (a_n) bir geometrik dizi olmak üzere
$a_2 = \frac{1}{8}$ ve $a_{n+4} = 64\,a_{n+1}$ dir.
Buna göre a_{10} terimini bulunuz.

3 Aşağıda verilen dizilerden geometrik dizi olanlarını bulunuz.

a) $(a_n) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots)$

b) $(b_n) = (2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots)$

c) $(c_n) = \left(1, 3, 9, 27, \ldots, 3^{n-1}, \ldots\right)$

ç) $(d_n) = \left(1, 8, 27, 64, \ldots, n^3, \ldots\right)$

d) $(k_n) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \ldots, \frac{1}{3n}, \ldots\right)$

4 Pozitif terimli bir (a_n) geometrik dizisinde $a_8 = 8$ ve $a_{11} = 64$ olduğuna göre bu dizinin ilk 11 teriminin çarpımını bulunuz.

5 Bir geometrik dizinin ilk üç terimi $x-7$, $x-4$ ve $x+2$ dir. Bu geometrik dizinin ilk 10 teriminin toplamını bulunuz.

6 Pozitif terimli bir (a_n) geometrik dizisi için
$$\frac{a_4 \cdot a_6 \cdot a_8 \cdot a_{10}}{a_7 \cdot a_5} = 121$$
olduğuna göre a_8 terimini bulunuz.

7 256 ile $\frac{1}{128}$ sayıları arasına $n+2$ tane terim yerleştirilerek bir geometrik dizi elde ediliyor. Elde edilen bu geometrik dizinin ortak çarpanı $\frac{1}{2}$ olduğuna göre n değerini bulunuz.

8 Bir (a_n) geometrik dizisinin ilk n teriminin toplamı S_n dir. $a_3 = 4$ ve $a_7 = 64$ olduğuna göre S_6 yı bulunuz.

9 Bir (a_n) geometrik dizisinin ilk n teriminin toplamı S_n ve $\frac{S_3}{S_6} = \frac{1}{28}$ olduğuna göre $\frac{S_6 - S_3}{a_1}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

2.1.4. Gerçek Hayat Durumları ile İlgili Dizi Problemleri

ÖRNEK

Bir bakteri kültüründe, uygun şartlarda bakterilerin sayısı her 15 saniyede bir ikiye katlanmaktadır. İlk durumda bakteri kültüründe 5 tane bakteri olduğuna göre 10 dakika sonra bu kültürde kaç tane bakteri olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

Bu kültürdeki bakterilerin her biri 15 saniyede bir ikiye katlandığından 1 dakikada 4 defa, 10 dakikada ise 40 defa bu işlem gerçekleşecektir.

1. çoğalmada bakteri sayısı: $2 \cdot 5 = 2^1 \cdot 5$
2. çoğalmada bakteri sayısı: $2 \cdot (2 \cdot 5) = 2^2 \cdot 5$
3. çoğalmada bakteri sayısı: $2 \cdot (2^2 \cdot 5) = 2^3 \cdot 5$

$\vdots \qquad \vdots$

n. çoğalmada bakteri sayısı: $2 \cdot (2^{n-1} \cdot 5) = 2^n \cdot 5$ tane olarak modellenebilir.

O hâlde 10 dakikanın sonunda $n = 40$ için bakteri kültüründe $5 \cdot 2^{40}$ adet bakteri bulunur.

ÖRNEK

Bir banka, Öğretmenler Günü'ne özel olarak eski müşterisi olan Arzu Öğretmen'e bir kredi teklifi sunmuştur. Bu teklife göre banka, Arzu Öğretmen'e 31 500 TL ihtiyaç kredisini ilk ay 1250 TL ve takip eden her ay bir önceki aydan 250 TL fazla olarak ödemesi koşuluyla faizsiz olarak verecektir. Arzu Öğretmen'in bu kredi teklifini kabul etmesi durumunda borcunun tamamını kaç ayda ödeyeceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 1250 \\ d &= 250 \\ S_n &= 31\,500 \end{aligned}\right\} \; a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \Rightarrow a_n = 1250 + (n-1) \cdot 250$$

$$\Rightarrow a_n = 1250 + 250n - 250$$

$$\Rightarrow a_n = 1000 + 250n$$

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) \Rightarrow 31\,500 = \frac{n}{2} \cdot (1250 + 1000 + 250n)$$

$$\Rightarrow 63\,000 = n \cdot (2250 + 250n)$$

$$\Rightarrow 250n^2 + 2250n - 63\,000 = 0$$

$$\Rightarrow n^2 + 9n - 252 = 0$$

$$\Rightarrow (n+21)(n-12) = 0$$

$$\Rightarrow n = -21 \text{ veya } n = 12 \text{ olur.}$$

Taksit sayısı pozitif tam sayı olacağından Arzu Öğretmen 12 ay ödeme yapacaktır.

ÖRNEK

Bir okulun konferans salonunun ilk sırasında 10, ikinci sırasında 12, üçüncü sırasında 14 koltuk vardır. Bu şekilde devam edilerek her sıra bir önceki sıranın koltuk sayısından 2 koltuk fazla olacak şekilde düzenlenmiştir. Konferans salonunda toplam 220 koltuk olduğuna göre en son sırada kaç adet koltuk olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Konferans salonunun ilk üç sırasında sırasıyla 10, 12 ve 14 koltuk bulunduğundan salondaki koltuk sayıları, ilk terimi 10 ve ortak farkı $d = 2$ olan bir aritmetik dizidir. Bu dizi (a_n) ile gösterilirse dizinin genel terimi

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \Rightarrow a_n = 10 + (n-1) \cdot 2$$
$$= 2n + 8 \text{ olur.}$$

Konferans salonunda n tane sıra olsun. Bu durumda toplam koltuk sayısı $S_n = 220$ olur.

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (2a_1 + (n-1) \cdot d) \Rightarrow 220 = \frac{n}{2} \cdot (2 \cdot 10 + (n-1) \cdot 2)$$
$$\Rightarrow 220 = n \cdot (n+9)$$
$$\Rightarrow n^2 + 9n - 220 = 0$$
$$\Rightarrow (n-11)(n+20) = 0$$
$$\Rightarrow n = 11 \text{ olur.}$$

O hâlde konferans salonunda 11 sıra koltuk vardır. Buna göre 11. sıradaki koltuk sayısı

$$a_n = 2n + 8 \Rightarrow a_{11} = 2 \cdot 11 + 8 = 30 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

Bir firma, 2016 yılında toplam $24\,000\,000$ TL değerinde ihracat yapmıştır. Bu firmanın yapmış olduğu ihracat tutarı her sene %5 artmaktadır. Buna göre bu firmanın 2023 yılı sonunda yapacağı ihracat tutarının yaklaşık kaç TL olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

2016 yılında ihracat tutarı 24 000 000 TL iken bir sene sonra %5 artacağından

2017 yılı için $24\,000\,000 + 24\,000\,000 \cdot \frac{5}{100} = 24\,000\,000 \cdot (1,05)$ TL olur.

2018 yılı için yine %5 artacağından

$$24\,000\,000 \cdot (1,05) + 24\,000\,000 \cdot (1,05) \frac{5}{100} = 24\,000\,000 \cdot (1,05)^2 \text{ TL olur.}$$

Bu şekilde devam edilerek n yıl sonra $24\,000\,000 \cdot (1,05)^n$ TL şeklinde modelleme yapılabilir.

O hâlde yedi yıl sonra yani 2023 yılı sonunda ihracat tutarı

$$24\,000\,000 \cdot (1,05)^7 \cong 24\,000\,000 \cdot (1,4071)$$
$$\cong 33\,770\,400 \text{ TL bulunur.}$$

ÖRNEK

Matematik öğretmeni Sibel Hanım sosyal medya aracılığı ile bazı öğrencilerine çözmeleri için bir soru gönderir. Soruyu gönderdiği her bir öğrencisinden de ertesi gün bu soruyu üç arkadaşına göndermesini ister. Soruyu alan her öğrenci ertesi gün 3 arkadaşına gönderir. Bu şekilde bir hafta boyunca devam edildiğinde tüm öğrenciler bu soruyu yalnız bir kere almış olur.

Bir haftada soruyu alan toplam öğrenci sayısı 6558 kişi olduğuna göre başlangıçta Sibel Öğretmen'in bu soruyu kaç öğrencisine gönderdiğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Başlangıçta Sibel Öğretmen bu soruyu x kişiye göndermiş olsun. Bu durumda soru

1. Gün x
2. Gün $3 \cdot x$
3. Gün $3 \cdot 3 \cdot x$
4. Gün $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot x$

$\vdots$

n. Gün $\underbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{n-1 \text{ tane}} \cdot x$ kişiye ulaşmış olur.

n. gün soruyu alan öğrenci sayısı a_n olsun. Bu durumda sorunun ulaştığı öğrenci sayısı genel terimi $a_n = x \cdot 3^{n-1}$ ve ortak çarpanı 3 olan olan bir geometrik dizidir. Bir haftada soruyu alan öğrenci sayısı 6558 olduğundan bu dizinin ilk 7 teriminin toplamı 6558 dir. Buna göre

$$S_n = a_1 \cdot \left(\frac{1-r^n}{1-r}\right) \Rightarrow S_7 = x \cdot \left(\frac{1-3^7}{1-3}\right) \qquad (a_1 = x,\ n = 7 \text{ ve } r = 3)$$

$$\Rightarrow 6558 = x \cdot 1093$$

$$\Rightarrow x = 6 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

Bir öğrencinin bankadaki hesabında 2430 TL parası vardır. Bu öğrenci iki günde bir hesabındaki parasının $\frac{1}{3}$ ünü çekecektir. İlk kez 2 gün sonra para çekeceğine göre onuncu günün sonunda öğrencinin hesabında kaç TL parası kalacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

Öğrencinin ilk durumdaki parası 2430 TL dir. İki gün sonra parasının $\frac{1}{3}$ ünü çekeceğinden geriye parasının $\frac{2}{3}$ ü kalır. Dört gün sonra tekrar kalan parasının $\frac{1}{3}$ ünü çekeceğinden geriye başlangıçtaki parasının $\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ kalır. Bu adımlar matematiksel olarak modellenirse öğrencinin

1. çekimde (2 gün sonra) $\quad 2430 - 2430 \cdot \frac{1}{3} = 2430 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1$

2. çekimde (4 gün sonra) $\quad 2430 \cdot \frac{2}{3} - 2430 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = 2430 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$

$\vdots$

n. çekimde (2n gün sonra) $\quad 2430 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$ TL parası kalacaktır.

Onuncu günün sonunda geriye kalan parasını bulmak için n yerine 5 yazılmalıdır. Buna göre 10. gün sonunda öğrencinin hesabında $2430 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 2430 \cdot \frac{32}{243} = 10 \cdot 32 = 320$ TL kalır.

ÖRNEK

Turan Bey ve Simge Hanım, 12 haftalık yaz tatili için çocukları Meltem ve Can' a aşağıdaki harçlık tekliflerini sunuyorlar.

Bankacı olan Simge Hanım birinci hafta 50 TL, ikinci hafta 75 TL ve sonraki her hafta bir önceki haftadan 25 TL fazla olacak şekilde harçlık vereceğini ifade ediyor.

Matematik öğretmeni olan Turan Bey birinci hafta 1 TL, ikinci hafta 2 TL ve sonraki her hafta bir önceki haftanın 2 katı olacak şekilde harçlık vereceğini ifade ediyor.

Eline geçen parayı hemen harcayan Meltem, bankacı olan annesinin teklifini cazip görerek annesinin teklifini kabul ediyor. Birikim yapmayı seven Can ise matematik öğretmeni olan babasının teklifinin sonraki haftalarda daha avantajlı olacağını düşünerek babasının teklifini kabul ediyor.

Buna göre

a) İlk 5 haftanın sonunda toplam olarak hangi çocuk diğerinden kaç TL fazla harçlık almış olur?

b) 10. haftada Meltem ve Can'ın aldığı harçlıkların farkı kaç TL dir?

c) Yaz tatilinin sonunda toplam olarak hangi çocuk diğerinden kaç TL fazla harçlık almış olur?

ÇÖZÜM

	Can'ın harçlığı	Meltem'in harçlığı
1. hafta	1 TL	50 TL
2. hafta	$1 \cdot 2 = 2^1$ TL	$50 + 25 = 75$ TL
3. hafta	$1 \cdot 2 \cdot 2 = 2^2$ TL	$50 + 25 + 25 = 100$ TL
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n. hafta	$1 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n-1 \text{ tane}} = 2^{n-1}$ TL	$50 + \underbrace{25 + 25 + \ldots + 25}_{n-1 \text{ tane}} = 50 + (n-1) \cdot 25$ TL $= 25n + 25$ TL

Bu durumda Can'ın n. haftadaki harçlığı, genel terimi 2^{n-1} olan geometrik dizi oluşturur. Meltem'in n. haftadaki harçlığı ise genel terimi $25n + 25$ olan aritmetik dizi oluşturur.

a) Can'ın 5 haftalık harçlıklarının toplamı $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = \dfrac{1-2^5}{1-2} = 31$ TL olur.

Meltem'in 5 haftalık harçlıklarının toplamı $50 + 75 + 100 + 125 + 150 = \dfrac{5}{2}(50 + 150)$
$= 500$ TL olur.

Bu durumda İlk 5 haftanın sonunda Meltem, Can'dan 469 TL fazla harçlık almış olur.

b) Can'ın 10. haftadaki harçlığı $2^{10-1} = 512$ TL olur.
Meltem'in 10. haftadaki harçlığı $25 \cdot 10 + 25 = 275$ TL olur.
Bu durumda 10. haftada Can ile Meltem'in harçlıkları farkı 237 TL olur.

c) Can'ın 12 haftalık harçlıklarının toplamı $1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{11} = \dfrac{1-2^{12}}{1-2} = 4095$ TL olur.

Meltem'in 12 haftalık harçlıklarının toplamı $50 + 75 + \ldots + (25 \cdot 12 + 25) = \dfrac{12}{2}(50 + 325)$
$= 2250$ TL olur.

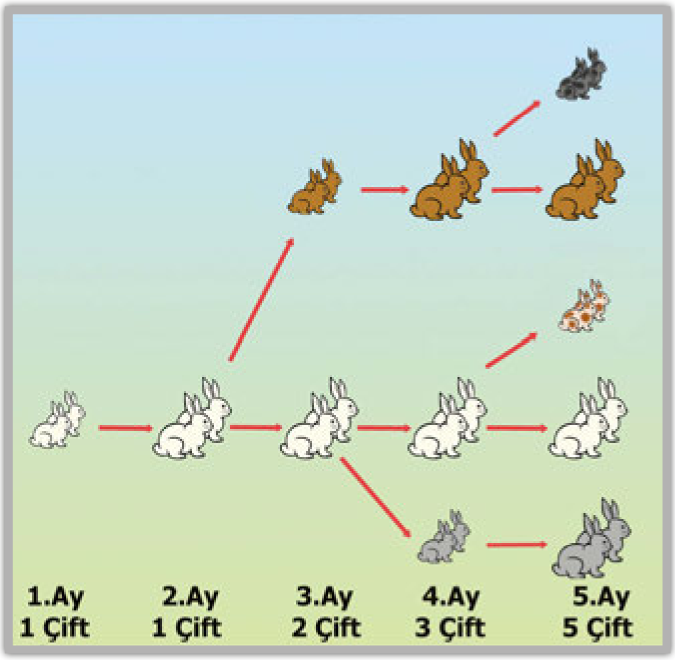
Bu durumda 12 haftalık yaz tatili sonunda Can, Meltem'den 1845 TL fazla harçlık almış olur.

BİLGİ NOTU

Leonardo Fibonacci (Leonardo Fibonaçi) ve Tavşan Hikâyesi

Görsel 2.1

İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci, yazdığı matematik kitaplarından birisinde tavşan çiftliği olan bir arkadaşıyla ilgili olduğu iddia edilen bir problem sunar. Bu probleme göre arkadaşının çiftliğinde tavşanlar doğdukları ilk iki ay yavru yapmazlar. Üçüncü aydan itibaren her çift her ay bir çift yavru yapar. Buna göre Fibonacci'nin arkadaşı üretime bir çift tavşanla başlarsa kaç ay sonra kaç çift tavşanı olur?



Görsel 2.2

Görsel 2.2 de görüldüğü gibi, çiftçinin ilk ay yeni doğmuş bir çift tavşanı olsun. İkinci ayda bu tavşanlar henüz yavrulamadıkları için hâlâ bir çift tavşanı vardır. Üçüncü ay bunlar bir çift yavru verecek ve iki çift tavşanı olacaktır. Yeni doğan çift dördüncü ay yavrulamayacak, oysa ana babaları yeniden bir çift yavru yapacak ve toplam üç çift tavşan olacaktır.

Birinci ve ikinci aylarda birer çift tavşanı vardı. Demek ki üçüncü ay iki çift tavşanı olacaktır. İkinci aydaki bir çift ile üçüncü aydaki iki çift toplanırsa dördüncü aydaki üç çift bulunur. Böylece her ay daha önceki iki aydaki tavşan çiftlerinin sayısı toplanırsa o ay kaç çift tavşan olacağı bulunur.

(Sertöz, 2017)

Fibonacci Dizisi

İlk iki terimi 1 ve bundan sonraki her terimi kendinden önceki iki teriminin toplamı olan diziye **Fibonacci dizisi** denir.

Fibonacci dizisi $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ olmak üzere $\mathbf{F_n = F_{n-1} + F_{n-2}}$ $(n > 2,\ n \in \mathbb{Z})$ indirgeme bağıntısı ile tanımlanabilir. Buna göre Fibonacci dizisi

$$(F_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots)$$

olur.

Fibonacci dizisinin genel terimi ise $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ biçimindedir.

ÖRNEK

Fibonacci dizisinin üç basamaklı en küçük teriminin kaçıncı terim olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

$(F_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...)$ olduğundan dizinin üç basamaklı en küçük teriminin 144 olduğu görülür. Bu terim dizinin 12. terimidir.

ÖRNEK

Fibonacci dizisinin asal sayı olan ilk 6 teriminin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$(F_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...)$ dizisinde asal olan ilk 6 terim 2, 3, 5, 13, 89 ve 233 tür. Bu terimlerin toplamı: $2 + 3 + 5 + 13 + 89 + 233 = 345$ bulunur.

ÖRNEK

(F_n) Fibonacci dizisidir. $F_{13} = 233$ ve $F_{15} = 610$ olduğuna göre Fibonacci dizisinin 16. terimini bulunuz.

ÇÖZÜM

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ indirgeme bağıntısında

$n = 15$ için $F_{15} = F_{14} + F_{13} \Rightarrow 610 = F_{14} + 233$

$\Rightarrow F_{14} = 377$ olur.

$n = 16$ için $F_{16} = F_{15} + F_{14} \Rightarrow F_{16} = 610 + 377$

$\Rightarrow F_{16} = 987$ bulunur.

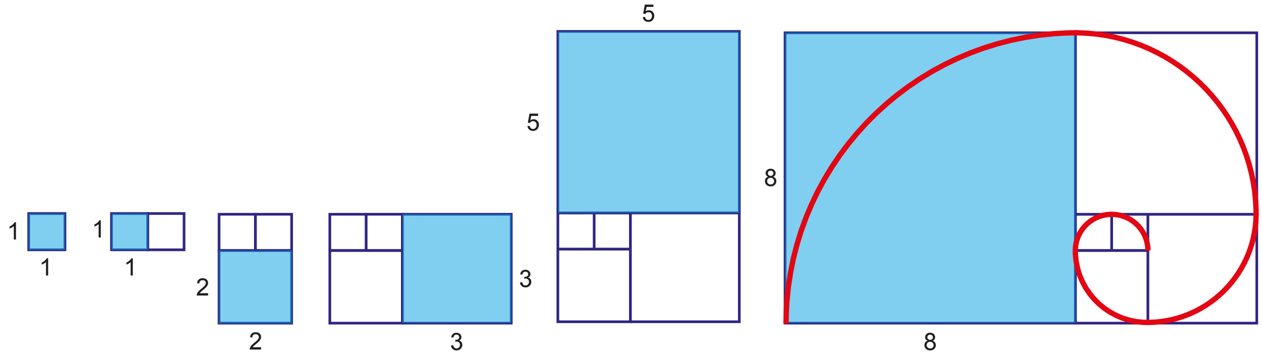
Fibonacci Dizisinin Terimleri ve Altın Oran

Fibonacci dizisinin ardışık iki teriminin oranı olan $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ değerleri incelendiğinde

$\frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{1} = 1$	$\frac{F_3}{F_2} = \frac{2}{1} = 2$	$\frac{F_4}{F_3} = \frac{3}{2} = 1,5$	$\frac{F_5}{F_4} = \frac{5}{3} \cong 1,67$	$\frac{F_6}{F_5} = \frac{8}{5} = 1,6$
$\frac{F_7}{F_6} = \frac{13}{8} = 1,625$	$\frac{F_8}{F_7} = \frac{21}{13} \cong 1,615$	$\frac{F_9}{F_8} = \frac{34}{21} \cong 1,619$	$\frac{F_{10}}{F_9} = \frac{55}{34} \cong 1,617$	$\frac{F_{11}}{F_{10}} = \frac{89}{55} \cong 1,618$

n büyüdükçe $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ oranının 1,618 sayısına yaklaştığı görülür. Bu orana **altın oran** denir ve φ (fi) harfi ile ifade edilir. $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,618$ dir.

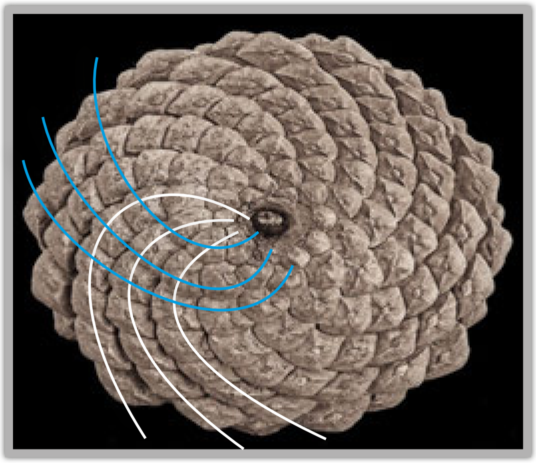
Fibonacci Dizisi ve Altın Oranın Görüldüğü Yerler



Yukarıda kenar uzunluğu 1 birim olan kareye sırasıyla kenar uzunlukları 1, 2, 3, 5 ve 8 birim olan kareler şekildeki gibi birleştiriliyor. Her yeni karenin köşelerini merkez kabul eden çeyrek çemberler çizilerek son şekildeki spiral elde edilmiştir. Tüm karelerin kenar uzunlukları Fibonacci dizisinin terimleridir. Şekilde oluşan spirale de **Fibonacci spirali** denir. Bu işlemlere devam edildiğinde oluşan dikdörtgenlerin uzun kenarının kısa kenarına oranı, altın orana (1,618) yaklaşır.

Görsel 2.3

Ayçiçek taneleri, iki yönde spiral biçiminde dizilmişlerdir. Yukarıdaki ayçiçeğinde mavi yönlü spirallerin sayısı 55 ve beyaz yönlü spirallerin sayısı ise 34 tür. Bu sayılar Fibonacci dizisinin ardışık terimleridir.



Görsel 2.4

Çam kozalağın taneleri, iki yönde spiral biçiminde dizilmişlerdir. Yukarıdaki kozalakta mavi yönlü spirallerin sayısı 21 ve beyaz yönlü spirallerin sayısı ise 13 tür. Bu sayılar Fibonacci dizisinin ardışık terimleridir.

Görsel 2.5

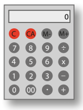
Mimar Sinan'ın birçok eserinde olduğu gibi Süleymaniye ve Selimiye Camilerinin minarelerinde altın oran görülmektedir.

Görsel 2.6

Eski Mısırlıların inşa ettikleri piramitlerde de altın oran olduğu saptanmıştır.

Alıştırmalar

1. 20 yıl önce yıllık 2000 TL ile işe başlayan bir kişinin maaşı her yıl %8 artmıştır. Buna göre bu kişinin 20 yıl boyunca almış olduğu toplam maaşın yaklaşık olarak kaç TL olacağını bulunuz.



2. Devlet desteği ile faizsiz kredi çeken bir çiftçinin ödeme planı şu şekilde belirlenmiştir: Çiftçi ilk ay 750 TL ödeme yapacak ve sonraki her ayda ödeyeceği miktar 150 TL artacaktır. Çiftçi tüm borcunu 16 ayda bitirdiğine göre çiftçinin bankadan kaç TL kredi çektiğini bulunuz.

3. Bir apartmanın çatısı kiremitle döşenirken ilk sıraya 100 adet, ikinci sıraya 96 adet kiremit konulacaktır. Bu şekilde devam edilerek her sıraya bir önceki sıradaki kiremit sayısından 4 adet eksik kiremit konulacaktır. Buna göre 20. sıraya kiremitler yerleştirildikten sonra toplam kaç adet kiremit kullanıldığını bulunuz.

4. Bir okulun konferans salonunun ilk sırasında 8, ikinci sırasında 12 ve üçüncü sırasında 16 koltuk vardır. Bu şekilde devam edilerek her sıra bir önceki sıranın koltuk sayısından 4 koltuk fazla olacak şekilde düzenlenmiştir. Konferans salonunda toplam 476 koltuk olduğuna göre en son sırada kaç adet koltuk olduğunu bulunuz.

5. Bir bakteri kültüründe uygun şartlarda bakterilerin sayısı her dakikanın sonunda üçe katlanmaktadır. İlk durumda bakteri kültüründe 10 adet bakteri olduğuna göre 1 saat sonra bu kültürde kaç tane bakteri olacağını bulunuz.

6. Okulun açılmasından 4 hafta sonra okulda tasarruf ile ilgili bir video seyreden Emre 5. haftadan itibaren harçlığının küçük bir kısmını biriktirmeye karar verir. 5. hafta 3 TL, 6. hafta 4 TL ve bu şekilde her hafta 1 TL arttırarak tasarruf etmeye başlar. Haftalık harçlığı 50 TL olan Emre'nin tasarruf için para biriktirdiğini öğrenen babası 10. haftadan itibaren haftalığını 60 TL yapmıştır. Buna göre;

   a) I. dönem 16 hafta olduğuna göre Emre'nin toplam kaç lira tasarruf ettiğini bulunuz.

   b) Emre'nin son hafta harçlığının kaç lirasını harcadığını bulunuz.

7. Bir sınıftaki öğrenci velileri sınıfta maddi durumu iyi olmayan iki öğrencinin ihtiyaçlarını karşılamak için kendi maddi durumlarıyla orantılı olarak aralarında para toplamışlardır. En az para veren iki öğrenci velisi 20 TL ve 25 TL vermiştir. 17 öğrenci velisinin verdiği para miktarı bir aritmetik dizi oluşturmaktadır. Buna göre;

   a) <u>En fazla</u> yardımda bulunan öğrenci velisinin verdiği para miktarını bulunuz.

   b) Toplanan para iki öğrenciye eşit olarak paylaştırılırsa her bir öğrenciye verilen para miktarını bulunuz.

Ölçme ve Değerlendirme

A) 1-5. sorularda boş bırakılan yerlere uygun ifadeleri yazınız.

1. $(a_n)=\left(\frac{3n-12}{xn+4}\right)$ dizisi sabit dizi olduğuna göre x değeri .... olur.

2. $(a_n)=\left(\frac{3n+1}{2}\right)$ aritmetik dizisinin ortak farkı .... olur.

3. Ardışık terimleri arasındaki oranı sabit olan dizilere.................... dizi denir.

4. Bütün terimleri birbirine eşit olan dizilere .... dizi denir.

5. İlk terimi 1 ve ortak çarpanı $r=3$ olan bir geometrik dizinin ilk 5 teriminin toplamı ...... olur.

B) 6. soruda numaralar ile verilen ifadeleri harf ile verilen ifadelerle eşleştiriniz.

6. Aşağıda numaralarla verilen dizilerin eşitlerini harf ile verilen dizilerle eşleştiriniz.

I. $(a_n)=(\sin(n\pi))$ — a) $((-1)^{2n+1})$

b) $(1,0,1,0,...)$

II. $(b_n)=\left(\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)\right)$

c) $((-1)^{n+1})$

III. $(c_n)=\left(\cot\left(\frac{8n\pi-\pi}{4}\right)\right)$ — ç) $((-1)^n)$

d) (0)

IV. $(d_n)=\left(\tan\left(\frac{4n\pi+\pi}{4}\right)\right)$

e) $(0,1,0,1,...)$

V. $(e_n)=(\cos(n\pi+\pi))$ — f) (1)

I.	II.	III.	IV.	V.

C) 7-13. açık uçlu soruları cevaplandırınız.

7. $(a_n)=(3\cdot 7^{n-1})$ biçiminde tanımlanan (a_n) dizisi için $\frac{a_6}{a_4}$ oranı kaçtır?

8. $(a_n)=\left(\frac{(n+1)!}{3^{n-1}}\right)$ biçiminde tanımlanan (a_n) dizisi için $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=12$ olduğuna göre n kaçtır?

9. (a_n) bir aritmetik dizi olmak üzere $\frac{a_1+a_5}{a_3+a_6}=\frac{2}{3}$ olduğuna göre $\frac{a_8+a_9}{a_{10}+a_{15}}$ değeri kaçtır?

10. İlk n teriminin toplamı $S_n=3^n+1$ olan bir (a_n) geometrik dizisinde $a_4+a_5+a_6$ toplamı kaçtır?

11. Bir aritmetik dizinin ilk terimi 1 dir. Bu dizinin ilk 15 teriminin toplamı S_{15}, ilk 10 teriminin toplamı S_{10} ve $S_{15}-S_{10}=245$ olduğuna göre dizinin 7. terimi kaçtır?

12. İlk terimi $a_1=2$ ve ortak çarpanı $r=\sqrt[3]{2}$ olan bir (a_n) geometrik dizisinde a_4+a_7 toplamı kaçtır?

13. 9 kişilik bir öğrenci grubunda öğrencilerin ağırlıkları bir aritmetik dizi oluşturmaktadır. En hafif öğrenci 50 kg dır. Tüm öğrencilerin ağırlıkları toplamı 558 kg olduğuna göre en ağır öğrenci kaç kg dır?

D) 14-43. çoktan seçmeli soruları çözünüz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

14 $15 + 20 + 25 + ... + 85$

toplamının $\sum$ sembolü ile ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sum_{k=1}^{17} 5k$

B) $\sum_{k=1}^{15} (5k + 10)$

C) $\sum_{k=1}^{17} (5k - 5)$

D) $\sum_{k=2}^{17} (5k + 5)$

E) $\sum_{k=3}^{18} (5k - 5)$

15 $8 + 12 + 16 + ... + 56$

toplamının $\sum$ sembolü ile ifadesi aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) $\sum_{k=1}^{13} (4k + 4)$

B) $\sum_{k=2}^{14} 4k$

C) $\sum_{k=3}^{15} (4k - 4)$

D) $\sum_{k=5}^{17} (4k - 12)$

E) $\sum_{k=4}^{18} (4k - 8)$

16 x ve y doğal sayılardır. 6, x, y, 16 sayılarından ilk üçü sırasıyla bir aritmetik dizinin, son üçü sırasıyla bir geometrik dizinin ardışık terimleridir.

Buna göre $y - x$ farkı kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

17 $(1, 1, 2, 3, 5, 8, a - b, 21, 34, a + b, 89, ...)$

dizisi Fibonacci dizisi olduğuna göre $a \cdot b$ çarpımı kaçtır?

A) 272 B) 442 C) 714 D) 715 E) 1870

18 (a_n) bir geometrik dizi olmak üzere

$\dfrac{(a_6)^2}{a_4 \cdot a_8}$ **ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 2 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{8}$

19 $(a_n) = (n^2 - 12n + 32)$

dizisinin en küçük terimi kaçtır?

A) -4 B) -3 C) 0 D) 5 E) 12

20 $(a_n) = (7^{n-1} \cdot (n - 2)!)$ dizisi veriliyor.

Buna göre $\dfrac{a_{n+3}}{a_{n+2}}$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $7n - 4$ B) $7n + 7$ C) $7n + 14$

D) $14n - 7$ E) $\frac{n+7}{14}$

21 $a_n = \begin{cases} (n+1)! & , \text{ n tek ise} \\ n \cdot (n-1) & , \text{ n çift ise} \end{cases}$

Yukarıda (a_n) dizisinin genel terimi verilmiştir.

Buna göre $\dfrac{a_8}{a_3}$ oranı kaçtır?

A) 1 B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{5}{3}$ D) 2 E) $\frac{7}{3}$

22 $a_{n+1} = 2n + a_n \quad (n \geq 1, n \in \mathbb{Z})$

Yukarıda bir (a_n) dizisine ait indirgeme bağıntısı verilmiştir.

$a_1 = 4$ olduğuna göre bu dizinin 20. terimi kaçtır?

A) 384 B) 356 C) 344 D) 343 E) 342

23 $F_1 = 1, \ F_2 = 1$

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \ (n > 2, n \in \mathbb{Z})$

şeklinde tanımlanan tam sayılar dizisindeki sayılara Fibonacci sayıları, (F_n) dizisine ise Fibonacci dizisi denir.

Buna göre $F_8 + F_{10}$ toplamı kaçtır?

A) 89 B) 76 C) 68 D) 55 E) 48

24 Bir geometrik dizinin ilk terimi a, ortak çarpanı 4 ve n inci terimi b dir.

Buna göre dizinin ilk n terim toplamının a ve b türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{4b-a}{3}$ B) $\frac{3b-a}{4}$ C) $\frac{3b-a}{2}$ D) $\frac{4b-a}{2}$ E) $\frac{6b-a}{4}$

25 $(a_n) = \left(4 + \frac{k}{n+2}\right)$

$(b_n) = \left(3 + \frac{n+m}{n+2}\right)$

dizileri eşit diziler olduğuna göre $m - k$ farkı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

26 Genel terimi a_n olan bir dizide

- $a_1 = 6$ ve $a_2 = 4$
- $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n \ (n \geq 1, n \in \mathbb{Z})$

olduğuna göre a_6 kaçtır?

A) 92 B) 94 C) 96 D) 112 E) 116

27 a, 4a, b, 3b + 16a ve 768 sayıları bir geometrik dizinin ardışık beş terimidir.

Buna göre a + b toplamı kaçtır?

A) 51 B) 52 C) 53 D) 54 E) 55

28 Bir (a_n) dizisinde

$a_1 = 20$ ve $a_{n+1} = \frac{2 \cdot a_n}{n+1} \ (n \geq 1, n \in \mathbb{Z})$

indirgeme bağıntısı veriliyor.

Buna göre bu dizinin 20. terimi kaçtır?

A) $\frac{2^{18}}{18!}$ B) $\frac{2^{19}}{18!}$ C) $\frac{2^{18}}{20!}$ D) $\frac{2^{19}}{19!}$ E) $\frac{2^{20}}{19!}$

29 Mehmet Bey, oğluna her hafta bir önceki haftadan 5 TL fazla harçlık vermektedir.

Oğluna ilk hafta 5 TL harçlık veren Mehmet Bey, 26 haftada toplam kaç TL harçlık vermiştir?

A) 1455 B) 1555 C) 1655 D) 1755 E) 1855

30 (a_n) bir geometrik dizi olmak üzere

$a_{n+1} \cdot a_{n+3} \cdot a_{n+5} = 4^{9n-6}$

olduğuna göre a_6 kaçtır?

A) 2^{13} B) 2^{14} C) 2^{15} D) 2^{16} E) 2^{17}

31 $(x, 6, y)$ sonlu dizisi hem aritmetik hemde geometrik dizidir.

Buna göre 3x + 5y toplamı kaçtır?

A) 12 B) 24 C) 36 D) 48 E) 60

32 **Bir (a_n) aritmetik dizisinin ardışık üç terimi sırasıyla $\frac{x}{3}, \frac{x+4}{6}, \frac{2x}{3}$ olduğuna göre x sayısı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

33 (a_n) bir aritmetik dizidir.
$(a_{12})^2 - (a_8)^2 = 108$ ve $a_{10} = 9$

olduğuna göre a_{15} kaçtır?

A) $\frac{33}{2}$ B) $\frac{31}{2}$ C) $\frac{29}{2}$ D) $\frac{27}{2}$ E) $\frac{25}{2}$

34 (a_n) bir aritmetik dizi olmak üzere
$a_{n+6} + a_{n+7} + a_{n+8} = 7n + 4$

olduğuna göre a_{12} kaçtır?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

35 $(a_n) = (4n + 3)$
$(b_n) = (5n + 4)$
$(c_n) = (6n + 5)$

olduğuna göre (a_n), (b_n) ve (c_n) dizilerinin 100 ile 480 arasında kaç tane ortak terimi vardır?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

36 (a_n) aritmetik dizisinin ilk n teriminin toplamı S_n dir. $S_{18} = 225$ ve $a_{18} = 21$

olduğuna göre a_{10} kaçtır?

A) 16 B) 15 C) 14 D) 13 E) 12

37 İlk n teriminin toplamı $S_n = 3n^2 + 10n$ olan bir (a_n) aritmetik dizisi veriliyor.

Buna göre $a_6 + a_7$ toplamı kaçtır?

A) 90 B) 92 C) 94 D) 96 E) 98

38 $(3, x, y, z, t, 12)$
sonlu geometrik dizisi veriliyor.

Buna göre $\sqrt{x \cdot y \cdot z \cdot t}$ değeri kaçtır?

A) 36 B) 32 C) 30 D) 27 E) 24

39 (a_n) aritmetik dizisinin ilk n teriminin toplamı S_n dir. $S_{14} = 448$ ve $S_{20} = 880$

olduğuna göre bu dizinin 3. terimi kaçtır?

A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

40 (a_n) aritmetik dizisi için
$a_3 + a_5 + a_9 + a_{11} = 40$

olduğuna göre bu aritmetik dizinin ilk 13 teriminin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 110 B) 116 C) 120 D) 124 E) 130

41 (F_n) Fibonacci dizisi ve $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

- $F_{12} = a^2$
- $F_3 + F_9 = b^2$
- $F_{14} - 8 \cdot F_3 = c^2$

olduğuna göre $a + b - c$ işleminin sonucu kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

42 (a_n) bir geometrik dizi olmak üzere
$a_1 = 2$ ve $a_9 = 128$

olduğuna göre $a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8$ çarpımı kaçtır?

A) 2^{28} B) 2^{30} C) 2^{32} D) 2^{34} E) 2^{36}

43 (a_n) geometik dizisi için $\frac{a_{n+4}}{a_{n+1}} = 3$

olduğuna göre $\frac{a_{17}}{a_2}$ oranı kaçtır?

A) 3^9 B) 3^8 C) 3^7 D) 3^6 E) 3^5

E) 44-46. üst düzey beceri sorularını şekle ve metne göre cevaplayınız.

Görsel 2.7

Burak, Ahmet ve Mert bir kutuda bulunan bilyelerden sırasıyla bir miktar bilye alarak paylaşacaklardır.

1. sırada Burak kutudan 1 bilye alıyor.
2. sırada Ahmet kutudan 2 bilye alıyor.
3. sırada Mert kutudan 3 bilye alıyor.

Burak sırası tekrar geldiğinde her seferinde bir önceki adımında aldığı bilye sayısından 1 fazla bilye, Ahmet sırası tekrar geldiğinde her seferinde bir önceki adımında aldığı bilye sayısından 2 fazla bilye, Mert ise sırası tekrar geldiğinde her seferinde bir önceki adımında aldığı bilye sayısından 3 fazla bilye alıyor.

4. sırada ikinci kez sırası gelen Burak kutudan 2 bilye alıyor. 5. sırada ikinci kez sırası gelen Ahmet kutudan 4 bilye alıyor. 6. sırada ikinci kez sırası gelen Mert kutudan 6 bilye alıyor.

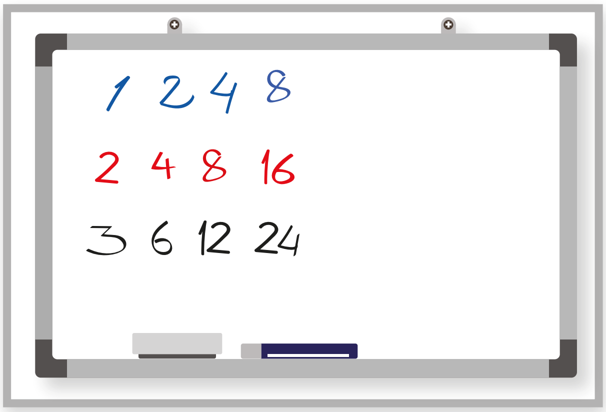
İlk 6 adımı bu şekilde olan paylaşımda Burak, Ahmet ve Mert kutudaki bilyeler bitene kadar aynı düzende kutudan bilye almaya devam ediyorlar. Buna göre;

44 25. sırada kim kutudan kaç bilye almıştır?

45 Herkes kutudan beşer kez bilye aldığında kutudaki bilye sayısı kaç azalmış olur?

46 Ahmet sıra kendisindeyken kutudan alması gereken bilye sayısı 64 olduğunda, kutudaki son 64 bilyeyi alıyor. Buna göre bu paylaşım kaç adımda bitmiştir ve kutuda başlangıçta kaç bilye vardır?

47-51. üst düzey beceri sorularını şekle ve metne göre cevaplayınız.



Görsel 2.8

Ece mavi kalemle, Cemre kırmızı kalemle ve Emre siyah kalemle bir yazı tahtasına sırasıyla birer sayı yazarak bir oyun oynuyorlar. Sırası gelen kişi tahtaya kendisinin en son yazdığı sayının 2 katını yazıyor. Ece ile başlayan bu oyunun ilk altı adımı aşagıdaki gibidir.

1. adımda Ece tahtaya 1 sayısını yazıyor.
2. adımda Cemre tahtaya 2 sayısını yazıyor.
3. adımda Emre tahtaya 3 sayısını yazıyor.
4. adımda Ece tahtaya 2 sayısını yazıyor.
5. adımda Cemre tahtaya 4 sayısını yazıyor.
6. adımda Emre tahtaya 6 sayısını yazıyor.

Oyuna bu şekilde devam edildiğine göre;

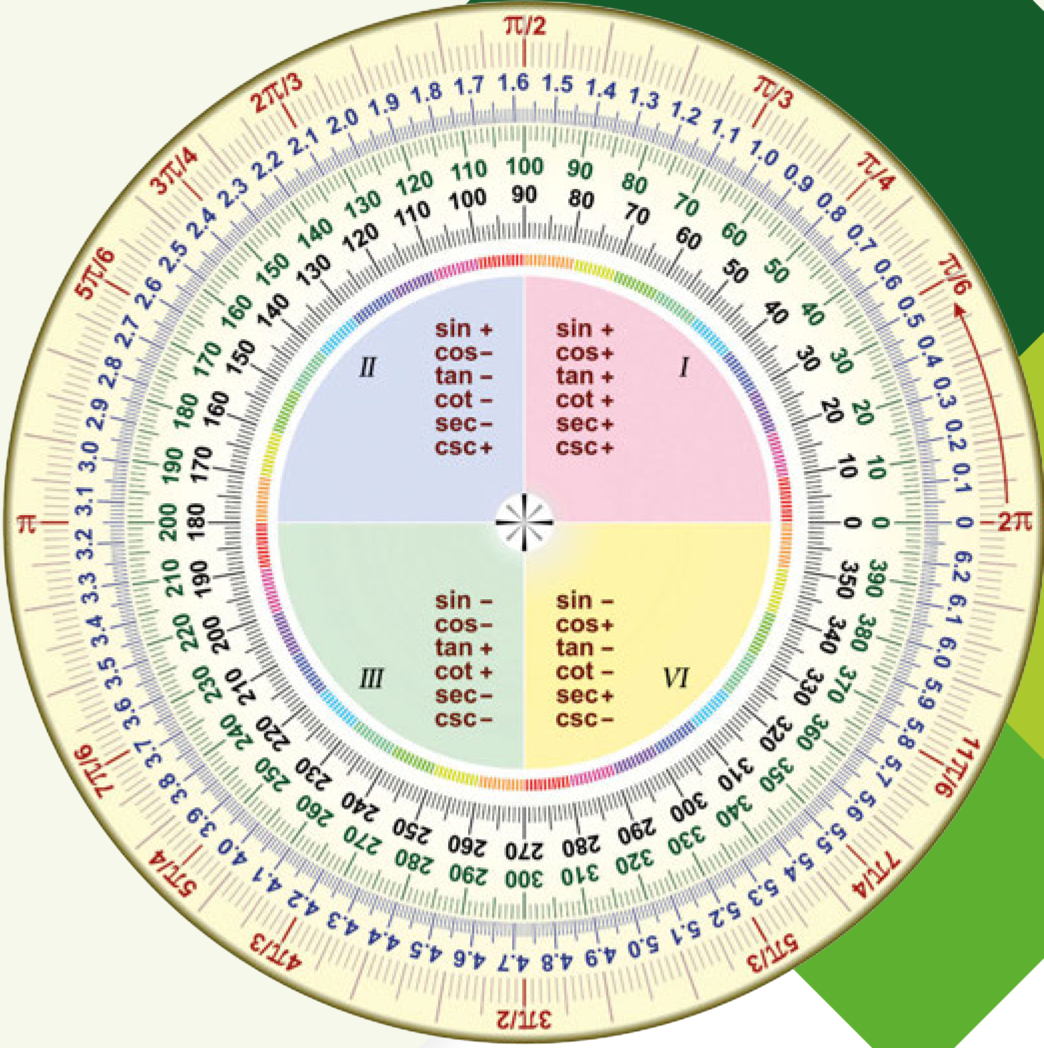
47 19. adımda kim, hangi sayıyı yazmıştır?

48 23. adımda tahtaya yazı yazan kişinin bu adımla beraber yazdığı tüm sayıların toplamı kaçtır?

49 32. adımın sonunda tahtada yazan tüm sayıların toplamı kaçtır?

50 Ece 2048 sayısını kaçıncı adımda yazar?

51 Cemre 1024 sayısını yazdıktan sonra Emre hangi sayıyı yazar?



3

TRİGONOMETRİ

3.1. TOPLAM-FARK VE İKİ KAT AÇI FORMÜLLERİ

3.2. TRİGONOMETRİK DENKLEMLER

HAZIRLIK ÇALIŞMALARI

- Derece ile radyan arasındaki ilişki nedir?
- Bir açının esas ölçüsü nasıl bulunur?
- Trigonometrik fonksiyonlar nasıl elde edilir?
- Bir dik üçgende dar açıların trigonometrik oranları nasıl bulunur?
- Birim çember nedir?
- Özel üçgenler yardımıyla hangi açıların trigonometrik oranları bulunabilir?

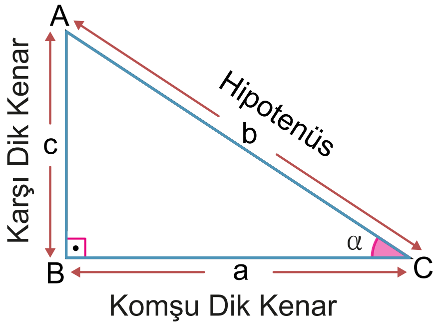
3.1. TOPLAM-FARK VE İKİ KAT AÇI FORMÜLLERİ

3.1.1. Toplam ve Fark Formülleri

HATIRLATMA

Trigonometrik Oranlar

ABC dik üçgeninde $[AB] \perp [BC]$ ve $m(\widehat{BCA}) = \alpha$ olmak üzere



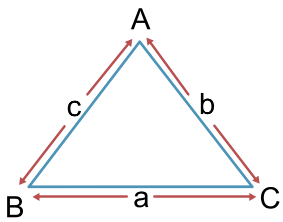
$$\sin\alpha = \frac{\text{Karşı Dik Kenar Uzunluğu}}{\text{Hipotenüs Uzunluğu}} = \frac{c}{b}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Komşu Dik Kenar Uzunluğu}}{\text{Hipotenüs Uzunluğu}} = \frac{a}{b}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Karşı Dik Kenar Uzunluğu}}{\text{Komşu Dik Kenar Uzunluğu}} = \frac{c}{a}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{Komşu Dik Kenar Uzunluğu}}{\text{Karşı Dik Kenar Uzunluğu}} = \frac{a}{c}$$ olur.

Kosinüs Teoremi



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$

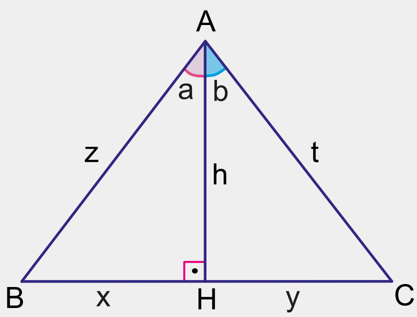
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$ olur.

a ve b gibi iki açının toplamının kosinüsü

$$\mathbf{\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b}$$ olur.

Aşağıdaki ABC üçgeninde $\widehat{A}$ na göre kosinüs teoremi uygulanırsa



AHB dik üçgeninde

$\cos a = \frac{h}{z}$, $\sin a = \frac{x}{z}$ olur.

AHC dik üçgeninde

$\cos b = \frac{h}{t}$, $\sin b = \frac{y}{t}$ olur.

$|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 - 2|AC|\cdot|AB|\cdot\cos\widehat{A}$

$(x+y)^2 = t^2 + z^2 - 2\cdot t\cdot z\cdot\cos(a+b)$

$2tz\cos(a+b) = t^2 + z^2 - (x+y)^2$

$2tz\cos(a+b) = t^2 + z^2 - x^2 - 2xy - y^2$

$2tz\cos(a+b) = \underbrace{t^2 - y^2}_{h^2} + \underbrace{z^2 - x^2}_{h^2} - 2xy$

$2tz\cos(a+b) = 2h^2 - 2xy$

$\frac{\cancel{2tz}\cos(a+b)}{\cancel{2tz}} = \frac{\cancel{2}(h^2 - xy)}{\cancel{2}tz}$

$\cos(a+b) = \frac{h^2}{tz} - \frac{xy}{tz}$

$\cos(a+b) = \underbrace{\frac{h}{z}}_{\cos a}\cdot\underbrace{\frac{h}{t}}_{\cos b} - \underbrace{\frac{x}{z}}_{\sin a}\cdot\underbrace{\frac{y}{t}}_{\sin b}$

$\cos(a+b) = \cos a\cdot\cos b - \sin a\cdot\sin b$ bulunur.

a ve b gibi iki açının farkının kosinüsü

$\mathbf{\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b}$ olur.

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$ formülünde **b** yerine **−b** yazılırsa

$\cos(a+(-b)) = \cos a \cdot \underbrace{\cos(-b)}_{\cos b} - \sin a \cdot \underbrace{\sin(-b)}_{-\sin b}$

$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$ bulunur.

YÖNERGE

- $\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$ formülünde **a** yerine $\frac{\pi}{2} - a$ yazarak

  $\mathbf{\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b}$ formülünü elde ediniz.
- Elde ettiğiniz formülde **b** yerine **−b** yazarak

  $\mathbf{\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b}$ formülünü oluşturunuz.

SONUÇ

- $\mathbf{\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b}$
- $\mathbf{\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b}$
- $\mathbf{\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b}$
- $\mathbf{\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b}$

ÖRNEK

$\cos 105^\circ$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\cos 105^\circ = \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \cdot \sin 45^\circ$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\cos 15^\circ$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\sin 2055^\circ$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

2055° nin esas ölçüsü 255° dir.

Buna göre $\sin 2055^\circ = \sin 255^\circ$ olur.

$$\sin 255^\circ = \sin(180^\circ + 75^\circ) = -\sin 75^\circ \text{ olur.}$$

Bu durumda $\sin 2055^\circ = -\sin 75^\circ$ olacaktır.

$$\begin{aligned}\sin 2055^\circ &= -\sin 75^\circ \\ &= -\sin(45^\circ + 30^\circ) \\ &= -(\sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ) \\ &= -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK

$\dfrac{\sin 57^\circ \cdot \cos 27^\circ - \cos 57^\circ \cdot \sin 27^\circ}{\cos 22^\circ \cdot \cos 23^\circ - \sin 22^\circ \cdot \sin 23^\circ}$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{\sin 57^\circ \cdot \cos 27^\circ - \cos 57^\circ \cdot \sin 27^\circ}{\cos 22^\circ \cdot \cos 23^\circ - \sin 22^\circ \cdot \sin 23^\circ} = \frac{\sin(57^\circ - 27^\circ)}{\cos(22^\circ + 23^\circ)} = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\sin(40^\circ - \alpha) \cdot \cos(\alpha + 20^\circ) + \cos(40^\circ - \alpha) \cdot \sin(\alpha + 20^\circ)$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}\sin(40^\circ - \alpha) \cdot \cos(\alpha + 20^\circ) + \cos(40^\circ - \alpha) \cdot \sin(\alpha + 20^\circ) &= \sin(40^\circ \cancel{-\alpha} \cancel{+\alpha} + 20^\circ) \\ &= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK

$\cos\left(\dfrac{\pi}{14} - x\right) \cdot \cos\left(\dfrac{3\pi}{7} + x\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{14} - x\right) \cdot \sin\left(\dfrac{3\pi}{7} + x\right)$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{14} - x\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{7} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{14} - x\right) \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{7} + x\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{14} \cancel{-x} + \frac{3\pi}{7} \cancel{+x}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{14} + \frac{3\pi}{7}\right) \\ &= \cos \frac{7\pi}{14} \\ &= \cos \frac{\pi}{2} \\ &= 0 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

a ve b gibi iki açının toplamının tanjantı

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\cdot\tan b}$$ olur.

$$\tan a=\frac{\sin a}{\cos a}\Rightarrow \tan(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$$

$$=\frac{\sin a\cdot\cos b+\cos a\cdot\sin b}{\cos a\cdot\cos b-\sin a\cdot\sin b}$$

(sin(a + b) ve cos(a + b) ifadelerinin eşiti yerlerine yazıldıktan sonra pay ve payda cos a · cos b ile bölünür.)

$$=\frac{\dfrac{\sin a\cdot\cos b+\cos a\cdot\sin b}{\cos a\cdot\cos b}}{\dfrac{\cos a\cdot\cos b-\sin a\cdot\sin b}{\cos a\cdot\cos b}}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin a\cdot\cancel{\cos b}}{\cos a\cdot\cancel{\cos b}}+\dfrac{\cancel{\cos a}\cdot\sin b}{\cancel{\cos a}\cdot\cos b}}{\dfrac{\cancel{\cos a\cdot\cos b}}{\cancel{\cos a\cdot\cos b}}-\dfrac{\sin a\cdot\sin b}{\cos a\cdot\cos b}}$$

$$=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\cdot\tan b}$$

YÖNERGE

- $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\cdot\tan b}$ formülünde **b** yerine **−b** yazarak

  $\mathbf{\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\cdot\tan b}}$ formülünü oluşturunuz.

- $\cot a=\dfrac{\cos a}{\sin a}$ olduğundan $\cot(a+b)=\dfrac{\cos(a+b)}{\sin(a+b)}$ olacaktır. Bu eşitlikte

  $\sin(a+b)$ ve $\cos(a+b)$ ifadelerinin eşitini yerlerine yazarak

  $\mathbf{\cot(a+b)=\dfrac{\cot a\cdot\cot b-1}{\cot a+\cot b}}$ formülünü elde ediniz.

- Elde ettiğiniz formülde **b** yerine **−b** yazarak $\mathbf{\cot(a-b)=\dfrac{\cot a\cdot\cot b+1}{\cot b-\cot a}}$ formülünü oluşturunuz.

SONUÇ

- $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\cdot\tan b}$
- $\cot(a+b)=\dfrac{\cot a\cdot\cot b-1}{\cot a+\cot b}$
- $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\cdot\tan b}$
- $\cot(a-b)=\dfrac{\cot a\cdot\cot b+1}{\cot b-\cot a}$

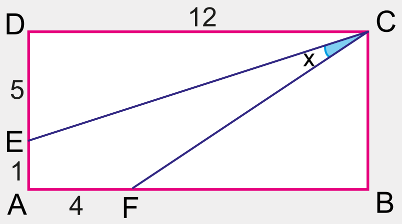
ÖRNEK

$a = \frac{\pi}{36}$ olduğuna göre $\frac{\tan 4a + \tan 5a}{1 - \tan 4a \cdot \tan 5a} + \frac{\cot 24a \cdot \cot 6a + 1}{\cot 6a - \cot 24a}$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

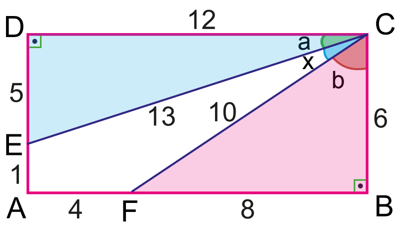
$$\begin{aligned}\frac{\tan 4a + \tan 5a}{1 - \tan 4a \cdot \tan 5a} + \frac{\cot 24a \cdot \cot 6a + 1}{\cot 6a - \cot 24a} &= \tan(4a + 5a) + \cot(24a - 6a)\\ &= \tan 9a + \cot 18a\\ &= \tan\left(9 \cdot \frac{\pi}{36}\right) + \cot\left(18 \cdot \frac{\pi}{36}\right)\\ &= \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ &= 1 + 0\\ &= 1 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK



ABCD bir dikdörtgen
$|DE| = 5$ cm
$|DC| = 12$ cm
$|EA| = 1$ cm
$|AF| = 4$ cm
olduğuna göre $\sin x$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



$m(\widehat{DCE}) = a$ ve $m(\widehat{FCB}) = b$ olsun.

$|DC| = |AF| + |FB|$ olduğundan $|AF| = 8$ cm

$|BC| = |DE| + |EA|$ olduğundan $|BC| = 6$ cm

CDE dik üçgeninde Pisagor teoreminden $|CE| = 13$ cm

CBF dik üçgeninde Pisagor teoreminden $|CF| = 10$ cm

CDE dik üçgeninden $\sin a = \frac{5}{13}$ ve $\cos a = \frac{12}{13}$

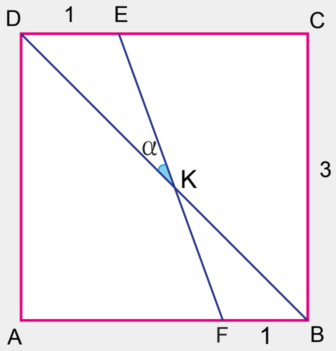
CBF dik üçgeninden $\sin b = \frac{4}{5}$ ve $\cos b = \frac{3}{5}$ olur.

$a + b + x = 90^\circ$ ise $x = 90^\circ - (a + b)$

$\sin x = \sin(90^\circ - (a + b)) = \cos(a + b)$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b &= \frac{12}{13} \cdot \frac{3}{5} - \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{5}\\ &= \frac{36}{65} - \frac{20}{65}\\ &= \frac{16}{65} \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK



ABCD kare,

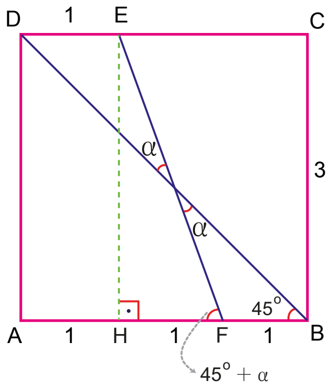
$[EF] \cap [BD] = \{K\}$

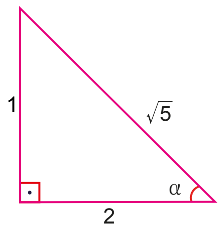
$|DE| = |FB| = 1$ cm

$|BC| = 3$ cm

olduğuna göre $\cos\alpha$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM





E noktasından $[AB]$ na dik indirilecek olursa $|DE| = |AH| = 1$ cm bulunur. $|AH| + |HF| + |FB| = 3$ cm olduğundan $|HF| = 1$ cm olarak elde edilir.

$$\tan(45^\circ + \alpha) = \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{\tan 45^\circ + \tan\alpha}{1 - \tan 45^\circ \cdot \tan\alpha} = 3$$

$$\Rightarrow 1 + \tan\alpha = 3 - 3\tan\alpha$$

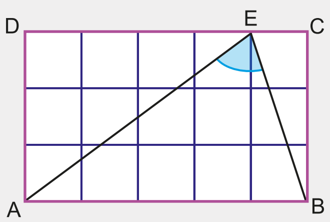
$$\Rightarrow 4\tan\alpha = 2$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

$\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$ olacak şekilde bir dik üçgen çizilirse

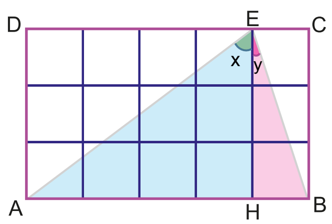
$\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ bulunur.

ÖRNEK



Şekildeki dikdörtgen bir kenarı 1 birim olan 15 adet eş birimkareden oluşmuştur. Buna göre $\tan(\widehat{AEB})$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

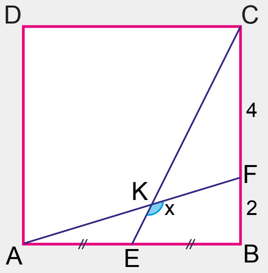


$m(\widehat{AEH}) = x$ ve $m(\widehat{HEB}) = y$ olsun.

$$\tan(\widehat{AEB}) = \tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$$

$$= \frac{\frac{4}{3} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{9}} = 3 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK



ABCD kare

$[AF] \cap [EC] = \{K\}$

$m(\widehat{EKF}) = x$

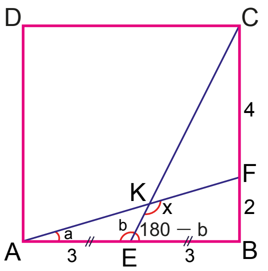
$|AE| = |EB|$

$|CF| = 4$ cm

$|FB| = 2$ cm

olduğuna göre $\tan x$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



$m(\widehat{FAB}) = a$ ve $m(\widehat{AEK}) = b$ olsun.

$x = a + b$ olduğundan $\tan x = \tan(a + b)$ olur. Buna göre

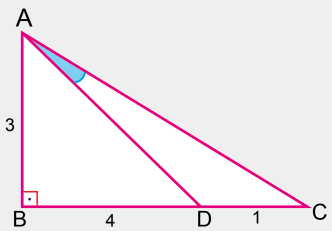
$$\tan a = \frac{|BF|}{|AB|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\tan(180^\circ - b) = \frac{6}{3} \Rightarrow -\tan b = 2$$

$$\Rightarrow \tan b = -2 \text{ olur.}$$

$$\tan x = \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b} = \frac{\frac{1}{3} - 2}{1 - \frac{1}{3} \cdot (-2)} = \frac{-\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} = -1 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK



ABC dik üçgen

$[AB] \perp [BC]$

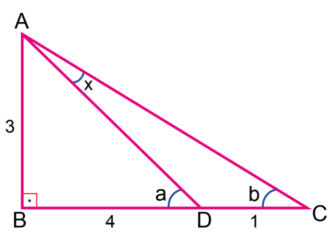
$|AB| = 3$ cm

$|BD| = 4$ cm

$|DC| = 1$ cm

olduğuna göre $\tan(\widehat{DAC})$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



$m(\widehat{DAC}) = x$, $m(\widehat{ADB}) = a$ ve $m(\widehat{ACB}) = b$ olsun.

ABD dik üçgeninde $\tan a = \frac{3}{4}$ ve

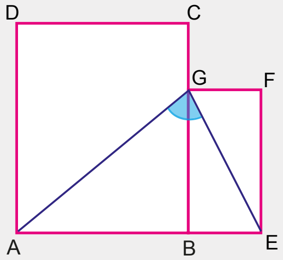
ABC dik üçgeninde $\tan b = \frac{3}{5}$ olur.

$b + x = a$ olduğundan $x = a - b \Rightarrow \tan x = \tan(a - b)$ olur.

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

$$= \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{5}}{1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5}} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{29}{20}} = \frac{3}{29} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

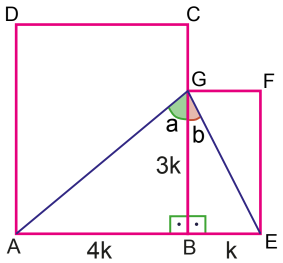


ABCD ve BEFG birer dikdörtgen

$|BE| = \dfrac{|GB|}{3} = \dfrac{|AB|}{4}$

olduğuna göre $\sin(\widehat{AGE})$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



$m(\widehat{AGB}) = a$ ve $m(\widehat{BGE}) = b$ ve

$|BE| = \dfrac{|GB|}{3} = \dfrac{|AB|}{4} = k$ birim olsun. Bu durumda

$|BE| = k$ birim, $|GB| = 3k$ birim ve $|AB| = 4k$ birim olur. Buna göre

ABG dik üçgeninde Pisagor teoreminden $|AG| = 5k$ birim

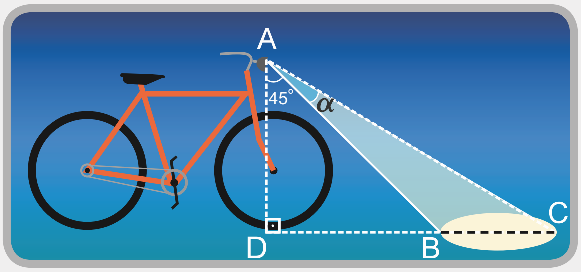
GBE dik üçgeninde Pisagor teoreminden $|GE| = \sqrt{10}k$ birim olur.

$$\sin(\widehat{AGE}) = \sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

$$= \frac{4\cancel{k}}{5\cancel{k}} \cdot \frac{3\cancel{k}}{\sqrt{10}\cancel{k}} + \frac{3\cancel{k}}{5\cancel{k}} \cdot \frac{\cancel{k}}{\sqrt{10}\cancel{k}}$$

$$= \frac{15}{5\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK



Yandaki şekilde bir bisikletin farından çıkan ışınların aydınlattığı bölge gösterilmiştir. Farın yerden yüksekliği $|AD| = 80$ cm, $m(\widehat{BAD}) = 45^\circ$, $m(\widehat{BAC}) = \alpha$ ve $\tan\alpha = \dfrac{3}{5}$ dir. D, B ve C doğrusal olduğuna göre farın aydınlattığı bölgedeki $|BC|$ nun kaç metre olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

ABD ikizkenar dik üçgeninde $|AD| = |DB| = 80$ olur.
Bu durumda $|CD| = |DB| + |BC| = 80 + |BC|$ olur.

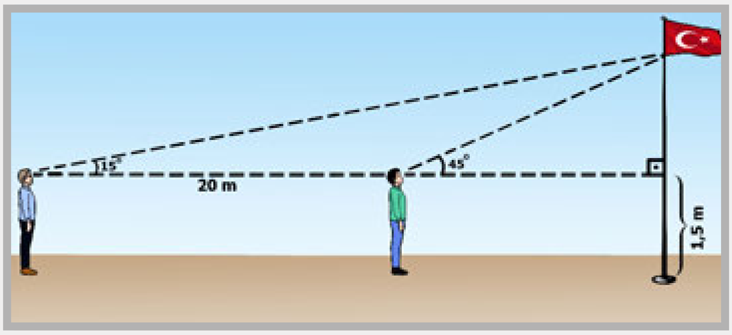
$$\tan(\alpha + 45^\circ) = \frac{|CD|}{|AD|} \Rightarrow \frac{\tan\alpha + \tan 45^\circ}{1 - \tan\alpha \cdot \tan 45^\circ} = \frac{80 + |BC|}{80} \Rightarrow \frac{\frac{3}{5} + 1}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{80 + |BC|}{80}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{8}{\cancel{5}}}{\frac{2}{\cancel{5}}} = \frac{80 + |BC|}{80}$$

$$\Rightarrow 320 = 80 + |BC|$$

$$\Rightarrow |BC| = 240 \text{ cm} = 2{,}4 \text{ m bulunur.}$$

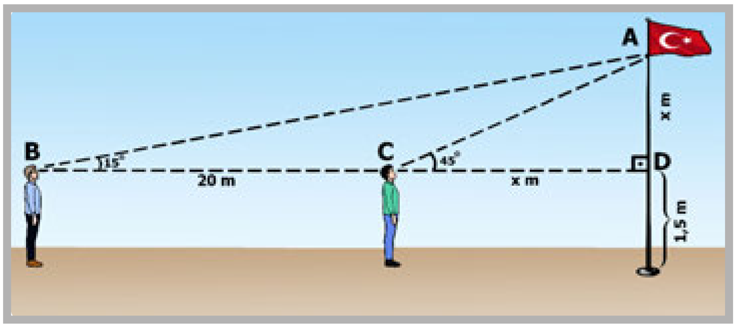
ÖRNEK



Şekil 1

Yandaki Şekil 1 de "15 Temmuz Demokrasi ve Millî Birlik Günü" anma etkinlikleri kapsamında 15 Temmuz Şehitleri Anıtı'na giden Deniz ve Cüneyt, İstiklal Marşı'nın okunması esnasında gönderde dalgalanan şanlı Türk bayrağına bakmaktadır. Aynı boyda ve aynı yönde olan Deniz ve Cüneyt ile bayrak direği şekildeki gibi doğrusaldır. Her ikisinin de gözlerinin yerden yüksekliği 1,5 m olup aralarında 20 m uzaklık bulunmaktadır. Deniz 15° lik açı ile bayrağa bakarken Cüneyt'in bakma açısı 45° dir. Buna göre Türk bayrağının yerden yüksekliğinin yaklaşık olarak kaç metre olduğunu bulunuz. $(\sqrt{3} \cong 1{,}7)$

ÇÖZÜM



Şekil 2

Yandaki Şekil 2 de

ADC ikizkenar dik üçgeninde

$|AD| = |DC| = x$ metre olsun.

ABD dik üçgenine göre

$$\tan 15^\circ = \frac{|AD|}{|BD|}$$

$$= \frac{x}{x+20} \text{ olur.}$$

$$\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) \Rightarrow \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \cdot \tan 30^\circ} = \frac{x}{x+20}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{x}{x+20}$$

$$\Rightarrow \frac{3-\sqrt{3}}{\underset{(3-\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}}} = \frac{x}{x+20}$$

$$\Rightarrow \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = \frac{x}{x+20}$$

$$\Rightarrow 2 - \sqrt{3} = \frac{x}{x+20}$$

$$\Rightarrow 2 - 1{,}7 \cong \frac{x}{x+20}$$

$$\Rightarrow 0{,}3x + 6 \cong x$$

$$\Rightarrow 0{,}7x \cong 6$$

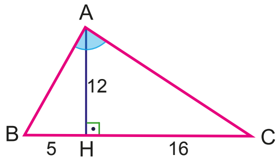
$$\Rightarrow x \cong \frac{60}{7}$$

$$\Rightarrow x \cong 8{,}6 \text{ metre olur.}$$

Bu durumda Türk bayrağının yerden yüksekliği yaklaşık olarak $8{,}6 + 1{,}5 = 10{,}1$ metre bulunur.

Alıştırmalar

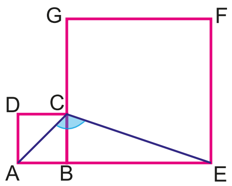
1



ABC üçgen
$[AH] \perp [BC]$
$|BH| = 5\,cm$
$|HC| = 16\,cm$
$|AH| = 12\,cm$

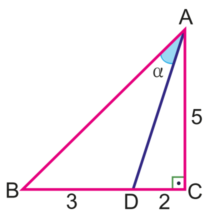
olduğuna göre $\sin(\widehat{BAC})$ değerini bulunuz.

2



ABCD ve BEFG birer kare
$2 \cdot |EF| = 5 \cdot |AB|$
olduğuna göre
$\cos(\widehat{ACE})$ değerini bulunuz.

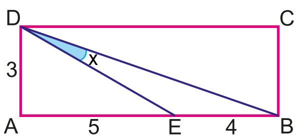
3



ACB dik üçgen
$[AC] \perp [BC]$
$|CD| = 2\,cm$
$|BD| = 3\,cm$
$|AC| = 5\,cm$
$m(\widehat{BAD}) = \alpha$

olduğuna göre $\cot\alpha$ değerini bulunuz.

4



ABCD dikdörtgen
$|AD| = 3$ cm
$|AE| = 5$ cm
$|BE| = 4$ cm
$m(\widehat{EDB}) = x$

olduğuna göre $\tan x$ değerini bulunuz.

5 $\cos 15^\circ$ ifadesinin değerini bulunuz.

6 $\cos 42^\circ \cdot \sin 108^\circ - \sin 42^\circ \cdot \sin 18^\circ$ ifadesinin değerini bulunuz.

7 $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ olmak üzere
$\tan x = 1$ ve $\tan y = 3$ olduğuna göre
$\sin(x - y)$ değerini bulunuz.

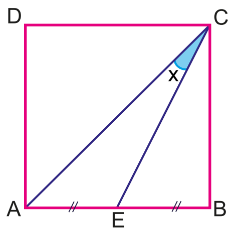
8 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ve $\cot x = 2$ olmak üzere
$\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$ ifadesinin değerini bulunuz.

9 $x + y + z = 3\pi$ olmak üzere
$\sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x - \sin z$
ifadesinin eşitini bulunuz.

10 $\tan 15^\circ$ ifadesinin değerini bulunuz.

11 $\dfrac{\tan 55^\circ + \tan 5^\circ}{1 - \tan 55^\circ \cdot \tan 5^\circ}$ ifadesinin değerini bulunuz.

12



ABCD kare

$|AE| = |EB|$

$m(\widehat{ACE}) = x$

olduğuna göre $\cot x$ değerini bulunuz.

13 $x - y = \dfrac{2\pi}{3}$ olmak üzere

$(\sin x - \sin y)^2 + (\cos x - \cos y)^2$

ifadesinin değerini bulunuz.

14 Bir ABC üçgeninde

$\sin \widehat{A} \cdot \sin \widehat{B} = \dfrac{1}{3}$ ve $\cos \widehat{A} \cdot \cos \widehat{B} = \dfrac{2}{3}$

olduğuna göre $\cos \widehat{C}$ değerini bulunuz.

15 $(x + y) \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ olmak üzere

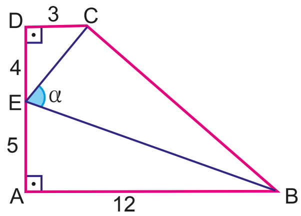
$\tan x = 3$ ve $\cot y = \dfrac{1}{2}$ olduğuna

göre $x + y$ toplamının değerini radyan türünden bulunuz.

16 $\tan x = 2$ olduğuna göre $\cot\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$ ifadesinin değerini bulunuz.

17 $\sqrt{3} \cdot \cos 75^\circ + \sin 75^\circ$ ifadesinin değerini bulunuz.

18



ABCD dik yamuk

$|DC| = 3$ cm

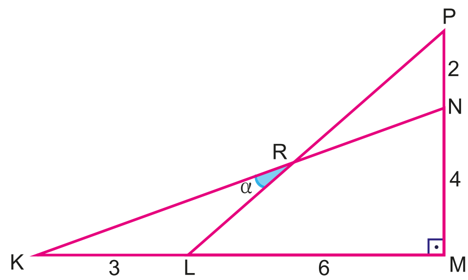
$|DE| = 4$ cm

$|EA| = 5$ cm

$|AB| = 12$ cm

$m(\widehat{CEB}) = \alpha$ olduğuna göre $\cos \alpha$ değerini bulunuz.

19



PML ve KMN birer dik üçgen

$[MP] \perp [KM]$

$|KL| = 3$ cm

$|LM| = 6$ cm

$|MN| = 4$ cm

$|NP| = 2$ cm

$m(\widehat{KRL}) = \alpha$

olduğuna göre $\tan \alpha$ değerini bulunuz.

3.1.2. İki Kat Açı Formülleri

$\sin(a+b)=\sin a\cdot\cos b+\cos a\cdot\sin b$ eşitliğinde **b** yerine **a** yazılırsa

$\sin(a+a)=\sin a\cdot\cos a+\cos a\cdot\sin a$

$\mathbf{\sin 2a = 2\sin a\cdot\cos a}$ formülü elde edilir.

YÖNERGE

- $\cos(a+b)=\cos a\cdot\cos b-\sin a\cdot\sin b$ formülünde **b** yerine **a** yazarak

  $\mathbf{\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a}$ formülünü elde ediniz.

  Bu formülde, $\cos^2 a+\sin^2 a=1$ eşitliğinden yararlanarak

  $\sin^2 a$ yerine $1-\cos^2 a$ yazarak $\mathbf{\cos 2a=2\cos^2 a-1}$ formülünü ve

  $\cos^2 a$ yerine $1-\sin^2 a$ yazarak $\mathbf{\cos 2a=1-2\sin^2 a}$ formülünü oluşturunuz.

- $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\cdot\tan b}$ formülünde **b** yerine **a** yazarak

  $\mathbf{\tan 2a=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}}$ formülünü ve benzer şekilde

  $\cot(a+b)=\dfrac{\cot a\cdot\cot b-1}{\cot b+\cot a}$ formülünde **b** yerine **a** yazarak

  $\mathbf{\cot 2a=\dfrac{\cot^2 a-1}{2\cot a}}$ formülünü oluşturunuz.

SONUÇ

- $\sin 2a=2\sin a\cdot\cos a$
- $\tan 2a=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$
- $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$
  $=2\cos^2 a-1$
  $=1-2\sin^2 a$
- $\cot 2a=\dfrac{\cot^2 a-1}{2\cot a}$

ÖRNEK

$\dfrac{\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ}=\frac{2\sin 20^\circ\cdot\cancel{\cos 20^\circ}}{\cancel{\cos 20^\circ}}$$

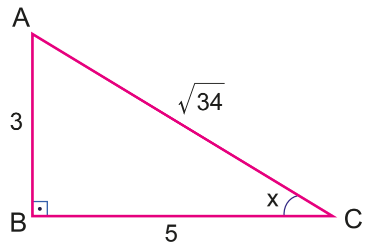
$=2\sin 20^\circ$ bulunur.

ÖRNEK

$\tan x = \frac{3}{5}$ olduğuna göre $\sin 2x$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\tan x = \frac{3}{5}$ olacak şekilde bir ABC dik üçgeni çizilirse



$\sin x = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{3}{\sqrt{34}}$ ve $\cos x = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{5}{\sqrt{34}}$ olur.

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2\sin x \cdot \cos x\\ &= 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} \cdot \frac{5}{\sqrt{34}}\\ &= \frac{30}{34} = \frac{15}{17} \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK

$\frac{4\cos 70^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 320^\circ}{\sin 100^\circ}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}\frac{4\overbrace{\cos 70^\circ}^{\sin 20^\circ} \cdot \cos 20^\circ \cdot \overbrace{\cos 320^\circ}^{\cos 40^\circ}}{\underbrace{\sin 100^\circ}_{\sin 80^\circ}} &= \frac{2 \cdot 2\sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ}{\sin 80^\circ}\\ &= \frac{2\sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ}{\sin 80^\circ}\\ &= \frac{\sin 80^\circ}{\sin 80^\circ}\\ &= 1 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK

$\frac{2\sin x + \sin 2x}{1 - \cos 2x} - \frac{1}{\sin x}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}\frac{2\sin x + \sin 2x}{1 - \cos 2x} - \frac{1}{\sin x} &= \frac{2\sin x + 2\sin x \cdot \cos x}{1 - \left(1 - 2\sin^2 x\right)} - \frac{1}{\sin x}\\ &= \frac{2\sin x \cdot (1 + \cos x)}{\cancel{1} - \cancel{1} + 2\sin^2 x} - \frac{1}{\sin x}\\ &= \frac{1 + \cos x}{\sin x} - \frac{1}{\sin x}\\ &= \frac{\cancel{1} + \cos x - \cancel{1}}{\sin x}\\ &= \cot x \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK

$\sin x - \cos x = \frac{1}{3}$ olduğuna göre $\cos 2x$ in pozitif değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Eşitliğin her iki tarafının karesi alınırsa

$$(\sin x - \cos x)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} - \underbrace{2\sin x \cdot \cos x}_{\sin 2x} = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow 1 - \sin 2x = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \sin 2x = \frac{8}{9} \text{ elde edilir.}$$

$\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1$ olduğundan

$$\frac{64}{81} + \cos^2 2x = 1 \Rightarrow \cos^2 2x = 1 - \frac{64}{81}$$

$$\Rightarrow \cos^2 2x = \frac{17}{81}$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \frac{\sqrt{17}}{9} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} = -\frac{1}{2}$ olduğuna göre $\sin 2x$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(\cos x - \sin x) \cdot \cancel{(\cos x + \sin x)}}{\cancel{\sin x + \cos x}} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (\cos x - \sin x)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2$$ (Eşitliğin her iki tarafının karesi alınır.)

$$\Rightarrow \underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{1} - \underbrace{2\cos x \cdot \sin x}_{\sin 2x} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 1 - \sin 2x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin 2x = \frac{3}{4} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\frac{1 - \cos 10^\circ}{1 + \cos 10^\circ}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{1 - \cos 10^\circ}{1 + \cos 10^\circ} = \frac{1 - (1 - 2\sin^2 5^\circ)}{1 + (2\cos^2 5^\circ - 1)} = \frac{\cancel{1} - \cancel{1} + 2\sin^2 5^\circ}{\cancel{1} + 2\cos^2 5^\circ - \cancel{1}} = \frac{\cancel{2}\sin^2 5^\circ}{\cancel{2}\cos^2 5^\circ} = \tan^2 5^\circ \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\sin 76^\circ = a$ olduğuna göre $\dfrac{\sin 21^\circ}{\sin 7^\circ} + \dfrac{\cos 21^\circ}{\cos 7^\circ}$ ifadesinin a türünden eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{\sin 21^\circ}{\sin 7^\circ} + \frac{\cos 21^\circ}{\cos 7^\circ} = \frac{\sin 21^\circ \cdot \cos 7^\circ + \cos 21^\circ \cdot \sin 7^\circ}{\sin 7^\circ \cdot \cos 7^\circ} = \frac{\sin(21^\circ + 7^\circ)}{\sin 7^\circ \cdot \cos 7^\circ}$$

$$= \frac{\sin 28^\circ}{\sin 7^\circ \cdot \cos 7^\circ}$$

$$= \frac{2\sin 14^\circ \cdot \cos 14^\circ}{\frac{\sin 14^\circ}{2}} \qquad \left(\sin a \cdot \cos a = \frac{\sin 2a}{2}\right)$$

$$= \frac{4\cancel{\sin 14^\circ} \cdot \overbrace{\cos 14^\circ}^{\sin 76^\circ}}{\cancel{\sin 14^\circ}}$$

$$= 4\sin 76^\circ$$

$= 4a$ bulunur.

ÖRNEK

$\sin 6^\circ = x$ olduğuna göre $\sin^2 42^\circ$ nin x türünden eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\sin 6^\circ = \cos 84^\circ = x$ olur.

$$\cos 84^\circ = 1 - 2\sin^2 42^\circ \Rightarrow x = 1 - 2\sin^2 42^\circ$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 42^\circ = 1 - x$$

$$\Rightarrow \sin^2 42^\circ = \frac{1-x}{2}$$ bulunur.

ÖRNEK

$\dfrac{\sin^2 24^\circ + \sin^2 66^\circ + \sin 36^\circ + \cos 36^\circ}{\cos^2 54^\circ + \cos^2 36^\circ + \sin 36^\circ - \cos 36^\circ}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{\sin^2 24^\circ + \sin^2 66^\circ + \sin 36^\circ + \cos 36^\circ}{\cos^2 54^\circ + \cos^2 36^\circ + \sin 36^\circ - \cos 36^\circ} = \frac{\sin^2 24^\circ + \cos^2 24^\circ + \sin 36^\circ + \cos 36^\circ}{\sin^2 36^\circ + \cos^2 36^\circ + \sin 36^\circ - \cos 36^\circ}$$

$$= \frac{1 + 2\sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ + 2\cos^2 18^\circ - 1}{1 + 2\sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ - (1 - 2\sin^2 18^\circ)}$$

$$= \frac{2\sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ + 2\cos^2 18^\circ}{2\sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ + 2\sin^2 18^\circ}$$

$$= \frac{\cancel{2}\cos 18^\circ \cdot \cancel{(\sin 18^\circ + \cos 18^\circ)}}{\cancel{2}\sin 18^\circ \cdot \cancel{(\cos 18^\circ + \sin 18^\circ)}}$$

$= \cot 18^\circ$ bulunur.

ÖRNEK

$\dfrac{\cos^4 40^\circ - \sin^4 40^\circ}{\sin 5^\circ \cdot \cos 5^\circ}$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{\cos^4 40^\circ - \sin^4 40^\circ}{\sin 5^\circ \cdot \cos 5^\circ} = \frac{\overbrace{(\cos^2 40^\circ - \sin^2 40^\circ)}^{\cos 80^\circ} \cdot \overbrace{(\cos^2 40^\circ + \sin^2 40^\circ)}^{1}}{\dfrac{\sin 10^\circ}{2}}$$

$$= \cancel{\cos 80^\circ} \cdot \frac{2}{\cancel{\sin 10^\circ}} = 2 \text{ bulunur. } (\cos 80^\circ = \sin 10^\circ)$$

ÖRNEK

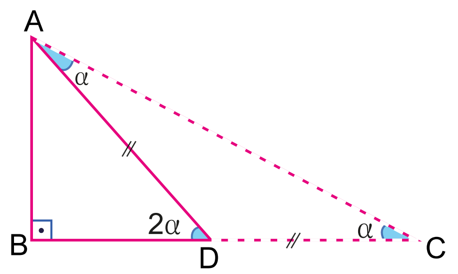
$4\cos x = 3\sin x$ olduğuna göre $\tan 2x$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$4\cos x = 3\sin x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{4}{3} \Rightarrow \tan x = \frac{4}{3} \text{ olur.}$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{2 \cdot \frac{4}{3}}{1 - \frac{16}{9}} = \frac{8}{3} \cdot \left(-\frac{9}{7}\right) = -\frac{24}{7} \text{ bulunur.}$$

Uyarı



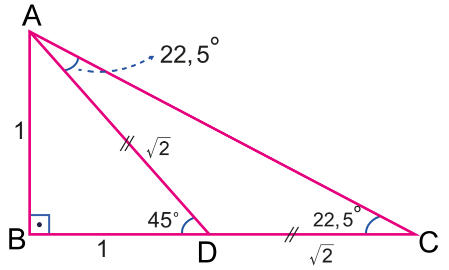
2α dar açı olmak üzere ABD üçgeninin $[BD]$ kenarı doğrusal olarak $|AD| = |DC|$ olacak şekilde $[DC]$ kadar uzatılırsa ADC ikizkenar üçgeni ve C açısı α olan ABC dik üçgeni elde edilir.

Böylece α açısının trigonometrik oranlarını bulmak için oluşturulan ABC dik üçgeni kullanılabilir.

ÖRNEK

$\tan(202{,}5^\circ)$ nin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



$\tan(202{,}5^\circ) = \tan(180^\circ + 22{,}5^\circ) = \tan(22{,}5^\circ)$ olup yandaki ABD ikizkenar dik üçgeninde $|AB| = |BD| = 1$ cm alınırsa Pisagor teoreminden $|AD| = |DC| = \sqrt{2}$ cm olur.

ABC dik üçgeninde

$$\tan(22{,}5^\circ) = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{1}{\underset{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1 \text{ bulunur.}$$

Böylece $\tan(202{,}5^\circ)$ nin değeri $\sqrt{2}-1$ olarak elde edilir.

ÖRNEK

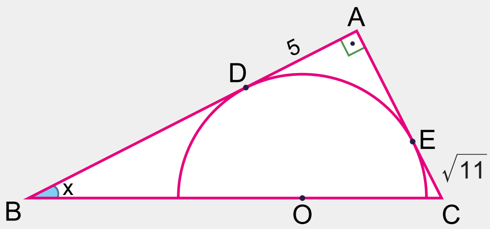
$\cot x = \frac{4}{3}$ olduğuna göre $\tan 2x$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\tan x = \frac{1}{\cot x}$ olduğundan $\cot x = \frac{4}{3}$ ise $\tan x = \frac{3}{4}$ olur.

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1-\frac{9}{16}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}} = \frac{24}{7} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK



BAC dik üçgeni O merkezli yarım çembere D ve E noktalarında teğettir.

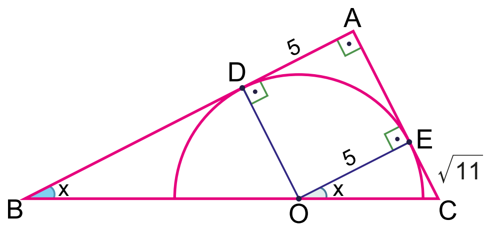
$[AB] \perp [AC]$

$|AD| = 5$ cm

$|EC| = \sqrt{11}$ cm

$m(\widehat{ABC}) = x$ olduğuna göre $\cos 2x$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



$[OD] \perp [AB]$ ve $[OE] \perp [AC]$ olup $[OD]$ ile $[OE]$ yarıçap olduğundan uzunlukları eşittir. Buna göre ADOE bir karedir. $[AB]$ ve $[OE]$ birbirine paralel olduğundan $m(\widehat{EOC}) = x$ olur. $|OE| = 5$ cm ve $|EC| = \sqrt{11}$ cm ise Pisagor teoreminden $|OC| = 6$ cm olur. OEC dik üçgeninde $\cos x = \frac{5}{6}$ olduğundan

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2 - 1 = \frac{7}{18} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\cot x - \tan x = \frac{2}{3}$ olduğuna göre $\tan 2x$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\cot x - \tan x = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2}{3}$$

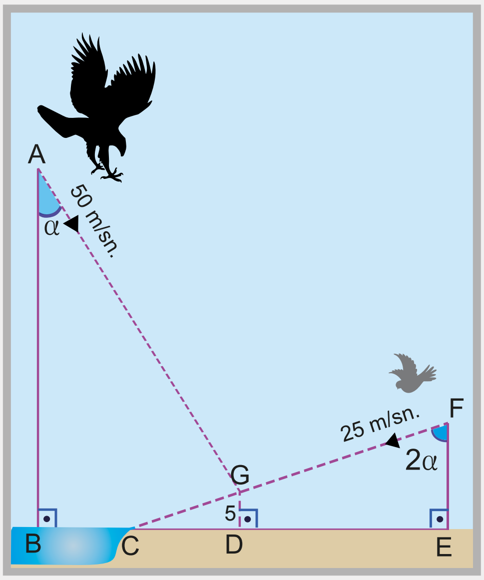
$$\Rightarrow \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{2}{3}$$

$\left(\sin x \cdot \cos x = \frac{\sin 2x}{2}\right)$

$$\Rightarrow \frac{\cos 2x}{\frac{\sin 2x}{2}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\cancel{2}\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\cancel{2}}{3} \Rightarrow \cot 2x = \frac{1}{3} \text{ olur.}$$

$$\tan 2x = \frac{1}{\cot 2x} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK



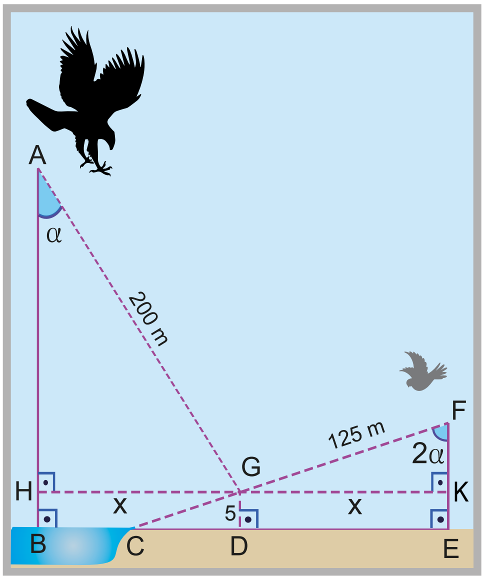
Yandaki şekilde F noktasında bulunan bir kuş su içmek için C noktasındaki bir su kaynağına $m(\widehat{EFC}) = 2\alpha$ olacak şekilde doğrusal olarak 25 m/sn. hızla uçuşa başlamıştır. A noktasında bulunan bir şahin, kuşun hareketinden 1 saniye sonra $m(\widehat{BAG}) = \alpha$ olacak şekilde doğrusal olarak 50 m/sn. hızla uçuşa başlıyor. Şahin, 4 saniye sonra yerden 5 metre yükseklikteki G noktasında kuşu yakalıyor. $[GD] \perp [BE]$ ve $|BD| = |DE|$ olduğuna göre

a) $\cos\alpha$ değerini bulunuz.

b) A noktasının yerden yüksekliğini bulunuz.

c) F noktasının yerden yüksekliğini bulunuz.

ÇÖZÜM



a) Yandaki şekilde $|BD| = |DE| = x$ m olsun.
Bu durumda $|HG| = |GK| = x$ m olur.
Şahin 4 saniye hareket ettiğinden $|AG| = 200$ m ve
kuş 5 saniye hareket ettiğinden $|GF| = 125$ m olur.

$\widehat{FKG}$ dik üçgeninde $\sin 2\alpha = \dfrac{|GK|}{|GF|} = \dfrac{x}{125}$ ve

$\widehat{AHG}$ dik üçgeninde $\sin\alpha = \dfrac{|HG|}{|AG|} = \dfrac{x}{200}$ olur.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \Rightarrow \frac{\cancel{x}}{125} = 2 \cdot \frac{\cancel{x}}{200} \cdot \cos\alpha$$
$$\Rightarrow 250 \cdot \cos\alpha = 200$$
$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5} \text{ bulunur.}$$

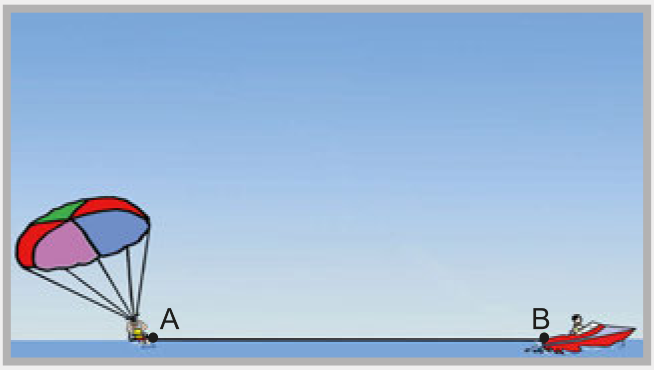
b) $\cos\alpha = \dfrac{|AH|}{|AG|} \Rightarrow \dfrac{4}{5} = \dfrac{|AH|}{200} \Rightarrow |AH| = 160$ m

A noktasının yerden yüksekliği $|AB| = |AH| + |HB| = 160 + 5 = 165$ m olur.

c) $\cos 2\alpha = \dfrac{|FK|}{|GF|} \Rightarrow 2\cos^2\alpha - 1 = \dfrac{|FK|}{125} \Rightarrow 2 \cdot \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 - 1 = \dfrac{|FK|}{125} \Rightarrow \dfrac{7}{25} = \dfrac{|FK|}{125} \Rightarrow |FK| = 35$ m

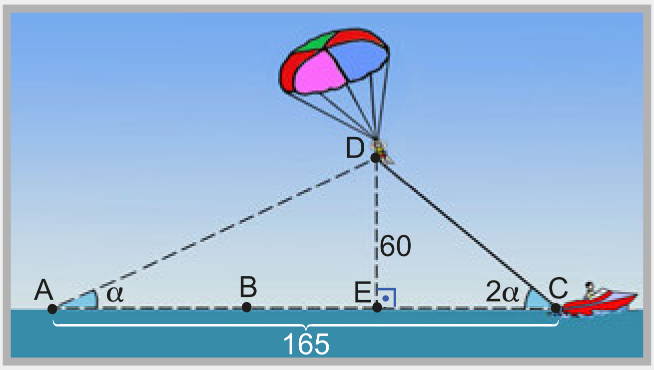
F noktasının yerden yüksekliği $|EF| = |FK| + |KE| = 35 + 5 = 40$ m olur.

ÖRNEK



Şekil 1

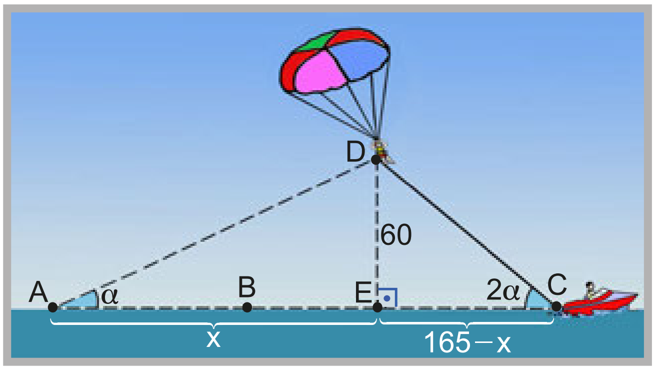
Yandaki Şekil 1 de deniz yüzeyinde bulunan bir sürat teknesi yine deniz yüzeyi üzerinde bulunan deniz paraşütüne bir ip ile bağlıdır. Sürat teknesi B noktasından AB doğrultusunda şekildeki yönde hareket etmeye başladığında paraşüt de yükselmeye başlıyor.



Şekil 2

Yandaki Şekil 2 de sürat teknesi A noktasından 165 metre uzaklıktaki C noktasına ulaştığı anda deniz paraşütü yerden 60 metre yükseklikteki D noktasında bulunuyor. $m(\widehat{DAC}) = \alpha$, $m(\widehat{DCA}) = 2\alpha$ ve $[DE] \perp [AC]$ olduğuna göre $|AE|$ nun kaç metre olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Şekil 3

$|AE| = x$ m olsun.

Bu durumda $|EC| = (165 - x)$ m olur.

AED dik üçgeninde $\tan\alpha = \dfrac{|DE|}{|AE|} = \dfrac{60}{x}$

DEC dik üçgeninde $\tan 2\alpha = \dfrac{|DE|}{|EC|} = \dfrac{60}{165 - x}$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} \Rightarrow \frac{60}{165 - x} = \frac{2 \cdot \frac{60}{x}}{1 - \left(\frac{60}{x}\right)^2} \Rightarrow \frac{\overset{1}{\cancel{60}}}{165 - x} = \frac{\overset{2}{\cancel{120}}}{\cancel{x}} \cdot \frac{x^{\cancel{2}}}{x^2 - 3600}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{165 - x} = \frac{2x}{x^2 - 3600}$$

$$\Rightarrow 2x \cdot (165 - x) = x^2 - 3600$$

$$\Rightarrow 330x - 2x^2 = x^2 - 3600$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 330x - 3600 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 110x - 1200 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 120) \cdot (x + 10) = 0$$

$$\Rightarrow x = 120 \text{ m bulunur.}$$

Alıştırmalar

1 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ve $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5}$ olduğuna göre $\sin\alpha$ değerini bulunuz.

2 $\cot\alpha = 2$ olduğuna göre $\sin 2\alpha$ değerini bulunuz.

3 $\frac{\sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}$ ifadesinin değerini bulunuz.

4 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ olmak üzere $\sqrt{\sin 4x + 1} + 2\sin x \cdot \cos x$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

5 $\cos x - \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

6 $\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\sin 2x}$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

7 $\sin x + \cos x = \frac{1}{4}$ olduğuna göre $\sin 2x$ değerini bulunuz.

8 $\cos^4 75^\circ - \sin^4 75^\circ$ ifadesinin değerini bulunuz.

9 $\cot x = \frac{1}{2}$ olduğuna göre $\cos 2x$ değerini bulunuz.

10 $\cos 36^\circ = m$ olduğuna göre $\sin 18^\circ$ nin m türünden eşitini bulunuz.

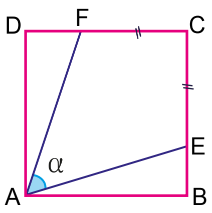
11 $\frac{\cos 24^\circ}{\cos 8^\circ} + \frac{\sin 24^\circ}{\sin 8^\circ}$ ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

12 $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ ve $\tan 2\alpha = \frac{3}{4}$ olduğuna göre $\tan\alpha$ değerini bulunuz.

13 $\sin 80^\circ = m$ olduğuna göre $\sin 70^\circ$ nin m türünden eşitini bulunuz.

14 $\tan 380^\circ = a$ olduğuna göre $\cot 770^\circ$ nin a türünden eşitini bulunuz.

15



ABCD bir kare

$|EC| = |FC|$

$3 \cdot |BE| = |AB|$

$m(\widehat{FAE}) = \alpha$

olduğuna göre $\tan\alpha$ değerini bulunuz.

16 $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ve $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

olduğuna göre $\tan 2x$ değerini bulunuz.

17 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ve $\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$

olduğuna göre $\tan x$ değerini bulunuz.

18 $\dfrac{1 + \cos 140^\circ}{1 - \cos 140^\circ}$

ifadesinin en sade hâlini bulunuz.

19 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ve $\cot x = \frac{1}{2}$ olduğuna göre

$\sin 2x + \cos 2x$ toplamını bulunuz.

20 $\dfrac{1}{\sin 20^\circ} - \dfrac{\sqrt{3}}{3\cos 20^\circ}$

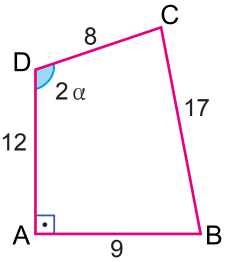
ifadesinin eşitini bulunuz.

21 ABC ikizkenar üçgeninde

$|AB| = |AC|$ ve $\tan\widehat{C} = \frac{3}{5}$

olduğuna göre $\tan\widehat{A}$ değerini bulunuz.

22



ABCD bir dörtgen

$[DA] \perp [AB]$

$|AB| = 9$ cm

$|AD| = 12$ cm

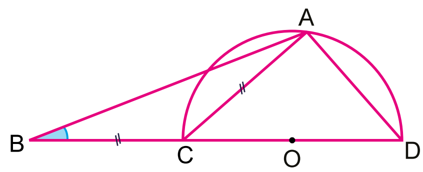
$|DC| = 8$ cm

$|CB| = 17$ cm

$m(\widehat{ADC}) = 2\alpha$

olduğuna göre $\cot\alpha$ değerini bulunuz.

23



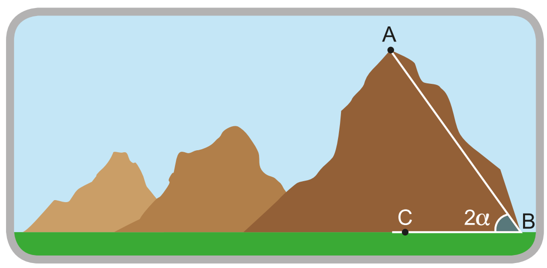
Şekilde O merkezli yarım çember verilmiştir.

$|AC| = |BC|$

$\cos(\widehat{ADC}) = \frac{3}{5}$

B, C ve D doğrusal olduğuna göre $\sin(\widehat{ABC})$ değerini bulunuz.

24



Şekilde bir bölgedeki sıradağlar verilmiştir. A noktası en yüksek dağın zirvesinde, B ve C noktaları yer düzleminde birer noktadır.

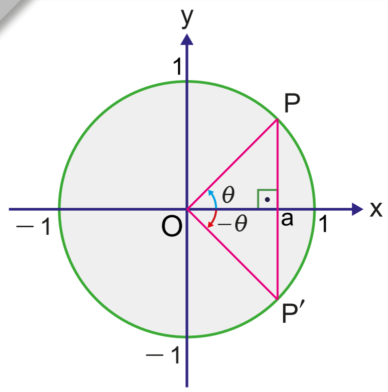
$m(\widehat{ABC}) = 2\alpha$, $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ ve $|AB| = 1690$ m

olduğuna göre bu dağın yerden yüksekliğinin kaç metre olduğunu bulunuz.

3.2. TRİGONOMETRİK DENKLEMLER

3.2.1. Trigonometrik Denklemlerin Çözüm Kümeleri

$\cos x = a$ Denkleminin Çözüm Kümesi



Yandaki birim çembere göre $\cos\theta = a$ veya $\cos(-\theta) = a$ olur. Kosinüs fonksiyonu 2π periyotlu periyodik bir fonksiyon olduğundan $\cos\theta = \cos(\theta + k \cdot 2\pi)$ veya $\cos(-\theta) = \cos(-\theta + k \cdot 2\pi)$ olur.

Bu durumda $\cos x = a$ denkleminin kökleri $\cos(\theta + k \cdot 2\pi) = \cos x$ ve $\cos(-\theta + k \cdot 2\pi) = \cos x$ eşitliklerini sağlayan x değerleridir. Buna göre

$\cos(\theta + k \cdot 2\pi) = \cos x \Rightarrow x = \theta + k \cdot 2\pi$

$\cos(-\theta + k \cdot 2\pi) = \cos x \Rightarrow x = -\theta + k \cdot 2\pi$ olur.

Sonuç olarak

$-1 \le a \le 1$ olmak üzere $\cos x = a$ denkleminin $[0, 2\pi)$ nda bir kökü θ ise denklemin çözüm kümesi $\boldsymbol{Ç = \{x \mid x = \theta + k \cdot 2\pi \vee x = -\theta + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}}$ olur.

ÖRNEK

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ denkleminin $[0, 2\pi)$ nda bir kökü $x = \frac{\pi}{6}$ olur.

Bu durumda çözüm kümesi $Ç = \left\{x \mid x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ olarak bulunur.

ÖRNEK

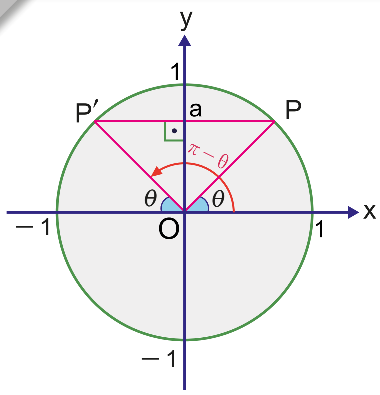
$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ denkleminin $[0, 2\pi)$ nda bir kökü $x = \frac{3\pi}{4}$ olur.

Bu durumda çözüm kümesi $Ç = \left\{x \mid x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ olarak bulunur.

$\sin x = a$ Denkleminin Çözüm Kümesi



Yandaki birim çembere göre $\sin\theta = a$ veya $\sin(\pi-\theta) = a$ olur. Sinüs fonksiyonu 2π periyotlu periyodik bir fonksiyon olduğundan $\sin\theta = \sin(\theta + k\cdot 2\pi)$ veya

$\sin(\pi-\theta) = \sin(\pi-\theta+k\cdot 2\pi)$ olur.

Bu durumda $\sin x = a$ denkleminin kökleri

$\sin(\theta + k\cdot 2\pi) = \sin x$ ve $\sin(\pi-\theta+k\cdot 2\pi) = \sin x$

eşitliklerini sağlayan x değerleridir. Buna göre

$\sin(\theta + k\cdot 2\pi) = \sin x \Rightarrow x = \theta + k\cdot 2\pi$

$\sin(\pi-\theta+k\cdot 2\pi) = \sin x \Rightarrow x = \pi-\theta+k\cdot 2\pi$ olur.

Sonuç olarak

$-1 \le a \le 1$ olmak üzere $\sin x = a$ denkleminin $[0,2\pi)$ nda bir kökü θ ise denklemin çözüm kümesi $\mathbf{Ç} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \theta + \mathbf{k}\cdot\mathbf{2}\pi \lor \mathbf{x} = \pi - \theta + \mathbf{k}\cdot \mathbf{2}\pi,\ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}\}$ olur.

ÖRNEK

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ denkleminin $[0,2\pi)$ nda bir kökü $x = \frac{\pi}{4}$ olur.

Bu durumda çözüm kümesi $Ç = \left\{x \mid x = \frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi \lor x = \pi - \frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$= \left\{x \mid x = \frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi \lor x = \frac{3\pi}{4} + k\cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ olarak bulunur.

ÖRNEK

$\sin x = -\frac{1}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

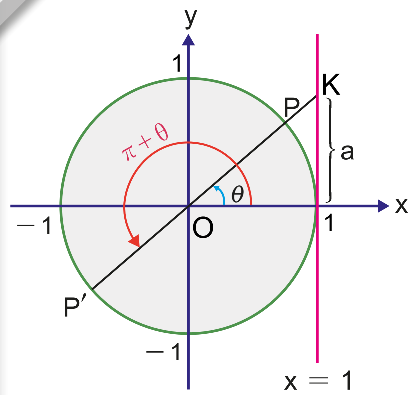
ÇÖZÜM

$\sin x = -\frac{1}{2}$ denkleminin $[0,2\pi)$ nda bir kökü $x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ olur.

Bu durumda çözüm kümesi $Ç = \left\{x \mid x = \frac{7\pi}{6} + k\cdot 2\pi \lor x = \pi - \frac{7\pi}{6} + k\cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$= \left\{x \mid x = \frac{7\pi}{6} + k\cdot 2\pi \lor x = -\frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ olarak bulunur.

$\tan x = a$ Denkleminin Çözüm Kümesi



Yandaki birim çembere göre $\tan\theta = a$ olur. Tanjant fonksiyonu π periyotlu periyodik bir fonksiyon olduğundan $\tan\theta = \tan(\theta + k\cdot\pi)$ olur.

Bu durumda $\tan x = a$ denkleminin kökleri $\tan(\theta + k\cdot\pi) = \tan x$ eşitliğini sağlayan x değerleridir.

Buna göre

$\tan(\theta + k\cdot\pi) = \tan x \Rightarrow x = \theta + k\cdot\pi$ olur.

Sonuç olarak $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\tan x = a$ denkleminin $[0, \pi)$ nda bir kökü θ $\left(\theta \neq \frac{\pi}{2}\right)$ ise denklemin çözüm kümesi **Ç** $= \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \theta + \mathbf{k}\cdot\pi,\ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}\}$ olur.

ÖRNEK

$\tan x = \sqrt{3}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\tan x = \sqrt{3}$ denkleminin $[0, \pi)$ nda bir kökü $x = \frac{\pi}{3}$ olur.

Bu durumda çözüm kümesi $Ç = \left\{x \mid x = \frac{\pi}{3} + k\cdot\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ olarak bulunur.

ÖRNEK

$\tan x = -1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\tan x = -1$ denkleminin $[0, \pi)$ nda bir kökü $x = \frac{3\pi}{4}$ olur.

Bu durumda çözüm kümesi $Ç = \left\{x \mid x = \frac{3\pi}{4} + k\cdot\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ olarak bulunur.

ÖRNEK

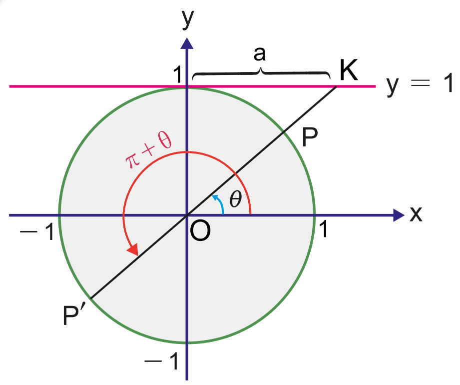
$\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ denkleminin $[0, \pi)$ nda bir kökü $x = \frac{5\pi}{6}$ olur.

Bu durumda çözüm kümesi $Ç = \left\{x \mid x = \frac{5\pi}{6} + k\cdot\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ olarak bulunur.

$\cot x = a$ Denkleminin Çözüm Kümesi



Yandaki birim çembere göre $\cot\theta = a$ olur. Kotanjant fonksiyonu π periyotlu periyodik bir fonksiyon olduğundan $\cot\theta = \cot(\theta + k\cdot\pi)$ olur.
Bu durumda $\cot x = a$ denkleminin kökleri $\cot(\theta + k\cdot\pi) = \cot x$ eşitliğini sağlayan x değerleridir. Buna göre
$\cot(\theta + k\cdot\pi) = \cot x \Rightarrow x = \theta + k\cdot\pi$ olur.
Sonuç olarak

$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\cot x = a$ denkleminin $(0, \pi)$ nda bir kökü θ ise denklemin çözüm kümesi **Ç** $= \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \theta + \mathbf{k}\cdot\pi,\ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}\}$ olur.

ÖRNEK

$\cot x = \sqrt{3}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\cot x = \sqrt{3}$ denkleminin $(0, \pi)$ nda bir kökü $x = \frac{\pi}{6}$ olur.

Bu durumda çözüm kümesi $Ç = \left\{x \mid x = \frac{\pi}{6} + k\cdot\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ olarak bulunur.

SONUÇ

$k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

- ✓ $\sin f(x) = \sin g(x)$ ise $f(x) = g(x) + k\cdot 2\pi$ veya $f(x) = \pi - g(x) + k\cdot 2\pi$
- ✓ $\cos f(x) = \cos g(x)$ ise $f(x) = g(x) + k\cdot 2\pi$ veya $f(x) = -g(x) + k\cdot 2\pi$
- ✓ $\tan f(x) = \tan g(x)$ ise $f(x) = g(x) + k\cdot\pi$
- ✓ $\cot f(x) = \cot g(x)$ ise $f(x) = g(x) + k\cdot\pi$

ÖRNEK

$\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow 3x - \frac{\pi}{6} = x + \frac{\pi}{3} + k\cdot 2\pi$ veya $3x - \frac{\pi}{6} = \pi - \left(x + \frac{\pi}{3}\right) + k\cdot 2\pi$

$$\Rightarrow 3x - x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad \text{veya} \quad 3x - \frac{\pi}{6} = \pi - x - \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad \text{veya} \quad 4x = \pi + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \quad \text{veya} \quad 4x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \quad \text{veya} \quad x = \frac{5\pi}{24} + \frac{k \cdot \pi}{2} \quad \text{olur.}$$

Bu durumda çözüm kümesi $Ç = \left\{ x \mid x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \vee x = \frac{5\pi}{24} + \frac{k \cdot \pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$ olarak bulunur.

ÖRNEK

$\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 3x - \frac{\pi}{3} = -x + \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad \text{veya} \quad 3x - \frac{\pi}{3} = -\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) + k \cdot 2\pi$$

$$\Rightarrow 3x + x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad \text{veya} \quad 3x - \frac{\pi}{3} = x - \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

$$\Rightarrow 4x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad \text{veya} \quad 2x = k \cdot 2\pi$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k \cdot \pi}{2} \quad \text{veya} \quad x = k \cdot \pi \quad \text{olur.}$$

Bu durumda çözüm kümesi $Ç = \left\{ x \mid x = \frac{\pi}{6} + \frac{k \cdot \pi}{2} \vee x = k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$ olarak bulunur.

ÖRNEK

$\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + k \cdot \pi$$

$$\Rightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$$

$$\Rightarrow x + x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{5\pi}{12} + k \cdot \pi$$

$$\Rightarrow x = \frac{5\pi}{24} + \frac{k \cdot \pi}{2} \quad \text{olur.}$$

Bu durumda çözüm kümesi $Ç = \left\{ x \mid x = \frac{5\pi}{24} + \frac{k \cdot \pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$ olarak bulunur.

ÖRNEK

Zaman içerisinde yönü ve şiddeti belli bir düzen içerisinde değişen akıma **alternatif akım** denir. Bu akım ve bu akımla ilgili potansiyel fark, trigonometrik fonksiyonlardan sinüs fonksiyonu ile modellenebilmektedir.

V : potansiyel fark (volt)

t : zaman (sn.)

olmak üzere bir şehirde kullanılan elektriğin potansiyel fark denklemi zamana bağlı olarak $V(t) = 180 \cdot \sin(120\pi t)$ fonksiyonu ile modellenebilmektedir. Buna göre bu bölgede bulunan bir evde kullanılan çamaşır makinesi çalıştırıldıktan kaç saniye sonra potansiyel farkın ilk kez 180V olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

t saniye sonra potansiyel fark 180V olsun. Buna göre

$$V(t) = 180 \cdot \sin(120\pi t) \Rightarrow \cancel{180} = \cancel{180} \cdot \sin(120\pi t)$$

$$\Rightarrow \sin(120\pi t) = 1$$

$$\Rightarrow 120\pi t = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{240} + \frac{k}{60} \text{ olur.}$$

Bu durumda potansiyel fark ilk kez $k = 0$ için $\frac{1}{240}$ saniye sonra 180V olur.

a, b ve $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere $a\sin x + b\cos x = c$ biçimindeki denklemlere, **sin x ve cos x e göre lineer (doğrusal) denklem** denir.

$$a\sin x + b\cos x = c \Rightarrow \sin x + \frac{b}{a} \cdot \cos x = \frac{c}{a}$$ (Eşitliğin her iki tarafı a ile bölünür.)

$$\Rightarrow \sin x + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \cos x = \frac{c}{a}$$ $\left(\frac{b}{a} = \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$

$$\Rightarrow \frac{\cos\alpha \cdot \sin x + \sin\alpha \cdot \cos x}{\cos\alpha} = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \sin(x + \alpha) = \frac{c}{a} \cdot \cos\alpha$$

denkleminin çözülebilmesi için $-1 \le \frac{c}{a} \cdot \cos\alpha \le 1$ olmalıdır.

$$-1 \le \frac{c}{a} \cdot \cos\alpha \le 1 \Rightarrow 0 \le \frac{c^2}{a^2} \cdot \cos^2\alpha \le 1$$

$$\Rightarrow c^2 \le \frac{a^2}{\cos^2\alpha}$$ $\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha\right)$

$$\Rightarrow c^2 \le a^2 \cdot (1 + \tan^2\alpha)$$

$$\Rightarrow c^2 \le a^2 \cdot \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{c^2 \le a^2 + b^2} \text{ elde edilir.}$$

Bu eşitsizliğin sağlanması durumunda denklemin çözüm kümesi bulunabilir.
Aksi durumda denklemin çözüm kümesi $\varnothing$ olur.

ÖRNEK

$\sqrt{3}\cdot\sin x-\sqrt{5}\cdot\cos x=m$ denkleminin çözüm kümesinin $\varnothing$ olması için m nin alabileceği en küçük pozitif tam sayı değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$a\sin x+b\cos x=c$ denkleminde çözüm kümesinin $\varnothing$ olması için $c^2\le a^2+b^2$ eşitsizliği sağlanmamalıdır. Bu durumda $c^2>a^2+b^2$ olmalıdır. Verilen denklemde $a=\sqrt{3}$, $b=-\sqrt{5}$ ve $c=m$ olduğundan $m^2>(\sqrt{3})^2+(-\sqrt{5})^2\Rightarrow m^2>3+5$

$\Rightarrow m^2>8$ bulunur.

O hâlde $m^2>8$ eşitsizliğini sağlayan en küçük pozitif tam sayı 3 olarak bulunur.

ÖRNEK

$\sin x+\sqrt{3}\cdot\cos x=1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\sin x+\sqrt{3}\cdot\cos x=1\Rightarrow \sin x+\tan\frac{\pi}{3}\cdot\cos x=1$ ($\sqrt{3}$ yerine $\tan\frac{\pi}{3}$ yazılır.)

$\Rightarrow \sin x+\dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cdot\cos x=1$ ($\tan\frac{\pi}{3}$ yerine $\dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}$ yazılır.)

$$\Rightarrow \frac{\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos x}{\cos\frac{\pi}{3}}=1$$

$$\Rightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6} \qquad \left(\cos\frac{\pi}{3}=\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi \text{ veya } x+\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi$$

$$\Rightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi \text{ veya } x=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi \text{ olur.}$$

Bu durumda çözüm kümesi $Ç=\left\{x\mid x=-\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi \vee x=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ olarak bulunur.

Uyarı

$k\in\mathbb{Z}$ olmak üzere

- $\sin f(x)=0\Rightarrow f(x)=k\cdot\pi$
- $\sin f(x)=1\Rightarrow f(x)=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi$
- $\sin f(x)=-1\Rightarrow f(x)=\frac{3\pi}{2}+k\cdot 2\pi$
- $\cos f(x)=0\Rightarrow f(x)=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$
- $\cos f(x)=1\Rightarrow f(x)=k\cdot 2\pi$
- $\cos f(x)=-1\Rightarrow f(x)=\pi+k\cdot 2\pi$

ÖRNEK

$\sin 6x + 2\sin 3x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\sin 6x + 2\sin 3x = 0 \Rightarrow 2\sin 3x \cdot \cos 3x + 2\sin 3x = 0$$
$$\Rightarrow 2\sin 3x(\cos 3x + 1) = 0$$
$$\Rightarrow \sin 3x = 0 \text{ veya } \cos 3x = -1$$
$$\Rightarrow 3x = k \cdot \pi \text{ veya } 3x = \pi + k \cdot 2\pi$$
$$\Rightarrow x = \frac{k \cdot \pi}{3} \text{ veya } x = \frac{\pi}{3} + \frac{k \cdot 2\pi}{3} \text{ olur.}$$

Bu durumda çözüm kümesi $Ç = \left\{x \mid x = \frac{k \cdot \pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{3} + \frac{k \cdot 2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ olarak bulunur.

ÖRNEK

$\cos 2x + \sqrt{3} \cdot \sin 2x = 2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\cos 2x + \sqrt{3} \cdot \sin 2x = 2 \Rightarrow \cos 2x + \tan\frac{\pi}{3} \cdot \sin 2x = 2$$
$$\Rightarrow \cos 2x + \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} \cdot \sin 2x = 2$$
$$\Rightarrow \frac{\cos 2x \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} \cdot \sin 2x}{\cos\frac{\pi}{3}} = 2$$
$$\Rightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \cos\frac{\pi}{3}$$
$$\Rightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$$
$$\Rightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = k \cdot 2\pi$$
$$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$
$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi \text{ olur.}$$

Bu durumda çözüm kümesi $Ç = \left\{x \mid x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ olarak bulunur.

ÖRNEK

$\sin(90^\circ - 2x) + \sin(90^\circ + x) = -1$ denkleminin $[0^\circ, 360^\circ)$ nda çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\sin(90^\circ - 2x) + \sin(90^\circ + x) = -1 \Rightarrow \cos 2x + \cos x = -1$$
$$\Rightarrow 2\cos^2 x - 1 + \cos x = -1$$
$$\Rightarrow 2\cos^2 x + \cos x = 0$$
$$\Rightarrow \cos x \cdot (2\cos x + 1) = 0$$
$$\Rightarrow \cos x = 0 \text{ veya } \cos x = -\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ \vee x = 120^\circ + k \cdot 360^\circ \vee x = -120^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ$ ifadesinde $k = 0$ için $x = 90^\circ$ ve $k = 1$ için $x = 270^\circ$ olur.
$x = 120^\circ + k \cdot 360^\circ$ ifadesinde $k = 0$ için $x = 120^\circ$ olur.
$x = -120^\circ + k \cdot 360^\circ$ ifadesinde $k = 1$ için $x = 240^\circ$ elde edilir.

Bu durumda çözüm kümesi $Ç = \{90^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 270^\circ\}$ olarak bulunur.

$a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere $\mathbf{a \sin x + b \cos x = 0}$ biçimindeki denklemlere **birinci dereceden homojen trigonometrik denklem** denir.

$a \sin x + b \cos x = 0$ denkleminde eşitliğin her iki yanı $\cos x \neq 0$ olmak üzere cosx e bölünüp

$$a \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{\cos x}}_{\tan x} + b \cdot \frac{\cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}} = 0 \Rightarrow a \cdot \tan x + b = 0$$
$$\Rightarrow \tan x = -\frac{b}{a}$$

denklemine dönüştürülerek çözüm yapılır.

ÖRNEK

$\cos x - \sqrt{3} \cdot \sin x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\cos x - \sqrt{3} \cdot \sin x = 0 \Rightarrow \frac{\cos x}{\cos x} - \frac{\sqrt{3} \cdot \sin x}{\cos x} = 0$$ (Eşitliğin her iki tarafı $\cos x$ ile bölünür.)
$$\Rightarrow 1 - \sqrt{3} \cdot \tan x = 0$$
$$\Rightarrow 1 = \sqrt{3} \cdot \tan x$$
$$\Rightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\Rightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{6}$$
$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi \text{ olur.}$$

Bu durumda çözüm kümesi $Ç = \left\{x \mid x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ olarak bulunur.

ÖRNEK

$\sqrt{3} \cdot \sin x - 3\cos x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\sqrt{3} \cdot \sin x - 3\cos x = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{3} \cdot \sin x}{\cos x} - \frac{3\cos x}{\cos x} = 0$$
$$\Rightarrow \sqrt{3} \cdot \tan x - 3 = 0$$
$$\Rightarrow \tan x = \sqrt{3}$$
$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \text{ olur.}$$

Bu durumda çözüm kümesi $Ç = \left\{ x \mid x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$ olarak bulunur.

ÖRNEK

$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0$ denkleminin çözüm kümesi $Ç = \left\{ x \mid x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$ olduğuna göre $\frac{a}{b}$ oranını bulunuz.

ÇÖZÜM

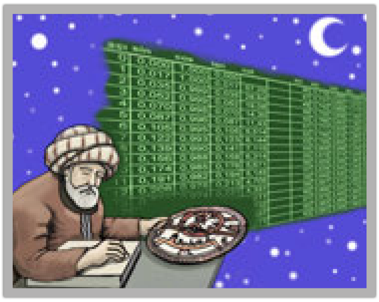
$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0$ denkleminin çözüm kümesi $Ç = \left\{ x \mid x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$ olduğundan denklemin köklerinden biri $\frac{5\pi}{6}$ olur ve bu kök verilen denklemi sağlar.

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0 \Rightarrow \frac{a \cdot \cancel{\sin x}}{b \cdot \cancel{\sin x}} + \frac{\cancel{b} \cdot \cos x}{\cancel{b} \cdot \sin x} = 0$$

(Eşitliğin her iki tarafı $b \cdot \sin x$ ile bölünür.)

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = -\cot x$$
$$\Rightarrow \frac{a}{b} = -\cot \frac{5\pi}{6}$$
$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{3} \text{ bulunur.}$$

El Battani



Görsel 3.1

Çağının en büyük müslüman astronomi âlimlerinden biri olarak kabul edilen El Battani, trigonometriye cebir ilmini ilk uygulayan kişi olarak insanlığın yıldızlara açılan gözü oldu. İlk eğitimini babasından alan bilgin, ilk ciddi çalışmalarına Rakka'da kurduğu bir rasathanede başladı. Vaktinin büyük çoğunluğunu rasathanede araştırmalarına harcayan büyük kâşif, çalışmaları sonucunda "Sabi Cetvelleri" adıyla bilinen yıldız kataloğunu hazırladı ve tam 489 yıldızı sınıflandırdı.

Astronomi ile ilgili çalışmaları sırasında matematik ve geometriden de faydalalanan El Battani, bugün trigonometriyi sistemli hâle getiren ilk bilim insanı olarak nitelendirilir. Küre ve düzlem geometrisi üzerine araştırmalar yapan El Battani, Batı'ya trigonometriyi öğreten isim oldu. Matematik ve astronomi ilmine oldukça katkı sağlayan El Battani sinüs, kosinüs ve kotanjant kavramlarını geliştirerek dereceli bir tablo oluşturdu. Bu tabirleri güneş saati hesaplamalarında da kullandı ve uzayıp giden gölge adını verdiği doğruya günümüzde tanjant denildi. Astronomi ve trigonometri üzerine sayısız kitap yazan Battani'nin eserleri Avrupa'da birçok akademide başucu kitabı oldu. Batı dünyası, Orta Çağ'da eserleri Latinceye çevrilen ilk müslüman bilim adamı olan Battani'nin değerini ortaya koymak için Ay'daki bir bölgeye onun ismini verdi.

(El Battani, www.eba.gov.tr)

Alıştırmalar

1 Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $\cos x = \frac{1}{2}$ **b)** $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **ç)** $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\cot x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ **e)** $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

2 Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

a) $\cos 3x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

b) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

c) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2x$

ç) $\tan 3x = \tan x$

3 $\tan x = \cot 2x$ denkleminin $(0, 2\pi]$ ndaki köklerini bulunuz.

4 $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ denkleminin $(0, 2\pi]$ nda çözüm kümesini bulunuz.

5 Bir futbol maçının oynanacağı gün bölgedeki ölçülecek hava sıcaklığı tahmini, santigrat derece (°C) türünden

$$f(x) = 10\sin\left(\frac{\pi}{12}x - \frac{11\pi}{12}\right) + 12$$

fonksiyonu ile modellenebilmektedir. Bu futbol karşılaşmasının başlayacağı saatte sıcaklık 17°C olarak tahmin edildiğine göre maçın başlama saatinin kaç olabileceğini bulunuz.

(x, saatleri ifade etmektedir. Örneğin saat 14.00 ise $x = 14$ alınır.)

6 $\sin 4x = 1$ denkleminin $(0, 2\pi)$ nda çözüm kümesini bulunuz.

7 $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{4}$ denkleminin $(0, \pi)$ nda çözüm kümesini bulunuz.

8 $\frac{\sin x}{3} = \frac{\cos x}{\sqrt{3}}$ denkleminin $(0, 2\pi)$ nda çözüm kümesini bulunuz.

9 $\tan\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \tan x$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

10 $\frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x} = \frac{1}{\sin x}$ denkleminin $(0°, 360°)$ nda çözüm kümesini bulunuz.

11 $\tan\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ denkleminin $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ ndaki köklerini bulunuz.

12 $\cot\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot \tan 2x = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

13 $2\sin x + 1 = 0$ denkleminin $(0°, 360°)$ nda çözüm kümesini bulunuz.

14 $2\sin x \cdot \cos x = \cos 28°$ denkleminin $[0°, 180°]$ ndaki köklerini bulunuz.

15 $\sqrt{3} \cdot \sin x + 3\cos x = 3$ denkleminin $(180°, 270°)$ nda çözüm kümesini bulunuz.

16 $x \in (180°, 360°)$ olduğuna göre $\cos x + \sin 2x = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

17 $\cos 4x = -1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

18 $\sin 3x \cdot \cos 4x + \cos 3x \cdot \sin 4x = \cos 3x$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Ölçme ve Değerlendirme 1

A) 1-6. sorularda boş bırakılan yerlere uygun ifadeleri yazınız.

1 $\cos 55^\circ \cdot \cos 25^\circ + \sin 55^\circ \cdot \sin 25^\circ$ ifadesinin değeri .... dir.

2 $\tan x = \sqrt{3}$ denkleminin $(180^\circ, 360^\circ)$ ndaki kökü .... derecedir.

3 $\sin 10^\circ \cdot \sin 80^\circ$ ifadesinin eşiti ....dir.

4 $\tan a + \tan b + \tan a \cdot \tan b = 1$ olduğuna göre $\tan(a+b)$ değeri .... dir.

5 $2\cos x - 3\sin x = 6$ denkleminin çözüm kümesi .... dir.

6 $\sin 40^\circ = 4a \cdot \cos 20^\circ \cdot \sin 10^\circ$ olduğuna göre a nın eşiti .... dir.

B) 7. soruda numaralar ile verilen ifadeleri harf ile verilen ifadelerle eşleştiriniz.

7 Numaralar ile verilen ifadelerin sonuçlarını bularak harf ile verilen ifadelerle eşleştiriniz.

I. $\dfrac{1+\cos 2x}{\sin 2x}$

II. $\cos^2 4x - \sin^2 4x$

III. $\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$

IV. $\cos 75^\circ$

a) $\dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

c) $\dfrac{1}{4}$

ç) $\cot x$

d) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4}$

e) $\cos 8x$

f) $\tan x$

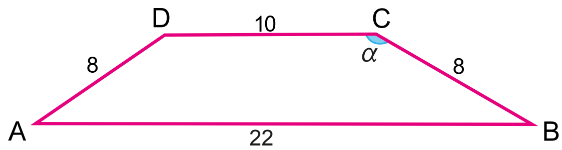
I.	II.	III.	IV.

C) 8-11. açık uçlu soruları cevaplandırınız.

8 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ve $\sin x = \frac{3}{5}$

olduğuna göre $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ değeri kaçtır?

9



ABCD ikizkenar yamuk,
$|DC| = 10$ cm, $|AD| = |BC| = 8$ cm,
$|AB| = 22$ cm ve $m(\widehat{DCB}) = \alpha$

olduğuna göre $\cos 2\alpha$ değeri kaçtır?

10 $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ve $\sin 4x = m$

olduğuna göre $\sin 2x + \cos 2x$ ifadesinin m türünden eşiti nedir?

11 $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ise $\sin 2x \cdot \cos 4x = \dfrac{1}{4\cos 2x}$

olduğuna göre x açısının radyan türünden eşiti nedir?

D) 12-21. çoktan seçmeli soruları çözünüz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

12 ABC bir üçgen olmak üzere

$\cos\widehat{A}\cdot\cos\widehat{B}-\sin\widehat{A}\cdot\sin\widehat{B}+\cos\widehat{C}$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2

13 $a=\sin(x+28^\circ)\cdot\cos(122^\circ-x)$
$b=\sin(122^\circ-x)\cdot\cos(x+28^\circ)$

olduğuna göre $a+b$ toplamının sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 0 D) $-\frac{1}{2}$ E) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

14 $\sin 795^\circ$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

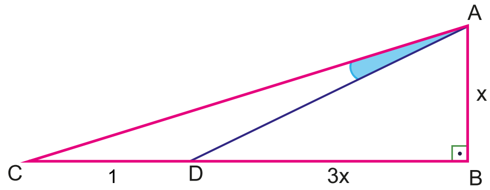
A) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

15 $\sin 70^\circ=\sqrt{\frac{m-1}{2}}$

olduğuna göre $\sin 50^\circ$ nin m türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) m B) $m-2$ C) $m+1$ D) $m+2$ E) $\frac{m}{2}$

16

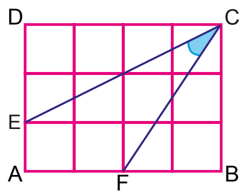


ABC bir dik üçgen, $[AB]\perp[BC]$
$|CD|=1$ birim, $3\cdot|AB|=|BD|=3x$ birim

olduğuna göre $\tan(\widehat{CAD})$ nın x türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{x}{3+10x}$ B) $\frac{x}{3x-10}$ C) $\frac{1}{3x+10}$ D) $\frac{1}{3+10x}$ E) $\frac{3}{3+10x}$

17

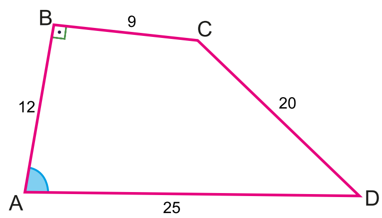


ABCD dikdörtgeni 12 eş birimkareden oluşmaktadır.

Buna göre $\cos(\widehat{ECF})$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{3}{\sqrt{65}}$ B) $\frac{4}{\sqrt{65}}$ C) $\frac{5}{\sqrt{65}}$ D) $\frac{6}{\sqrt{65}}$ E) $\frac{7}{\sqrt{65}}$

18



ABCD bir dörtgen,
$[AB]\perp[BC]$, $|BC|=9$ cm, $|AB|=12$ cm,
$|DC|=20$ cm ve $|AD|=25$ cm

olduğuna göre $\sin(\widehat{DAB})$ değeri kaçtır?

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{5}$

19 $\sin 2x = \cos 3x$

denkleminin köklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\pi}{8}$ B) $\frac{3\pi}{10}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{7\pi}{10}$ E) $\frac{4\pi}{5}$

20 $\cos x + \sqrt{3} \cdot \sin x = \sqrt{3}$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\left\{x \mid x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{\pi}{5} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

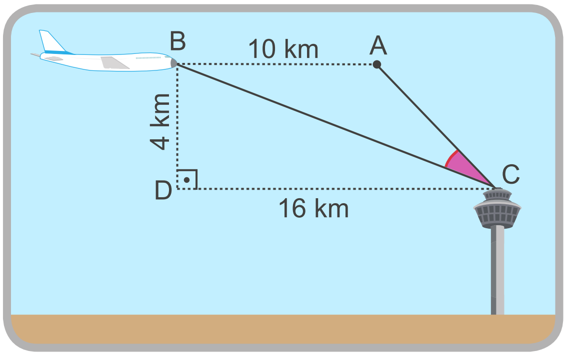
B) $\left\{x \mid x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

C) $\left\{x \mid x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

D) $\left\{x \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{\pi}{5} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

E) $\left\{x \mid x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

21

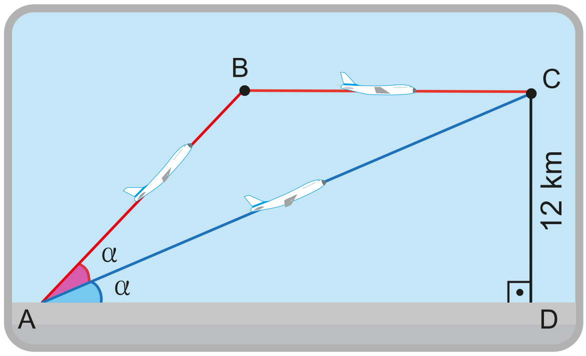


Bir havalimanında C noktasında bulunan kontrol kulesindeki görevli, C noktası hizasından 4 km yükseklikte zemine paralel olarak doğrusal rotada uçan bir uçağın B noktasından A noktasına kadar 10 km lik hareketini radarla takip etmektedir.

$|BD| = 4$ km ve $|DC| = 16$ km olduğuna göre $\tan(\widehat{ACB})$ değeri kaçtır?

A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{5}{14}$

E) 22-24. üst düzey beceri sorularını şekle ve metne göre cevaplayınız.



A noktasından $m(\widehat{CAD}) = \alpha$ olacak şekilde havalanan bir uçak yerden saniyede 40 metre yükselerek 12 kilometre yükseklikteki C noktasına doğrusal hareket ediyor. Bu uçak A noktasından $m(\widehat{BAD}) = 2\alpha$ olacak şekilde havalanırsa saniyede 60 metre yükselerek 12 kilometre yüksekliklikteki B noktasına ulaştıktan sonra bu noktadan doğrusal olarak C noktasına doğru hareket ediyor. Uçak yatay olarak saniyede 200 metre yol alabiliyor. Bu uçak her iki durumda da aynı sürede C noktasına vardığına göre;

22 $|BC|$ kaç km dir?

23 $\tan 4\alpha$ değeri kaçtır?

24 $|AD|$ kaç km dir?

Ölçme ve Değerlendirme 2

A) 1-4. sorularda boş bırakılan yerlere uygun ifadeleri yazınız.

1 Sıfırdan farklı a ve b iki gerçek sayısı için $a\sin x + b\cos x = 0$ biçimindeki denklemlere birinci dereceden .... denklem denir.

2 $\cot(7x - 10°) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ denkleminin en küçük x dar açısı .... derecedir.

3 $\sin^2 x \cdot \cos x + \cos^2 x \cdot \sin x = 0$ denkleminin $[0, 2\pi)$ nda .... tane kökü vardır.

4 $\frac{\sin x + \cos x}{\cos x} + \frac{\sin x + \cos x}{\sin x} = 0$ denkleminin $[0, \pi)$ ndaki kökü............. tür.

B) 5. soruda numaralar ile verilen ifadeleri harf ile verilen ifadelerle eşleştiriniz.

5 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ olmak üzere aşağıda verilen denklemleri karşılarında verilen köklerle eşleştiriniz.

I. $\cos 2x + \sin 2x = \sin\frac{\pi}{2}$

II. $\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} = 16$

III. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = \sin 2x$

IV. $\tan\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

a) 0

b) $\frac{\pi}{6}$

c) $\frac{3\pi}{10}$

ç) $\frac{\pi}{8}$

d) $\frac{5\pi}{48}$

e) $\frac{7\pi}{12}$

I.	II.	III.	IV.

C) 6-10. açık uçlu soruları cevaplandırınız.

6 $\tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

denkleminin $[0, 2\pi)$ nda kaç farklı kökü vardır?

7 $\tan x - \cot x = -1$

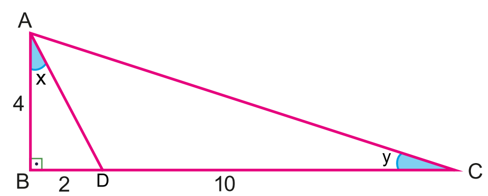
olduğuna göre $\tan 2x$ değeri kaçtır?

8 $a, b \in \mathbb{R}^+$ ve $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ için

$a\sin x - b\cos x = 0$

olduğuna göre $\tan 2x$ in a ve b türünden eşiti nedir?

9



ABC bir dik üçgen

$[AB] \perp [BC]$, $m(\widehat{BAD}) = x$, $m(\widehat{ACB}) = y$,

$|BD| = 2$ cm, $|DC| = 10$ cm ve

$|AB| = 4$ cm

olduğuna göre $x + y$ toplamı kaç derecedir?

10 $x \in (0, \pi)$ ve $\sin x \cdot \cos 2x = \frac{1}{8\cos x}$

olduğuna göre x açısının alabileceği en küçük değer kaç radyandır?

D) 11-31. çoktan seçmeli soruları çözünüz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

11 $3\sin x - \sqrt{3}\cdot\cos x$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2\cos(x-30^\circ)$ B) $\sin(x-30^\circ)$

C) $2\sqrt{3}\cdot\sin(x-30^\circ)$ D) $2\sqrt{3}\cdot\cos(x-30^\circ)$

E) $\sqrt{3}\cdot\tan x$

12 $\cos 80^\circ\cdot\cos 65^\circ + \sin 80^\circ\cdot\sin 65^\circ$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ B) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ C) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

D) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$ E) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

13 $\dfrac{\sin(2x-y)+\sin(2x+y)}{\cos(2x-y)+\cos(2x+y)}$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\tan 2x$ B) $\cot 2x$ C) $\sin 2x$

D) $\cos 2x$ E) $\sin^2 x$

14 $\dfrac{\cos 48^\circ}{\cos 16^\circ} - \dfrac{\sin 48^\circ}{\sin 16^\circ}$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

15 $\dfrac{\cos 4\alpha - 1}{\sin 4\alpha}$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\tan 2\alpha$ B) $-\tan 2\alpha$ C) $\tan 4\alpha$

D) $-\cot 2\alpha$ E) $2\sin 2\alpha$

16 $\sqrt{8+8\cos 72^\circ}$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2\sqrt{2}\cdot\cos 36^\circ$ B) $4\sin 36^\circ$ C) $4\sin 54^\circ$

D) $2\sqrt{2}\cdot\sin 54^\circ$ E) $2\cos 36^\circ$

17 $\tan 75^\circ - \cot 75^\circ$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{1}{2}$ B) 1 C) $\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{3}$ E) $4\sqrt{3}$

18 $\sin 48^\circ = m$

olduğuna göre $\sin^2 21^\circ$ nin m türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{1+m}{2}$ B) $\dfrac{1-m}{2}$ C) $\dfrac{1-m}{3}$

D) $\dfrac{2m+1}{2}$ E) $\dfrac{2m-1}{3}$

19 $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+3x\right)-\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+3x\right)$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-\cos 6x$ B) $\cos 6x$ C) $-\sin 6x$

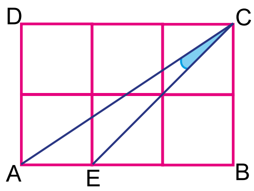
D) $2\cos 6x$ E) $\sin 6x$

20 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ ve $\tan x+\cot x=4$

olmak üzere $\cos 4x$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{1}{2}$ B) $\dfrac{1}{3}$ C) $\dfrac{1}{4}$ D) $\dfrac{1}{6}$ E) $\dfrac{1}{8}$

21

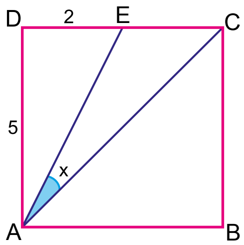


ABCD dikdörtgeni altı eş birimkareden oluşmaktadır.

Buna göre $\cos(\widehat{ACE})$ değeri kaçtır?

A) $\frac{\sqrt{26}}{26}$ B) $\frac{\sqrt{26}}{6}$ C) $\frac{\sqrt{26}}{9}$ D) $\frac{\sqrt{26}}{13}$ E) $\frac{5\sqrt{26}}{26}$

22



ABCD bir kare

$m(\widehat{EAC}) = x$

$|AD| = 5$ cm

$|DE| = 2$ cm

olduğuna göre $\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ değeri kaçtır?

A) $\frac{2}{7}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{4}{7}$ D) $\frac{5}{7}$ E) $\frac{6}{7}$

23 $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\left\{x \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\cdot\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\cdot\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

B) $\left\{x \mid x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\cdot\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{18} + \frac{2k\cdot\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

C) $\left\{x \mid x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\cdot\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{9} + \frac{k\cdot\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

D) $\left\{x \mid x = \frac{\pi}{36} + \frac{k\cdot\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{36} + \frac{k\cdot\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

E) $\left\{x \mid x = \frac{3\pi}{10} + k\cdot\pi \vee x = -\frac{3\pi}{10} + k\cdot\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

24 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos x$

denkleminin $[0, 2\pi)$ ndaki <u>en küçük</u> kökü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{\pi}{9}$ B) $\frac{2\pi}{9}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{4\pi}{3}$ E) $\frac{5\pi}{9}$

25 $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\cos 25^\circ$

denkleminin $(180^\circ, 270^\circ)$ ndaki köklerinden biri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $250,5^\circ$ B) 245° C) 240° D) 225° E) $212,5^\circ$

26 Türkiye'de evlerde kullanılan elektrik akımı 220 volttur. Bu akımın voltajı zamana bağlı olarak

$f(t) = 220\sin(100\pi t)$

fonksiyonu ile modellenebilmektedir.
(t, saniye olarak zamanı göstermektedir.)

Buna göre bir elektrikli ev aleti çalıştırıldıktan kaç saniye sonra elektrik akımının voltajı ilk kez 220 volt olur?

A) $\frac{1}{50}$ B) $\frac{1}{100}$ C) $\frac{1}{200}$ D) $\frac{1}{220}$ E) $\frac{1}{240}$

27 I. $\tan 2x$

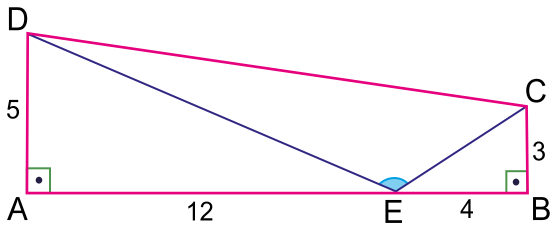
II. $\cos 2x$

III. $\sin 2x$

$\sin x = \frac{\sqrt{7}}{4}$ olduğuna göre yukarıdaki değerlerinden hangisi veya hangileri bir rasyonel sayıdır?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II D) I ve III E) II ve III

28



ABCD bir dörtgen $[AB] \perp [DA]$, $[BC] \perp [AB]$, $|AD| = 5$ cm, $|AE| = 12$ cm, $|EB| = 4$ cm ve $|BC| = 3$ cm

olduğuna göre $\sin(\widehat{DEC})$ değeri kaçtır?

A) $\frac{50}{65}$ B) $\frac{51}{65}$ C) $\frac{54}{65}$ D) $\frac{56}{65}$ E) $\frac{58}{65}$

29 $\sin^2 67,5° \cdot \cos^2 67,5°$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{16}$

30 $\tan 2\alpha = 2$

olduğuna göre $\tan^2\alpha + \tan\alpha$ ifadesinin değeri kaçtır?

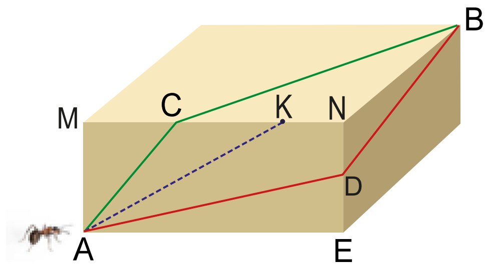
A) -1 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

31 $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$

olduğuna göre $\sin^4 x + \cos^4 x$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

E) 32-34. üst düzey beceri sorularını şekle ve metne göre cevaplayınız.



Şekildeki kare dik prizmanın taban ayrıtının uzunluğu yüksekliğinin iki katıdır.

A noktasında bulunan bir karınca ACB yolunu takip ederek B noktasına en kısa yoldan gittiğinde hareketine $m(\widehat{EAC}) = \alpha$ derecelik açı olacak şekilde başlamaktadır.

Karınca A noktasından B noktasına ADB yolunu kullanarak en kısa yoldan gittiğinde hareketine $m(\widehat{EAD}) = \beta$ derecelik açı olacak şekilde başladığına göre;

32 $\tan\alpha$ değeri kaçtır?

33 $\tan\beta$ değeri kaçtır?

34 Karınca $m(\widehat{EAK}) = \alpha - \beta$ olacak şekilde doğrusal hareket ettiğinde K noktasına gelmektedir.

Buna göre $\frac{|MK|}{|KN|}$ oranı kaçtır?

4

DÖNÜŞÜMLER

4.1. ANALİTİK DÜZLEMDE TEMEL DÖNÜŞÜMLER

HAZIRLIK ÇALIŞMALARI

- Saatteki akrep ve yelkovanın hareketi, dönme dolabın hareketi, bilardo topunun hareketi arasındaki benzerlik ve farklılıklar nelerdir?
- Ay'ın Dünya etrafındaki ve kendi ekseni etrafındaki hareketi ne tür bir harekettir?
- Analitik düzlemde uç noktalarının koordinatları bilinen bir doğru parçasının orta noktasının koordinatları nasıl bulunur?
- Eğimi ve bir noktası bilinen doğru denklemi nasıl yazılır?
- İki doğrunun kesim noktası nasıl bulunur?
- Bir cismin aynadaki görüntüsü ile cismin kendisi arasında bir fark var mıdır?

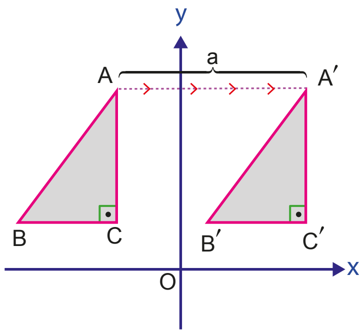
4.1. ANALİTİK DÜZLEMDE TEMEL DÖNÜŞÜMLER

4.1.1. Analitik Düzlemde Koordinatları Verilen Bir Noktanın Öteleme, Dönme ve Simetri Dönüşümleri

HATIRLATMA

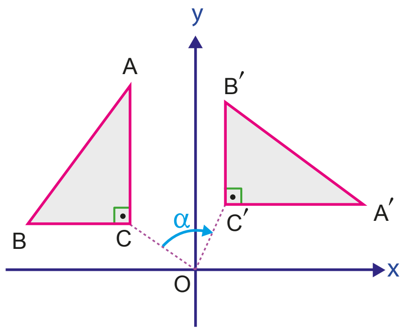
Analitik düzlemde temel dönüşümler öteleme, dönme ve simetri dönüşümleridir. Aşağıda analitik düzlemde verilen bir dik üçgenin x eksenine göre öteleme, orijine göre negatif yönde (saatin dönme yönünde) dönme ve y eksenine göre simetri dönüşümleri verilmiştir.

Öteleme Dönüşümü



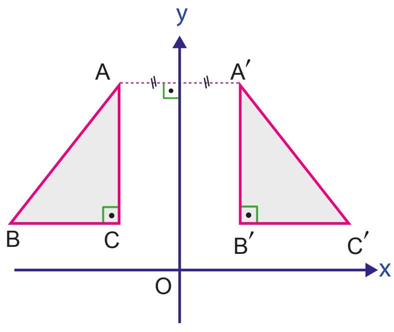
ABC üçgeninin x ekseni boyunca pozitif yönde a birim ötelenmesiyle şekildeki $A'B'C'$ dik üçgeni elde edilir.

Dönme Dönüşümü



ABC üçgeninin orijine göre negatif yönde (saatin dönme yönünde) α açısı kadar dönmesiyle şekildeki $A'B'C'$ dik üçgeni elde edilir.

Simetri Dönüşümü

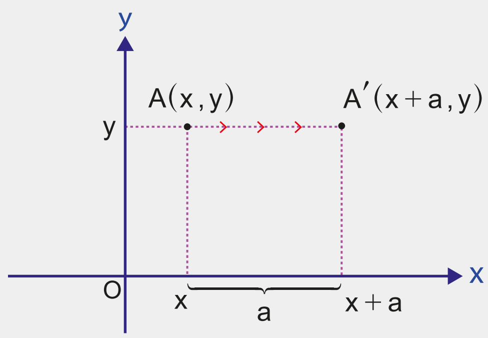


ABC üçgeninin y eksenine göre simetriği alınarak şekildeki $A'B'C'$ dik üçgeni elde edilir.

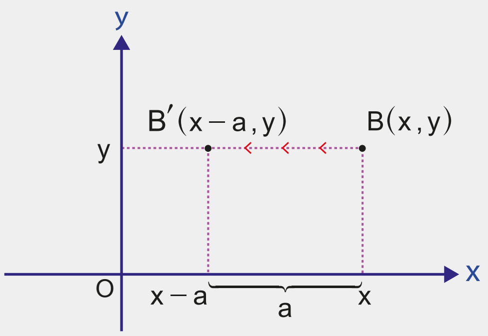
Öteleme Dönüşümü

Analitik düzlemde verilen bir noktanın belli bir doğrultuda ve belli bir yönde yer değiştirmesine **öteleme** denir. Koordinat sisteminde x ekseni boyunca ötelenen nokta x eksenine paralel olarak hareket eder. Bu noktanın apsisi değişirken ordinatı değişmez. Koordinat düzleminde y ekseni boyunca ötelenen nokta ise y eksenine paralel olarak hareket eder. Bu durumda noktanın ordinatı değişirken apsisi değişmez.

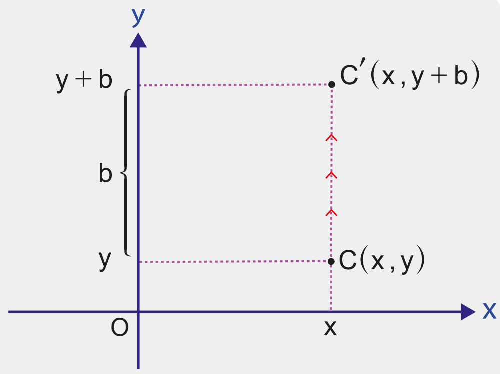
Analitik düzlemde $A(x, y)$ noktası x ekseni boyunca pozitif yönde (sağa doğru) a birim ötelendiğinde A noktasının apsisi a birim artarken ordinatı değişmez. Böylece $A(x, y)$ noktasının x ekseni boyunca pozitif yönde a birim ötelenmesiyle $\mathbf{A'(x+a, y)}$ noktası elde edilir.



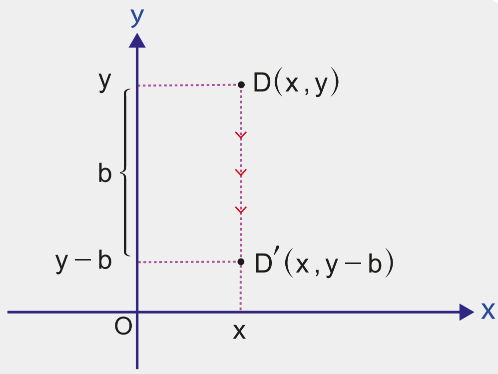
Analitik düzlemde $B(x, y)$ noktası x ekseni boyunca negatif yönde (sola doğru) a birim ötelendiğinde B noktasının apsisi a birim azalırken ordinatı değişmez. Böylece $B(x, y)$ noktasının x ekseni boyunca negatif yönde a birim ötelenmesiyle $\mathbf{B'(x-a, y)}$ noktası elde edilir.



Analitik düzlemde $C(x, y)$ noktası y ekseni boyunca pozitif yönde (yukarı doğru) b birim ötelendiğinde C noktasının ordinatı b birim artarken apsisi değişmez. Böylece $C(x, y)$ noktasının y ekseni boyunca pozitif yönde b birim ötelenmesiyle $\mathbf{C'(x, y+b)}$ noktası elde edilir.



Analitik düzlemde $D(x, y)$ noktası y ekseni boyunca negatif yönde (aşağı doğru) b birim ötelendiğinde D noktasının ordinatı b birim azalırken apsisi değişmez. Böylece $D(x, y)$ noktasının y ekseni boyunca pozitif yönde b birim ötelenmesiyle $\mathbf{D'(x, y-b)}$ noktası elde edilir.



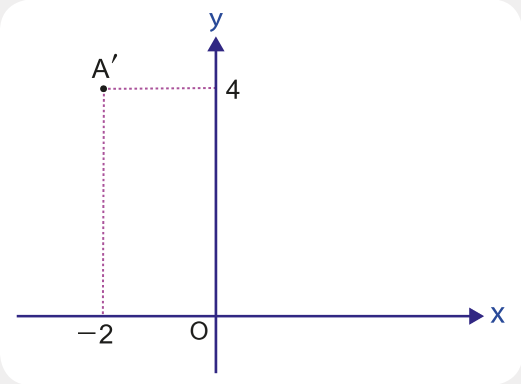
ÖRNEK

Analitik düzlemde $A(2, 3)$ noktasının x ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim ötelenmesiyle oluşan B noktasının y ekseni boyunca negatif yönde 4 birim ötelenmesi ile C noktası elde ediliyor. Buna göre C noktasının koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

Analitik düzlemde $A(2, 3)$ noktasının x ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim ötelenmesi ile oluşan B noktası $B(2+2, 3) = B(4, 3)$ olarak elde edilir. Bu noktanın y ekseni boyunca negatif yönde 4 birim ötelenmesi ile elde edilen nokta $C(4, 3-4) = C(4, -1)$ noktasıdır.

ÖRNEK



Yandaki şekilde, bir A noktasının x ekseni boyunca negatif yönde 6 birim ve y ekseni boyunca pozitif yönde 3 birim ötelenmesiyle oluşan A' noktası verilmiştir. Buna göre A noktasının koordinatlarını bulunuz.

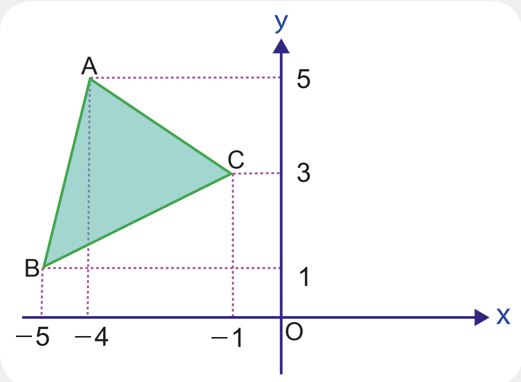
ÇÖZÜM

$A(x,y) \Rightarrow A'(x-6,y+3) = A'(-2,4)$

$\Rightarrow x-6=-2$ ve $y+3=4$

$\Rightarrow x=4$ ve $y=1$ bulunur.

ÖRNEK



Yandaki şekilde, analitik düzlemde köşelerinin koordinatları $A(-4,5)$, $B(-5,1)$ ve $C(-1,3)$ olan ABC üçgeni verilmiştir. Bu üçgenin x ekseni boyunca pozitif yönde 3 birim ve y ekseni boyunca negatif yönde 4 birim ötelenmesi ile oluşan $A'B'C'$ üçgeninin köşelerinin koordinatlarını bulunuz ve analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM

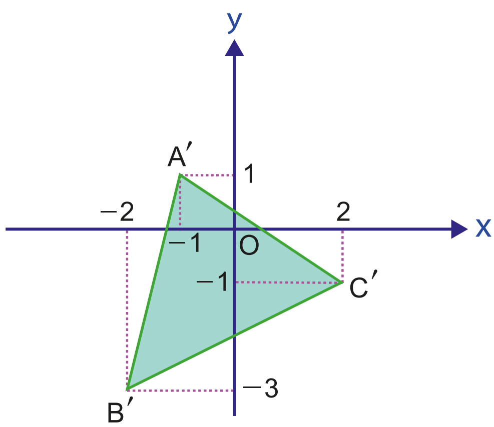
$A(-4,5)$, $B(-5,1)$ ve $C(-1,3)$ noktaları x ekseni boyunca pozitif yönde 3 birim ve y ekseni boyunca negatif yönde 4 birim ötelenirse

$A'(-4+3,5-4) = A'(-1,1)$

$B'(-5+3,1-4) = B'(-2,-3)$

$C'(-1+3,3-4) = C'(2,-1)$

noktalarına dönüşürler. Bu noktalar ile $A'B'C'$ üçgeni analitik düzlemde yandaki şekildeki gibi elde edilir.



ÖRNEK

$f(x)=x^2+2x+3$ parabolünün x ekseni boyunca pozitif yönde 3 birim ve y ekseni boyunca negatif yönde 1 birim ötelenmesi ile oluşan $g(x)$ parabolünü bulunuz ve analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM

1. YOL

$f(x)$ parabolü üzerindeki herhangi bir $A(x,y)$ noktasının ötelenmesi ile $g(x)$ parabolü üzerindeki $B(x_1,y_1)$ noktası elde edilsin.

$A(x,y)$ noktasının x ekseni boyunca pozitif yönde 3 birim ve y ekseni boyunca negatif yönde 1 birim ötelenmesi ile oluşan nokta $A'(x+3,y-1)$ olur. Buna göre

$$B(x_1,y_1)=A'(x+3,y-1)\Rightarrow x_1=x+3 \text{ ve } y_1=y-1$$
$$\Rightarrow x=x_1-3 \text{ ve } y=y_1+1 \text{ olur.}$$

$A(x,y)$ noktası $f(x)$ parabolünün üzerinde olduğundan $y=x^2+2x+3$ denklemini sağlar. Bu denklemde **x** yerine $\mathbf{x_1-3}$ ve **y** yerine $\mathbf{y_1+1}$ yazılırsa

$$y_1+1=(x_1-3)^2+2(x_1-3)+3$$
$$y_1+1=x_1^2-6x_1+9+2x_1-6+3$$
$$y_1=x_1^2-4x_1+5 \text{ olur.}$$

O hâlde $f(x)=x^2+2x+3$ parabolünün ötelenmesiyle $g(x)=x^2-4x+5$ parabolü bulunmuş olur.

2. YOL

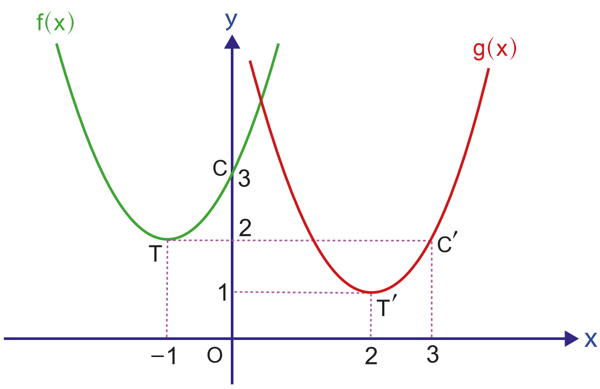
$y=x^2+2x+3$ parabolünün tepe noktası $T(r,k)=T\left(-\frac{b}{2a},f(r)\right)=T(-1,2)$ olur.

Parabolün üzerindeki $C(0,3)$ ve $T(-1,2)$ tepe noktasının x ekseni boyunca pozitif yönde 3 birim ve y ekseni boyunca negatif yönde 1 birim ötelenmesi ile $C'(3,2)$ ve $T'(2,1)$ noktaları elde edilir.

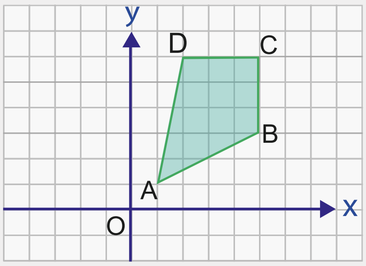
Tepe noktası $T'(2,1)$ olan parabolün denklemi $y=a(x-2)^2+1$ biçimindedir. $C'(3,2)$ noktası bu parabol üzerinde olduğundan parabolün denklemini sağlar.

$$y=a(x-2)^2+1\Rightarrow 2=a(3-2)^2+1$$
$$\Rightarrow 2=a+1$$
$$\Rightarrow a=1 \text{ olur.}$$

Buna göre $y=x^2+2x+3$ parabolünün x ekseni boyunca pozitif yönde 3 birim ve y ekseni boyunca negatif yönde 1 birim ötelenmesi ile $y=(x-2)^2+1=x^2-4x+5$ parabolü elde edilir.



ÖRNEK



Yandaki şekilde birimkarelere ayrılmış olarak verilen analitik düzlemdeki ABCD dörtgeninin x ekseni boyunca negatif yönde 6 birim ve y ekseni boyunca negatif yönde 7 birim ötelenmesi ile oluşan dörtgeni bularak analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM

$A(1,1)$, $B(5,3)$, $C(5,6)$ ve $D(2,6)$ noktaları x ekseni boyunca negatif yönde 6 birim, y ekseni boyunca negatif yönde 7 birim ötelenirse

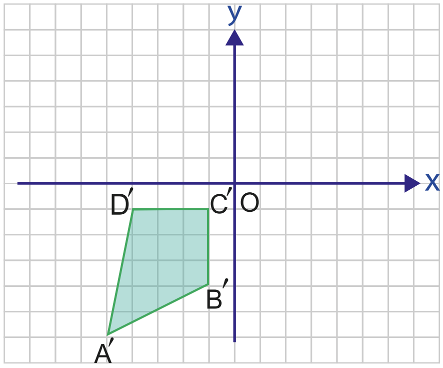
$A'(1-6,1-7) \Rightarrow A'(-5,-6)$

$B'(5-6,3-7) \Rightarrow B'(-1,-4)$

$C'(5-6,6-7) \Rightarrow C'(-1,-1)$

$D'(2-6,6-7) \Rightarrow D'(-4,-1)$

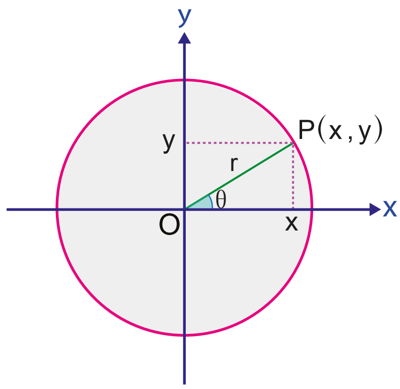
noktalarına dönüşürler. Bu noktalar ile $A'B'C'D'$ dörtgeni analitik düzlemde yandaki şekildeki gibi elde edilir.



Dönme Dönüşümü

Düzlemde bir P noktasının koordinatları (x,y),
$[OP]$ nın x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı θ ve
$|OP|=r$ olmak üzere P noktasının koordinatları

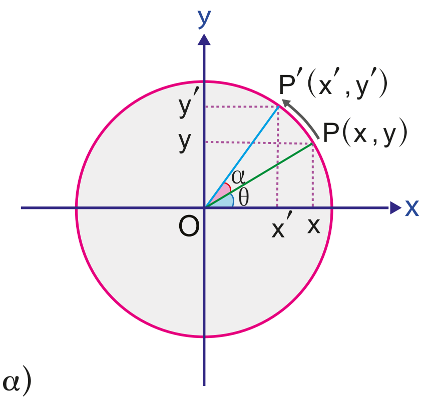
$$\left.\begin{aligned} x &= r\cdot\cos\theta \\ y &= r\cdot\sin\theta \end{aligned}\right\}\text{olur.}$$



P noktasının, O (orijin) etrafında pozitif yönde α açısı kadar döndürülmesi ile elde edilen noktanın koordinatları

$$\left.\begin{aligned} x' &= r\cdot\cos(\theta+\alpha) \\ y' &= r\cdot\sin(\theta+\alpha) \end{aligned}\right\}\text{olur. Buna göre}$$

$$\begin{aligned} x' &= r\cdot(\cos\theta\cdot\cos\alpha-\sin\theta\cdot\sin\alpha) \\ &= \underbrace{r\cdot\cos\theta}_{x}\cdot\cos\alpha-\underbrace{r\cdot\sin\theta}_{y}\cdot\sin\alpha \\ &= x\cdot\cos\alpha-y\cdot\sin\alpha \\ y' &= r\cdot(\sin\theta\cdot\cos\alpha+\cos\theta\cdot\sin\alpha) \\ &= \underbrace{r\cdot\sin\theta}_{y}\cdot\cos\alpha+\underbrace{r\cdot\cos\theta}_{x}\cdot\sin\alpha \\ &= y\cdot\cos\alpha+x\cdot\sin\alpha \text{ olarak elde edilir. Böylece} \end{aligned}$$



P noktasının orijin etrafında pozitif yönde α açısı kadar döndürülmesi ile elde edilen P' noktası

$$\mathbf{P'(x',y')=R_\alpha(P)=(x\cdot\cos\alpha-y\cdot\sin\alpha\,,\,x\cdot\sin\alpha+y\cdot\cos\alpha)}$$

olur. Burada α açısına **dönme açısı** denir. α açısı kadar dönme dönüşümü $\mathbf{R_\alpha}$ ile gösterilir.

ÖRNEK

Analitik düzlemde $P(2,4)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde 60° döndürülmesi ile elde edilen P' noktasının koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

$P(2,3)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde 60° döndürülmesi ile elde edilen P' noktası

$$\begin{aligned} P' = R_{60^\circ}(P) &= (2\cdot\cos 60^\circ - 4\cdot\sin 60^\circ,\ 2\cdot\sin 60^\circ + 4\cdot\cos 60^\circ) \\ &= \left(2\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2},\ 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 4\cdot\frac{1}{2}\right) \\ &= (1-2\sqrt{3},\ \sqrt{3}+2) \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

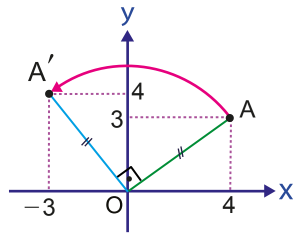
Analitik düzlemde $A(4,3)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde 90° döndürülmesi ile elde edilen A' noktasının koordinatlarını bulunuz ve analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM

$A(4,3)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde 90° döndürülmesi ile elde edilen A' noktası

$$\begin{aligned} A' = R_{90^\circ}(A) &= (4\cdot\cos 90^\circ - 3\cdot\sin 90^\circ,\ 4\cdot\sin 90^\circ + 3\cdot\cos 90^\circ) \\ &= (4\cdot 0 - 3\cdot 1,\ 4\cdot 1 + 3\cdot 0) \\ &= (-3,4) \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Bu durumda A noktasının orijin etrafında pozitif yönde 90° döndürülmesi ile elde edilen A' noktası yandaki gibidir.



ÖRNEK

Analitik düzlemde $P(-5,7)$ noktasının orijin etrafında negatif yönde 90° döndürülmesi ile elde edilen P' noktasının koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

Orijin etrafında negatif yönde 90° döndürülme, pozitif yönde 270° döndürülme demektir.

$P(-5,7)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde 270° döndürülmesi ile elde edilen P' noktası

$$\begin{aligned} P' = R_{270^\circ}(P) &= ((-5)\cdot\cos 270^\circ - 7\cdot\sin 270^\circ,\ (-5)\cdot\sin 270^\circ + 7\cdot\cos 270^\circ) \\ &= ((-5)\cdot 0 - 7\cdot(-1),\ (-5)\cdot(-1) + 7\cdot 0) \\ &= (7,5) \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

SONUÇ

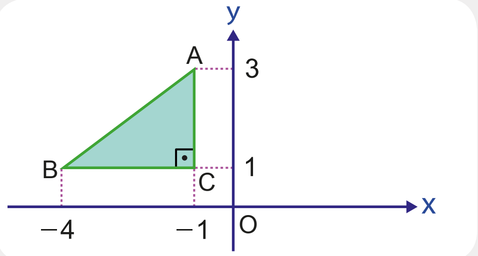
Herhangi bir (x,y) noktası orijin etrafında pozitif yönde 90°, 180°, 270° ve 360° döndürüldüğünde aşağıdaki noktalar elde edilir.

- $\mathbf{R_{90^\circ}(x,y) = (-y,x)}$
- $\mathbf{R_{270^\circ}(x,y) = (y,-x)}$
- $\mathbf{R_{180^\circ}(x,y) = (-x,-y)}$
- $\mathbf{R_{360^\circ}(x,y) = (x,y)}$

Dönme Merkezi

Dönme dönüşümü, düzlemde bir nokta dışındaki tüm noktaları değiştirir. Dönme dönüşümünün değiştirmediği bu noktaya **dönme merkezi** denir. Burada sadece orijin etrafında dönmeden bahsedildiği için dönme merkezi orijin olarak alınacaktır.

ÖRNEK



Yandaki ABC dik üçgeninin orijin etrafında pozitif yönde 90° döndürülmesi ile oluşan $A'B'C'$ üçgeninin köşe koordinatlarını bulunuz ve analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM

Şekilde $A(-1,3)$, $B(-4,1)$ ve $C(-1,1)$ dir.

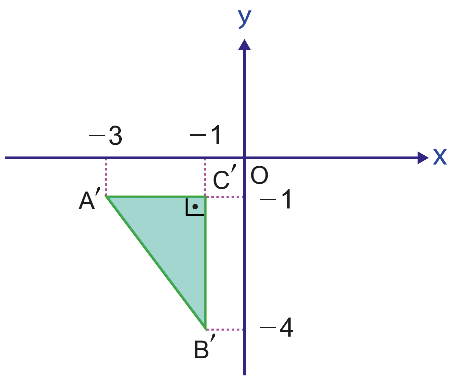
Bu noktaların orijin etrafında pozitif yönde 90° döndürülmesi ile oluşan noktalar

$A' = R_{90^\circ}(-1,3) = (-3,-1)$

$B' = R_{90^\circ}(-4,1) = (-1,-4)$

$C' = R_{90^\circ}(-1,1) = (-1,-1)$ olur.

Böylece $A'B'C'$ üçgeni yandaki şekildeki gibi elde edilir.



ÖRNEK

Analitik düzlemde $P(4, 6\sqrt{3})$ noktasının orijin etrafında negatif yönde 150° döndürülmesi ile elde edilen P' noktasını bulunuz.

ÇÖZÜM

P noktası negatif yönde 150° döndürüleceğinden $\alpha = -150^\circ$ olacaktır.

$$P' = R_{-150^\circ}(P)$$

$$= (4\cdot\cos(-150^\circ) - 6\sqrt{3}\cdot\sin(-150^\circ),\ 4\cdot\sin(-150^\circ) + 6\sqrt{3}\cdot\cos(-150^\circ))$$

$$= (4\cdot\cos 150^\circ + 6\sqrt{3}\cdot\sin 150^\circ,\ -4\cdot\sin 150^\circ + 6\sqrt{3}\cdot\cos 150^\circ)$$

$$= \left(4\cdot\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + 6\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2},\ -4\cdot\frac{1}{2} + 6\sqrt{3}\cdot\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$= (-2\sqrt{3} + 3\sqrt{3},\ -2-9)$$

$$= (\sqrt{3}, -11) \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

Analitik düzlemde $P(x, y)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde 120° döndürülmesi ile oluşan nokta $P'(-1, \sqrt{3})$ noktası olduğuna göre x ve y değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$P' = R_{120^\circ}(P) = (x \cdot \cos 120^\circ - y \cdot \sin 120^\circ,\ x \cdot \sin 120^\circ + y \cdot \cos 120^\circ)$$

$$P'(-1, \sqrt{3}) = \left(x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},\ x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + y \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$-2 / -\frac{x}{2} - \frac{y\sqrt{3}}{2} = -1 \Rightarrow x + \sqrt{3}y = 2 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$2\sqrt{3} / \frac{\sqrt{3}x}{2} - \frac{y}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow 3x - \sqrt{3}y = 6 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

(1) ve (2) denklemleri ortak çözülürse

$$\begin{array}{rl} & x + \sqrt{3}y = 2 \\ + & 3x - \sqrt{3}y = 6 \\ \hline & 4x = 8 \Rightarrow x = 2 \end{array}$$

olur. Bulunan x değeri (1) denkleminde yerine yazılırsa

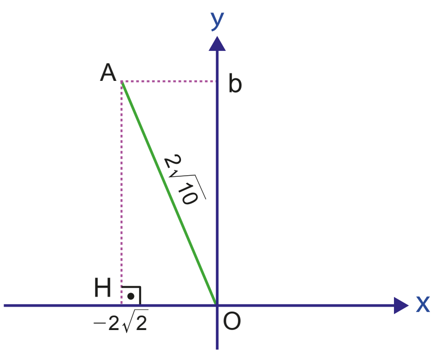
$$2 + \sqrt{3}\,y = 2 \Rightarrow \sqrt{3}\,y = 0$$

$$\Rightarrow y = 0 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

Analitik düzlemin II. bölgesindeki $A(-2\sqrt{2}, b)$ noktasının orijine uzaklığı $2\sqrt{10}$ birimdir. Buna göre A noktasının orijin etrafında pozitif yönde 315° döndürülmesi ile elde edilen A' noktasını bulunuz.

ÇÖZÜM



AHO dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

$$|OH|^2 + |AH|^2 = |AO|^2$$

$$(2\sqrt{2})^2 + b^2 = (2\sqrt{10})^2$$

$$8 + b^2 = 40$$

$$b^2 = 32$$

$$b = 4\sqrt{2} \text{ bulunur.}$$

Böylece $A(-2\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ olur. A noktası orijin etrafında pozitif yönde 315° döndürüldüğünde

$$A' = R_{315^\circ}(A) = (-2\sqrt{2} \cdot \cos 315^\circ - 4\sqrt{2} \cdot \sin 315^\circ,\ -2\sqrt{2} \cdot \sin 315^\circ + 4\sqrt{2} \cdot \cos 315^\circ)$$

$$= \left(-2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 4\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ -2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= (-2 + 4, 2 + 4)$$

$$= (2, 6) \text{ bulunur.}$$

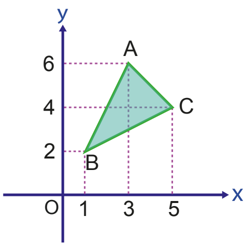
Alıştırmalar

1 Analitik düzlemde $A(2,-6)$ noktası x ekseni boyunca negatif yönde 4 birim ve y ekseni boyunca pozitif yönde 5 birim ötelendiğinde oluşan A' noktasının koordinatlarını bulunuz.

2 Analitik düzlemde bir $A(x,y)$ noktası x ekseni boyunca pozitif yönde 3 birim, y ekseni boyunca negatif yönde 4 birim ötelendiğinde oluşan A' noktasının koordinatları $A'(-4,5)$ tir. Buna göre $A(x,y)$ noktasının koordinatları çarpımı olan $x \cdot y$ değerini bulunuz.

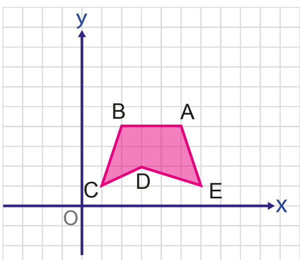
3 Köşelerinin koordinatları $A(1,3)$, $B(4,3)$ ve $C(4,5)$ olan ABC üçgeni x ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim ve y ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim ötelenerek $A'B'C'$ üçgeni elde ediliyor. Buna göre $A'B'C'$ üçgeninin köşelerinin koordinatlarını bulunuz.

4



Yandaki analitik düzlemde verilen ABC üçgeni x ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim ve y ekseni boyunca negatif yönde 4 birim ötelenerek $A'B'C'$ üçgeni elde ediliyor. Buna göre $A'B'C'$ üçgeninin köşelerinin koordinatlarını bulunuz.

5



Yanda birimkarelere ayrılarak verilmiş olan analitik düzlemdeki şekil x ekseni boyunca negatif yönde 4 birim ve y ekseni boyunca negatif yönde 3 birim öteleniyor. Buna göre oluşan şeklin köşelerinin koordinatlarını bulunuz.

6 $A(3,1)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde 90° döndürülmesi ile oluşan noktanın koordinatlarını bulunuz.

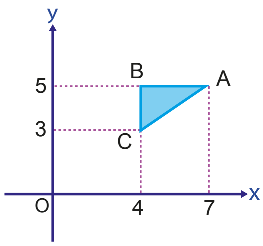
7 $B(-2,-6)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde 180° döndürülmesi ile oluşan noktanın koordinatlarını bulunuz.

8 $C(4,-6)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde 270° döndürülmesi ile oluşan noktanın koordinatlarını bulunuz.

9 $D(\sqrt{2},2)$ noktasının orijin etrafında negatif yönde 315° döndürülmesi ile elde edilen D' noktasının koordinatlarının çarpımını bulunuz.

10 $E(1,\sqrt{3})$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde 30° döndürülmesi ile elde edilen E' noktasının koordinatlarını bulunuz.

11



Yandaki analitik düzlemde verilen ABC üçgeninin orijin etrafında pozitif yönde 90° döndürülmesi ile oluşan $A'B'C'$ üçgeninin köşelerinin koordinatlarını bulunuz.

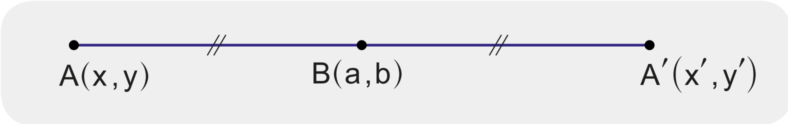
12 $A(-\sqrt{3},1)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde 60° döndürülmesi ile elde edilen A' noktasının koordinatlarını bulunuz.

13 $B(-2,3\sqrt{3})$ noktasının orijin etrafında negatif yönde 120° döndürülmesi ile elde edilen B' noktasının koordinatlarını bulunuz.

Simetri Dönüşümü

Bir noktanın Başka bir Noktaya Göre Simetriği

$A(x,y)$ noktasının $B(a,b)$ noktasına göre simetriği $A'(x',y')$ olsun.



B noktası $[AA']$ nın orta noktası olduğundan $B(a,b) = B\left(\dfrac{x+x'}{2}, \dfrac{y+y'}{2}\right)$ olur.

$$B\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right) = B(a,b) \Rightarrow \frac{x+x'}{2} = a \text{ ve } \frac{y+y'}{2} = b$$

$$\Rightarrow x' = 2a - x \text{ ve } y' = 2b - y \text{ bulunur.}$$

Böylece $A(x,y)$ noktasının $B(a,b)$ noktasına göre simetri dönüşümü altındaki görüntüsü olan $A'(x',y')$ noktasının koordinatları $\mathbf{A'(2a-x, 2b-y)}$ olur.

ÖRNEK

$A(4,3)$ noktasının $B(-2,5)$ noktasına göre simetri dönüşümü altındaki görüntüsü olan noktanın koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

$A(\underset{x}{4},\underset{y}{3})$ noktasının $B(\underset{a}{-2},\underset{b}{5})$ noktasına göre simetriği olan nokta $A'(x',y')$ olsun. Buna göre

$$A'(x',y') = A'(2a-x, 2b-y) \qquad (x' = 2a - x \text{ ve } y' = 2b - y)$$
$$= A'(2\cdot(-2)-4, 2\cdot 5-3)$$
$$= A'(-8,7) \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$A(3,5)$ noktasının $O(0,0)$ noktasına göre simetriği olan A' noktasının koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

$A(\underset{x}{3},\underset{y}{5})$ noktasının $O(\underset{a}{0},\underset{b}{0})$ noktasına göre simetriği olan $A'(x',y')$ olsun. Buna göre

$$A'(x',y') = A'(2a-x, 2b-y) \qquad (x' = 2a - x \text{ ve } y' = 2b - y)$$
$$= A'(2\cdot 0-3, 2\cdot 0-5)$$
$$= A'(-3,-5) \text{ bulunur.}$$

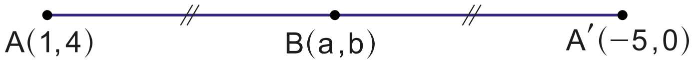
SONUÇ

$A(x,y)$ noktasının $O(0,0)$ noktasına (orijin) göre simetriği $\mathbf{A'(-x,-y)}$ noktasıdır.

ÖRNEK

$A(1,4)$ noktasının B noktasına göre simetri dönüşümü altındaki görüntüsü $A'(-5,0)$ olduğuna göre B noktasının koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM



B noktasının koordinatları $B(a,b)$ olsun. B noktası $[AA']$ nın orta noktası olduğundan

$B(a,b)=B\left(\dfrac{1+(-5)}{2},\dfrac{4+0}{2}\right)=B(-2,2)$ bulunur.

ÖRNEK

$A(a,1)$ noktasının $B(4,b)$ noktasına göre simetri dönüşümü altındaki görüntüsü $A'(b,a)$ noktası olduğuna göre a ve b değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

B noktası $[AA']$ nın orta noktası olduğuna göre $B\left(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{1+a}{2}\right)$ olur. Buna göre

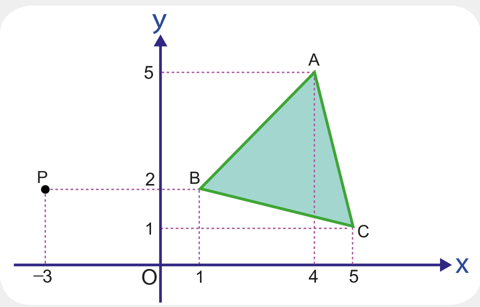
$B(4,b)=B\left(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{1+a}{2}\right)\Rightarrow 4=\dfrac{a+b}{2}$ ve $b=\dfrac{1+a}{2}$ olur.

$$\left.\begin{array}{l} 4=\dfrac{a+b}{2}\Rightarrow a+b=8 \\ b=\dfrac{1+a}{2}\Rightarrow 2b-a=1 \end{array}\right\}\text{ denklemleri ortak çözülürse}$$

$$\begin{array}{rl} & \cancel{a}+b=8 \\ + & 2b-\cancel{a}=1 \\ \hline & 3b=9\Rightarrow b=3 \text{ bulunur.} \end{array}$$

$b=3\Rightarrow a+3=8$
$\Rightarrow a=5$ bulunur.

ÖRNEK



Yandaki analitik düzlemde verilen ABC üçgeninin P noktasına göre simetriği olan $A'B'C'$ üçgeninin köşe noktalarının koordinatlarını bulunuz ve $A'B'C'$ üçgenini analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM

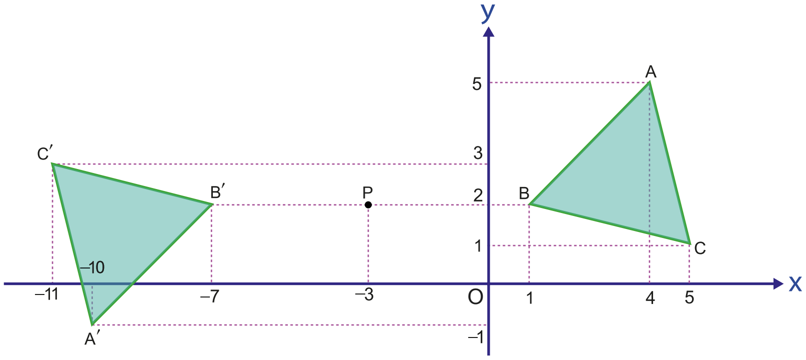
ABC üçgeninin köşe noktalarının koordinatları olan $A(4,5)$, $B(1,2)$ ve $C(5,1)$ noktalarının $P(-3,2)$ noktasına göre simetriği olan noktalar A', B' ve C' olsun. Buna göre

$A'(2\cdot(-3)-4,2\cdot 2-5)=A'(-10,-1)$

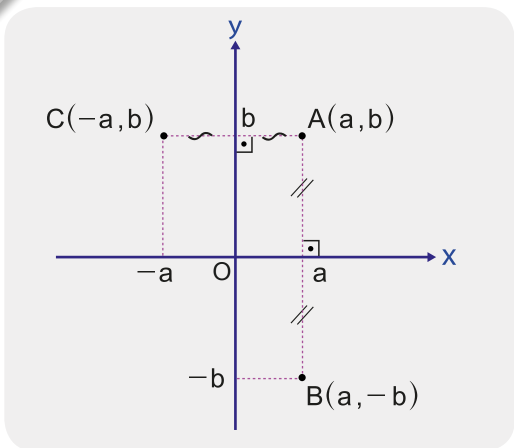
$B'(2\cdot(-3)-1,2\cdot 2-2)=B'(-7,2)$

$C'(2\cdot(-3)-5,2\cdot 2-1)=C'(-11,3)$ bulunur.

Bulunan bu noktalar analitik düzlemde işaretlenerek üçgen çizilirse $A'B'C'$ üçgeni aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi elde edilir.



Bir Noktanın x ve y Eksenlerine Göre Simetriği



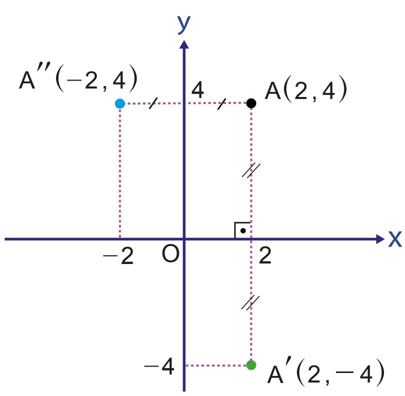
$A(a,b)$ noktasının

- ✓ x eksenine göre simetriği $\mathbf{B(a,-b)}$ dir.
- ✓ y eksenine göre simetriği $\mathbf{C(-a,b)}$ dir.

ÖRNEK

$A(2,4)$ noktasının x eksenine ve y eksenine göre simetri dönüşümü altındaki görüntüsü olan noktaları bularak analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM



$A(2,4)$ noktasının
x eksenine göre simetriği $A'(2,-4)$ noktasıdır.
y eksenine göre simetriği $A''(-2,4)$ noktasıdır.

ÖRNEK

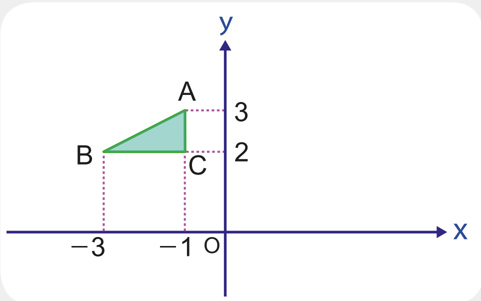
$O(0,0)$, $A(0,3)$, $B(-2,0)$, $C(6,-7)$, $D(-2,8)$ ve $E(-4,-6)$ noktaların x eksenine ve y eksenine göre simetriği olan noktaları bulunuz.

ÇÖZÜM

Nokta	x eksenine göre simetriği	y eksenine göre simetriği
$O(0,0)$	$O'(0,0)$	$O''(0,0)$
$A(0,3)$	$A'(0,-3)$	$A''(0,3)$
$B(-2,0)$	$B'(-2,0)$	$B''(2,0)$
$C(6,-7)$	$C'(6,7)$	$C''(-6,-7)$
$D(-2,8)$	$D'(-2,-8)$	$D''(2,8)$
$E(-4,-6)$	$E'(-4,6)$	$E''(4,-6)$

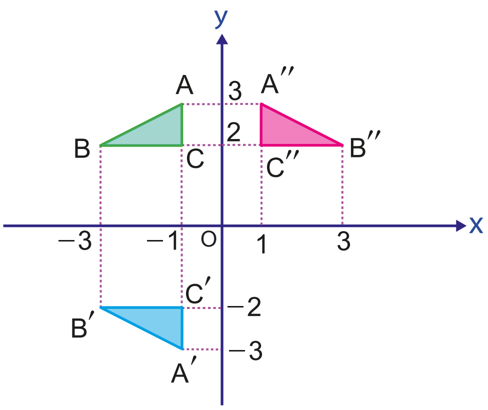
Yukarıda görüldüğü gibi A noktası y ekseni üzerinde olduğu için A noktasının y eksenine göre simetriği yine kendisidir. Benzer şekilde B noktası x ekseni üzerinde olduğu için B noktasının x eksenine göre simetriği kendisidir. $O(0,0)$ noktası her iki eksenin kesim noktası olduğundan her iki eksene göre simetriği yine kendisidir.

ÖRNEK



Yandaki şekilde verilen ABC üçgeninin x eksenine göre simetriği olan $A'B'C'$ üçgeni ile y eksenine göre simetriği olan $A''B''C''$ üçgeninin köşe noktalarının koordinatlarını bulunuz ve analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM



$A(-1,3)$, $B(-3,2)$ ve $C(-1,2)$ noktalarının

- x eksenine göre simetriği olan noktalar $A'(-1,-3)$, $B'(-3,-2)$ ve $C'(-1,-2)$ noktalarıdır.
- y eksenine göre simetriği olan noktalar $A''(1,3)$, $B''(3,2)$ ve $C''(1,2)$ noktalarıdır.

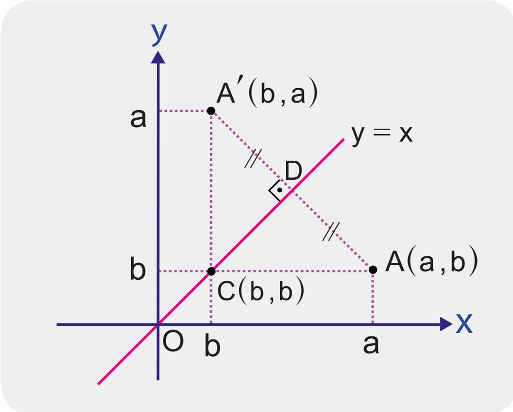
Bu noktalar analitik düzlemde işaretlenerek birleştirilirse ABC üçgeninin x eksenine göre simetriği olan $A'B'C'$ üçgeni ile y eksenine göre simetriği olan $A''B''C''$ üçgeni yandaki şekildeki gibi elde edilir.

Bir Noktanın $y=x$ Doğrusuna Göre Simetriği

A noktasının $y=x$ doğrusuna göre simetriği A' noktası ise $[AA']$, $y=x$ doğrusuna dik ve $|AD|=|DA'|$ olmalıdır.

C noktası $y=x$ doğrusu üzerinde olduğundan $C(b,b)$ olur. ACA' üçgeninde kenarortay aynı zamanda yükseklik olduğundan ACA' üçgeni ikizkenar dik üçgendir. Buna göre $|AC|=|A'C|=a-b$ bulunur.

Buradan $A(a,b)$ noktasının $y=x$ doğrusuna göre simetriği $\mathbf{A'(b,a)}$ noktası olarak elde edilir.



ÖRNEK

$A(3,5)$ ve $B(2,-3)$ noktaların $y=x$ doğrusuna göre simetriği olan noktaları bulunuz.

ÇÖZÜM

$A(3,5)$ noktasının $y=x$ doğrusuna göre simetriği $A'(5,3)$ noktasıdır.

$B(2,-3)$ noktasının $y=x$ doğrusuna göre simetriği $B'(-3,2)$ noktasıdır.

ÖRNEK

$A(-2,5)$ noktasının $y=x$ doğrusuna göre simetriği olan nokta $A'(2a-3,-3b+1)$ olduğuna göre a ve b değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$A(-2,5)$ noktasının $y=x$ doğrusuna göre simetriği olan nokta $A'(5,-2)$ dir. Bu durumda

$A'(5,-2)=A'(2a-3,-3b+1) \Rightarrow 5=2a-3$ ve $-2=-3b+1$

$\Rightarrow a=4$ ve $b=1$ bulunur.

ÖRNEK

$A(3a-5,2b+1)$ noktasının $y=x$ doğrusuna göre simetriği olan nokta $A'(b+2,a-3)$ noktası olduğuna göre a ve b değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

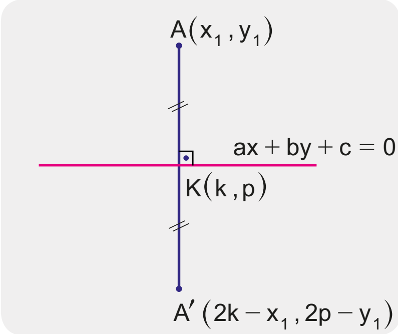
$A(3a-5,2b+1)$ noktasının $y=x$ doğrusuna göre simetriği olan nokta $A'(2b+1,3a-5)$ dir. Bu durumda

$A'(b+2,a-3)=A'(2b+1,3a-5) \Rightarrow b+2=2b+1$ ve $a-3=3a-5$

$\Rightarrow b=1$ ve $a=1$ bulunur.

Bir Noktanın Bir Doğruya Göre Simetriği

Bir $A(x_1, y_1)$ noktasının $ax+by+c=0$ doğrusuna göre simetriğini bulmak için aşağıdaki adımlar sırasıyla uygulanır.



✓ Doğrunun eğimi $m = -\frac{a}{b}$ bulunur.

✓ $[AA']$ ile $ax+by+c=0$ doğrusu birbirine dik olduğundan $[AA']$ nın eğimi $m = \frac{b}{a}$ olur.

✓ Eğimi $m = \frac{b}{a}$ olan ve $A(x_1, y_1)$ noktasından geçen AA' doğrusunun denklemi $y - y_1 = \frac{b}{a}(x - x_1)$ ifadesinden elde edilir.

✓ $ax+by+c=0$ doğrusunun denklemi ile yeni bulunan AA' doğrusunun denklemi ortak çözülerek $K(k, p)$ kesim noktası bulunur.

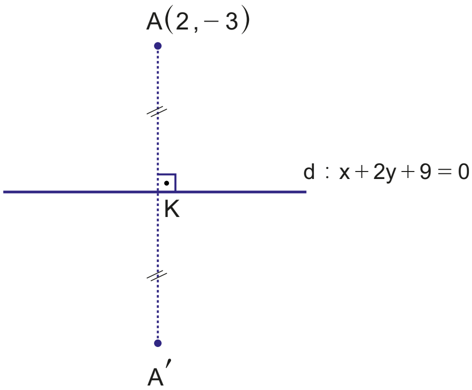
✓ $A(x_1, y_1)$ noktasının $K(k, p)$ noktasına göre simetriği alınarak $\mathbf{A'(2k - x_1, 2p - y_1)}$ noktası elde edilir.

Bu nokta $A(x_1, y_1)$ noktasının $ax+by+c=0$ doğrusuna göre simetriği olan noktadır.

ÖRNEK

$A(2, -3)$ noktasının $d : x+2y+9=0$ doğrusuna göre simetriği A' olduğuna göre A' noktasının koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM



$d: x+2y+9=0$ doğrusunun eğimi $m_d = -\frac{1}{2}$ dir.

$d \perp AA'$ olduğundan $m_d \cdot m_{AA'} = -1$ olur.

$m_d \cdot m_{AA'} = -1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot m_{AA'} = -1$

$\Rightarrow m_{AA'} = 2$ bulunur.

$A(2, -3)$ noktasından geçen ve eğimi 2 olan AA' doğrusunun denklemi

$y - y_1 = m \cdot (x - x_1) \Rightarrow y - (-3) = 2(x-2)$

$\Rightarrow y + 3 = 2x - 4$

$\Rightarrow 2x - y - 7 = 0$ bulunur.

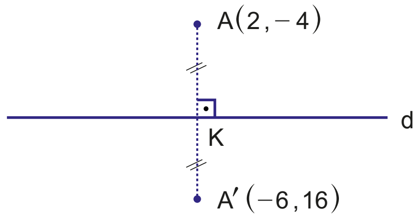
$x+2y+9=0$ ve $2x-y-7=0$ denklemleri ortak çözülürse $x=1$ ve $y=-5$ bulunur. Böylece K noktasının koordinatları $K(1, -5)$ olarak elde edilir.

$A(2, -3)$ noktasının $K(1, -5)$ noktasına göre simetriği $A'(2 \cdot 1 - 2, 2 \cdot (-5) - (-3)) = A'(0, -7)$ noktası olarak bulunur. Bu durumda $A(2, -3)$ noktasının $d : x+2y+9=0$ doğrusuna göre simetriği $A'(0, -7)$ noktasıdır.

ÖRNEK

Analitik düzlemde $A(2,-4)$ noktasının bir d doğrusuna göre simetriği $A'(-6,16)$ noktası olduğuna göre d doğrusunun denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM



$[AA']$ nın orta noktası K ise K noktasının koordinatları

$K\left(\frac{2-6}{2}, \frac{-4+16}{2}\right) = K(-2,6)$ olur. AA' doğrusunun

eğimi $m_{AA'} = \frac{16-(-4)}{-6-2} = \frac{20}{-8} = -\frac{5}{2}$ bulunur.

$d \perp AA'$ olduğundan eğimleri çarpımı -1 dir. Buna göre d doğrusunun eğimi $m_d = \frac{2}{5}$ olur.

$K(-2,6)$ noktasından geçen ve eğimi $m_d = \frac{2}{5}$ olan d doğrusunun denklemi

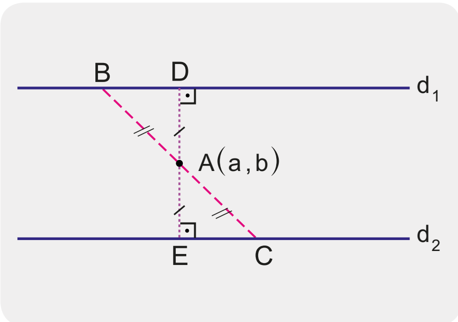
$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1) \Rightarrow y - 6 = \frac{2}{5}(x+2)$$
$$\Rightarrow 5y - 30 = 2x + 4$$
$$\Rightarrow 2x - 5y + 34 = 0 \text{ olarak elde edilir.}$$

Bir Doğrunun Bir Noktaya Göre Simetriği

d_1 doğrusunun A noktasına göre simetriği d_2 doğrusu ise $d_1 \parallel d_2$, $|AD| = |AE|$ ve $|AB| = |AC|$ olur.

d_1 doğrusu üzerindeki bir $B(x,y)$ noktasının $A(a,b)$ noktasına göre simetriği olan $C(2a-x, 2b-y)$ noktası d_2 doğrusu üzerindedir.

d_2 doğrusunun denklemini bulmak için d_1 doğrusunun denkleminde **x** yerine **2a − x** ve **y** yerine **2b − y** yazılarak d_1 doğrusunun A noktasına göre simetriği olan d_2 doğrusu elde edilir.



ÖRNEK

$2x - 3y + 5 = 0$ doğrusunun $A(3,-2)$ noktasına göre simetriği olan doğrunun denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

$2x - 3y + 5 = 0$ doğrusu üzerindeki bir nokta $B(x,y)$ olsun. $B(x,y)$ noktasının $A(3,-2)$ noktasına göre simetriği $B'(2\cdot 3 - x, 2\cdot(-2) - y) = B'(6-x, -4-y)$ olur. $2x - 3y + 5 = 0$ doğru denkleminde x yerine $6-x$ ve y yerine $-4-y$ yazılırsa $2x-3y+5=0$ doğrusunun $A(3,-2)$ noktasına göre simetriği olan doğrunun denklemi

$$2\cdot(6-x) - 3\cdot(-4-y) + 5 = 0 \Rightarrow 12 - 2x + 12 + 3y + 5 = 0$$
$$\Rightarrow -2x + 3y + 29 = 0$$
$$\Rightarrow 2x - 3y - 29 = 0 \text{ olarak bulunur.}$$

ÖRNEK

Analitik düzlemdeki $A(-5,3)$ noktasının Dinamik Geometri ve Matematik Yazılımı programı yardımıyla,

- x ekseni boyunca pozitif yönde 9 birim ve y ekseni boyunca negatif yönde 5 birim ötelenmesi ile oluşan noktayı bulunuz.
- Orijin etrafında pozitif yönde $180°$ döndürülmesi ile elde edilen noktayı bulunuz.
- $B(-1,1)$ noktasına göre simetriği olan noktayı bulunuz.
- $x-y+3=0$ doğrusuna göre simetriği olan noktayı bulunuz.

ÇÖZÜM

Dinamik Geometri ve Matematik Yazılımı programını açınız.

1. Adım: Giriş çubuğuna $(-5,3)$ yazarak enter tuşuna basınız. A noktası ekrana gelecektir.

2. Adım: Giriş çubuğuna $(-1,1)$ yazarak enter tuşuna basınız. B noktası ekrana gelecektir.

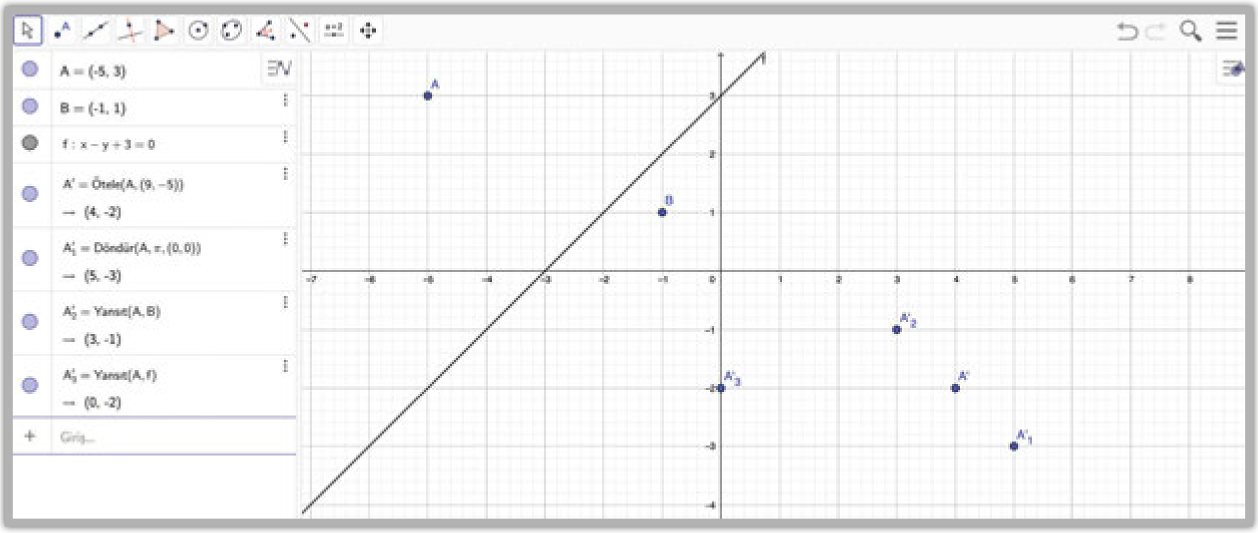
3. Adım: Giriş çubuğuna $x-y+3=0$ yazarak enter tuşuna basınız. f doğrusu ekrana gelecektir.

4. Adım: Giriş çubuğuna ötele yazıldığında açılan menüde ilk sıradaki Ötele(<Nesne>,<Vektör>) ifadesini seçiniz ve Ötele(A,(9,−5)) biçiminde yazınız ve enter tuşuna basınız. A noktasının x ekseni boyunca pozitif yönde 9 birim ve y ekseni boyunca negatif yönde 5 birim ötelenmesi ile oluşan A' noktası ekrana gelecektir.

5. Adım: Giriş çubuğuna döndür yazıldığında açılan menüde 2. sıradaki Döndür(<Nesne>,<Açı>,<Nokta>) ifadesini seçerek Döndür(A, π ,(0,0)) biçiminde yazınız ve enter tuşuna basınız. A noktasının orijin etrafında pozitif yönde $180°$ dönmesi ile oluşan A_1' noktası ekrana gelecektir.

6. Adım: Giriş çubuğuna yansıt yazıldığında açılan menüde ilk sıradaki Yansıt(<Nesne>,<Nokta>) ifadesini seçiniz ve Yansıt(A,B) biçiminde yazınız ve enter tuşuna basınız. A noktasının B noktasına göre simetriği olan A_2' noktası ekrana gelecektir.

7. Adım: Giriş çubuğuna yansıt yazıldığında açılan menüde ikinci sıradaki Yansıt(<Nesne>,<Doğru>) ifadesini seçiniz ve Yansıt(A,f) biçiminde yazınız ve enter tuşuna basınız. A noktasının f doğrusuna göre simetriği olan A_3' noktası ekrana gelecektir.



4.1.2. Temel Dönüşümlerin Bileşkeleri ve Bu Bileşkeleri İçeren Uygulamalar

Ötelemeli Dönme Dönüşümü

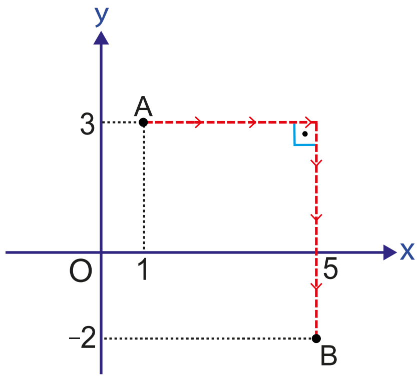
Öteleme ve dönme dönüşümünün birlikte uygulandığı dönüşümlere **ötelemeli dönme dönüşümü** denir. Ötelemeli dönme dönüşümleri uygulanan şekillerde herhangi iki nokta arasındaki uzaklık değişmez ve şekillerin üzerindeki açıların ölçüleri de aynı kalır.

ÖRNEK

$A(1,3)$ noktası önce x ekseni boyunca pozitif yönde 4 birim, ardından y ekseni boyunca negatif yönde 5 birim ötelenerek B noktası elde ediliyor. Buna göre B noktasının orijin etrafında pozitif yönde 90° döndürülmesi ile elde edilen C noktasının koordinatlarını bulunuz ve analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM

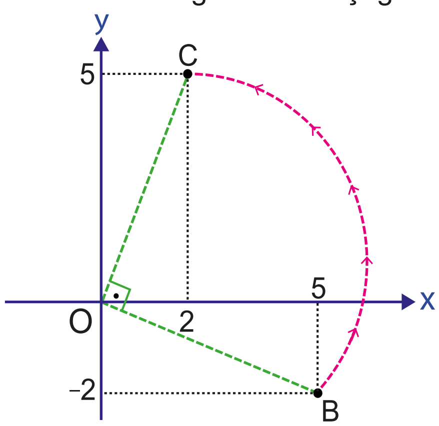
$A(1,3)$ noktasının x ekseni boyunca pozitif yönde 4 birim ve y ekseni boyunca negatif yönde 5 birim ötelenmesi ile oluşan nokta $B(1+4,3-5)=B(5,-2)$ olur.
B noktasının analitik düzlemdeki görüntüsü aşağıdaki şekildeki gibidir.



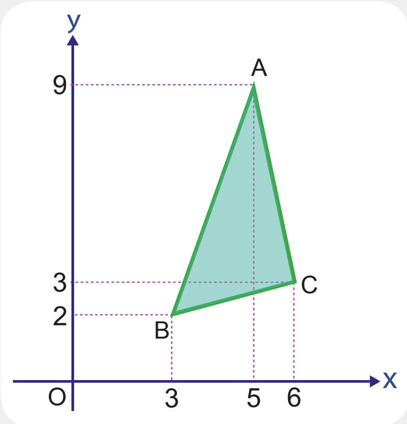
B noktasının orijin etrafında pozitif yönde 90° döndürülmesi ile oluşan C noktası

$$R_{90^\circ}(B)=C(5\cdot\cos 90^\circ-(-2)\cdot\sin 90^\circ, 5\cdot\sin 90^\circ+(-2)\cdot\cos 90^\circ)$$
$$=C(5\cdot 0-(-2)\cdot 1, 5\cdot 1+(-2)\cdot 0)$$
$$=C(2,5) \text{ olur.}$$

Bu durumda C noktasının analitik düzlemdeki görüntüsü aşağıdaki şekildeki gibidir.



ÖRNEK



Yandaki analitik düzlemde verilen ABC üçgeni orijin etrafında pozitif yönde 90° döndürülerek $A'B'C'$ üçgeni elde ediliyor. $A'B'C'$ üçgeninin x ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim ve y ekseni boyunca negatif yönde 4 birim ötelenmesi ile oluşan $A''B''C''$ üçgeninin koordinatlarını bulunuz ve analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM

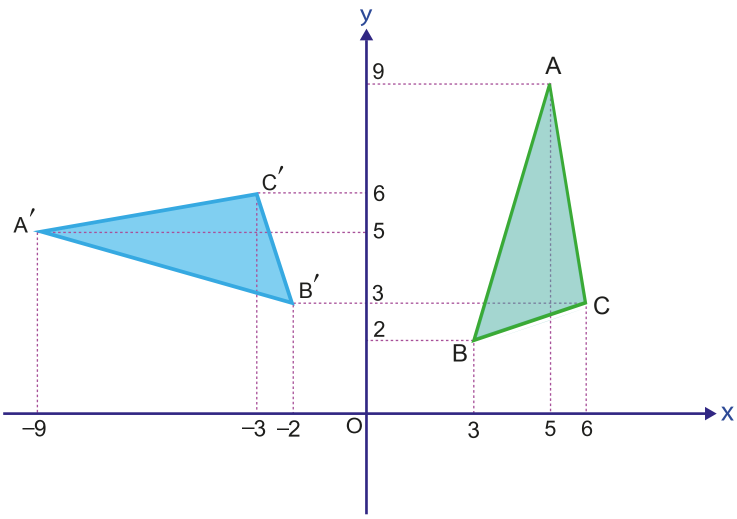
ABC üçgeninin köşelerinin koordinatları $A(5,9)$, $B(3,2)$ ve $C(6,3)$ tür. Bu noktaların orijin etrafında 90° döndürülmesi ile elde edilen A', B' ve C' noktalarının koordinatları

$R_{90^\circ}(A) = R_{90^\circ}(5,9) = A'(-9,5)$

$R_{90^\circ}(B) = R_{90^\circ}(3,2) = B'(-2,3)$

$R_{90^\circ}(C) = R_{90^\circ}(6,3) = C'(-3,6)$

olur. Böylece $A'B'C'$ üçgeninin analitik düzlemdeki görüntüsü yandaki şekildeki gibidir.



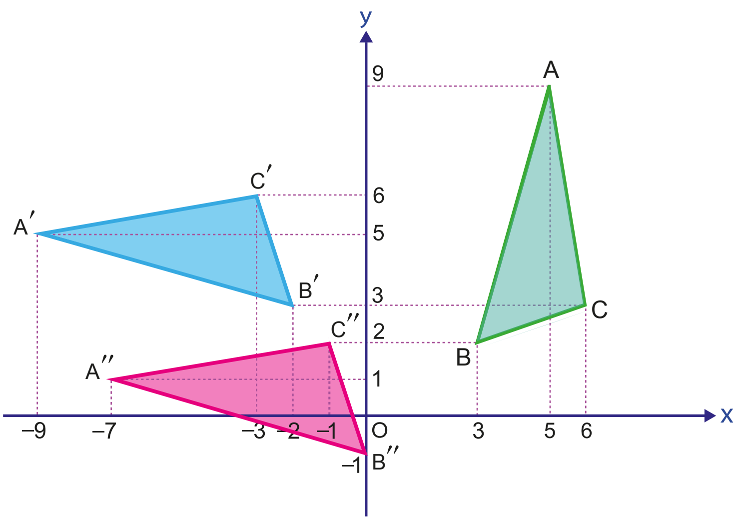
A', B' ve C' noktalarının x ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim ve y ekseni boyunca negatif yönde 4 birim ötelenmesiyle elde edilen A'', B'' ve C'' noktalarının koordinatları

$A''(-9+2, 5-4) = A''(-7,1)$

$B''(-2+2, 3-4) = B''(0,-1)$

$C''(-3+2, 6-4) = C''(-1,2)$

bulunur. Böylece $A''B''C''$ üçgeninin analitik düzlemdeki görüntüsü yandaki şekildeki gibidir.



ÖRNEK

$A(8\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ noktası orijin etrafında pozitif yönde 135° döndürüldükten sonra x ekseni boyunca pozitif yönde 8 birim ve y ekseni boyunca negatif yönde 2 birim öteleniyor. Elde edilen noktanın koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

$A(8\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde 135° döndürülmesi ile oluşan nokta A' olsun.

$$R_{135^\circ}(A) = A'(8\sqrt{2}\cdot\cos 135^\circ - 4\sqrt{2}\cdot\sin 135^\circ, 8\sqrt{2}\cdot\sin 135^\circ + 4\sqrt{2}\cdot\cos 135^\circ)$$

$$= A'\left(8\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}, 8\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 4\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$= A'(-8-4, 8-4)$$

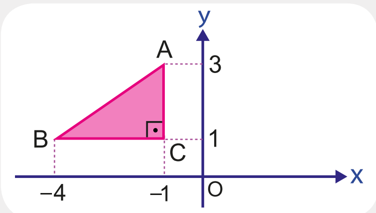
$$= A'(-12, 4) \text{ olur.}$$

$A'(-12, 4)$ noktasının x ekseni boyunca pozitif yönde 8 birim ve y ekseni boyunca negatif yönde 2 birim ötelenmesi ile oluşan nokta $A''(-12+8, 4-2) = A''(-4, 2)$ olarak bulunur.

Ötelemeli Simetri Dönüşümü

Öteleme ve simetri dönüşümlerinin birlikte uygulandığı dönüşümlere **ötelemeli simetri dönüşümü** denir. Ötelemeli simetri dönüşümleri uygulanan şekillerde uzaklıklar değişmez. Şeklin üzerindeki açıların yönleri değişir.

ÖRNEK



Yandaki şekilde köşelerinin koordinatları $A(-1,3)$, $B(-4,1)$ ve $C(-1,1)$ olan ABC üçgeninin x ekseni boyunca pozitif yönde 6 birim ve y ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim ötelendikten sonra x eksenine göre simetriği alınıyor. Elde edilen üçgenin koordinatlarını bulunuz ve analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM

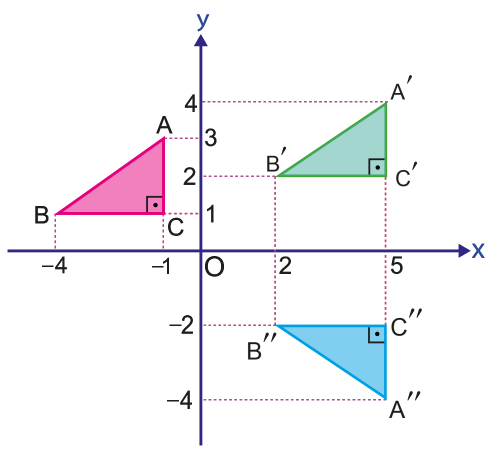
ABC dik üçgeninin köşe koordinatları $A(-1,3)$, $B(-4,1)$ ve $C(-1,1)$ dir. Bu noktalar x ekseni boyunca pozitif yönde 6 birim ve y ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim ötelenirse oluşan noktalar A', B' ve C' olsun.

$A'(-1+6, 3+1) = A'(5,4)$

$B'(-4+6, 1+1) = B'(2,2)$

$C'(-1+6, 1+1) = C'(5,2)$

olur. A', B' ve C' noktalarının x eksenine göre simetriği olan noktalar A'', B'' ve C'' olsun. Bu noktalar $A''(5,-4)$, $B''(2,-2)$ ve $C''(5,-2)$ olarak elde edilir. Böylece önce ötelenen ardından simetriği alınan üçgenin analitik düzlemdeki görüntüsü yandaki gibi olur.

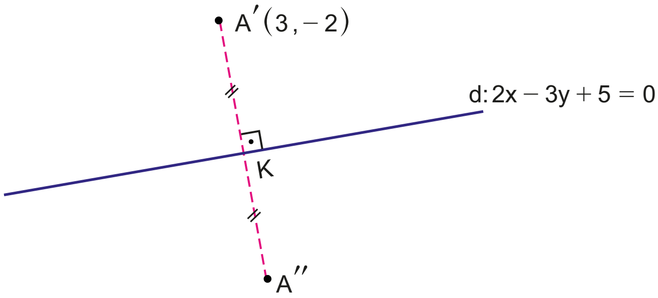


ÖRNEK

$A(1,3)$ noktasının x ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim ve y ekseni boyunca negatif yönde 5 birim ötelendikten sonra $d: 2x-3y+5=0$ doğrusuna göre simetriğini bulunuz.

ÇÖZÜM

$A(1,3)$ noktasının x ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim ve y ekseni boyunca negatif yönde 5 birim ötelenmesi ile oluşan nokta A' olsun. A' noktasının koordinatları $A'(1+2, 3-5) = A'(3,-2)$ olur. $A'(3,-2)$ noktasının d doğrusuna göre simetriği A'' olsun.



A'' noktasının koordinatlarını bulmak için önce d doğrusunun eğimi $m_d = -\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ bulunur.

$A'A''$ doğrusu ile d doğrusu birbirine dik olduğundan eğimlerinin çarpımı -1 dir.

$\frac{2}{3} \cdot m_{A'A''} = -1 \Rightarrow m_{A'A''} = -\frac{3}{2}$ olur.

$A'A''$ doğrusunun denklemi $y-(-2) = -\frac{3}{2} \cdot (x-3) \Rightarrow 2y+4 = -3x+9$

$\Rightarrow 3x+2y-5=0$ bulunur.

$\left.\begin{aligned} 2x-3y+5=0 \\ 3x+2y-5=0 \end{aligned}\right\}$ denklemleri ortak çözülürse

$$\left.\begin{aligned} 2/\ 2x-3y+5=0 \\ 3/\ 3x+2y-5=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 4x-\cancel{6y}+10=0 \\ +\ \underline{9x+\cancel{6y}-15=0} \end{aligned}$$

$$13x-5=0 \Rightarrow x = \frac{5}{13}$$

$$2 \cdot \frac{5}{13} - 3y + 5 = 0 \Rightarrow 3y = \frac{75}{13}$$

$$\Rightarrow y = \frac{25}{13} \text{ olur.}$$

Böylece K noktası $K\left(\frac{5}{13}, \frac{25}{13}\right)$ olarak bulunur.

$A'(3,-2)$ noktasının $K\left(\frac{5}{13}, \frac{25}{13}\right)$ noktasına göre simetriği

$A''\left(2 \cdot \frac{5}{13} - 3, 2 \cdot \frac{25}{13} - (-2)\right) = A''\left(-\frac{29}{13}, \frac{76}{13}\right)$ olarak elde edilir.

ÖRNEK

Görsel 4.1

Elde halı dokuma Türk kültüründe önemli bir yer tutmaktadır. Bu halılar Atalardan kalma halı tezgahlarında, sabırla ve azimle aylarca emek verilerek dokunur.

Yağcıbedir halıları, yüzyılların birikiminin nakış nakış ve ilmek ilmek işlendiği el emeği göz nuru halılardır. Bu halılardaki motiflerin ana özelliği simetrik ve geometrik olmasıdır. Yağcıbedir halıları üzerindeki motiflerin altın orana göre oluşturulması ve çeşitli dönüşümleri barındırması nedeniyle geometri ile iç içe olan halılardır.

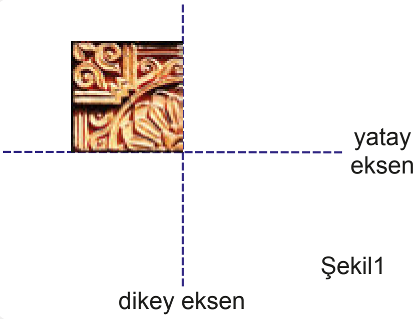
Gerek halıları gerekse toplumsal yaşamıyla tarihsel ve doğal mirasa duyarlı olan Yağcıbedir'de yaşayan kadınlar, mahallelerinde bulunan tarihî çeşmeyi yenilemek için imece usulü yöntemiyle yukarıdaki Yağcıbedir halısını dokuyorlar. Dokudukları bu Yağcıbedir halısında belirtilen motifler üzerinde aşağıdaki dönüşümlerin hangi motiflere karşılık geldiğini bulunuz. Halı üzerinde başka dönüşümler olup olmadığını araştırınız.

a) A motifinin yatay eksene göre simetriğinin hangi motif olduğunu bulunuz.
b) A motifinin dikey eksene göre simetriğinin hangi motif olduğunu bulunuz.
c) A motifinin eksenlerin kesim noktasına göre simetriğinin hangi motif olduğunu bulunuz.
ç) A motifinin eksenlerin kesim noktasına göre 180° döndürülmüş hâlinin hangi motif olduğunu bulunuz.
d) C motifinin yatay eksene göre simetriğinin hangi motif olduğunu bulunuz.
e) C motifinin yatay eksene göre ötelenmiş hâlinin hangi motif olduğunu bulunuz.
f) E motifinin yatay eksene göre simetriği alındıktan sonra yatay olarak ötelenmiş hâlinin hangi motif olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen Yağcıbedir halısı üzerindeki motifler incelendiğinde,
a) A motifinin yatay eksene göre simetriğinin B motifi olduğu görülür.
b) A motifinin dikey eksene göre simetriğinin G motifi olduğu görülür.
c) A motifinin eksenlerin kesim noktasına göre simetriğinin H motifi olduğu görülür.
ç) A motifinin eksenlerin kesim noktasına göre 180° döndürülmüş hâlinin H motifi olduğu görülür.
d) C motifinin yatay eksene göre simetriğinin D motifi olduğu görülür.
e) C motifinin yatay eksene göre ötelenmiş halinin E motifi olduğu görülür.
f) E motifinin yatay eksene göre simetriği alındıktan sonra yatay olarak ötelenmiş halinin D motifi olduğu görülür.

ÖRNEK

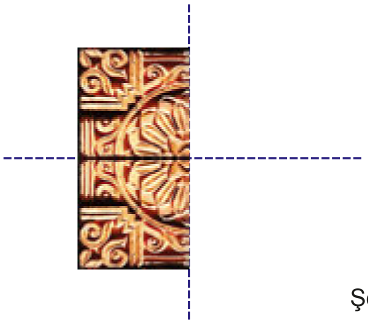


Şekil1

Yanda verilen topraktan yapılmış duvar desenine aşağıdaki adımları sırasıyla uygulayarak bir duvar süslemesi elde ediniz.

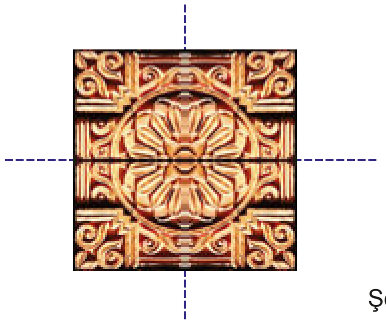
- Yandaki Şekil 1 in yatay eksene göre simetriğini alınız.
- Daha sonra oluşan şeklin dikey eksene göre simetriğini alınız.
- Elde edilen şekli yatay olarak sağa doğru uç uca değecek şekilde 4 kez öteleyiniz.
- Son olarak elde edilen şekli dikey olarak aşağıya doğru uç uca değecek şekilde 1 kez öteleyiniz.

ÇÖZÜM



Şekil 2

Şekil 1 in yatay eksene göre simetriği alınarak yukarıdaki şekil 2 elde edilir.



Şekil 3

Şekil 2 nin dikey eksene göre simetriği alınarak yukarıdaki şekil 3 elde edilir.

şekil 4

Şekil 3 yatay olarak sağa doğru uç uca değecek şekilde art arda 4 kez ötelenerek yukarıdaki şekil 4 elde edilir.

Şekil 4 dikey olarak aşağıya doğru uç uca değecek şekilde 1 kez ötelenerek yukarıdaki duvar süslemesi oluşturulmuş olur.

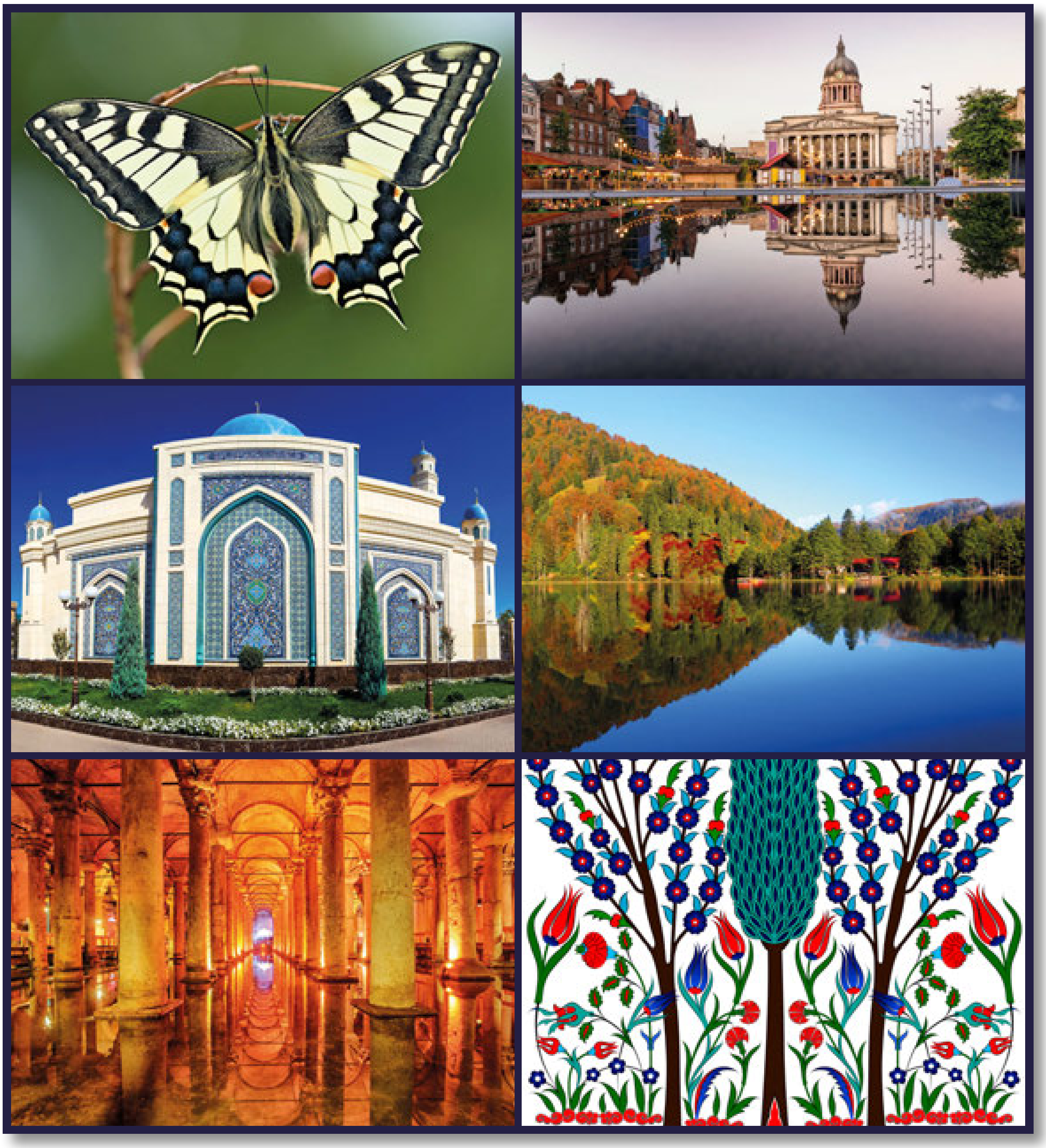
BİLGİ NOTU

Doğada ve Mimari Eserlerde Dönüşümler

Simetri, dönme ve öteleme kavramlarını daha iyi algılayabilmek için çevreye bakmak yeterlidir. Doğada, mimaride kısacası gerçek hayatın her alanında simetri örnekleriyle karşılaşılmaktadır. Bir kelebeğin kanatlarına bakıldığında üzerindeki şekillerin simetrik olduğu görülür. Durgun bir göl kenarında karşı kıyının yansımasında simetri gözlemlenebilir.

Simetri, dönme ve öteleme mimarinin de vazgeçilmez unsurlarından biridir. Çağlar boyu mimarlar binaların yapımında ve süslemesinde bu kavramlardan yararlanmıştır.

Özellikle süsleme alanında halı, kilim, çini, el işleri vb. sanatlarda simetri, öteleme ve dönme örnekleriyle sıkça karşılaşılmaktadır.



Görsel 4.2

Alıştırmalar

1 $A(2,3)$ noktasının $B(-1,4)$ noktasına göre simetri dönüşümü altındaki görüntüsünü bulunuz.

2 $A(3,4)$ noktasının $B(x,y)$ noktasına göre simetriği $A'(7,-2)$ olduğuna göre $x+y$ toplamını bulunuz.

3 $A(-3,4)$ noktasının $y=x$ doğrusuna göre simetriği olan nokta $A'(4a-8,5b+2)$ noktası olduğuna göre $a+b$ toplamını bulunuz.

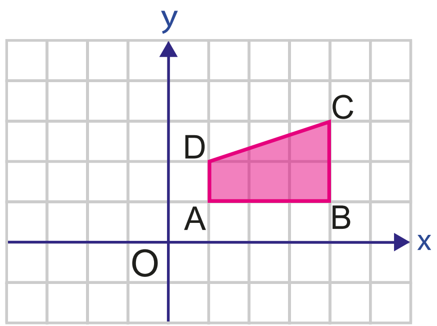
4 $4x-3y+2=0$ doğrusunun $A(1,-3)$ noktasına göre simetriği olan doğrunun denklemini bulunuz.

5 $-5x+by+c=0$ doğrusunun $A(-3,5)$ noktasına göre simetriği $5x+12y-10=0$ doğrusu olduğuna göre $b+c$ toplamını bulunuz.

6 $A(-1,2)$ noktasının $3x+y+4=0$ doğrusuna göre simetriğinin koordinatlarını bulunuz.

7 Analitik düzlemde $A(3,4)$ noktasının bir d doğrusuna göre simetriği $A'(-7,12)$ noktası olduğuna göre d doğrusunun denklemini bulunuz.

8

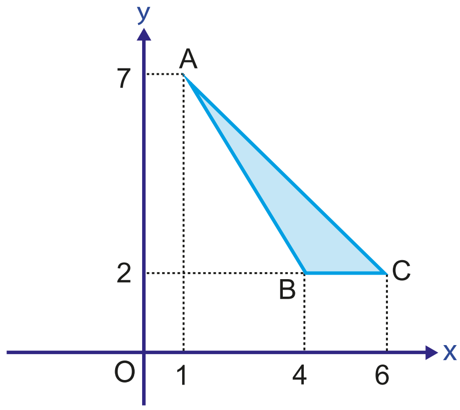


Yukarıdaki şekilde verilen ABCD dik yamuğunun x eksenine ve y eksenine göre simetri dönüşümü altındaki görüntülerini bularak analitik düzlemde gösteriniz.

9 Analitik düzlemde $A(-5,-2)$ noktasının x ekseni boyunca pozitif yönde 8 birim ve y ekseni boyunca pozitif yönde 4 birim ötelenmesi ile A' noktası oluşuyor. Bu noktanın orijin etrafında pozitif yönde 270° döndürülmesiyle elde edilen nokta A'' ise bu noktanın koordinatlarını bulunuz.

10 Analitik düzlemde $A(-1,2)$ noktası orijin etrafında pozitif yönde 90° döndürülüyor. Elde edilen bu nokta x ekseni boyunca negatif yönde 3 birim ve y ekseni boyunca pozitif yönde 4 birim ötelendiğinde oluşan noktanın koordinatlarını bulunuz.

11



Yukarıdaki analitik düzlemde verilen ABC üçgeni orijin etrafında pozitif yönde 180° döndürülüyor. Elde edilen $A'B'C'$ üçgeni x ekseni boyunca pozitif yönde 7 birim ve y ekseni boyunca negatif yönde 2 birim ötelendiğinde $A''B''C''$ üçgeni elde ediliyor. Oluşan $A''B''C''$ üçgeninin köşelerinin koordinatlarını bulunuz.

12 Analitik düzlemde $A(-1,-2)$ noktası x ekseni boyunca pozitif yönde 3 birim ve y ekseni boyunca pozitif yönde 4 birim öteleniyor. Elde edilen noktanın $B(1,-1)$ noktasına göre simetriği olan noktayı bulunuz.

Ölçme ve Değerlendirme

A) 1-5. sorularda boş bırakılan yerlere uygun ifadeleri yazınız.

1 $A(-4,-5)$ noktası x ekseni boyunca negatif yönde 2 birim ve y ekseni boyunca pozitif yönde 3 birim ötelendiğinde .... noktası elde edilir.

2 $A(2\sqrt{3},2)$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde 60° döndürülmesi ile oluşan noktanın koordinatları .... olur.

3 $A(1,-2)$ noktasının $P(2,-1)$ noktasına göre simetri dönüşümü altındaki görüntüsü .... olur.

4 $A(2,5)$ noktasının $x+y-1=0$ doğrusuna göre simetri dönüşümü altındaki görüntüsü .... olur.

5 $A(-1,-2)$ noktasının x ekseni boyunca pozitif yönde 5 birim ötelenmesi ile oluşan noktanın orijin etrafında pozitif yönde 270° döndürülmesi ile .... noktası elde edilir.

B) 6. soruda numaralar ile verilen ifadeleri harf ile verilen ifadelerle eşleştiriniz.

6 Aşağıda analitik düzlemde numaralar ile verilen noktaların $P(2,-3)$ noktasına göre simetriğini bularak harf ile verilen noktalarla eşleştiriniz.

I. $A(3,4)$

II. $B(-1,2)$

III. $C(2,-5)$

IV. $D(-6,-6)$

V. $E(7,1)$

a) $(10,0)$

b) $(5,-8)$

c) $(-2,5)$

ç) $(-3,-7)$

d) $(-6,8)$

e) $(1,-10)$

f) $(4,7)$

g) $(2,-1)$

I.	II.	III.	IV.	V.

C) 7-11. açık uçlu soruları cevaplandırınız.

7 Analitik düzlemde $A(-2,-4\sqrt{3})$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde 420° döndürülmesi ile elde edilen noktanın koordinatları çarpımı kaçtır?

8 Analitik düzlemde $A(-2,\sqrt{3})$ noktasının $x=3$ ve $y=-\sqrt{3}$ doğrularına göre simetriği olan noktaların koordinatları nedir?

9 Analitik düzlemde $A(1,-1)$ noktasının $x+y+4=0$ doğrusuna göre simetriği olan noktanın koordinatları nedir?

10 Analitik düzlemde $A(-5,7)$ noktasının orijin etrafında negatif yönde 90° döndürülmesi ile elde edilen nokta A' noktasıdır. Buna göre A' noktasının $y=x$ doğrusuna göre simetriği olan noktanın koordinatları nedir?

11 Analitik düzlemde $A(1,1)$ noktasının x ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim ve y ekseni boyunca negatif yönde 1 birim ötelenmesi ile elde edilen A' noktasının $y-x+5=0$ doğrusuna göre simetriği olan A'' noktasının koordinatları nedir?

D) 12-23. çoktan seçmeli soruları çözünüz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

12 **Analitik düzlemde $A(-1,3)$ noktasının $x=2$ doğrusuna göre simetriği olan nokta aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(5,3)$ B) $(-1,1)$ C) $(3,-1)$ D) $(-5,3)$ E) $(2,-3)$

13 **Analitik düzlemde $A(2,-4)$ noktasının x ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim ötelemesi ile oluşan noktanın $O(0,0)$ noktasına olan uzaklığı kaç birimdir?**

A) 7 B) 5 C) 3 D) 2 E) 1

14 **Analitik düzlemde $A(3,4)$ noktasının, $x+3y-5=0$ doğrusuna göre simetriği olan A' noktasının apsisi kaçtır?**

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

15 Analitik düzlemde $A(-2,1)$ noktasının y eksenine göre simetriği olan nokta, x ekseni boyunca negatif yönde 3 birim öteleniyor.

Buna göre oluşan noktanın koordinatları çarpımı kaçtır?

A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2

16 **Analitik düzlemde $A(2,-2\sqrt{3})$ noktasının orijin etrafında pozitif yönde 510° döndürülmesiyle elde edilen noktanın koordinatları toplamı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

17 Analitik düzlemde $A(-4\sqrt{2}+2,3\sqrt{2}-1)$ noktası x ekseni boyunca negatif yönde 2 birim ve y ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim öteleniyor.

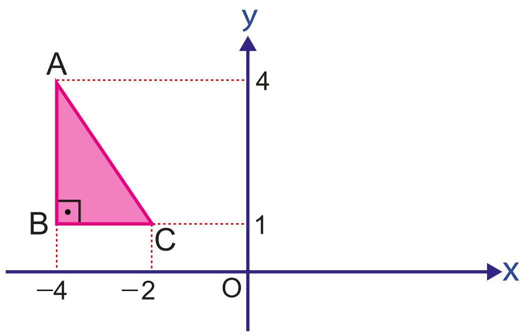
Elde edilen noktanın orijin etrafında pozitif yönde 315° döndürülmesiyle oluşan nokta aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-7,-1)$ B) $(-1,7)$ C) $(-3,7)$ D) $(-6,2)$ E) $(-2,-1)$

18 **Analitik düzlemde $A(-\sqrt{3},1)$ noktasının $R_{30^\circ}(A)$ dönme dönüşümü altındaki görüntüsü olan noktanın x ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim ötelenmesiyle oluşan nokta aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(0,2)$ B) $(-2,0)$ C) $(0,0)$ D) $(\sqrt{3},0)$ E) $(0,-2\sqrt{3})$

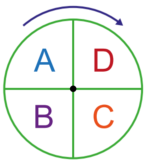
19



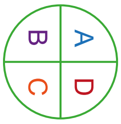
Dik koordinat sisteminde verilen ABC dik üçgeni x ekseni boyunca pozitif yönde 5 birim öteleniyor ve $A'B'C'$ üçgeni elde ediliyor. Bu üçgene $y=x$ doğrusuna göre simetri dönüşümü uygulanıyor.

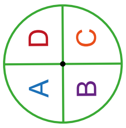
Bu simetri dönüşümü sonucunda oluşan üçgenin köşelerinin koordinatlarının apsisleri toplamı kaçtır?

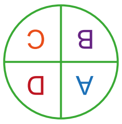
A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

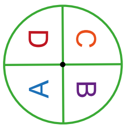
20 

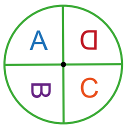
Yanda verilen daire biçimindeki şekil merkezi etrafında ok yönünde 630° döndürüldüğünde şeklin görünümü aşağıdakilerde hangisi olur?

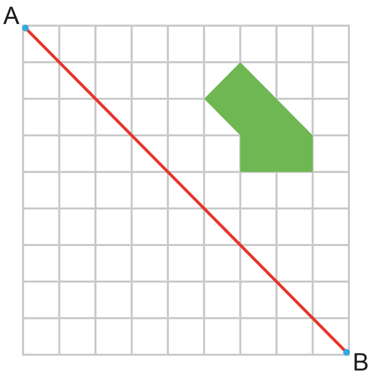
A) 

B) 

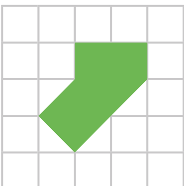
C) 

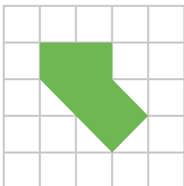
D) 

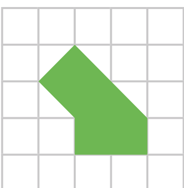
E) 

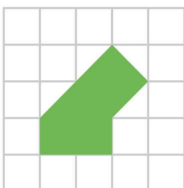
21 

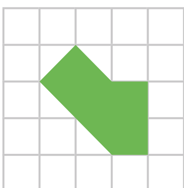
Yukarıdaki boyalı şeklin AB doğrusuna göre simetriği aşağıdakilerden hangisidir?

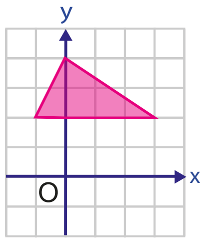
A) 

B) 

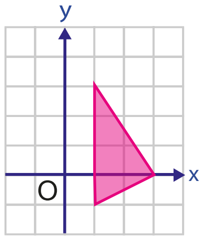
C) 

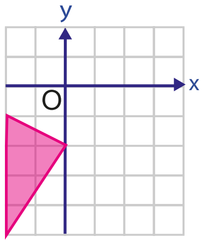
D) 

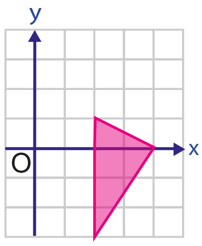
E) 

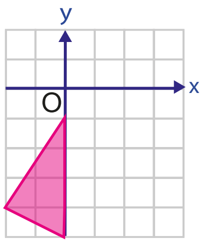
22 

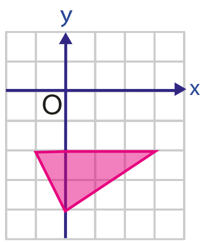
Yandaki şekilde verilen üçgeninin orijin etrafında pozitif yönde 270° döndürülmesi ile oluşan şekil aşağıdakilerden hangisidir?

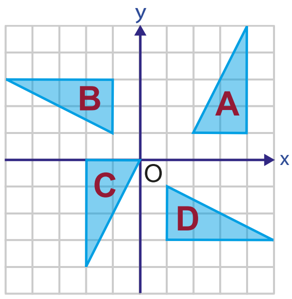
A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

23 

Yandaki şekilde verilen A, B, C ve D üçgenleri ile ilgili aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) B üçgeni, A üçgeninin orijin etrafında negatif yönde 270° döndürüldükten sonra y ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim ötelenmiş halidir.

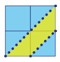
B) C üçgeni, A üçgeninin orijin etrafında pozitif yönde 90° döndürülmüş halidir.

C) B üçgeni, C üçgeninin orijin etrafında pozitif yönde 180° döndürülmüş halidir.

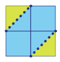
D) D üçgeni, A üçgeninin y ekseni boyunca negatif yönde 1 birim ötelendikten sonra orijin etrafında pozitif yönde 180° döndürülmüş halidir.

E) A üçgeni, D üçgeninin orijin etrafında pozitif yönde 90° döndürüldükten sonra x ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim ötelenmiş halidir.

E) 24-25. üst düzey beceri sorularını şekle ve metne göre cevaplayınız.



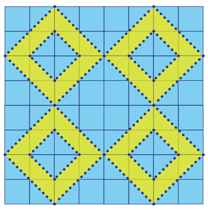
1. motif

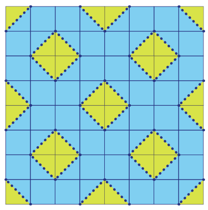


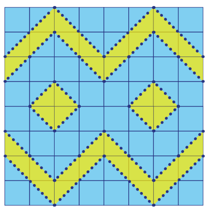
2. motif

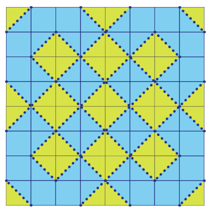
Yukarıda verilen eş büyüklükte kare biçimindeki motiflerler verilmiştir. Bu motiflerden sadece biri veya her ikisi kullanılarak çeşitli desenler oluşturuluyor. Buna göre;

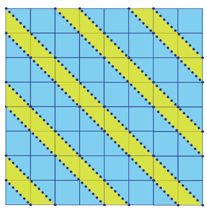
24 Bu motiflerle aşağıdaki desenlerden hangisi elde <u>edilemez</u>?

A) 

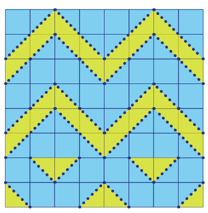
B) 

C) 

D) 

E) 

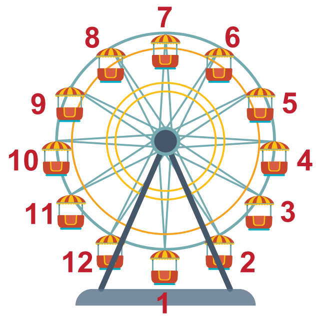
25



Yukarıdaki desende kullanılan 1. ve 2. motif sayısı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 12 - 4 B) 10 - 6 C) 8 - 8 D) 6 - 10 E) 4 - 12

26-28. üst düzey beceri sorularını şekle ve metne göre cevaplayınız.



Şekilde eşit aralıklarla yerleştirilmiş 12 adet kabin ve her kabinde 4 koltuk bulunan bir dönme dolap verilmiştir. Dönme dolaba her seferinde 1 numaralı kabinin bulunduğu konumdan müşteriler binebilmektedir.

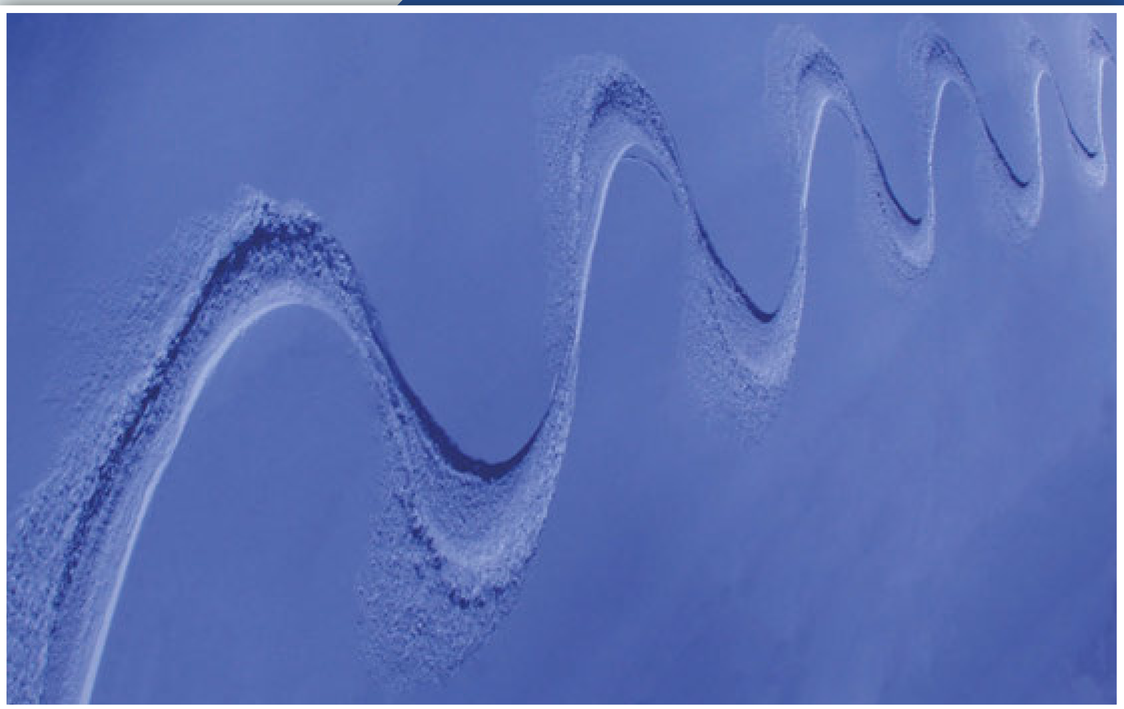
- Dönme dolabın 1 numaralı kabinine 4 müşteri bindikten sonra dönme dolap saat yönünde döndürülerek 2 numaralı kabine müşteri alınacaktır. Bu işleme tüm kabinlere müşteri alınıncaya kadar devam edilecektir.
- Dönme dolabın tek numaralı kabinlerine çift sayıda müşteri binecektir.
- Dönme dolabın çift numaralı kabinlerine tek sayıda müşteri binecektir.
- Dönme dolabın asal sayı numaralı kabinlerine asal sayıda müşteri binecektir.
- Dönme dolabın görevlisi dalgınlıkla 2 numaralı kabine müşteri almayı unutarak 3 numaralı kabinden devam etmiştir.

Buna göre;

26 Dönme dolap başlangıç konumundan 240° döndürüldüğünde dönme dolaba binen yeni müşterilerle birlikte dönme dolapta <u>en fazla</u> kaç müşteri olur?

27 Dönme dolap ilk konumundan itibaren 1500° döndürüldüğünde 4 numaralı kabin başlangıçtaki kaç numaralı kabinin konumuna gelir?

28 Dönme dolabın 6 numaralı kabinine müşteri alındıktan sonra dönme dolabın 150° dönmesinin ardından dönme dolap arıza yapıyor. Buna göre dönme dolabın arıza yaptığı anda yerden en yüksekte bulunan kabini hangisidir?



5

TÜREV

5.1. LİMİT VE SÜREKLİLİK
5.2. ANLIK DEĞİŞİM ORANI VE TÜREV
5.3. TÜREVİN UYGULAMALARI

HAZIRLIK ÇALIŞMALARI

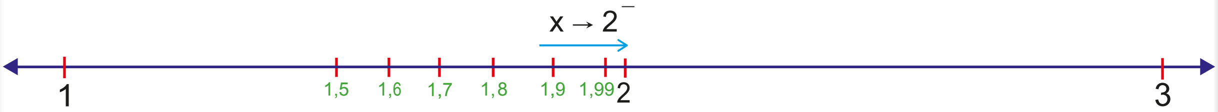
- Bir hareketlinin ortalama hızı nasıl bulunur?
- Bir hareketlinin anlık hızı bulunabilir mi?
- Bir parabolün tepe noktası farklı bir yoldan bulunabilir mi?
- Üretilecek bir ürünün maliyetinin minimum olması nasıl hesaplanabilir?
- İkinci dereceden fonksiyonların grafikleri çizilirken nelere dikkat edilmelidir?

5.1. LİMİT VE SÜREKLİLİK

5.1.1. Bir Fonksiyonun Bir Noktadaki Limiti ile Soldan ve Sağdan Limit Kavramları

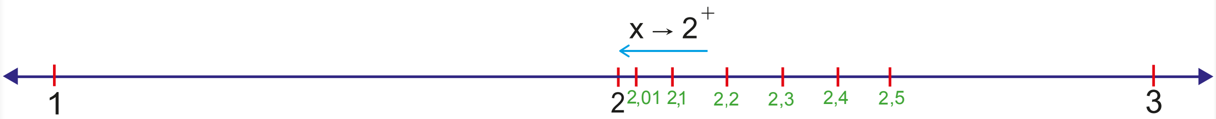
Yaklaşım Kavramı

✓ x bağımsız değişkeni bir a gerçek sayısına a dan küçük değerler ile artarak yaklaşıyorsa bu yaklaşım durumuna x in a ya soldan yaklaşımı denir ve $\mathbf{x \to a^-}$ biçiminde gösterilir.



Yukarıdaki sayı doğrusunda 2 ye soldan yaklaşım gösterilmiştir. $x \to 2^-$ gösterimi, x in 2 değerini almadığını ancak 2 den küçük 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 1,99; 1,999; ... değerler alarak 2 ye yaklaştığını ifade eder.

✓ x bağımsız değişkeni bir a gerçek sayısına a dan büyük değerler ile azalarak yaklaşıyorsa bu yaklaşım durumuna x in a ya sağdan yaklaşımı denir ve $\mathbf{x \to a^+}$ biçiminde gösterilir.



Yukarıdaki sayı doğrusunda 2 ye sağdan yaklaşım gösterilmiştir. $x \to 2^+$ gösterimi, x in 2 değerini almadığını ancak 2 den büyük 2,5; 2,4; 2,3; 2,2; 2,1; 2,01; 2,001; ... değerler alarak 2 ye yaklaştığını ifade eder.

ÖRNEK

x değişkeni bir gerçek sayıya 3,3; 3,5; 3,8; 3,9; 3,99; ... değerleri alarak yaklaşmaktadır. Bu yaklaşım biçiminin matematiksel olarak nasıl ifade edileceğini gösteriniz.

ÇÖZÜM

Bu yaklaşımda x değişkeni 4 ten küçük değerler ile artarak 4 e yaklaşmaktadır. Bu durum 4 e soldan yaklaşımı ifade eder. Bu yaklaşım $x \to 4^-$ biçiminde gösterilir.

ÖRNEK

x değişkeni bir gerçek sayıya $-2,1$; $-2,5$; $-2,8$; $-2,9$; $-2,99$; ... değerleri alarak yaklaşmaktadır. Bu yaklaşım biçiminin matematiksel olarak nasıl ifade edileceğini gösteriniz.

ÇÖZÜM

Bu yaklaşımda x değerleri -3 ten büyük değerler ile azalarak -3 e yaklaşmaktadır. Bu durum -3 e sağdan yaklaşımı ifade eder. Bu yaklaşım $x \to -3^+$ biçiminde gösterilir.

ÖRNEK

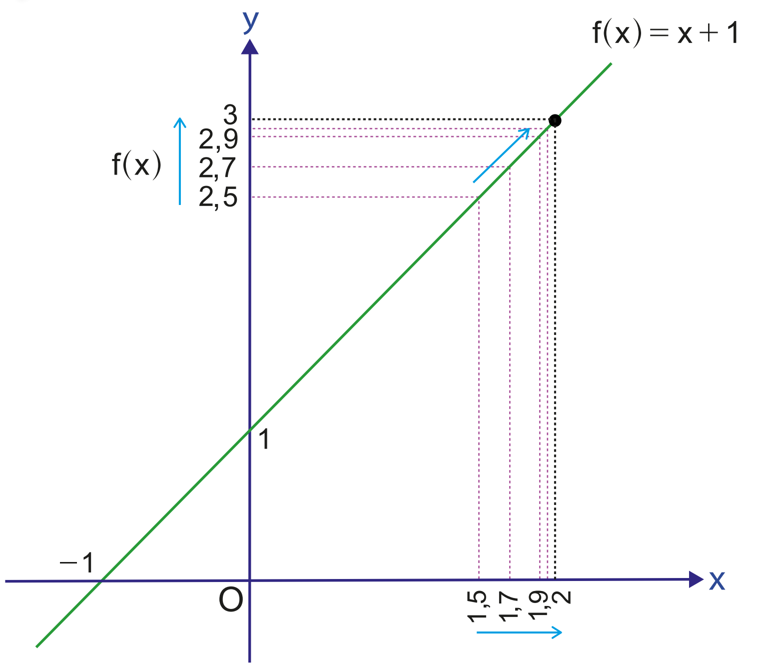
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ fonksiyonu veriliyor. Aşağıdaki tabloda x, 2 ye sağdan ve soldan yaklaşırken $f(x)$ in aldığı bazı değerler gösterilmiştir.

$x \to 2^-$ $\quad$ $x \to 2^+$

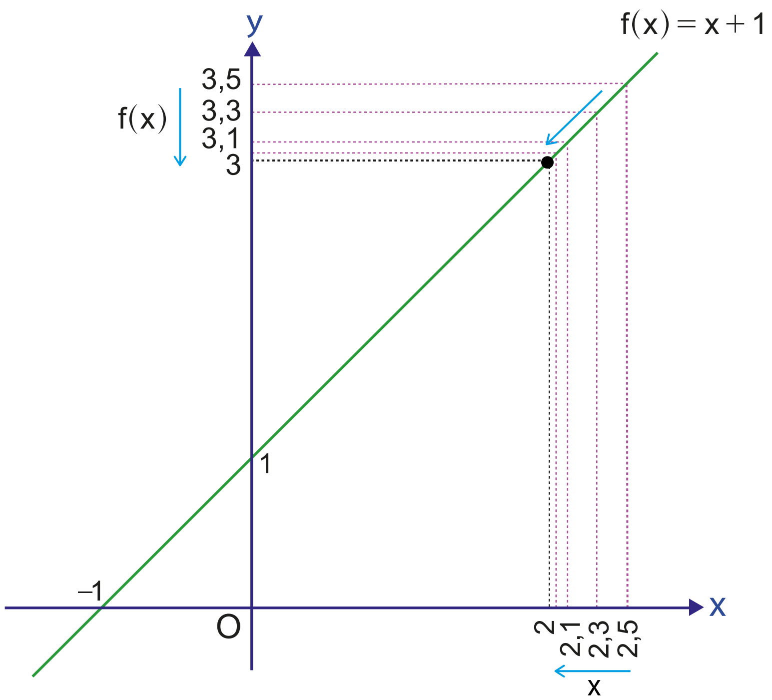
x	1, 5	1, 7	1, 9	1, 99	...	2	...	2, 01	2, 1	2, 3	2, 5
f(x)	2, 5	2, 7	2, 9	2, 99	...	3	...	3, 01	3, 1	3, 3	3, 5

Buna göre x değişkeni 2 ye soldan ve sağdan yaklaşırken $f(x)$ in hangi sayıya yaklaştığını grafik üzerinde gösteriniz.

ÇÖZÜM



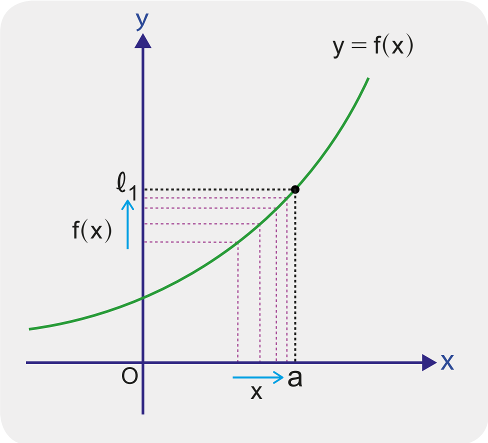
Gerek tablodan gerekse grafikten x bağımsız değişkeninin 2 ye soldan yaklaşırken $f(x)$ değerlerinin 3 e yaklaştığı görülmektedir.



Benzer şekilde x bağımsız değişkeni 2 ye sağdan yaklaşırken $f(x)$ değerleri 3 e yaklaşmaktadır.

Limit Kavramı

✓



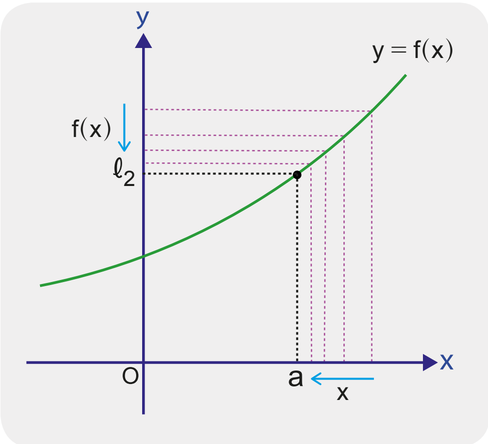
Yanda verilen f(x) fonksiyonunun grafiği incelendiğinde x, a ya soldan yaklaşırken f(x) in ℓ_1 gerçek sayısına yaklaştığı görülmektedir.

ℓ_1 gerçek sayısına f(x) fonksiyonunun x = a apsisli noktasındaki **soldan limiti** denir ve

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell_1$$

biçiminde gösterilir.

✓



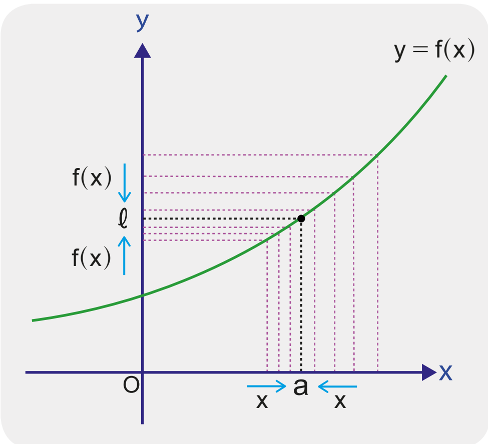
Yanda verilen f(x) fonksiyonunun grafiği incelendiğinde x, a ya sağdan yaklaşırken f(x) in ℓ_2 gerçek sayısına yaklaştığı görülmektedir.

ℓ_2 gerçek sayısına f(x) fonksiyonunun x = a apsisli noktasındaki **sağdan limiti** denir ve

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell_2$$

biçiminde gösterilir.

✓



Yanda verilen f(x) fonksiyonunun grafiği incelendiğinde x, a ya soldan ve sağdan yaklaşırken f(x) in ℓ gerçek sayısına yaklaştığı görülmektedir.

ℓ gerçek sayısına f(x) fonksiyonunun x = a apsisli noktasındaki **limiti** denir ve

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

biçiminde gösterilir.

✓ Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ apsisli noktasında limitinin olması için bu noktadaki sağdan ve soldan limitleri birbirine eşit olmalıdır.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell_1 \text{ ve } \lim_{x \to a^+} f(x) = \ell_2 \text{ olmak üzere } \ell_1 = \ell_2 = \ell \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = \ell \text{ olur.}$$

✓ Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ apsisli noktasındaki sağdan ve soldan limitleri birbirine eşit değilse fonksiyonun bu noktada limiti yoktur.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) \text{ yoktur.}$$

✓ Bir fonksiyonun bir noktada limiti varsa bu limit tektir.

ÖRNEK

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$ fonksiyonunun $x = 3$ apsisli noktasındaki limitini tablo ve grafik yardımıyla bulunuz.

ÇÖZÜM

x değişkeni 3 e sağdan ve soldan yaklaşırken $f(x)$ in aldığı değerler aşağıdaki tablo yardımıyla incelenirse

$x \to 3^-$ $x \to 3^+$

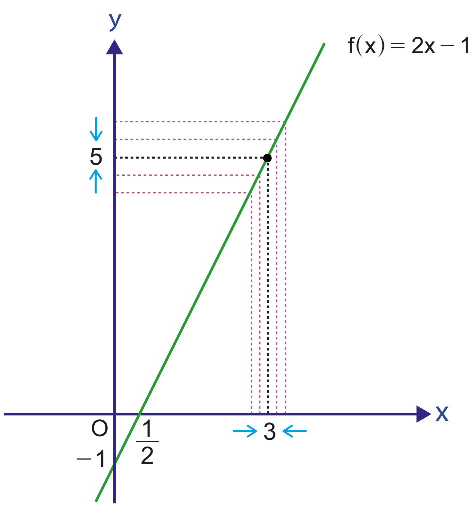
x	...	2, 8	2, 9	2, 99	2, 999	...	3	...	3, 001	3, 01	3, 1	3, 2	3, 3	...
f(x)	...	4, 6	4, 8	4, 98	4, 998	...	5	...	5, 002	5, 02	5, 2	5, 4	5, 6	...

x değişkeni 3 e soldan yaklaşırken $f(x)$ in 5 e yaklaştığı görülür ve $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 5$ olur.

x değişkeni 3 e sağdan yaklaşırken $f(x)$ in 5 e yaklaştığı görülür ve $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 5$ olur.

$f(x)$ in $x = 3$ apsisli noktasındaki soldan ve sağdan limitleri birbirine eşit ve 5 olduğundan $f(x)$ fonksiyonunun $x = 3$ apsisli noktasındaki limiti 5 tir.

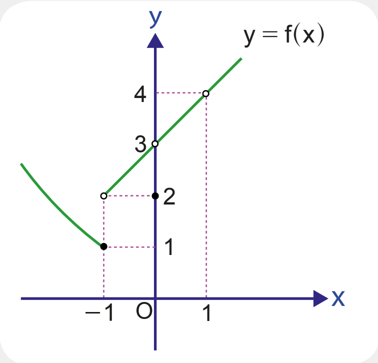
$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = 5 \Rightarrow \lim_{x \to 3} f(x) = 5 \text{ olur.}$$



$f(x) = 2x - 1$ fonksiyonunun grafiği çizilerek incelendiğinde x değişkeni soldan ve sağdan 3 e yaklaşırken $f(x)$ in 5 e yaklaştığı görülmektedir. Bu durumda

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = 5 \Rightarrow \lim_{x \to 3} f(x) = 5 \text{ olur.}$$

ÖRNEK



Yanda $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ **ç)** $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ **e)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

f) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ **g)** $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

h) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

ÇÖZÜM

$f(x)$ fonksiyonunun grafiği incelendiğinde

a) x, -1 e soldan yaklaşırken $f(x)$, 1 e yaklaştığından $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 1$ olur.

b) x, -1 e sağdan yaklaşırken $f(x)$, 2 ye yaklaştığından $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 2$ olur.

c) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ olduğundan $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ yoktur.

ç) x, 0 a soldan yaklaşırken $f(x)$, 3 e yaklaştığından $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 3$ olur.

d) x, 0 a sağdan yaklaşırken $f(x)$, 3 e yaklaştığından $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 3$ olur.

e) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 3$ olduğundan $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 3$ olur.

f) x, 1 e soldan yaklaşırken $f(x)$, 4 e yaklaştığından $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 4$ olur.

g) x, 1 e sağdan yaklaşırken $f(x)$, 4 e yaklaştığından $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4$ olur.

h) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4$ olduğundan $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4$ olur.

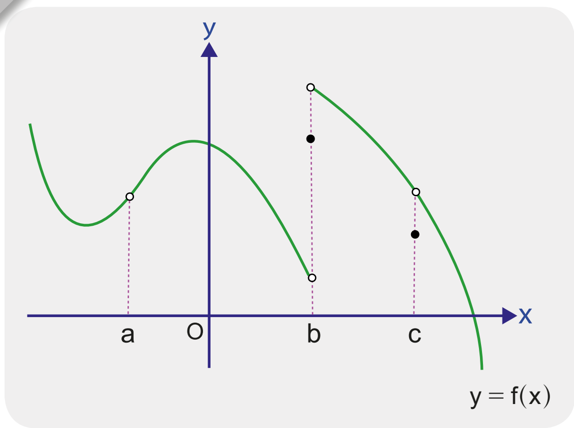
Yukarıdaki örnek incelendiğinde $f(x)$ fonksiyonunun

- $x = -1$ apsisli noktasında tanımlı ve $f(-1) = 1$ olmasına rağmen bu noktada limiti yoktur.
- $x = 1$ apsisli noktasında tanımlı olmamasına rağmen bu noktada limiti vardır.
- $x = 0$ apsisli noktasında fonksiyon tanımlı ve $f(0) = 2$ olmasına rağmen bu noktadaki limiti 3 tür.

SONUÇ

Bir fonksiyonun bir noktada limitinin olması için fonksiyonun o noktada tanımlı olma zorunluluğu yoktur.

Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti, fonksiyonun o noktadaki değerinden farklı olabilir.

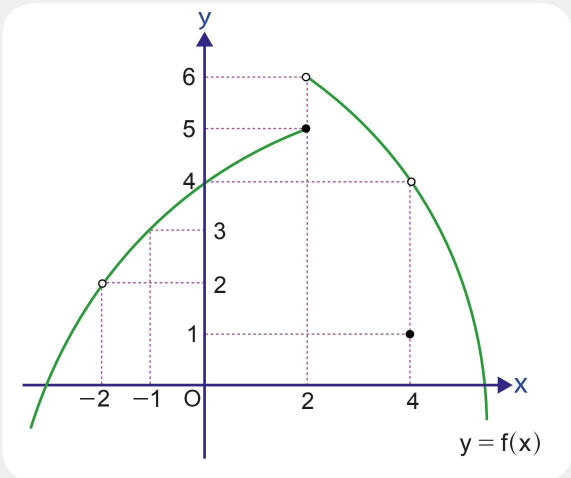


Bir fonksiyonun grafiği üzerindeki kopukluk olan noktalara **kritik noktalar** denir.

Yanda grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği incelendiğinde; tanımlı olmadığı $x = a$ apsisli noktası ile $x = b$ ve $x = c$ apsisli noktalarının kritik noktalar olduğu görülür. Bu noktalarda limit araştırılırken sağdan ve soldan limitler incelenmelidir.

Eğer limit araştırılan nokta, kritik nokta değilse fonksiyonun limiti, fonksiyonun o noktadaki değerine eşittir.

ÖRNEK



Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ **ç)** $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$

ÇÖZÜM

-1 apsisli noktası kritik nokta olmadığından fonksiyonun bu noktadaki limiti, fonksiyonun o noktadaki değerine eşit olacaktır.

a) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1) = 3$ olur.

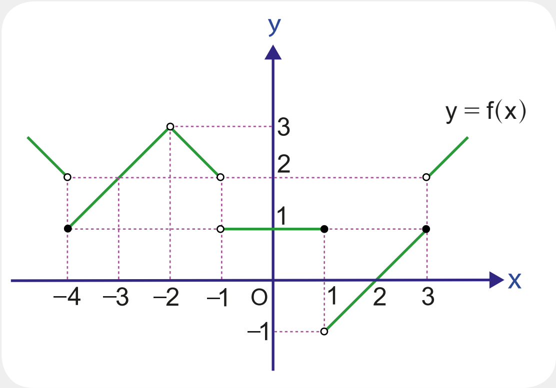
Fonksiyonun grafiği incelendiğinde -2, 2 ve 4 apsisli noktalarının kritik nokta olduğu görülür. Fonksiyonun bu noktalarda sağdan ve soldan limitleri incelenmelidir.

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -2} f(x) = 2$ olur.

c) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} f(x)$ yoktur.

ç) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 4 \\ \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 4} f(x) = 4$ olur.

ÖRNEK



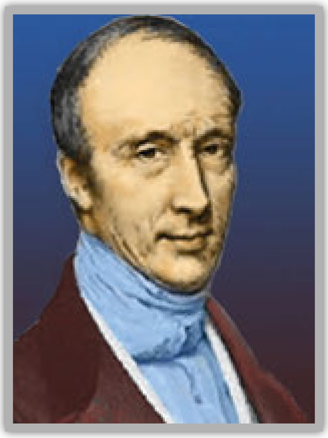
Yanda grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonunun -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2 ve 3 apsisli noktalarında var olan limitlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen f fonksiyonun grafiği incelendiğinde -4, -2, -1, 1 ve 3 apsisli noktaların fonksiyonun kritik noktaları olduğu görülür. Bu noktalarda fonksiyonun sağdan ve soldan limitleri incelenmelidir. -3, 0 ve 2 apsisli noktaları ise kritik nokta olmadığından fonksiyonun bu noktalardaki limiti fonksiyonun bu noktalardaki görüntülerine eşit olacaktır.

- $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = f(-3) = 2$
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$
- $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = 0$
- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -4^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x\to -4^+} f(x) = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -4} f(x)$ yoktur.
- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = 3 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 3\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -2} f(x) = 3$
- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} f(x)$ yoktur.
- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ yoktur.
- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3} f(x)$ yoktur.

Augustin Louis Cauchy (Ogüstin Luis Koşi) (1789 - 1857)



Görsel 5.1

1789'da Paris'te doğan Fransız matematikçidir. Bugün Cauchy Teoremi adıyla bilinen teoremi ifade ederek ispatladı. Limit, süreklilik, türev ve integral üzerinde çalışmalar yapmıştır. Bunların hesaplama yöntemleri yine Cauchy tarafından verilmiştir.

Cauchy, türev ve integral hesaplamaları üzerine çalışmaları neticesinde matematiğe karmaşık fonksiyonlar teorisini kazandırmıştır. Cauchy'nin kendi adıyla anılan Cauchy-Schwarz eşitsizliği, Cauchy-Riemann denklemleri, Cauchy teoremi, Cauchy integral formülü ve Cauchy dizisi gibi çalışmaları bulunmaktadır.

(Cauchy, matematik.dpu.edu.tr)

ÖRNEK

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & , \ x<2 \ \text{ ise} \\ 2x-1 & , \ x\geq 2 \ \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonunun grafiğini Dinamik Geometri ve Matematik Yazılımı programında çizerek $x=2$ apsisli noktadaki sağdan ve soldan limitini bulunuz.

ÇÖZÜM

Dinamik Geometri ve Matematik Yazılımı programını açınız.

1. Adım: Ekrana gelen görüntüdeki giriş kısmına Eğer yazarak Eğer(<Şart>, <Doğruysa>, <Doğru Değilse>) seçiniz.

2. Adım: <Şart> yerine $\mathbf{x<2}$ yazınız.

3. Adım: <Doğruysa> yerine $\mathbf{x^2+1}$ yazınız.

4. Adım: <Doğru Değilse> yerine $\mathbf{2x-1}$ yazılarak enter tuşuna basıldığında grafik ekrana gelir.

5. Adım: Giriş kısmına $(\mathbf{2,5})$ yazarak enter tuşuna basınız. Tekrar giriş kısmına $(\mathbf{2,3})$ yazarak enter tuşuna basınız.

6. Adım: $(\mathbf{2,5})$ noktası dâhil olmadığından bu noktanın üzerine sağ tıklayarak ayarlar butonunu ve açılan pencerede sitil butonunu seçip içi boş olarak belirleyiniz. Böylece $\mathbf{f(x)}$ fonksiyonun grafiği çizilmiş olur.

7. Adım: butonuna tıklayarak x ekseni üzerinde rastgele bir nokta seçiniz.

8. Adım: butonuna tıklayarak dik doğruyu seçiniz. x ekseni üzerindeki noktaya ve ardından x eksenine tıklayarak x eksenine dik bir doğru çiziniz.

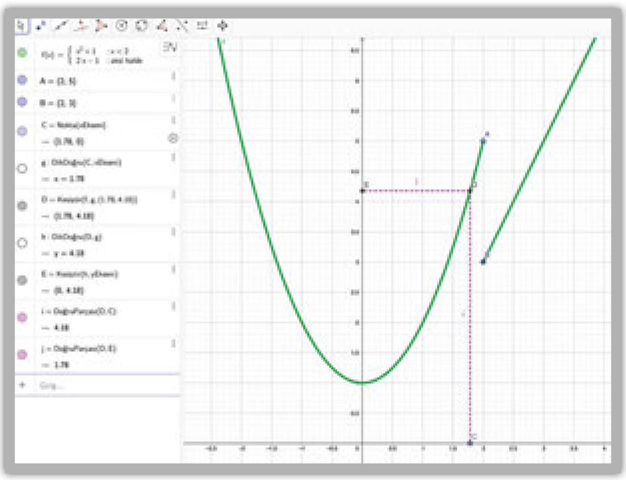
9. Adım: butonuna tıklayarak doğrunun grafiği kestiği noktayı seçiniz.

10. Adım: butonuna tıklayarak doğrunun grafiği kestiği noktaya ve ardından çizilen dik doğruya tıklayarak y eksenine dik bir doğru çiziniz.

11. Adım: butonuna tıklayınız. y eksenine çizilen dik doğruyu seçerek y ekseni ile doğrunun kesiştiği noktayı seçiniz.

12. Adım: butonuna tıklayarak doğru parçasını seçiniz. Doğrunun grafiği kestiği noktayı ve x ekseni üzerindeki noktayı seçerek bir doğru parçası çiziniz. Ardından doğrunun grafiği kestiği noktayı ve y ekseni üzerindeki noktayı seçerek bir doğru parçası daha çiziniz.

13. Adım: Dik doğruları, cebir penceresinin sol taraflarındaki ● simgelerine tıklayarak görünmez yapınız ve sol üstteki ok simgesine tıklayınız.



Elde edilen grafikte,

- x ekseni üzerindeki nokta 2 ye sağdan yaklaştırıldığında $f(x)$ in 3 e yaklaştığı gözlenir ve

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=3 \quad \text{olur.}$$

- x ekseni üzerindeki nokta 2 ye soldan yaklaştırıldığında $f(x)$ in 5 e yaklaştığı gözlenir ve

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=5 \quad \text{olur.}$$

Alıştırmalar

1 x değişkeninin 5 sayısına sağdan yaklaşımının matematiksel olarak nasıl ifade edileceğini bulunuz.

2 x değişkeni -3 sayısına -3 ten küçük ve artan değerlerle yaklaştığına göre bu yaklaşım biçiminin matematiksel olarak nasıl ifade edileceğini bulunuz.

3

...	4,0001	4,001	4,01	4,1	4,3	4,5	5

Yukarıdaki tabloda verilen değerlerle yaklaşımın matematiksel olarak nasıl ifade edileceğini bulunuz.

4 $f(x)=2$ olduğuna göre $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ ifadesinin değerini bulunuz.

5
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-1$

olduğuna göre $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ değerini varsa bulunuz.

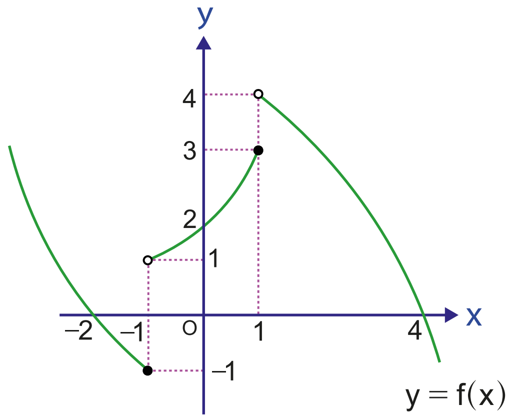
6
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=a+2$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=b-1$
- $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$

eşitliklerini sağlayan $f(x)$ fonksiyonu için $a\cdot b$ çarpımını bulunuz.

7
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)-2\cdot \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=3$
- $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)+2\cdot \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-4$

eşitliklerini sağlayan $f(x)$ fonksiyonu için $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ ve $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ limit değerleri birer gerçek sayı olduğuna göre bu limit değerlerini bulunuz.

8



Yukarıda $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Bu grafiğe göre aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ **ç)** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ **e)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

f) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ **g)** $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

h) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ **i)** $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$

j) $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$ **k)** $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

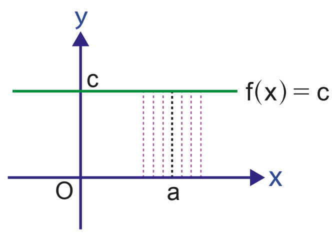
5.1.2. Limitin Özellikleri ve Uygulamaları

ÖZELLİK 1

$a, c \in \mathbb{R}$ ve $f(x) = c$ sabit fonksiyon olmak üzere

$$\lim_{x \to a} f(x) = c$$

olur.



ÖRNEK

Gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = 3$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre $\lim_{x \to -1} f(x) + \lim_{x \to 2} f(x)$ toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x) = 3$ sabit fonksiyonunun her noktadaki limit değeri 3 olacağından

$\lim_{x \to -1} f(x) = 3$ ve $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$ olur.

$\lim_{x \to -1} f(x) + \lim_{x \to 2} f(x) = 6$ bulunur.

ÖRNEK

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx - 2x + 3 - n$ fonksiyonu veriliyor. $f(x)$ fonksiyonunun her a gerçek sayısı için $\lim_{x \to a} f(x) = 2$ olduğuna göre $m \cdot n$ çarpımının değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x)$ fonksiyonunun her a gerçek sayısı için limiti 2 olduğundan $f(x)$ fonksiyonu sabit fonksiyondur. O hâlde $\forall x \in \mathbb{R}$ için $mx - 2x + 3 - n = 2$ olur.

$mx - 2x + 3 - n = 2 \Rightarrow \underbrace{(m-2)}_{0} \cdot x + \underbrace{3 - n}_{2} = 2$ olur. (Polinomların eşitliğinden)

$m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$

$3 - n = 2 \Rightarrow n = 1$ bulunur.

Bu durumda $m \cdot n = 2 \cdot 1 = 2$ olarak elde edilir.

ÖZELLİK 2

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

polinom fonksiyonu olmak üzere her c gerçek sayısı için

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

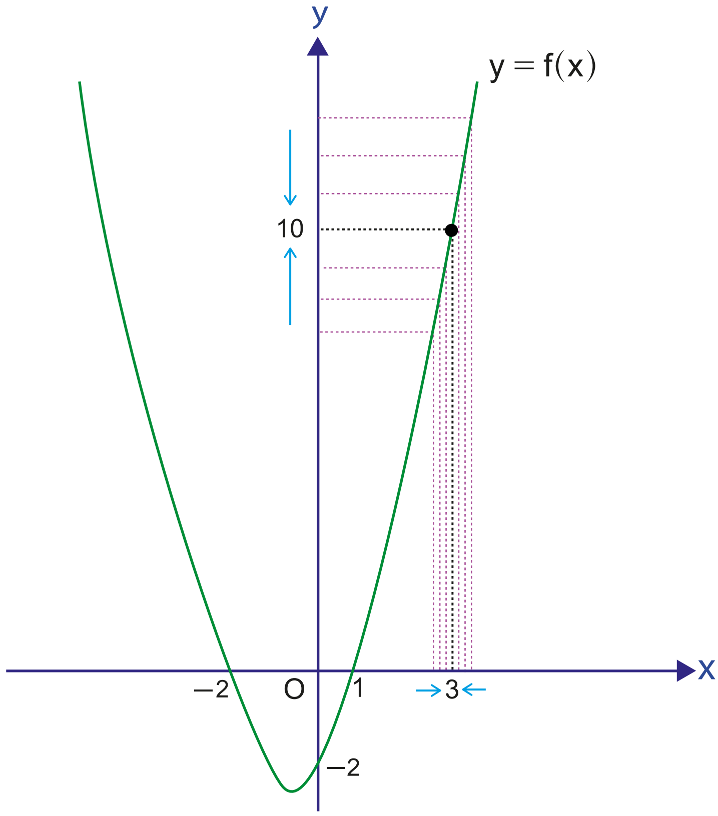
olur.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x-2$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ değerini bulunuz ve grafik üzerinde gösteriniz.

ÇÖZÜM

$f(x)$ bir polinom fonksiyonudur. Bu durumda fonksiyonun her noktasındaki limiti o noktadaki görüntüsüne eşit olacağından $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)=3^2+3-2=10$ bulunur.



Yukarıdaki $f(x)=x^2+x-2$ fonksiyonunun grafiği incelendiğinde x, 3 e hem sağdan hem de soldan yaklaşırken $f(x)$ in 10 a yaklaştığı görülmektedir.

ÖRNEK

Aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x\to -2}(x^2-1)$

b) $\lim\limits_{x\to 2}((x+1)^3-x^2+2x-1)$

c) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-x+1)$

ç) $\lim\limits_{x\to \sqrt[3]{2}-1}(x^3+3x^2+3x+2)$

ÇÖZÜM

Tüm seçeneklerde polinom fonksiyonların limit değerleri sorulduğundan istenen noktalardaki limit değerleri fonksiyonların o noktalardaki görüntülerine eşit olacaktır.

a) $\lim\limits_{x \to -2}(x^2 - 1) = (-2)^2 - 1$

$= 3$

b) $\lim\limits_{x \to 2}((x+1)^3 - x^2 + 2x - 1) = (2+1)^3 - 2^2 + 2 \cdot 2 - 1$

$= 27 - 4 + 4 - 1$

$= 26$

c) $\lim\limits_{x \to 0}(x^2 - x + 1) = 0^2 - 0 + 1$

$= 1$

ç) $\lim\limits_{x \to \sqrt[3]{2}-1}(x^3 + 3x^2 + 3x + 2) = \lim\limits_{x \to \sqrt[3]{2}-1}((x+1)^3 + 1)$

$= (\sqrt[3]{2} - 1 + 1)^3 + 1$

$= (\sqrt[3]{2})^3 + 1$

$= 2 + 1$

$= 3$

ÖZELLİK 3

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ve $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ limitleri mevcut olmak üzere

I. Toplama kuralı

$$\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

(İki fonksiyonun toplamının limiti, limitlerinin toplamıdır.)

II. Fark kuralı

$$\lim_{x \to a}(f(x) - g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$$

(İki fonksiyonun farkının limiti, limitlerinin farkıdır.)

III. Çarpma kuralı

$$\lim_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

(İki fonksiyonun çarpımının limiti, limitlerinin çarpımıdır.)

IV. Sabit ile çarpma kuralı

$$\lim_{x \to a}(k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \to a} f(x) \qquad (k \in \mathbb{R})$$

(Bir fonksiyonun bir sabitle çarpımının limiti, fonksiyonun limitinin bu sabitle çarpımıdır.)

V. Bölme kuralı

$g(x) \neq 0$ ve $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$ olmak üzere $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$

(İki fonksiyonun bölümünün limiti, bölen ile bölenin limitinin sıfır olmaması koşuluyla bu fonksiyonların limitlerinin bölümüdür.)

ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2-x+5$ ve $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=3x+1$

fonksiyonları veriliyor. Buna göre aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x\to2}(f(x)+g(x))$ **b)** $\lim\limits_{x\to-1}(f(x)-g(x))$ **c)** $\lim\limits_{x\to-2}(f(x)\cdot g(x))$

ç) $\lim\limits_{x\to3}(5\cdot f(x)+2\cdot g(x))$ **d)** $\lim\limits_{x\to1}(-2\cdot f(x))$ **e)** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

ÇÖZÜM

$f(x)$ ve $g(x)$ birer polinom fonksiyonu olduğundan $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ ve $\lim\limits_{x\to a}g(x)=g(a)$ olur.

a) $\lim\limits_{x\to2}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to2}f(x)+\lim\limits_{x\to2}g(x)=f(2)+g(2)$

$$=(2\cdot2^2-2+5)+(3\cdot2+1)$$
$$=11+7$$
$=18$ bulunur.

b) $\lim\limits_{x\to-1}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to-1}f(x)-\lim\limits_{x\to-1}g(x)=f(-1)-g(-1)$

$$=(2\cdot(-1)^2-(-1)+5)-(3\cdot(-1)+1)$$
$$=(2+1+5)-(-3+1)$$
$$=8-(-2)$$
$=10$ bulunur.

c) $\lim\limits_{x\to-2}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to-2}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to-2}g(x)=f(-2)\cdot g(-2)$

$$=(2\cdot(-2)^2-(-2)+5)\cdot(3\cdot(-2)+1)$$
$$=(8+2+5)\cdot(-6+1)$$
$$=15\cdot(-5)$$
$=-75$ bulunur.

ç) $\lim\limits_{x\to3}(5\cdot f(x)+2\cdot g(x))=5\cdot\lim\limits_{x\to3}f(x)+2\cdot\lim\limits_{x\to3}g(x)=5\cdot f(3)+2\cdot g(3)$

$$=5\cdot(2\cdot3^2-3+5)+2\cdot(3\cdot3+1)$$
$$=5\cdot(18-3+5)+2\cdot(9+1)$$
$$=5\cdot20+2\cdot10$$
$=120$ bulunur.

d) $\lim\limits_{x\to1}(-2\cdot f(x))=-2\cdot\lim\limits_{x\to1}f(x)=-2\cdot f(1)$

$$=-2\cdot(2\cdot1^2-1+5)$$
$$=-2\cdot(2-1+5)$$
$=-12$ bulunur.

e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to0}f(x)}{\lim\limits_{x\to0}g(x)}=\dfrac{f(0)}{g(0)}$

$$=\frac{(2\cdot0^2-0+5)}{(3\cdot0+1)}$$
$=5$ bulunur.

ÖZELLİK 4

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ limiti mevcut olmak üzere $n \in \mathbb{Z}$ için

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n \text{ olur.}$$

(Bir fonksiyonunun n. kuvvetinin limiti, limitinin n. kuvvetidir.)

ÖRNEK

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 24x + 144$ olduğuna göre $\lim\limits_{x\to 14} f^3(x)$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 14} f^3(x) &= \lim_{x\to 14} (x^2 - 24x + 144)^3 \\
&= \lim_{x\to 14} ((x-12)^2)^3 \\
&= \lim_{x\to 14} (x-12)^6 \\
&= \left[\lim_{x\to 14} (x-12)\right]^6 \\
&= (14-12)^6 \\
&= 64 \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

ÖZELLİK 5

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ limiti mevcut olmak üzere

I. n tek doğal sayı ise

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} \text{ olur.}$$

II. n çift doğal sayı ise

$$f(x) \geq 0 \text{ ve } \lim_{x\to a} f(x) \geq 0 \text{ ise } \lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$\lim\limits_{x\to 4} \left(\sqrt[4]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{-x^2 + x + 4}\right)$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 4} \left(\sqrt[4]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{-x^2 + x + 4}\right) &= \lim_{x\to 4} \sqrt[4]{x^3 + x^2 + 1} - \lim_{x\to 4} \sqrt[3]{-x^2 + x + 4} \\
&= \sqrt[4]{\lim_{x\to 4} (x^3 + x^2 + 1)} - \sqrt[3]{\lim_{x\to 4} (-x^2 + x + 4)} \\
&= \sqrt[4]{4^3 + 4^2 + 1} - \sqrt[3]{-4^2 + 4 + 4} \\
&= \sqrt[4]{81} - \sqrt[3]{-8} \\
&= 3 - (-2) \\
&= 5 \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

ÖZELLİK 6

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ limiti mevcut olmak üzere

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = \left|\lim_{x \to a} f(x)\right| \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x - 21$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre $\lim\limits_{x \to -2} |f(x)|$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}\lim_{x \to -2} |x^2 - 4x - 21| &= \left|\lim_{x \to -2} (x^2 - 4x - 21)\right| \\ &= |(-2)^2 - 4 \cdot (-2) - 21| \\ &= |4 + 8 - 21| \\ &= 9 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

ÖZELLİK 7

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ limiti mevcut olmak üzere, c pozitif gerçek sayısı için

$$\lim_{x \to a} \left(c^{f(x)}\right) = c^{\lim\limits_{x \to a} f(x)} \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$\lim\limits_{x \to 2} 3^{x^2 + x - 1}$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to 2} 3^{x^2 + x - 1} = 3^{\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + x - 1)} = 3^{2^2 + 2 - 1} = 3^5 = 243 \text{ bulunur.}$$

ÖZELLİK 8

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ limiti mevcut ve $f(x) > 0$ olmak üzere

$\lim\limits_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R}^+$, $b \neq 1$ ve $b \in \mathbb{R}^+$ ise $\lim\limits_{x \to a} (\log_b f(x)) = \log_b\left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right)$ olur.

ÖRNEK

$\lim\limits_{x \to 3} \left(\log_5 (x^3 - 2)\right)$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to 3} \left(\log_5 (x^3 - 2)\right) = \log_5\left(\lim_{x \to 3} (x^3 - 2)\right) = \log_5 (3^3 - 2) = \log_5 25 = 2 \text{ bulunur.}$$

ÖZELLİK 9

$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

- $\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a$
- $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$
- $\lim\limits_{x \to a} \tan x = \tan a \qquad \left(a \neq \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k,\ k \in \mathbb{Z}\right)$
- $\lim\limits_{x \to a} \cot x = \cot a \qquad (a \neq \pi \cdot k,\ k \in \mathbb{Z})$ olur.

ÖRNEK

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin x + 2\cot x}{3\cos x}$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x + 2\cot x}{3\cos x} = \frac{\sin\frac{\pi}{3} + 2\cot\frac{\pi}{3}}{3\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{3 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{7\sqrt{3}}{6}}{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{7\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{2}{3}$$

$$= \frac{7\sqrt{3}}{9} \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{12}} \dfrac{\sin x \cdot \cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{12}} \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{12}} \frac{\frac{\overbrace{2\sin x \cdot \cos x}^{\sin 2x}}{2}}{\underbrace{-(\cos^2 x - \sin^2 x)}_{\cos 2x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{12}} \frac{\sin 2x}{-2\cos 2x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{12}} \left(-\frac{1}{2} \cdot \tan 2x\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \tan\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{6} \quad \text{bulunur.}$$

Parçalı Tanımlı Fonksiyonların Limiti

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & , \ x<a \ \text{ ise} \\ c & , \ x=a \ \text{ ise} \\ h(x) & , \ x>a \ \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı fonksiyonlar için

✓ $x=a$ apsisli noktası dışında bir noktanın limiti araştırılırken o nokta fonksiyonun hangi parçasına aitse o parçada limit araştırılır.

$$\mathbf{m<a \text{ ise } \lim_{x\to m} f(x)=\lim_{x\to m} g(x)} \text{ olur.}$$

$$\mathbf{n>a \text{ ise } \lim_{x\to n} f(x)=\lim_{x\to n} h(x)} \text{ olur.}$$

✓ $x=a$ apsisli noktasında fonksiyonun kuralı değiştiğinden bu nokta kritik noktadır. Bu noktadaki limiti araştırılırken sağdan ve soldan limitleri incelenmelidir.

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^-} g(x)=\ell_1 \text{ ve } \lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^+} h(x)=\ell_2 \text{ olsun.}$$

$$\ell_1=\ell_2=\ell \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)=\ell \text{ olur.}$$

$$\ell_1\neq\ell_2 \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) \text{ yoktur.}$$

ÖRNEK

$$f(x)=\begin{cases} 2x-3 & , \ x\leq 2 \ \text{ ise} \\ x^2+1 & , \ x>2 \ \text{ ise} \end{cases}$$

olduğuna göre $\lim_{x\to 1} f(x)$, $\lim_{x\to 2} f(x)$ ve $\lim_{x\to 3} f(x)$ değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Burada $x=1$ ve $x=3$ apsisli noktaları kritik nokta olmadığından fonksiyonun bu noktalardaki limiti bu noktalardaki görüntüsüne eşittir.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=2\cdot 1-3=-1 \text{ bulunur.}$$

$$\lim_{x\to 3} f(x)=f(3)=3^2+1=10 \text{ bulunur.}$$

$x=2$ apsisli noktası fonksiyonun kritik noktası olduğundan sağdan ve soldan limitleri incelenmelidir.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(2x-3)=2\cdot 2-3=1$$

(Burada x, 2 ye soldan yaklaştığı için 2 den küçük değerler alır. Bu nedenle $f(x)=2x-3$ olarak seçilir.)

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x^2+1)=2^2+1=5$$

(Burada x, 2 ye sağdan yaklaştığı için 2 den büyük değerler alır. Bu nedenle $f(x)=x^2+1$ olarak seçilir.)

$\lim_{x\to 2^-} f(x)\neq\lim_{x\to 2^+} f(x)$ olduğundan $\lim_{x\to 2} f(x)$ yoktur.

ÖRNEK

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+x & , \; x<3 \; \text{ ise} \\ 1 & , \; x=3 \; \text{ ise} \\ 3x-1 & , \; x>3 \; \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre aşağıdaki limitlerin değerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$

ç) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ **d)** $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$ **e)** $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$

ÇÖZÜM

a) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (-x^2+x)$

$= -(-1)^2+(-1)$

$= -1-1$

$= -2$

b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (-x^2+x)$

$= -2^2+2$

$= -4+2$

$= -2$

c) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (-x^2+x)$

$= -3^2+3$

$= -9+3$

$= -6$

ç) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (3x-1)$

$= 3 \cdot 3 - 1$

$= 9-1$

$= 8$

d) $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} (3x-1)$

$= 3 \cdot 4 - 1$

$= 12-1$

$= 11$

e) $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = \lim\limits_{x \to 5} (3x-1)$

$= 3 \cdot 5 - 1$

$= 15-1$

$= 14$ bulunur.

ÖRNEK

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & , \; x<2 \; \text{ ise} \\ 1 & , \; x=2 \; \text{ ise} \\ 2x-n & , \; x>2 \; \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu veriliyor. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ mevcut olduğuna göre $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Fonksiyonun $x=2$ apsisli kritik noktasında limiti olduğundan bu noktadaki sağdan ve soldan limitleri birbirine eşit olmalıdır.

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2+1) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2x-n)$

$\Rightarrow 2^2+1 = 2 \cdot 2 - n$

$\Rightarrow 5 = 4-n$

$\Rightarrow n=-1$ olur.

$n=-1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (2x-(-1))$

$= 2 \cdot 3 + 1$

$= 7$ bulunur.

Limitte Belirsizlik Durumu

Gerçek sayılarda tanımlı ve çarpanlarına ayrılabilen $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları için $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ ve $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ olması durumunda $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limitinde $\frac{0}{0}$ belirsizliği ortaya çıkar.

Burada $x = a$ için $f(a) = 0$ ve $g(a) = 0$ olduğundan her iki fonksiyonun da $(x - a)$ biçiminde çarpanı vardır.

Belirsizlik durumunda pay ve payda çarpanlarına ayrılır. Pay ve paydadaki $(x - a)$ çarpanları sadeleştirilerek belirsizlik giderilir ve limit bulunur.

ÖRNEK

$f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ ifadesinin değerini bulunuz ve $f(x)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

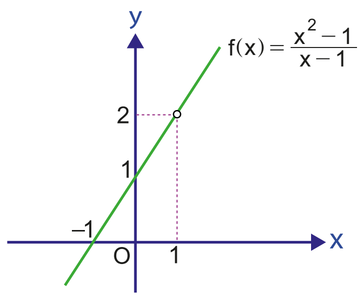
ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\cancel{(x - 1)} \cdot (x + 1)}{\cancel{x - 1}} = \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$ bulunur.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\
&= \frac{\cancel{(x - 1)}(x + 1)}{\cancel{x - 1}} \\
&= x + 1
\end{aligned}
$$

$y = x + 1$ doğrusunun grafiği $f(x)$ in $x = 1$ de tanımsız olduğu göz önüne alınarak yandaki gibi çizilir.



ÖRNEK

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - x - 2}$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - x - 2} = \frac{2 \cdot 2^2 - 8}{2^2 - 2 - 2} = \frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - x - 2} &= \lim_{x \to 2} \frac{2 \cdot (x^2 - 4)}{(x - 2) \cdot (x + 1)} = \lim_{x \to 2} \frac{2 \cdot \cancel{(x - 2)} \cdot (x + 2)}{\cancel{(x - 2)} \cdot (x + 1)} = \lim_{x \to 2} \frac{2 \cdot (x + 2)}{(x + 1)} \\
&= \frac{2 \cdot (2 + 2)}{(2 + 1)} = \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

bulunur.

ÖRNEK

$\lim\limits_{a \to b} \dfrac{a^2 - b^2}{b^3 - a^3}$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{a \to b} \dfrac{a^2 - b^2}{b^3 - a^3} = \dfrac{b^2 - b^2}{b^3 - b^3} = \dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{a \to b} \frac{a^2 - b^2}{b^3 - a^3} = \lim_{a \to b} \frac{\overset{-1}{\cancel{(a - b)}} \cdot (a + b)}{\cancel{(b - a)} \cdot (b^2 + ba + a^2)} = \lim_{a \to b} \frac{-1 \cdot (a + b)}{(b^2 + ba + a^2)}$$

$$= \frac{-1 \cdot (b + b)}{(b^2 + b \cdot b + b^2)}$$

$$= \frac{-2b}{3b^2}$$

$$= -\frac{2}{3b} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{x^4 - 16}$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{x^4 - 16} = \dfrac{2 - 2}{2^4 - 16} = \dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{x^4 - 16} = \lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{(x^2)^2 - 4^2} = \lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{x - 2}}{\cancel{(x - 2)}(x + 2)(x^2 + 4)}$$

$$= \frac{1}{4 \cdot 8}$$

$$= \frac{1}{32} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{5x^2 - 20}{x^2 - ax - 6} = 4$ eşitliğini sağlayan a değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{5x^2 - 20}{x^2 - ax - 6} = \dfrac{0}{-2 - 2a}$

$x = 2$ için verilen limit ifadesinin payı sıfır olur. Bu ifadenin paydasının sıfır olmaması durumunda limit değeri 0 olur. Verilen limitin değerinin 4 olması, ifadenin paydasının da sıfır olması durumunda ortaya çıkacak olan belirsizliğin giderilmesi ile mümkün olabilir. Buna göre $-2 - 2a = 0 \Rightarrow a = -1$ bulunur.

ÖRNEK

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - a}{3 - x} = -6$ olduğuna göre a değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x = 3$ için verilen limit ifadesinin paydası sıfır olur. Bu durumda limitin değerinin -6 olması ancak bu ifadenin payının da sıfır olması durumunda ortaya çıkacak olan belirsizliğin giderilmesi ile mümkün olabilir. Buna göre $x = 3$ için $x^2 - a = 0$ olmalıdır.

$x = 3 \Rightarrow 3^2 - a = 0$

$\Rightarrow a = 9$ bulunur.

ÖRNEK

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2 - ax + 2}{x^3 - 1}$ ifadesinin değeri bir gerçek sayı olduğuna göre bu limit değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - ax + 2}{x^3 - 1} = \frac{5 - a}{0}$$

$x = 1$ için verilen limit ifadesinin paydası sıfır olur. Bu durumda limitin değerinin bir gerçek sayı olması ancak bu ifadenin payının da sıfır olması durumunda ortaya çıkacak olan belirsizliğin giderilmesi ile mümkün olabilir. Buna göre $5 - a = 0 \Rightarrow a = 5$ olur. Bu durumda

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^3 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(3x - 2) \cdot \cancel{(x - 1)}}{\cancel{(x - 1)} \cdot (x^2 + x + 1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{3x - 2}{x^2 + x + 1}$$

$$= \frac{3 \cdot 1 - 2}{1^2 + 1 + 1} = \frac{1}{3} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$$\lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{x^6 - 8}{x^4 - a} = b$$

eşitliğinde b sıfırdan farklı bir gerçek sayı olduğuna göre b değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{x^6 - 8}{x^4 - a} = \frac{(\sqrt{2})^6 - 8}{(\sqrt{2})^4 - a} = \frac{0}{4 - a}$$

$x = \sqrt{2}$ için verilen limit ifadesinin payı sıfır olur. Bu durumda limitin değerinin 0 dan farklı bir gerçek sayı olması ancak bu ifadenin paydasının da sıfır olması durumunda ortaya çıkacak olan belirsizliğin giderilmesi ile mümkün olabilir. Buna göre $4 - a = 0 \Rightarrow a = 4$ bulunur. Bu durumda

$$\lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{x^6-8}{x^4-4} = \lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{\cancel{(x^2-2)}(x^4+2x^2+4)}{\cancel{(x^2-2)}(x^2+2)}$$

$$= \frac{(\sqrt{2})^4+2(\sqrt{2})^2+4}{(\sqrt{2})^2+2}$$

$$= \frac{4+4+4}{2+2}$$

$= 3$ bulunur.

ÖRNEK

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x^2-h)^2-x^4}{h^2-2h}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x^2-h)^2-x^4}{h^2-2h} = \dfrac{(x^2-0)^2-x^4}{0^2-2\cdot 0} = \dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x^2-h)^2-x^4}{h^2-2h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^4}-2hx^2+h^2-\cancel{x^4}}{h\cdot(h-2)}$$

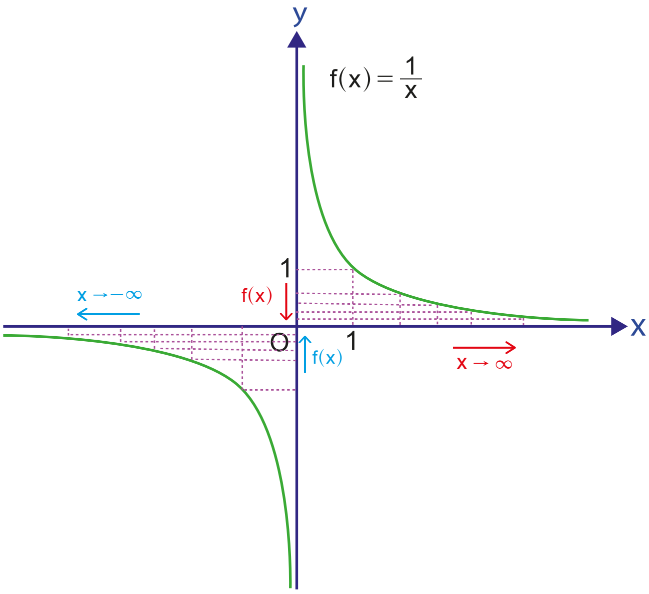
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\cancel{h}\cdot(2x^2-h)}{\cancel{h}\cdot(h-2)}$$

$$= \frac{-2x^2+0}{0-2}$$

$$= \frac{\cancel{-}2x^2}{\cancel{-}2}$$

$= x^2$ bulunur.

Uyarı



Yanda grafiği verilen $f(x)=\dfrac{1}{x}$ fonksiyonun grafiği incelendiğinde x in sonsuza giderken $f(x)$ in 0 a yaklaştığı görülmektedir. Benzer şekilde x in eksi sonsuza giderken $f(x)$ in 0 a yaklaştığı görülmektedir. Bu durumda

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

olur.

ÖRNEK

$$f(x)=\begin{cases} x^2-ax+2 & , \ x<2 \ \text{ ise} \\ (ax-1)^2-3a & , \ x\geq 2 \ \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonunun yalnız bir x değeri için limiti yoktur. Buna göre a nın alamayacağı değerlerin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x)$ parçalı fonksiyonunun $x=2$ dışında her x değeri için limiti vardır. O hâlde fonksiyonun $x=2$ için limiti yoktur. Bu durumda fonksiyonun $x=2$ için sağdan ve soldan limitleri birbirinden farklı olmalıdır. Buna göre

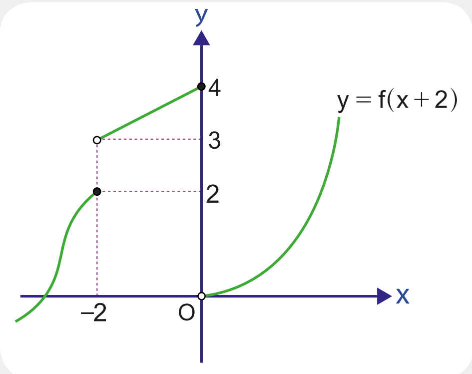
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow 2^2-a\cdot 2+2 \neq (a\cdot 2-1)^2-3a$$

$$\Rightarrow 4-2a+2 \neq 4a^2-7a+1$$

$$\Rightarrow 4a^2-5a-5 \neq 0 \text{ olur.}$$

a sayısı $4a^2-5a-5=0$ denkleminin kökleri olamayacağından a nın alamayacağı değerler toplamı $4a^2-5a-5=0$ denkleminin kökler toplamı olan $\frac{5}{4}$ olur.

ÖRNEK



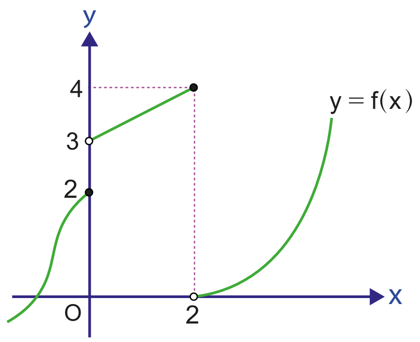
Yanda $y=f(x+2)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ **b)** $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

c) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ **ç)** $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

ÇÖZÜM

$f(x+2)$ fonksiyonunun grafiğini x ekseni boyunca sağa doğru 2 birim öteleyerek $f(x)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibi elde edilir. Bu grafiğe göre



a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)=2$

b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)=3$

c) $\lim_{x\to 2^-} f(x)=4$

ç) $\lim_{x\to 2^+} f(x)=0$ olarak bulunur.

ÖRNEK

- a ve b pozitif gerçek sayılardır.
- $f(x)=\begin{cases} a\cdot(x+2)-b-1 , & x<0 \quad \text{ise} \\ \log_2(x^2+4) , & 0\le x<2 \quad \text{ise} \\ \sqrt{ax^2+b} , & 2\le x \quad \text{ise} \end{cases}$
- $f(x)$ fonksiyonunun her x gerçek sayısı için limiti vardır.

Buna göre a ve b sayılarını bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x)$ fonksiyonunun her x gerçek sayısı için limiti olduğuna göre $x=0$ ve $x=2$ kritik noktalarında da limiti vardır.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$
$$a\cdot(0+2)-b-1=\log_2(0^2+4)$$
$$2a-b-1=\log_2 4$$
$$2a-b-1=2$$
$$2a-b=3 \text{ ....(1) olur.}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$$
$$\log_2(2^2+4)=\sqrt{a\cdot 2^2+b}$$
$$\log_2 8=\sqrt{4a+b}$$
$$3=\sqrt{4a+b}$$
$$9=4a+b \text{ ....(2) olur.}$$

(1) ve (2) denklemleri ortak çözülürse

$$\begin{array}{r} 2a-\cancel{b}=3 \\ +\ 4a+\cancel{b}=9 \\ \hline 6a=12 \Rightarrow a=2 \text{ olur.} \end{array}$$

$$a=2 \Rightarrow 4\cdot 2+b=9$$
$$b=1 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

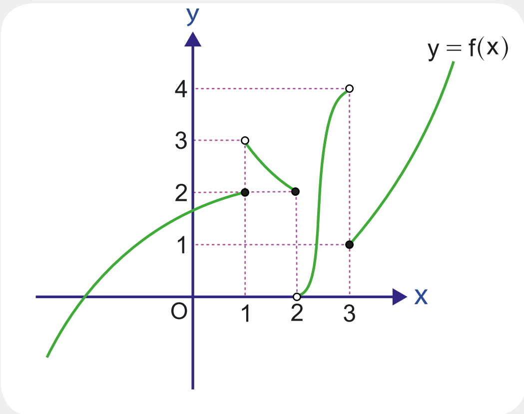
$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^4-x^2+x+1}{x+1}$ ifadesinin değerini bulunuz.

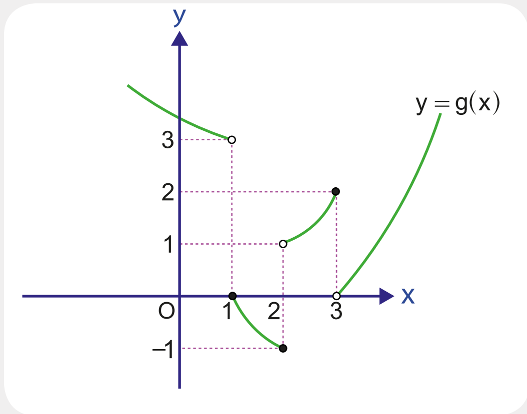
ÇÖZÜM

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^4-x^2+x+1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(-1)^4-(-1)^2+(-1)+1}{-1+1} = \frac{0}{0} \text{ belirsizlik durumu vardır.}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1} \frac{x^4-x^2+x+1}{x+1} &= \lim_{x\to -1} \frac{x^2\cdot(x^2-1)+x+1}{x+1} \\ &= \lim_{x\to -1} \frac{x^2\cdot(x-1)\cdot(x+1)+(x+1)}{x+1} \\ &= \lim_{x\to -1} \frac{\cancel{(x+1)}\cdot\left(x^2\cdot(x-1)+1\right)}{\cancel{(x+1)}} \\ &= \lim_{x\to -1} \left(x^2\cdot(x-1)+1\right) \\ &= (-1)^2\cdot(-1-1)+1 \\ &= 1\cdot(-2)+1 \\ &= -1 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK





Yukarıda $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Buna göre aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x\to 1^-}\left[2f(x)-\dfrac{g(x)}{3}\right]$

b) $\lim\limits_{x\to 1^+}[f(x)\cdot g(x)]$

c) $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(f^2(x)-\sqrt[3]{g(x)}\right)$

ç) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)}{\sqrt{g(x)}}$

d) $\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\dfrac{1}{f(x)}+g(x)\right)$

e) $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

ÇÖZÜM

a)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-}\left[2f(x)-\frac{g(x)}{3}\right] &= 2\cdot\lim_{x\to 1^-} f(x)-\frac{\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)}{3}\\ &= 2\cdot 2-\frac{3}{3}\\ &= 4-1\\ &= 3\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+}[f(x)\cdot g(x)] &= \lim_{x\to 1^+} f(x)\cdot\lim_{x\to 1^+} g(x)\\ &= 3\cdot 0\\ &= 0\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-}\left[f^2(x)-\sqrt[3]{g(x)}\right] &= \lim_{x\to 2^-}\left[f^2(x)\right]-\lim_{x\to 2^-}\left[\sqrt[3]{g(x)}\right]\\ &= \left[\lim_{x\to 2^-} f(x)\right]^2-\sqrt[3]{\lim_{x\to 2^-} g(x)}\\ &= 2^2-\sqrt[3]{-1}\\ &= 4-(-1)\\ &= 5\end{aligned}$$

ç)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} &= \frac{\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)}{\sqrt{\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)}}\\ &= \lim_{x\to 2^+}\frac{0}{\sqrt{1}}\\ &= \lim_{x\to 2^+} 0\\ &= 0\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{1}{f(x)}+g(x)\right) &= \lim_{x\to 3^+}\frac{1}{f(x)}+\lim_{x\to 3^+} g(x)\\ &= \frac{1}{\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)}+\lim_{x\to 3^+} g(x)\\ &= \frac{1}{1}+0\\ &= 1\end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)}{\lim\limits_{x\to 3^-} g(x)}\\ &= \frac{4}{2}\\ &= 2 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Alıştırmalar

1 $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+x+1)$

ifadesinin değerini bulunuz.

2 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$

ifadesinin değerini bulunuz.

3 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+ax-a+2)=3$

olduğuna göre a değerini bulunuz.

4 $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+ax-3b)=-6$

olduğuna göre a nın b türünden eşitini bulunuz.

5 $\lim\limits_{x\to a}(x^2-x+2)=8$

olduğuna göre a nın alabileceği değerler toplamını bulunuz.

6 $f(x)=\begin{cases} x^2+x & , x<2 \quad \text{ise} \\ |x-x^3| & , x\geq 2 \quad \text{ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlanan $f(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ **ç)** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ **e)** $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

7 $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+2 & , \quad x<1 & \text{ise} \\ 2ax & , \quad 1\leq x<2 & \text{ise} \\ x^2-bx-a-1 & , \quad 2\leq x & \text{ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlanan $f(x)$ fonksiyonunun her x gerçek sayısı için limiti olduğuna göre $a+b$ toplamını bulunuz.

8 $a=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{24}} \sin x$

$b=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{24}} \cos x$

$c=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{12}} \cos x$

olduğuna göre $a\cdot b\cdot c$ çarpımının değerini bulunuz.

9 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-12}{x-2}$

ifadesinin değerini bulunuz.

10 $\dfrac{\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{8}}(\sin x+\cos x)}{\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{8}}(\sin x-\cos x)}$

ifadesinin değerini bulunuz.

11 $\lim\limits_{x\to \sqrt{e}}\dfrac{x^4-e^2}{x^2-\ln e^e}$

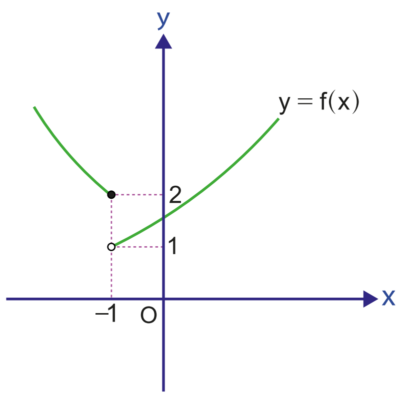
ifadesinin değerini bulunuz.

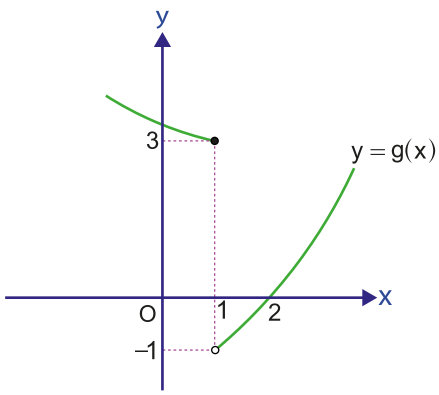
12 $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{2x^2-x-6}$

ifadesinin değerini bulunuz.

13 $\lim\limits_{x \to t} \dfrac{t^6 - x^6}{x - t}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

14





Yukarıda $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Buna göre aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x \to -1^-} (f(x) - g(-x))$

b) $\lim\limits_{x \to 1^+} (f(-x) + g(x))$

c) $\lim\limits_{x \to 2^-} (f(1 - x) + g(x - 1))$

15 $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & , \ x < 1 \ \text{ise} \\ 3x + 1 & , \ x \geq 1 \ \text{ise} \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} 2x - 5 & , \quad x < 0 \quad \text{ise} \\ x - 1 & , \ 0 \leq x < 4 \ \text{ise} \\ x^2 + 1 & , \quad 4 \leq x \quad \text{ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim\limits_{x \to 1^+} [f(x) + g(x)]$

b) $\lim\limits_{x \to 4^-} (f(x) \cdot g(x))$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \left(2f^2(x) - 3 \cdot \sqrt{\dfrac{g(x)}{2}}\right)$

ç) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

16
- $\lim\limits_{x \to 1} f(x - 3) = 5$
- $\lim\limits_{x \to -1} f(2x + 1) = -2$
- $\lim\limits_{x \to 2} f(x^2 - 1) = 3$

eşitliklerini sağlayan f fonksiyonu için aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

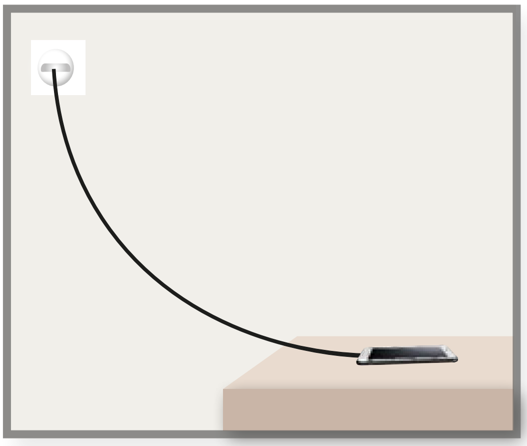
a) $\lim\limits_{x \to 2} f(x + 1)$

b) $\lim\limits_{x \to -2} f(x + 1)$

c) $\lim\limits_{x \to -1} f(x - 1)$

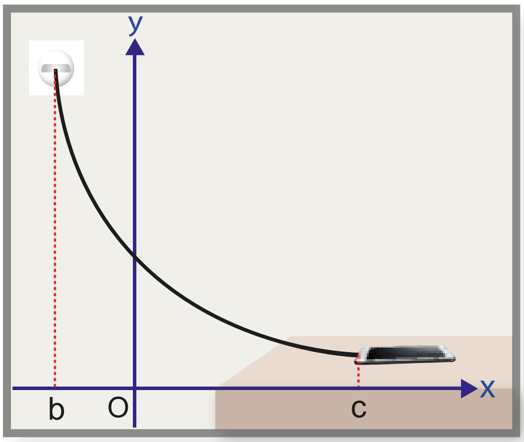
ç) $\lim\limits_{x \to -1} f(x^2 - 2x)$

5.1.3. Bir Fonksiyonun Bir Noktadaki Sürekliliği



Görsel 5.2

Şekilde bir prizde şarja takılı bir cep telefonu görülmektedir. Bu telefonun şarj olabilmesi için elektrik akımının sürekliliği sağlanmalıdır.



Görsel 5.3

Bu cep telefonunun şarj kablosu dik koordinat sisteminde modellenerek $[b, c]$ nda bir fonksiyon grafiği elde edilmiştir. $[b, c]$ nda tanımlı olan bu fonksiyonun grafiğinde de bir süreklilik vardır.

$A \subseteq \mathbb{R}$ ve $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x)$ bir fonksiyon olsun. $a \in A$ olmak üzere

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

eşitliği sağlanıyorsa f fonksiyonu $x = a$ noktasında **süreklidir** denir.

Bir başka ifadeyle $f(x)$ fonksiyonunun bir $x = a$ apsisli noktasındaki limitinin değeri fonksiyonun o noktadaki görüntüsüne eşit oluyorsa $f(x)$ fonksiyonu $x = a$ noktasında süreklidir.

Eğer f fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekli ise f fonksiyonu A kümesinde süreklidir denir.

Uyarı

Süreklilik tanımına dikkat edilirse süreklilik araştırılan $x = a$ değeri fonksiyonun tanım kümesi olan A kümesinin bir elemanıdır. Buna göre bir fonksiyonun tanım kümesindeki bir noktada sürekliliği araştırılır. Süreklilik araştırılan noktada fonksiyon sürekli değilse fonksiyona bu noktada süreksizdir denir.

Uyarı

Polinom fonksiyonlarının en geniş tanım kümesi gerçek sayılar kümesi ve her noktadaki limiti o noktadaki görüntüsüne eşit olduğu için polinom fonksiyonlar her x gerçek sayısı için süreklidir.

ÖRNEK

$f(x)=x^2$, $g(x)=x^5-x^2+1$ ve $h(x)=2x^3+3x^2-5x-1$ fonksiyonlarının sürekli olduğu <u>en geniş</u> kümeleri bulunuz.

ÇÖZÜM

f , g ve h fonksiyonları polinom fonksiyonlar olduğundan her x gerçek sayısı için tanımlı ve süreklidir. Buna göre her üç fonksiyonun da sürekli oldukları en geniş küme $\mathbb{R}$ dir.

Uyarı

$f(x)$ ve $g(x)$ birer polinom fonksiyonu olmak üzere

$$\mathbf{h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}} \qquad (g(x)\neq 0)$$

biçimindeki $h(x)$ fonksiyonları tanımlı oldukları en geniş kümede süreklidir.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x-2}$ fonksiyonunun sürekli olduğu <u>en geniş</u> kümeyi bulunuz.

ÇÖZÜM

f fonksiyonunun pay ve paydasındaki ifadeler polinom fonksiyonlar olduğundan f fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş küme, fonksiyonun en geniş tanım kümesi olan $\mathbb{R}-\{2\}$ dir.

ÖRNEK

$f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-3x+3}$ fonksiyonunun sürekli olduğu <u>en geniş</u> kümeyi bulunuz.

ÇÖZÜM

f fonksiyonunun pay ve paydasındaki ifadeler polinom fonksiyonlar olduğundan f fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş küme, fonksiyonun en geniş tanım kümesi olacaktır.

f fonksiyonunun paydasından elde edilen $x^2-3x+3=0$ denkleminin diskriminantı negatif olduğundan fonksiyonu tanımsız yapan x değeri yoktur. Bu durumda f fonksiyonunun en geniş tanım kümesi olan $\mathbb{R}$ kümesi aynı zamanda f fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş kümedir.

ÖRNEK

$$f(x)=\frac{x-1}{4x^2-mx+9}$$

fonksiyonu her x gerçek sayısı için sürekli olduğuna göre m nin alabileceği kaç farklı tam sayı değeri olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

f fonksiyonunun pay ve paydasındaki ifadeler polinom fonksiyonlar olduğundan f fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş küme, fonksiyonun en geniş tanım kümesi olacaktır. f fonksiyonu, her x gerçek sayısı için sürekli olduğundan her x gerçek sayısı için tanımlı da olmalıdır. Bu durum $f(x)$ in paydasından elde edilen $4x^2-mx+9=0$ denkleminin diskriminantının negatif olması hâlinde gerçekleşir.

$$\begin{aligned}\Delta<0 &\Rightarrow (-m)^2-4\cdot4\cdot9<0\\ &\Rightarrow m^2-144<0\\ &\Rightarrow m^2<144\\ &\Rightarrow |m|<12\\ &\Rightarrow -12<m<12 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Bu durumda m nin alabileceği 23 farklı tam sayı değeri vardır.

ÖRNEK

$a\neq 0$ olmak üzere

$$f(x)=\frac{x^2-mx+2n}{ax^2-2x+9}$$

fonksiyonunun sürekli olduğu <u>en geniş</u> küme $\mathbb{R}-\{k\}$ olduğuna göre k gerçek sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

f fonksiyonunun pay ve paydasındaki ifadeler polinom fonksiyonlar olduğundan f fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş kümede bulunmayan k gerçek sayısı, verilen fonksiyonun tanım kümesinde de bulunmaz. Bu durumda fonksiyon sadece k gerçek sayısı için tanımsız olduğundan $f(x)$ in paydasından elde edilen $ax^2-2x+9=0$ denkleminin diskriminantı 0 ve bu denklemin kökü k olmalıdır.

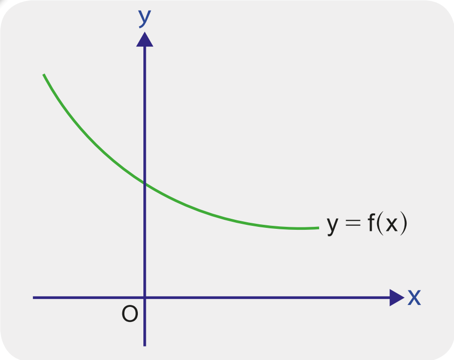
$$\begin{aligned}\Delta=0 &\Rightarrow (-2)^2-4\cdot a\cdot 9=0\\ &\Rightarrow 4-36a=0\\ &\Rightarrow a=\frac{1}{9} \text{ olur.}\end{aligned}$$

$a=\frac{1}{9}$ için denklem $\frac{1}{9}x^2-2x+9=0 \Rightarrow x^2-18x+81=0$ olur.

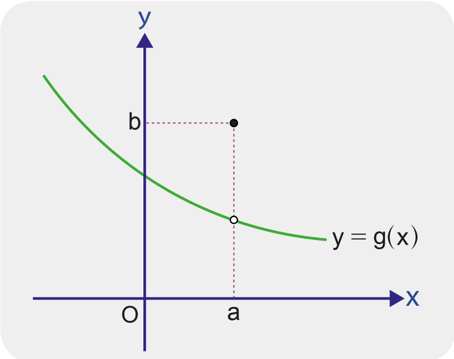
Buna göre k gerçek sayısı bu denklemin kökü olacağından

$$\begin{aligned}x^2-18x+81=0 &\Rightarrow k^2-18k+81=0\\ &\Rightarrow (k-9)^2=0\\ &\Rightarrow k=9 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

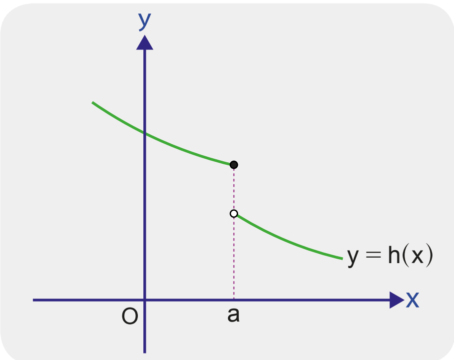
Bir Fonksiyonun Grafiği Üzerinde Sürekli ve Süreksiz Olduğu Noktalar



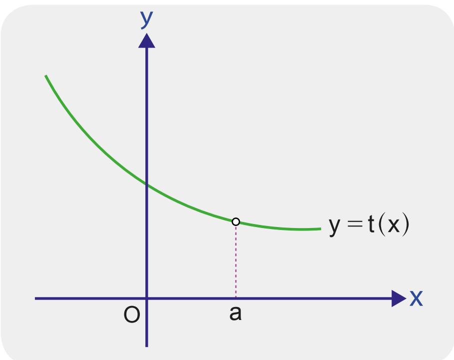
Yanda grafiği verilen f fonksiyonu her x gerçek sayısı için tanımlı ve her noktadaki limiti fonksiyonun o noktadaki görüntüsüne eşit olacağından fonksiyon her x gerçek sayısı için süreklidir. Bu durumda fonksiyonun sürekli olduğu en geniş küme $\mathbb{R}$ olur.



Yanda grafiği verilen g fonksiyonu $x = a$ apsisli noktasında tanımlı ve limite sahip olmasına rağmen bu noktadaki limiti görüntüsüne eşit olmadığından g fonksiyonu $x = a$ apsisli noktasında sürekli değildir. Bu durumda fonksiyonun sürekli olduğu en geniş küme $\mathbb{R} - \{\mathbf{a}\}$ olur.

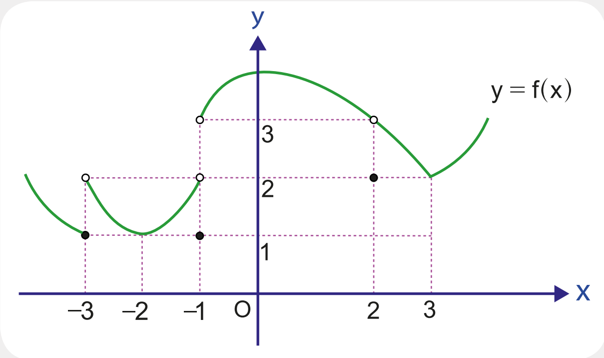


Yanda grafiği verilen h fonksiyonu $x = a$ apsisli noktasında tanımlı olmasına rağmen bu noktada limiti olmadığından fonksiyon $x = a$ apsisli noktasında sürekli değildir. Bu durumda fonksiyonun sürekli olduğu en geniş küme $\mathbb{R} - \{\mathbf{a}\}$ olur.



Yanda grafiği verilen t fonksiyonu $x = a$ apsisli noktada tanımlı olmadığından a değeri fonksiyonun sürekli olduğu en geniş kümenin bir elemanı olamaz. Bu durumda fonksiyonun sürekli olduğu en geniş küme $\mathbb{R} - \{\mathbf{a}\}$ olur.

ÖRNEK



Yanda $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $f(x)$ fonksiyonunun hangi x gerçek sayıları için sürekli olmadığını bulunuz.

ÇÖZÜM

- $x=-3$ apsisli noktada fonksiyonun limiti olmadığından sürekli değildir.
- $x=-1$ apsisli noktada fonksiyonun limiti olmadığından sürekli değildir.
- $x=2$ apsisli noktada fonksiyonun limiti görüntüsüne eşit olmadığından sürekli değildir.

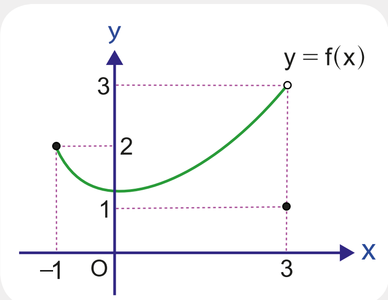
$A\subseteq\mathbb{R}$ ve $f:A\to\mathbb{R}$, $f(x)$ bir fonksiyon olsun. $a\in A$ olmak üzere

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ oluyorsa f fonksiyonu $x=a$ noktasında **sağdan süreklidir** denir.

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$ oluyorsa f fonksiyonu $x=a$ noktasında **soldan süreklidir** denir.

$[a,b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon (a,b) aralığında sürekli, $x=a$ apsisli noktasında sağdan sürekli ve $x=b$ apsisli noktasında soldan sürekli ise f fonksiyonu $[a,b]$ nda süreklidir.

ÖRNEK



Yanda $[-1,3]$ nda tanımlı $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. f fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş aralığı bulunuz.

ÇÖZÜM

f fonksiyonunun grafiği incelendiğinde $(-1,3)$ nda sürekli olduğu görülür.

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)=2$ olduğundan f fonksiyonu $x=-1$ apsisli noktasında sağdan süreklidir.

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=3$ ve $f(3)=1$ olduğundan f fonksiyonu $x=3$ apsisli noktasında soldan sürekli değildir.

Bu durumda f fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş aralık $[-1,3)$ bulunur.

ÖRNEK

$$f(x)=\begin{cases} -x^3-2 & , \quad x<-2 \quad \text{ise} \\ 5 & , \quad x=-2 \quad \text{ise} \\ x^2+2 & , \quad x>-2 \quad \text{ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonunun $x=-2$ apsisli noktasında sürekli olup olmadığını bulunuz.

ÇÖZÜM

- $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\left(-x^3-2\right)$
  $=6$ olur.
- $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}\left(x^2+2\right)$
  $=6$ olur.

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=6$ olduğundan $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=6$ olur.

Ancak $f(-2)=5$ olduğundan $\lim\limits_{x\to -2} f(x)\neq f(-2)$ olur. O hâlde f fonksiyonunun $x=-2$ apsisli noktasındaki limiti, fonksiyonun o noktadaki görüntüsüne eşit olmadığından f fonksiyonu $x=-2$ noktasında sürekli değildir.

ÖRNEK

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+2 & , \quad x<1 \quad \text{ise} \\ 4 & , \quad x=1 \quad \text{ise} \\ 5x-1 & , \quad x>1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonunun $x=1$ apsisli noktasında sürekli olup olmadığını bulunuz.

ÇÖZÜM

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+x+2\right)$
  $=4$ olur.
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(5x-1)$
  $=4$ olur.
- $f(1)=4$ olur.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=4$ bulunur.

O hâlde f fonksiyonunun $x=1$ apsisli noktasındaki limiti fonksiyonun o noktadaki görüntüsüne eşit olduğundan fonksiyon bu noktada süreklidir.

ÖRNEK

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a & , \quad x<3 \quad \text{ise} \\ x^2-3a+1 & , \quad x\geq 3 \quad \text{ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu $x=3$ apsisli noktasında sürekli olduğuna göre a değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

f fonksiyonu $x=3$ apsisli noktasında sürekli olduğuna göre bu noktadaki sağdan limiti, soldan limiti ve görüntüsü eşit olmalıdır.

- $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(2x+a)$
  $=6+a$ olur.
- $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\left(x^2-3a+1\right)$
  $=10-3a$ olur.
- $f(3)=10-3a$ olur.

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = f(3)$ olması için $6 + a = 10 - 3a$ olmalıdır.

$$6 + a = 10 - 3a \Rightarrow 4a = 4$$
$$\Rightarrow a = 1 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$$f(x) = \begin{cases} ax - 2 & , \ x < 4 \quad \text{ise} \\ x^2 + 2a & , \ x \geq 4 \quad \text{ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu $x = 4$ apsisli noktasında sürekli değildir. Buna göre a nın alamayacağı değeri bulunuz.

ÇÖZÜM

- $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} (ax - 2)$
  $= 4a - 2$ olur.
- $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} (x^2 + 2a)$
  $= 16 + 2a$ olur.
- $f(4) = 16 + 2a$

Bu durumda f fonksiyonu $x = 4$ apsisli noktasında sürekli değilse $4a - 2 \neq 16 + 2a$ olmalıdır.

$$4a - 2 \neq 16 + 2a \Rightarrow 2a \neq 18$$
$$\Rightarrow a \neq 9$$

O hâlde a sayısı 9 değerini alamaz.

ÖRNEK

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2 & , \quad x < -1 & \text{ise} \\ x^2 + bx & , \ -1 \leq x < 2 & \text{ise} \\ 2ax - b & , \quad 2 \leq x & \text{ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu $x = -1$ ve $x = 2$ apsisli noktalarında sürekli olduğuna göre a ve b değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x)$ fonksiyonu, $x = -1$ ve $x = 2$ apsisli noktalarında sürekli olduğundan

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = f(-1)$ ve $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$ olmalıdır.

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) \Rightarrow \lim_{x \to -1^-} (ax + 2) = \lim_{x \to -1^+} (x^2 + bx)$$
$$-a + 2 = 1 - b$$
$$b - a = -1 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \text{ olur.}$$

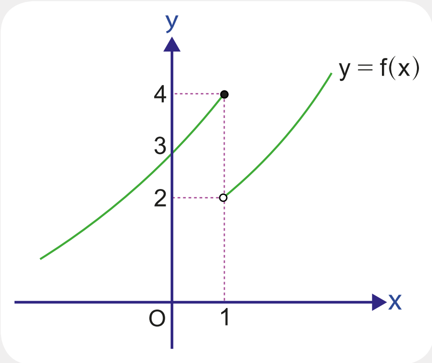
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow \lim_{x \to 2^-} (x^2 + bx) = \lim_{x \to 2^+} (2ax - b)$$
$$4 + 2b = 4a - b$$
$$4a - 3b = 4 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \text{ olur.}$$

(1) ve (2) denklemleri ortak çözülürse

$$\begin{array}{rl} 3/ & b - a = -1 \\ + & 4a - 3b = 4 \\ \hline & a = 1 \text{ bulunur.} \end{array}$$

$$a = 1 \Rightarrow b - a = -1$$
$$\Rightarrow b - 1 = -1$$
$$\Rightarrow b = 0 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK



Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $(f+g)(x)$ fonksiyonu $x = 1$ apsisli noktasında sürekli olduğuna göre $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) - \lim\limits_{x\to 1^-} g(x)$ farkını bulunuz.

ÇÖZÜM

$(f+g)(x)$ fonksiyonu $x = 1$ apsisli noktada sürekli olduğundan

$\lim\limits_{x\to 1^+} (f+g)(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (f+g)(x)$ olmalıdır. O hâlde

$$\lim_{x\to 1^+} (f+g)(x) = \lim_{x\to 1^-} (f+g)(x) \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x) + \lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) + \lim_{x\to 1^-} g(x)$$

$$\Rightarrow 2 + \lim_{x\to 1^+} g(x) = 4 + \lim_{x\to 1^-} g(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} g(x) - \lim_{x\to 1^-} g(x) = 2 \text{ bulunur.}$$

Limitin Tarihsel Gelişimi

İlk kez 14. yüzyılda kullanılan "limit" kelimesi Latin kökenlidir ve Latincede "sınır veya sınırlılık" anlamına gelmektedir. Matematikte süreklilik, türev ve integral kavramlarının temelinde yer alan matematikteki ana kavramlardan biridir. Ayrıca fonksiyonların bir nokta civarındaki davranışlarını incelerken en kullanışlı araçtır. Jean le Rond d'Alembert (Jon lö Run Dölamber) (1717-1783) limit kavramını ilk defa matematiksel temellere dayandırmıştır. Ancak limit kavramının ilk sağlam tanımı Augustin Louis Cauchy (Ogüstin Luis Koşi) tarafından yapılmıştır. Limitin günümüzde kullanılan matematiksel tanımı ise Karl Weierstrass (Karl Vayırştras) (1815-1897) tarafından oluşturulmuştur.

(Argün, Arıkan, Bulut ve Hacıoğlu, 2014)

Salih Zeki (1864-1921)

1864'te İstanbul'da dünyaya gelen Salih Zeki, lise yıllarında bir diferansiyel ifadenin integralini çözerek sınıf arkadaşlarının takdirini kazanmıştır. Arkadaşları tarafından kendisine "Zeki" unvanı verilerek Salih Zeki adıyla anılmaya başlanmıştır. 1921 yılında hayatını kaybeden Salih Zeki, hayatı boyunca matematik alanında birçok çalışma yapmıştır. Asâr-ı Bâkiye (Yüzyıllardan Geriye Kalan) ve Kamus-u Riyaziyat (Matematik Ansiklopedisi) eserlerinde limit ve süreklilik ile ilgili yapılan çalışmalara yer verilmiştir.

(Oral, 2003-I)

Görsel 5.4

ÖRNEK

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2 & , \quad 2 \le x \quad \text{ise} \\ x+3 & , \quad 2 < x \le 3 \quad \text{ise} \\ x^2-2 & , \quad 3 < x \quad \text{ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun grafiğini Dinamik Geometri ve Matematik Yazılımı programında çiziniz ve fonksiyonun sürekliliğini inceleyiniz.

ÇÖZÜM

Dinamik Geometri ve Matematik Yazılımı programını açınız.

1. Adım: Giriş çubuğuna Eğer yazınız açılacak pencerede
Eğer (<şart>,<Doğruysa>,<Doğru Değilse>) ifadesini tıklayınız ve
Eğer $(\mathbf{2 < x <= 3, x+3, x^2-2})$ biçiminde yazarak enter tuşuna basınız.
Grafik ekranda belirecektir.

2. Adım: Giriş çubuğunda, $(\mathbf{2, f(2)})$ yazarak enter tuşuna basınız.
Giriş çubuğunda, $(\mathbf{3, f(3)})$ yazarak enter tuşuna basınız.
Giriş çubuğunda, $(\mathbf{2,5})$ yazarak enter tuşuna basınız.
Giriş çubuğunda, $(\mathbf{3,7})$ yazarak enter tuşuna basınız.
Bu işlemler yapıldığında fonksiyonun kritik noktaları ekranda belirecektir.

3. Adım: $(2,5)$ noktası dâhil olmadığından grafikte bu noktanın üzerine sağ tıklayarak ayarlar butonunu ve açılan pencerede sitil butonunu seçip içi boş olarak belirleyiniz. Aynı işlemi $(3,7)$ noktası için de yapınız.

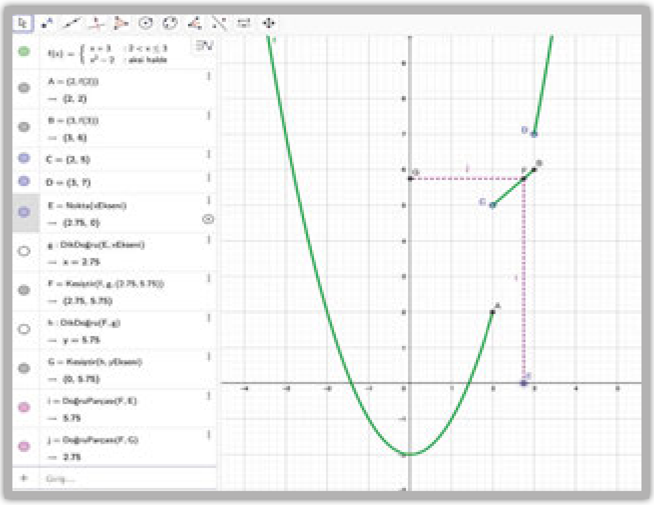
4. Adım: butonuna tıklayarak x ekseni üzerinde bir nokta belirleyiniz.

5. Adım: butonuna tıklayarak x ekseni üzerinde seçilen noktaya ve x eksenine tıklayınız. Böylece x eksenine dik bir doğru çizilmiş olur. butonuna tıklayarak çizilen dik doğrunun fonksiyonu kestiği noktayı işaretleyiniz.

6. Adım: Benzer şekilde butonuna tıklayarak bir önceki adımda çizilen doğruya fonksiyonu kestiği noktada dik olan başka bir doğru çiziniz.

7. Adım: butonuna tıklayarak son çizilen doğrunun y eksenini kestiği noktayı işaretleyiniz.

8. Adım: butonuna tıklayarak fonksiyon üzerindeki noktadan eksen üzerindeki noktalara iki tane doğru parçası çiziniz. Doğruları, sol tarafında bulunan ● simgelerine tıklayarak görünmez yapınız ve sol üstteki ok simgesine tıklayınız.



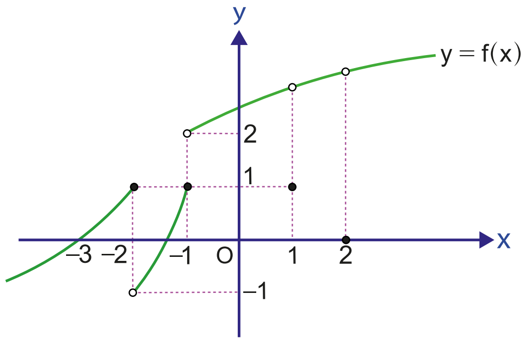
Elde edilen grafikte,

- x ekseni üzerindeki nokta 2 ye sağdan ve soldan yaklaştırıldığında $f(x)$ in farklı değerlere yaklaştığı gözlenir. Bu durumda fonksiyonun $x = 2$ apsisli noktasında limiti yoktur. Buna göre fonksiyon bu noktada sürekli değildir.

- x ekseni üzerindeki nokta 3 e sağdan ve soldan yaklaştırıldığında $f(x)$ in farklı değerlere yaklaştığı gözlenir. Bu durumda fonksiyonun $x = 3$ apsisli noktasında limiti yoktur. Buna göre fonksiyon bu noktada da sürekli değildir.

Alıştırmalar

1



Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre

a) $f(x)$ fonksiyonunun hangi x değerleri için sürekli olmadığını bulunuz.

b) $f(x)$ fonksiyonunun limitinin olduğu fakat sürekli olmadığı x değerlerini bulunuz.

2 $f(x) = \dfrac{2x - 1}{(x-1)(x^2 - 3x - 4)}$

fonksiyonu veriliyor. Buna göre $f(x)$ fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş kümede hangi x değerleri bulunmaz?

3 $f(x) = \dfrac{x + 2}{ax^2 - 3x + 2}$

fonksiyonu her x gerçek sayısı için sürekli olduğuna göre a nın alabileceği en küçük tam sayı değerini bulunuz.

4 $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 2}{2x^2 - x + a}$

fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş küme $\mathbb{R} - \{k\}$ olduğuna göre $\dfrac{k}{a}$ oranını bulunuz.

5 $f(x) = \begin{cases} 3x + 4b & , \quad x < 0 \quad \text{ise} \\ 2x - 2a & , \ 0 \le x < 2 \quad \text{ise} \\ bx + 2 & , \quad 2 \le x \quad \text{ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu $x = 0$ apsisli noktasında sürekli iken $x = 2$ apsisli noktasında sürekli değildir. Buna göre b nin alamayacağı değeri bulunuz.

6 $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - ax & , \ x \le 2 \quad \text{ise} \\ 2x + a & , \ x > 2 \quad \text{ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu her x gerçek sayısı için sürekli olduğuna göre a değerini bulunuz.

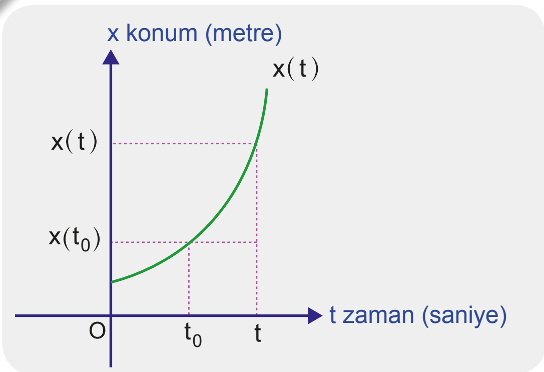
7 $f(x) = \begin{cases} ax - 2b & , \quad x < 1 \quad \text{ise} \\ 3x - 2a & , \ 1 \le x < 3 \quad \text{ise} \\ bx - 6 & , \quad 3 \le x \quad \text{ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu her x gerçek sayısı için sürekli olduğuna göre $a \cdot b$ çarpımını bulunuz.

5.2. ANLIK DEĞİŞİM ORANI VE TÜREV

5.2.1. Türev Kavramı

Değişim Oranı



Yanda doğrusal olarak hareket eden bir hareketliye ait konum-zaman grafiği verilmiştir. Bu hareketlinin t_0. ve t. saniyeler arasında ortalama hızı; bu hareketlinin konumundaki değişiminin, zamandaki değişime oranı ile hesaplanır.

✓ V_{ort}, bu hareketlinin t_0. ve t. saniyeler arasındaki ortalama hızı

✓ Δx , konumdaki değişimi

✓ Δt , zamandaki değişimi olmak üzere ortalama hız

$$\mathbf{V_{ort} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}} \text{ olur.}$$

Burada Δx, x bağımlı (t ye bağlı) değişkenin değişimidir.
Δt, t bağımsız değişkenin değişimidir.

Buna göre $\mathbf{V_{ort} = \frac{\Delta x}{\Delta t}}$ ifadesine **değişim oranı** denir.

ÖRNEK

Doğrusal olarak hareket eden bir hareketlinin zamana (saniye) bağlı konumu (metre) $x(t) = 2t^2 + 2$ fonksiyonu ile verildiğine göre ilk 3 saniyedeki ortalama hızını bulunuz.

ÇÖZÜM

Bu hareketlinin ilk 3 saniyede konumundaki değişimi

$$\begin{aligned}\Delta x &= x(3) - x(0)\\ &= (2 \cdot 3^2 + 2) - (2 \cdot 0^2 + 2)\\ &= 18 \text{ metre olur.}\end{aligned}$$

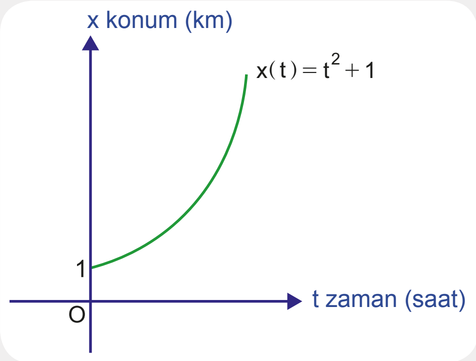
Bu hareketlinin ilk 3 saniyede zamandaki değişimi

$$\begin{aligned}\Delta t &= 3 - 0\\ &= 3 \text{ saniye olur.}\end{aligned}$$

Bu durumda ilk 3 saniyedeki ortalama hızı

$$V_{ort} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{18}{3} = 6 \text{ m/sn. bulunur.}$$

ÖRNEK



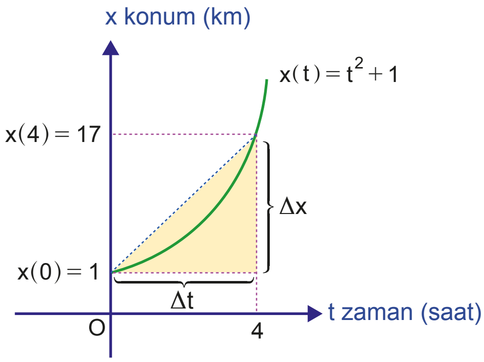
Yanda doğrusal olarak hareket eden bir hareketliye ait konum-zaman grafiği verilmiştir. Bu hareketlinin zamana bağlı konumu $x(t)=t^2+1$ fonksiyonu ile verildiğine göre

a) Bu hareketlinin ilk 4 saatteki ortalama hızını bulunuz.

b) Bu hareketlinin 1. ve 4. saatler arasındaki ortalama hızını bulunuz.

ÇÖZÜM

a)



Bu hareketlinin ilk 4 saatte konumundaki değişimi

$$\begin{aligned}\Delta x &= x(4)-x(0)\\ &=(4^2+1)-(0^2+1)\\ &=16 \text{ km olur.}\end{aligned}$$

Bu hareketlinin ilk 4 saatte zamandaki değişimi

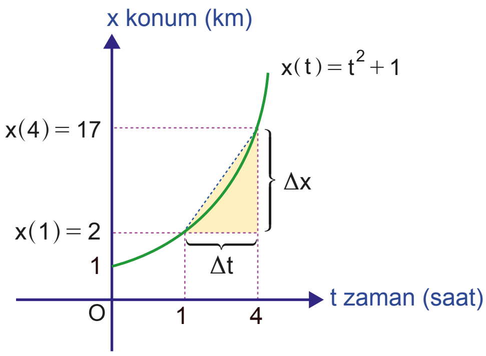
$$\begin{aligned}\Delta t &= 4-0\\ &=4 \text{ saat olur.}\end{aligned}$$

Bu durumda hareketlinin ilk 4 saatteki ortalama hızı

$V_{ort}=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{16}{4}=4$ km/sa. bulunur.

Bu hareketlinin ilk 4 saatteki ortalama hızı aynı zamanda bu fonksiyonun ilk 4 satteki değişim oranıdır. Ayrıca bu fonksiyonun 0. ve 4. saatler arasındaki değişim oranı $(0,1)$ ve $(4,17)$ noktalarından geçen doğrunun eğimine eşittir.

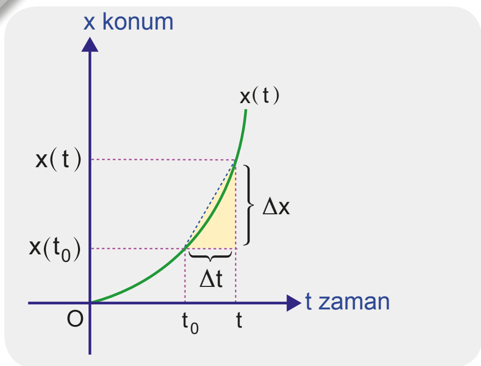
b)



$$\begin{aligned}V_{ort}=\frac{\Delta x}{\Delta t}&=\frac{x(4)-x(1)}{4-1}\\ &=\frac{17-2}{3}\\ &=5 \text{ km/sa. bulunur.}\end{aligned}$$

Bu hareketlinin 1. ve 4. saatler arasındaki ortalama hızı aynı zamanda bu fonksiyonun 1. ve 4. saatler arasındaki değişim oranıdır. Ayrıca bu fonksiyonun 1. ve 4. saatler arasındaki değişim oranı $(1,2)$ ve $(4,17)$ noktalarından geçen doğrunun eğimine eşittir.

Anlık Değişim Oranı ve Türev



Yanda doğrusal olarak hareket eden bir hareketliye ait konum-zaman grafiği gösterilmiştir. Bu hareketlinin t_0. ve t. saniyeleri arasındaki ortalama hızının

$$V_{ort} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

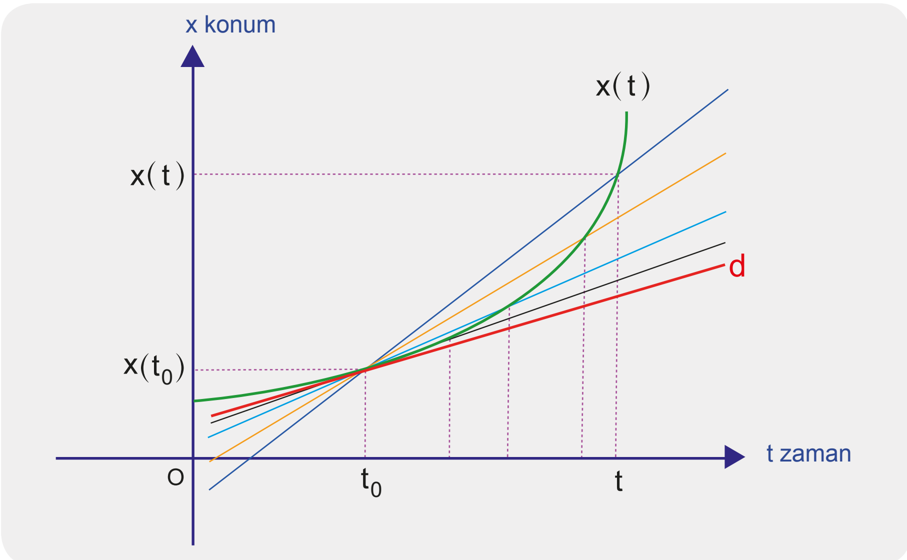
olduğu bilinmektedir.

Bu hareketlinin t_0 anındaki anlık hızı bulunmak istenirse t nin t_0 a yaklaşırken fonksiyonun değişim oranı hesaplanmalıdır. Bu oran

$$\lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

limiti ile hesaplanır. Bu limit değeri hareketlinin t_0 anındaki anlık hızı olup bu değer fonksiyonun t_0 anındaki **anlık değişim oranıdır.** Bir fonksiyonun t_0 anındaki anlık değişim oranına ise fonksiyonun t_0 noktasındaki **türevi** denir ve $\mathbf{x'(t_0)}$ ile gösterilir. O hâlde

$$x'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \quad \text{olur.}$$

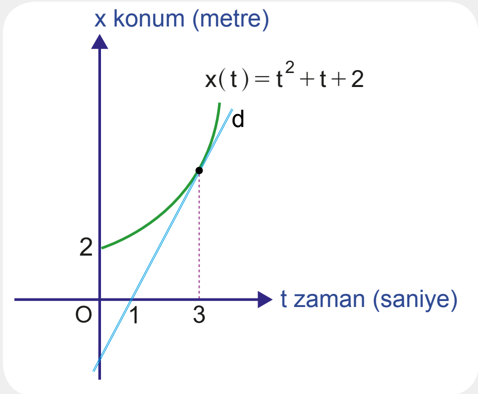


$x(t)$ fonksiyonunun t_0. ve t. zamanlar arasındaki değişim oranının $(t_0, x(t_0))$ ve $(t, x(t))$ noktalarından geçen doğrunun eğimi olduğu belirtilmişti. Yukarıdaki grafik incelendiğinde t, t_0 a yaklaşırken

$$\lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

limitinin değerinin eğrinin t_0 noktasındaki teğeti olan d doğrusunun eğimine eşit olduğu görülür. O hâlde bir fonksiyonun herhangi bir noktasındaki türevi, fonksiyonun o noktadaki teğetinin eğimine eşittir.

ÖRNEK

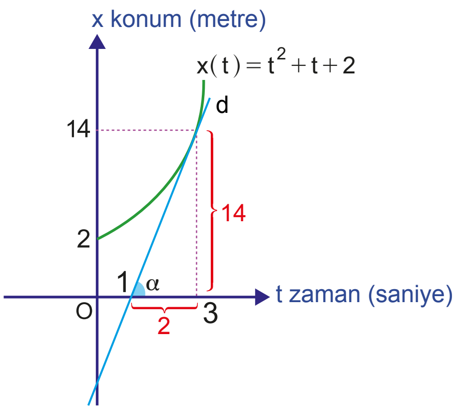


Yanda doğrusal olarak hareket eden bir hareketliye ait konum-zaman grafiği ve grafiğe $t = 3$ noktasında çizilen teğeti verilmiştir.

Bu hareketlinin zamana bağlı konumu $x(t) = t^2 + t + 2$ fonksiyonu ile tanımlandığına göre bu hareketlinin 3. saniyedeki anlık hızının (anlık değişim oranı) kaç m/sn. olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

1. Yol:



Bir hareketlinin t_0 anındaki anlık hızı t_0 noktasındaki türevi olan $f'(t_0)$ a eşittir. Bir fonksiyonun bir t_0 noktasındaki türevi ise fonksiyona o noktada çizilen teğetin eğimine eşit olduğundan fonksiyonun 3. saniyedeki anlık hızı d doğrusunun eğimi olan $m_d = \tan\alpha$ değerine eşittir. $m_d = \frac{14}{2} = 7$ olur. O hâlde bu hareketlinin 3. saniyedeki anlık hızı 7 m/sn. dir.

2. Yol:

$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \Rightarrow f'(3) = \lim_{t \to 3} \frac{f(t) - f(3)}{t - 3}$$

$$= \lim_{t \to 3} \frac{t^2 + t + 2 - 14}{t - 3}$$

$$= \lim_{t \to 3} \frac{t^2 + t - 12}{t - 3} \qquad \left(\frac{0}{0} \text{ belirsizliği}\right)$$

$$= \lim_{t \to 3} \frac{\cancel{(t-3)}(t+4)}{\cancel{t-3}}$$

$= 7$ m/sn. bulunur.

ÖRNEK

Doğrusal olarak hareket eden bir hareketlinin saat olarak zamana bağlı yer değişimi km olarak $f(t) = t^2 - 4$ fonksiyonu ile tanımlandığına göre bu hareketlinin 3. saatteki anlık hızını (anlık değişim oranını) bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\lim_{t \to 3} \frac{f(t) - f(3)}{t - 3} = \lim_{t \to 3} \frac{t^2 - 4 - 5}{t - 3} = \lim_{t \to 3} \frac{t^2 - 9}{t - 3} \qquad \left(\frac{0}{0} \text{ belirsizliği}\right)$$

$$\lim_{t\to 3}\frac{t^2-9}{t-3}=\lim_{t\to 3}\frac{\cancel{(t-3)}(t+3)}{\cancel{t-3}}$$
$$=6 \text{ km/sa. bulunur.}$$

Soldan ve Sağdan Türev

$A\subseteq\mathbb{R}$, $f:A\to\mathbb{R}$ ve $a\in A$ için

✓ $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ limiti varsa bu limit değerine f fonksiyonunun $x=a$ noktasındaki **soldan türevi** denir ve $f'(a^-)$ ile gösterilir.

✓ $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ limiti varsa bu limit değerine f fonksiyonunun $x=a$ noktasındaki **sağdan türevi** denir ve $f'(a^+)$ ile gösterilir.

Türev Tanımı

$A\subseteq\mathbb{R}$, $f:A\to\mathbb{R}$ ve $a\in A$ için f sürekli olmak üzere

$\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ limitine f fonksiyonunun $x=a$ noktasındaki **türevi** denir ve $f'(a)$ ile gösterilir.

Böylece f fonksiyonun $x=a$ noktasındaki türevi

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

biçiminde tanımlanır.

ÖRNEK

- $f'(x)=3x^2-x$
- $f(1)=5$

olduğuna göre $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-5}{x-1}$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

İstenen limit ifadesinde 5 yerine $f(1)$ yazılırsa bu limit değerinin $f'(1)$ e eşit olduğu görülür.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-5}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=f'(1)$$
$$=3.1^2-1$$
$$=2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x$ fonksiyonunun $x=2$ apsisli noktasındaki türevinin değerini türev tanımını kullanarak bulunuz.

ÇÖZÜM

f fonksiyonu $x=2$ apsisli noktasında süreklidir. f fonksiyonunun bu noktada soldan ve sağdan türevleri incelenirse

- $$f'(2^-)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{x-2}}=\lim_{x\to 2^-}1=1 \text{ olur.}$$
- $$f'(2^+)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{x-2}}=\lim_{x\to 2^+}1=1 \text{ olur.}$$

$f'(2^-)=f'(2^+)=1\Rightarrow f'(2)=1$ bulunur.

f fonksiyonunun $x=a$ noktasındaki türevi olan $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ifadesinde

$x-a=h$ dönüşümü yapılırsa

$x\to a\Rightarrow h\to 0$ (x a ya yaklaşıyor ise h 0 a yaklaşır.)

$x-a=h\Rightarrow x=a+h$ olur.

Bu durumda f fonksiyonunun $x=a$ noktasındaki türevi

$$\mathbf{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

biçiminde de ifade edilebilir.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=5x^2$ fonksiyonunun $x=3$ apsisli noktasındaki türevinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5\cdot(3+h)^2-5\cdot 3^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{45}+30h+5h^2-\cancel{45}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\cdot(30+5h)}{\cancel{h}}$$
$$=30 \text{ bulunur.}$$

Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ apsisli noktasındaki türevi

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

olduğundan herhangi bir x noktasındaki türevi

$$\mathbf{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

limiti ile bulunur. Burada $\mathbf{f'(x) = \frac{df(x)}{dx}}$ veya $\mathbf{f'(x) = \frac{dy}{dx}}$ olarak gösterilebilir.

$\mathbf{\frac{d}{dx}}$ ifadesine **türev operatörü** denir.

ÖRNEK

$f(x) = 5$ ve $g(x) = 2x^3$ fonksiyonunun türevini türev tanımını kullanarak bulunuz.

ÇÖZÜM

- $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

  $= \lim_{h \to 0} \frac{5-5}{h}$

  $= \lim_{h \to 0} \frac{0}{h}$

  $= \lim_{h \to 0} 0$

  $= 0$ bulunur.

- $g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$

  $= \lim_{h \to 0} \frac{2 \cdot (x+h)^3 - 2x^3}{h}$

  $= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{2x^3} + 6x^2h + 6xh^2 + 2h^3 - \cancel{2x^3}}{h}$

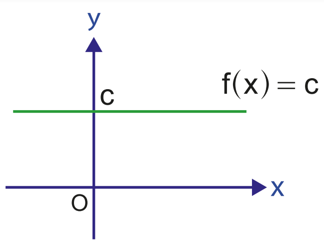
  $= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h} \cdot (6x^2 + 6xh + 2h^2)}{\cancel{h}}$

  $= 6x^2$ bulunur.

Türev Alma Kuralları

$c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mathbf{f(x) = c} \text{ ise } \mathbf{f'(x) = 0} \text{ olur.}$$



$f(x) = c \Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{c-c}{h}$ $\quad (f(x+h) = c$ ve $f(x) = c)$

$= \lim_{h \to 0} \frac{0}{h}$

$= \lim_{h \to 0} 0$

$= 0$ bulunur.

ÖRNEK

$f(x)=ax^2-2x^2+bx+x+2$ fonksiyonunun her x noktasındaki türevi sıfır olduğuna göre a ve b değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

f fonksiyonunun her x noktasındaki türevi sıfır olduğundan f fonksiyonu sabit fonksiyon olmalıdır. Bu durumda

$$f(x)=\underbrace{(a-2)}_{0}x^2+\underbrace{(b+1)}_{0}x+2 \Rightarrow a-2=0 \text{ ve } b+1=0$$

$$\Rightarrow a=2 \text{ ve } b=-1 \text{ bulunur.}$$

$a\in\mathbb{R}$ ve $n\in\mathbb{Q}$ olmak üzere

$$\mathbf{f(x)=a\cdot x^n} \text{ ise } \mathbf{f'(x)=a\cdot n\cdot x^{n-1}} \text{ olur.}$$

$$(x^n-y^n)=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}\cdot y+x^{n-3}\cdot y^2+\ldots+x\cdot y^{n-2}+y^{n-1})$$

özdeşliği ve türev tanımı kullanılarak $f'(x)=a\cdot n\cdot x^{n-1}$ eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned}
f(x)=a\cdot x^n \Rightarrow f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{a\cdot(x+h)^n-a\cdot x^n}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\left(a\cdot\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\right)\\
&=a\cdot\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\\
&=a\cdot\lim_{h\to 0}\frac{(\cancel{x}+h-\cancel{x})((x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}\cdot x+(x+h)^{n-3}\cdot x^2+\ldots+x^{n-1})}{h}\\
&=a\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\cdot((x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}\cdot x+(x+h)^{n-3}\cdot x^2+\ldots+x^{n-1})}{\cancel{h}}\\
&=a\cdot(x^{n-1}+x^{n-2}\cdot x+x^{n-3}\cdot x^2+\ldots+x^{n-1})\\
&=a\cdot\underbrace{(x^{n-1}+x^{n-1}+x^{n-1}+\ldots+x^{n-1})}_{n \text{ tane}}\\
&=a\cdot n\cdot x^{n-1}
\end{aligned}$$

ÖRNEK

$f(x)=3x^5$ ve $g(x)=-2x^4$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

ÇÖZÜM

- $f(x)=3x^{5} \Rightarrow f'(x)=5\cdot 3x^{5-1}$
  $=15x^{4}$ bulunur.

- $g(x)=-2x^{4} \Rightarrow g'(x)=-2\cdot 4x^{4-1}$
  $=-8x^{3}$ bulunur.

ÖRNEK

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ ve $g(x)=\dfrac{1}{x^{3}}$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

ÇÖZÜM

- $f(x)=\dfrac{1}{x}=x^{-1} \Rightarrow f'(x)=-1\cdot x^{-1-1}$
  $=-x^{-2}$
  $=-\dfrac{1}{x^{2}}$ bulunur.

- $g(x)=\dfrac{1}{x^{3}}=x^{-3} \Rightarrow g'(x)=-3\cdot x^{-3-1}$
  $=-3\cdot x^{-4}$
  $=-\dfrac{3}{x^{4}}$ bulunur.

ÖRNEK

$f(x)=\sqrt{x}$ ve $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

ÇÖZÜM

- $f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1}$
  $=\dfrac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}$
  $=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ bulunur.

- $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow g'(x)=-\dfrac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}-1}$
  $=-\dfrac{1}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}}$
  $=-\dfrac{1}{2\sqrt{x^{3}}}$ bulunur.

ÖRNEK

$f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$
$=\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}$
$=x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}$
$=x^{-\frac{1}{6}}$ olur.

$f(x)=x^{-\frac{1}{6}} \Rightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{6}\cdot x^{-\frac{1}{6}-1}$
$=-\dfrac{1}{6}\cdot x^{-\frac{7}{6}}$
$=-\dfrac{1}{6\cdot\sqrt[6]{x^{7}}}$ bulunur.

ÖRNEK

$f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x^3}}$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$f(x)=\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x^3}}=\frac{x^1\cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{5}}}=x^{1+\frac{1}{2}-\frac{3}{5}}=x^{\frac{9}{10}} \text{ olur.}$$

$$f(x)=x^{\frac{9}{10}}\Rightarrow f'(x)=\frac{9}{10}\cdot x^{\frac{9}{10}-1}=\frac{9}{10}\cdot x^{-\frac{1}{10}}=\frac{9}{10\cdot\sqrt[10]{x}} \text{ bulunur.}$$

Uyarı

$\dfrac{d}{dx}$ ifadesi türev operatörü olmak üzere

- $\dfrac{d}{dx}f(x)=\dfrac{d\,f(x)}{dx}=f'(x)$
- $\dfrac{d}{dx}g(x)=\dfrac{d\,g(x)}{dx}=g'(x)$
- $\dfrac{dy}{dx}=y'$ biçiminde gösterilir.

ÖRNEK

$f(x)=x\sqrt[3]{x}$ olduğuna göre $\dfrac{df(x)}{dx}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$f(x)=x\sqrt[3]{x}=x\cdot x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{4}{3}} \text{ olur.}$$

$$f(x)=x^{\frac{4}{3}}\Rightarrow f'(x)=\frac{4}{3}\cdot x^{\frac{4}{3}-1}=\frac{4}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}}=\frac{4\sqrt[3]{x}}{3} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$f(x)=2x^4$ fonksiyonu veriliyor. $f'(a)=216$ eşitliğini sağlayan a değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x)=2x^4\Rightarrow f'(x)=8x^3$ olur.

$$f'(a)=216\Rightarrow 8a^3=216$$
$$a^3=27$$
$$a=3 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$f(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt{x}}$ fonksiyonunun $x=4$ apsisli noktasında çizilen teğetinin eğimini bulunuz.

ÇÖZÜM

f fonksiyonunun $x=4$ apsisli noktasında çizilen teğetinin eğimi $f'(4)$ olur. Buna göre

$$f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{x}}=\frac{x^3}{x^{\frac{1}{2}}}=x^{3-\frac{1}{2}}=x^{\frac{5}{2}}$$

$$f(x)=x^{\frac{5}{2}}\Rightarrow f'(x)=\frac{5}{2}\cdot x^{\frac{5}{2}-1}=\frac{5}{2}\cdot x^{\frac{3}{2}}=\frac{5x\sqrt{x}}{2} \text{ olur.}$$

$$f'(x)=\frac{5x\sqrt{x}}{2}\Rightarrow f'(4)=\frac{5\cdot 4\cdot\sqrt{4}}{2}=20 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$f(x)=2ax^3$ fonksiyonu veriliyor. $f'(-3)=-108$ olduğuna göre $f'(1)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$f(x)=2ax^3\Rightarrow f'(x)=6ax^2$$
$$\Rightarrow f'(-3)=6a(-3)^2$$
$$-108=54a$$
$$a=-2 \text{ olur.}$$

$$a=-2\Rightarrow f(x)=-4x^3$$
$$\Rightarrow f'(x)=-12x^2$$
$$\Rightarrow f'(1)=-12 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

- $f(x)=ax^2$
- $g(x)=\dfrac{x^3}{b}$
- $f'(-3)=g'(2)$

olduğuna göre $a\cdot b$ çarpımını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$f(x)=ax^2\Rightarrow f'(x)=2ax$$
$$\Rightarrow f'(-3)=-6a$$

$$g(x)=\frac{x^3}{b}\Rightarrow g'(x)=\frac{3x^2}{b}$$
$$\Rightarrow g'(2)=\frac{12}{b}$$

$$f'(-3)=g'(2)\Rightarrow -6a=\frac{12}{b}$$
$$\Rightarrow -6a\cdot b=12$$
$$\Rightarrow a\cdot b=-2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

- $f(x)=ax^3$
- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=6$

olduğuna göre a değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=6\Rightarrow f'(2)=6 \text{ olur.}$$

$$f(x)=ax^3\Rightarrow f'(x)=3ax^2 \text{ olur.}$$

$$f'(x)=3ax^2\Rightarrow f'(2)=3a\cdot 2^2$$
$$6=12a$$
$$a=\frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

- n tek doğal sayıdır.
- $f(x)=-\frac{a}{2}x^n$
- $g(x)=(a+2)x^{n-1}$
- $f'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(h-2)-g(-2)}{h}$

olduğuna göre n nin a türünden eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$f(x)=-\frac{a}{2}x^n \Rightarrow f'(x)=-\frac{a\cdot n\cdot x^{n-1}}{2}$$

$$g(x)=(a+2)x^{n-1} \Rightarrow g'(x)=(a+2)(n-1)x^{n-2}$$

$$f'(2)=\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{g(h-2)-g(-2)}{h}}_{g'(-2)} \Rightarrow f'(2)=g'(-2) \text{ olur.}$$

$$f'(2)=g'(-2)\Rightarrow -\frac{a\cdot n\cdot 2^{n-1}}{2}=(a+2)(n-1)(-2)^{n-2} \qquad \left(\text{n tek ise } (-2)^{n-2}=-2^{n-2}\right)$$

$$-a\cdot n\cdot 2^{n-2}=(a+2)(n-1)\left(-2^{n-2}\right)$$

$$-a\cdot n\cdot \cancel{2^{n-2}}=-(a\cdot n-a+2n-2)\cdot \cancel{2^{n-2}}$$

$$-\cancel{a\cdot n}=-\cancel{a\cdot n}+a-2n+2$$

$$2n=a+2$$

$$n=\frac{a+2}{2} \text{ bulunur.}$$

Bir $f(x)$ fonksiyonunun türevi olan $\frac{df(x)}{dx}$ için

$$\mathbf{\frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right)=\frac{d^2f(x)}{dx^2}}$$

ifadesine $f(x)$ fonksiyonunun **ikinci mertebeden türevi** denir ve $\mathbf{f''(x)}$ ile gösterilir.

ÖRNEK

$f(x)=-x^6$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre $f''(2)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$f(x)=-x^6 \Rightarrow f'(x)=-6x^5$$
$$\Rightarrow f''(x)=-6\cdot 5\cdot x^4$$
$$\Rightarrow f''(x)=-30x^4 \text{ olur.}$$

$$f''(x)=-30\cdot x^4 \Rightarrow f''(2)=-30\cdot 2^4$$
$$=-30\cdot 16$$
$$=-480 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ olduğuna göre $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2}\Rightarrow\frac{df(x)}{dx}=f'(x)=-2\cdot x^{-3} \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2f(x)}{dx^2}=\frac{d}{dx}(f'(x))=f''(x)&=-2\cdot(-3)\cdot x^{-4}\\&=6\cdot x^{-4}\\&=\frac{6}{x^4} \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK

$f(x)=x\sqrt{x}$ fonksiyonunun ikinci mertebeden türevini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}f(x)&=x\sqrt{x}\\&=x\cdot x^{\frac{1}{2}}\\&=x^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x)=x^{\frac{3}{2}}\Rightarrow f'(x)&=\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{3}{2}-1}\\&=\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}} \text{ olur.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(x)=\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}\Rightarrow f''(x)&=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1}\\&=\frac{3}{4}\cdot x^{-\frac{1}{2}}\\&=\frac{3}{4\sqrt{x}} \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Michel ROLLE (Mişel ROL) (1652 - 1719)

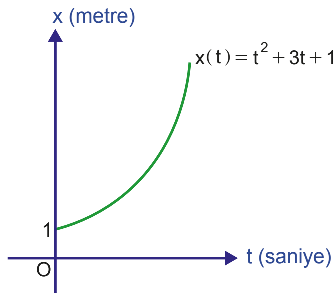
Görsel 5.5

1652 yılında Fransa'da doğan ve bir ilkokul öğretmeni olan Rolle, çağdaşları olan Newton (Nivton) ve Leibnitz'in (Leyibnitz) sistematik olarak geliştirdikleri diferansiyel ve integral hesap kuramının karşıtlarından ve en çok eleştirenlerden biri olmasına rağmen polinomların köklerini araştırırken bulmuş olduğu ve günümüzde kendi ismi ile anılan Rolle teoremi bu kuramın temel yapı taşlarından biri olmuştur. Rolle aynı zamanda bir x sayısının n inci dereceden kökünü temsil etmede kullandığımız $\sqrt[n]{x}$ sembolünü ilk kullanan kişi olarak da bilinmektedir.

(Zill ve Warren, 2013)

Alıştırmalar

1



Yukarıda doğrusal olarak hareket eden bir hareketliye ait konum-zaman grafiği verilmiştir.Buna göre bu hareketlinin

a) İlk 3 saniyedeki ortalama hızının kaç m/sn. olduğunu bulunuz.

b) 2. saniyedeki anlık hızının kaç m/sn. olduğunu bulunuz.

2

- $f'(x)=2x^2+x$
- $f(-1)=5$

olduğuna göre $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-5}{x+1}$ ifadesinin değerini bulunuz.

3 Doğrusal olarak hareket eden bir hareketlinin saat olarak zamana bağlı yer değişimi km olarak $f(t)=t^2+3t-2$ fonksiyonu ile tanımlandığına göre bu hareketlinin 2. saatteki anlık hızını (anlık değişim oranını) bulunuz.

4

- $f(x)=x^2-2ax+b$
- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-1)-f(-1)}{h}=4$

olduğuna göre a değerini bulunuz.

5

- $f'(x)=ax^2-2x+1$
- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=9$

olduğuna göre a değerini bulunuz.

6 $f(x)=2x^3$ fonksiyonunun $x=-2$ apsisli noktasında çizilen teğetinin eğimini bulunuz.

7 $f(x)=x^2\cdot\sqrt[3]{x}$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

8 $f(x)=\dfrac{3}{2x^2}$ olduğuna göre $\dfrac{df(x)}{dx}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

9 $f(x)=\dfrac{x^6}{6}$ olduğuna göre $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

10 $f(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt[3]{x^2}}$ olduğuna göre $f'(27)$ değerini bulunuz.

11 $f(x)=2x^4$ fonksiyonunun hangi noktasındaki teğetinin eğiminin -216 olduğunu bulunuz.

12 $f(x)=x^3$ fonksiyonunun $x=2$ apsisli noktasında çizilen teğetinin eğimi, $x=a$ apsisli başka bir noktasında çizilen teğetinin eğimine eşit olduğuna göre a değerini bulunuz.

13 $f(x)=ax^2$ fonksiyonunun $x=-\dfrac{1}{4}$ apsisli noktasında çizilen teğeti, $g(x)=\dfrac{2}{ax}$ fonksiyonunun $x=1$ apsisli noktasında çizilen teğetine paralel olduğuna göre a nın pozitif değerini bulunuz.

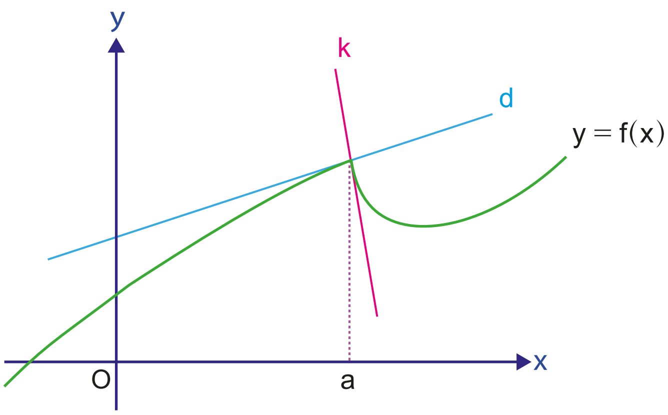
5.2.2. Bir Fonksiyonun Bir Noktada ve Bir Aralıkta Türevlenebilirliği

$A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a \in A$ için f sürekli olmak üzere

f fonksiyonunun $x = a$ apsisli noktasındaki sağdan ve soldan türevleri birbirine eşit ise f fonksiyonu $x = a$ apsisli noktasında türevlenebilirdir.

✓ $\mathbf{f'(a^+) = f'(a^-) = k \Rightarrow f'(a) = k}$ olur.

✓ Bir f fonksiyonu (a, b) ndaki her noktada türevlenebilir ise bu fonksiyon (a, b) nda türevlenebilirdir.



Yanda verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği incelenirse a ya soldan yaklaşırken eğriye çizilen teğetin d doğrusu ve a ya sağdan yaklaşırken çizilen teğetin k doğrusu olduğu görülür.

Bu durumda d doğrusunun eğimi m_d ve k doğrusunun eğimi m_k olarak ifade edilirse

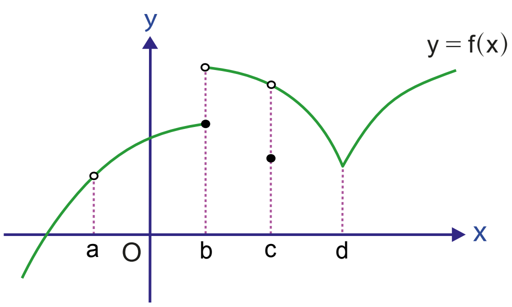
$$f'(a^-) = m_d \text{ ve } f'(a^+) = m_k$$

olur.

Burada $m_d \neq m_k$ olduğundan fonksiyonun a noktasındaki sağdan ve soldan türevleri farklıdır. O hâlde f fonksiyonunun $x = a$ apsisli noktasında türevi yoktur.

f fonksiyonunun, $x = a$ apsisli noktasında sürekli olmasına rağmen bu noktada türevi yoktur. Bu tür noktalara fonksiyonun **kırılma noktası** denir.

Uyarı



Yanda verilen $\mathbb{R} - \{a\}$ kümesinde tanımlı $f(x)$ fonksiyonun grafiği incelendiğinde tanımlı olduğu aralıktaki

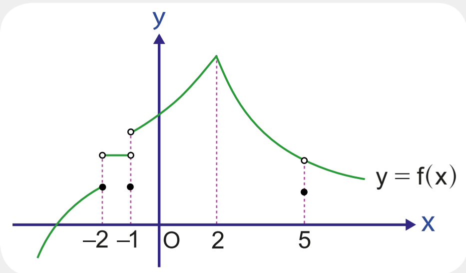
- b ve c apsisli noktalarda süreksizdir. Bir fonksiyonun bir noktadaki türevi fonksiyonun grafiğine o noktasında çizilen teğetinin eğimine eşit olduğundan fonksiyonun b ve c noktalarında türevi yoktur.

- d apsisli noktası fonksiyonun kırılma noktası olduğundan fonksiyonun bu noktada da türevi yoktur.

SONUÇ

- Bir fonksiyon bir $x = a$ apsisli noktada sürekli değilse $x = a$ apsisli noktada türevli de değildir.
- Bir fonksiyon türevli olduğu her noktasında süreklidir.
- Bir fonksiyonun kırılma noktalarında türevi yoktur.

ÖRNEK



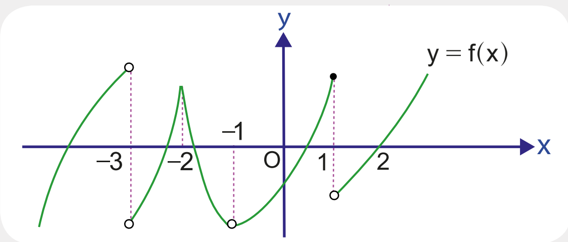
Yanda grafiği verilen gerçek sayılar kümesinde tanımlı $f(x)$ fonksiyonunun hangi x değerleri için türevinin olmadığını bulunuz.

ÇÖZÜM

- $f(x)$ fonksiyonu, $x = -2$, $x = -1$ ve $x = 5$ apsisli noktalarında sürekli olmadığından fonksiyon bu noktalarda türevli değildir.
- $x = 2$ apsisli noktası $f(x)$ fonksiyonunun kırılma noktası olduğundan fonksiyonun bu noktada türevi yoktur.

O hâlde $f(x)$ fonksiyonu $x = -2$, $x = -1$, $x = 2$ ve $x = 5$ apsisli noktalarda türevli değildir.

ÖRNEK



Yanda grafiği verilen $\mathbb{R} - \{-3, -1\}$ kümesinde tanımlı $f(x)$ fonksiyonunun türevlenebilir olduğu en geniş kümeyi bulunuz.

ÇÖZÜM

- $f(x)$ fonksiyonu, $x = -3$ ve $x = -1$ apsisli noktalarda tanımlı değildir.
- $f(x)$ fonksiyonu, $x = 1$ apsisli noktasında sürekli olmadığından bu noktada türevli değildir.
- $x = -2$ apsisli noktası $f(x)$ fonksiyonunun kırılma noktası olduğundan fonksiyonun bu noktada türevi yoktur.

O hâlde $f(x)$ fonksiyonun türevlenebilir olduğu en geniş küme $\mathbb{R} - \{-3, -2, -1, 1\}$ olur.

ÖRNEK

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & , \ x<2 \ \text{ise} \\ -2x & , \ x\geq 2 \ \text{ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonunun $x=2$ apsisli noktasında varsa türevini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x=2$ apsisli noktası fonksiyonun kritik noktası olduğundan önce bu noktada süreklilik incelenirse

- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} x^2$
  $=4$ olur.
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} (-2x)$
  $=-4$ olur.

$f(x)$ fonksiyonunun $x=2$ apsisli noktasında sağdan ve soldan limitleri farklı olduğundan fonksiyon bu noktada sürekli değildir. $f(x)$ fonksiyonu $x=2$ apsisli noktasında sürekli olmadığından bu noktada türevli değildir.

ÖRNEK

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x^2} & , \ x<1 \ \text{ise} \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & , \ x\geq 1 \ \text{ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonunun $x=1$ apsisli noktasında varsa türevini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x=1$ apsisli noktası fonksiyonun kritik noktası olduğundan önce bu noktada sürekliliği incelenirse

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} \sqrt[3]{x^2}$
  $=1$ olur.
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
  $=1$ olur.
- $f(1)=1$ olur.

O hâlde $f(x)$ fonksiyonu $x=1$ apsisli noktasında süreklidir.

- $f'(1^-)$ değerini bulmak için $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ seçilir.

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow f(x)=x^{\frac{2}{3}}$$
$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$
$$\Rightarrow f'(1^-)=\frac{2}{3} \text{ olur.}$$

- $f'(1^+)$ değerini bulmak için $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ seçilir.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f(x)=x^{-\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow f'(1^+)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$
$$\Rightarrow f'(1^+)=-\frac{1}{2} \text{ olur.}$$

f fonksiyonunun $x=1$ apsisli noktasındaki sağdan türevi ile soldan türevi birbirine eşit olmadığından f fonksiyonunun $x=1$ apsisli noktasında türevi yoktur.

SONUÇ

Bir fonksiyonun sürekli olduğu bir noktada türevi olmayabilir.

ÖRNEK

$$f(x)=\begin{cases} -x^2 & , x<0 \quad \text{ise} \\ x^2 & , x\geq 0 \quad \text{ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonunun $x=0$, $x=-3$ ve $x=2$ apsisli noktalarındaki türevini araştırınız.

ÇÖZÜM

$x=0$ apsisli nokta f fonksiyonunun kritik noktası olduğundan önce bu noktada süreklilik incelenirse

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x^2)$
  $=0$ olur.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2$
  $=0$ olur.
- $f(0)=0$ olur.

O hâlde $f(x)$ fonksiyonu $x=0$ apsisli noktasında süreklidir.

- $f'(0^-)$ değerini bulmak için $f(x)=-x^2$ seçilir.

  $f(x)=-x^2 \Rightarrow f'(x)=-2x$
  $\Rightarrow f'(0^-)=0$ olur.

- $f'(0^+)$ değerini bulmak için $f(x)=x^2$ seçilir.

  $f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x$
  $\Rightarrow f'(0^+)=0$ olur.

O hâlde f fonksiyonu $x=0$ apsisli noktasında sürekli olup sağdan ve soldan türevleri de birbirine eşit olduğundan fonksiyonun $x=0$ apsisli noktasında türevi vardır ve bu noktadaki türevi $f'(0)=0$ olur.

$x<0$ için f fonksiyonu sürekli ve türevlidir. f fonksiyonunun $x=-3$ apsisli noktasındaki türevini bulmak için $f(x)=-x^2$ seçilir.

$f(x)=-x^2 \Rightarrow f'(x)=-2x$
$\Rightarrow f'(-3)=-2\cdot(-3)$
$\Rightarrow f'(-3)=6$ olur.

$x>0$ için f fonksiyonu sürekli ve türevlidir. f fonksiyonunun $x=2$ apsisli noktasındaki türevini bulmak için $f(x)=x^2$ seçilir.

$f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x$
$\Rightarrow f'(2)=2\cdot 2$
$\Rightarrow f'(2)=4$ olur.

5.2.3. Türevlenebilen İki Fonksiyonun Toplamının, Farkının, Çarpımının ve Bölümünün Türevi

$f(x)$ ve $g(x)$ türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere

✓ $(f+g)(x)$ fonksiyonunun türevi $\dfrac{d}{dx}((f+g)(x)) = (f(x)+g(x))'$

$= f'(x)+g'(x)$ olur.

(İki fonksiyonun toplamının türevi fonksiyonların türevlerinin toplamıdır.)

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{f'(x)} + \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{g'(x)}\\ &= f'(x)+g'(x)\end{aligned}$$

✓ $(f-g)(x)$ fonksiyonunun türevi $\dfrac{d}{dx}((f-g)(x)) = (f(x)-g(x))'$

$= f'(x)-g'(x)$ olur.

(İki fonksiyonun farkının türevi fonksiyonların türevlerinin farkıdır.)

$$\begin{aligned}(f-g)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f-g)(x+h)-(f-g)(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-g(x+h)-f(x)+g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-g(x+h)+g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-(g(x+h)-g(x))}{h}\\ &= \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{f'(x)} - \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{g'(x)}\\ &= f'(x)-g'(x)\end{aligned}$$

ÖRNEK

$f(x) = x^2 + x + \dfrac{1}{x} + \sqrt{x} + 1$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$f(x) = x^2 + x + x^{-1} + x^{\frac{1}{2}} + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x + 1 + (-1)\cdot x^{-2} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

- $f(x)=ax^2+bx-2$
- $g(x)=2ax-2a+b$
- $(f+g)'(2)=3$
- $(f-g)'(3)=-1$

olduğuna göre a ve b değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x)=ax^2+bx-2 \Rightarrow f'(x)=2ax+b$

$\Rightarrow f'(2)=4a+b$ ve $f'(3)=6a+b$ olur.

$g(x)=2ax-2a+b \Rightarrow g'(x)=2a$

$\Rightarrow g'(2)=2a$ ve $g'(3)=2a$ olur.

$(f+g)'(2)=f'(2)+g'(2)$

$3=4a+b+2a$

$3=6a+b$ ....(1) olur.

$(f-g)'(3)=f'(3)-g'(3)$

$-1=6a+b-2a$

$-1=4a+b$ ....(2) olur.

(1) ve (2) denklemleri ortak çözülürse

$$\begin{array}{rr} -1/ & 6a+b=3 \\ + & 4a+b=-1 \\ \hline & -2a=-4 \Rightarrow a=2 \end{array}$$ bulunur.

$a=2 \Rightarrow 4\cdot 2+b=-1$

$\Rightarrow b=-9$ bulunur.

f(x) ve g(x) türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere

✓ $(f\cdot g)(x)$ fonksiyonunun türevi $\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}((\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(\mathbf{x}))=(\mathbf{f}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{g}(\mathbf{x}))'$

$=\mathbf{f}'(\mathbf{x})\cdot\mathbf{g}(\mathbf{x})+\mathbf{g}'(\mathbf{x})\cdot\mathbf{f}(\mathbf{x})$ olur.

$$\begin{aligned}
(f\cdot g)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x+h)+f(x)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)\cdot[f(x+h)-f(x)]+f(x)\cdot[g(x+h)-g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)\cdot[f(x+h)-f(x)]}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x)\cdot[g(x+h)-g(x)]}{h} \\
&= \underbrace{\lim_{h\to 0} g(x+h)}_{g(x)}\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{f'(x)}+\underbrace{\lim_{h\to 0} f(x)}_{f(x)}\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{g'(x)} \\
&= f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)
\end{aligned}$$

ÖRNEK

$f(x) = 2x^2 - x$ ve $g(x) = x + \frac{1}{x}$ olduğuna göre $f(x) \cdot g(x)$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

ÇÖZÜM

1. Yol:

$$(f \cdot g)'(x) = \left(\left(2x^2 - x\right) \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right)\right)'$$
$$= \left(2x^3 - x^2 + 2x - 1\right)'$$
$$= 6x^2 - 2x + 2 \text{ olur.}$$

2. Yol:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$
$$= (4x - 1) \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(2x^2 - x\right)$$
$$= 4x^2 + 4 - x - \frac{1}{x} + 2x^2 - x - 2 + \frac{1}{x}$$
$$= 6x^2 - 2x + 2 \text{ olur.}$$

f ve g fonksiyonlarının çarpımının türevi bulunurken

1. yolda önce $(f \cdot g)(x)$ çarpım fonksiyonu bulundu. Ardından türev alındı.
2. yolda iki fonksiyonun çarpımının türevi kuralı uygulandı.

ÖRNEK

$f(x) = (x^3 - x^2 + 2x - 1)(2x^2 - 3x - 2)$ olduğuna göre f fonksiyonunun $x = 1$ apsisli noktasındaki türevini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$f'(x) = \left(\left(x^3 - x^2 + 2x - 1\right)\left(2x^2 - 3x - 2\right)\right)'$$
$$= \left(x^3 - x^2 + 2x - 1\right)' \cdot \left(2x^2 - 3x - 2\right) + \left(2x^2 - 3x - 2\right)' \cdot \left(x^3 - x^2 + 2x - 1\right)$$
$$= \left(3x^2 - 2x + 2\right) \cdot \left(2x^2 - 3x - 2\right) + (4x - 3)\left(x^3 - x^2 + 2x - 1\right)$$
$$f'(1) = \left(3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 2\right) \cdot \left(2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 2\right) + (4 \cdot 1 - 3)\left(1^3 - 1^2 + 2 \cdot 1 - 1\right)$$
$$= 3 \cdot (-3) + 1 \cdot 1$$
$$= -8 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5)$ olduğuna göre $f'(3)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$f(x) = \underbrace{(x - 3)}_{g(x)} \cdot \underbrace{(x - 1)(x - 2)(x - 4)(x - 5)}_{h(x)} \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + h'(x) \cdot g(x)$$
$$\Rightarrow f'(3) = g'(3) \cdot h(3) + h'(3) \cdot g(3)$$
$$= 1 \cdot h(3) + h'(3) \cdot 0$$
$$= h(3)$$
$$= (3 - 1)(3 - 2)(3 - 4)(3 - 5)$$
$$= 4 \text{ bulunur.}$$

f(x) ve g(x) türevlenebilir iki fonksiyon ve $g(x) \neq 0$ olmak üzere

✓ $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ fonksiyonunun türevi $\frac{d}{dx}\left(\left(\frac{f}{g}\right)(x)\right) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$

$$= \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2}$$ olur.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{g(x) \cdot g(x+h)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x)}{h \cdot g(x) \cdot g(x+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{g(x) \cdot g(x+h)} \cdot \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x)}{h}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{g(x) \cdot g(x+h)} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x) \cdot [f(x+h) - f(x)] - f(x) \cdot [g(x+h) - g(x)]}{h}$$

$$= \frac{1}{g(x) \cdot g(x)} \cdot \lim_{h \to 0} \left(\frac{g(x) \cdot [f(x+h) - f(x)]}{h} - \frac{f(x) \cdot [g(x+h) - g(x)]}{h}\right)$$

$$= \frac{1}{(g(x))^2} \cdot \left(\lim_{h \to 0} \frac{g(x) \cdot [f(x+h) - f(x)]}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{f(x) \cdot [g(x+h) - g(x)]}{h}\right)$$

$$= \frac{1}{(g(x))^2} \cdot \left[g(x) \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{f'(x)} - f(x) \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{g'(x)}\right]$$

$$= \frac{1}{(g(x))^2} \cdot (g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x))$$

$$= \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)}$$

ÖRNEK

$f(x) = x^3 - 1$ ve $g(x) = x^2$ olduğuna göre $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

ÇÖZÜM

1. Yol:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\left(\frac{x^3-1}{x^2}\right)'$$
$$=\left(\frac{x^3}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)'$$
$$=(x-x^{-2})'$$
$$=1+2x^{-3}$$
$$=1+\frac{2}{x^3} \text{ bulunur.}$$

2. Yol:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{(g(x))^2}$$
$$=\frac{3x^2\cdot x^2-2x\cdot(x^3-1)}{(x^2)^2}$$
$$=\frac{3x^4-2x^4+2x}{x^4}$$
$$=\frac{x^4+2x}{x^4}$$
$$=\frac{x^3+2}{x^3} \text{ bulunur.}$$

1. yolda $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ bölüm fonksiyonu bulundu. Ardından türev alındı.

2. yolda iki fonksiyonun bölümünün türevi kuralı uygulandı.

ÖRNEK

$f(x)=x^2-3x$ ve $g(x)=x^3+x$ olduğuna göre $\left(\frac{g}{f}\right)'(2)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x)=\frac{x^3+x}{x^2-3x}\Rightarrow\left(\frac{g}{f}\right)'(x)=\frac{(3x^2+1)\cdot(x^2-3x)-(2x-3)\cdot(x^3+x)}{(x^2-3x)^2}$$
$$\Rightarrow\left(\frac{g}{f}\right)'(2)=\frac{(3\cdot2^2+1)\cdot(2^2-3\cdot2)-(2\cdot2-3)\cdot(2^3+2)}{(2^2-3\cdot2)^2}$$
$$=\frac{13\cdot(-2)-1\cdot10}{(-2)^2}$$
$$=\frac{-26-10}{4}$$
$$=-9 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+1}$ fonksiyonunun $x=4$ noktasındaki türevinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(x+1)-1\cdot(\sqrt{x}+1)}{(x+1)^2} \qquad \left((\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$
$$\Rightarrow f'(4)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{4}}\cdot(4+1)-1\cdot(\sqrt{4}+1)}{(4+1)^2}=\frac{\frac{5}{4}-3}{25}=-\frac{7}{100} \text{ bulunur.}$$

5.2.4. İki Fonksiyonun Bileşkesinin Türevi

f ve g türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere $y=(f\circ g)(x)$ bileşke fonksiyonu için

$y=(f\circ g)(x)\Rightarrow y=f(g(x))$ olur.

Bu ifadede $u=g(x)$ dönüşümü yapılırsa $u=g(x)$ ve $y=f(u)$ olur.

$$\left.\begin{aligned} y=f(u) &\Rightarrow \frac{dy}{du}=f'(u)\\ u=g(x) &\Rightarrow \frac{du}{dx}=g'(x) \end{aligned}\right\}\ \text{ifadeleri taraf tarafa çarpılırsa}$$

$$\times$$

$$\underbrace{\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}}_{\frac{dy}{dx}}=\underbrace{f'(u)}_{f'(g(x))}\cdot g'(x)\Rightarrow\frac{dy}{dx}=f'(g(x))\cdot g'(x)\ \text{ olur.}$$

O hâlde $y=(f\circ g)(x)$ bileşke fonksiyonunun türevi $\mathbf{y'=f'(g(x))\cdot g'(x)}$ olarak elde edilir.

$\mathbf{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}}$ ifadesine ise **zincir kuralı** denir.

ÖRNEK

$f(x)=5x^2$ ve $g(x)=x^3+1$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre $(f\circ g)(x)$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

ÇÖZÜM

1. Yol:

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)&=f(g(x))\\ &=f(x^3+1)\\ &=5\cdot(x^3+1)^2\\ &=5(x^6+2x^3+1)\\ &=5x^6+10x^3+5\ \text{ olur.}\end{aligned}$$

$(f\circ g)'(x)=30x^5+30x^2$ bulunur.

2. Yol:

$f(x)=5x^2\Rightarrow f'(x)=10x$

$g(x)=x^3+1\Rightarrow g'(x)=3x^2$

$$\begin{aligned}(f\circ g)'(x)&=f'(g(x))\cdot g'(x)\\ &=f'(x^3+1)\cdot 3x^2\\ &=10(x^3+1)\cdot 3x^2\\ &=30x^5+30x^2\ \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

3. Yol:

$(f\circ g)(x)=f(g(x))$ ifadesinde $g(x)=u$ dönüşümü yapılırsa $y=f(u)$ olur.

$y=f(u)\Rightarrow y=5u^2$

$\Rightarrow\frac{dy}{du}=10u$

$u=g(x)\Rightarrow u=x^3+1$

$\Rightarrow\frac{du}{dx}=3x^2$ olur.

$\frac{dy}{du}$ ve $\frac{du}{dx}$ değerleri zincir kuralında yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\Rightarrow\frac{dy}{dx}&=10u\cdot 3x^2\\ &=10(x^3+1)\cdot 3x^2\\ &=30x^5+30x^2\ \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

1. yolda önce $(f\circ g)(x)$ bileşke fonksiyonu bulundu. Ardından türev alındı.
2. yolda bileşke fonksiyonun türevinin kuralı kullanıldı.
3. yolda zincir kuralı kullanıldı.

ÖRNEK

$y=2(x^3-x+1)^4$ olduğuna göre $\dfrac{dy}{dx}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$u=x^3-x+1$ dönüşümü yapılarak zincir kuralı uygulanırsa

$$y=2u^4 \Rightarrow \frac{dy}{du}=8u^3$$

$$u=x^3-x+1 \Rightarrow \frac{du}{dx}=3x^2-1 \text{ olur.}$$

$\dfrac{dy}{du}$ ve $\dfrac{du}{dx}$ değerleri zincir kuralında yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx}&=8u^3\cdot(3x^2-1)\\ &=8(x^3-x+1)^3\cdot(3x^2-1) \text{ olarak bulunur.}\end{aligned}$$

SONUÇ

$a\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Q}$ ve $f(x)$ sıfırdan farklı türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\mathbf{y=a\cdot[f(x)]^n \Rightarrow y'=a\cdot n\cdot[f(x)]^{n-1}\cdot f'(x)} \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$f(x)=2(x^3-x)^5$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}f(x)=2(x^3-x)^5 \Rightarrow f'(x)&=2\cdot5\cdot(x^3-x)^{5-1}\cdot(3x^2-1)\\ &=10\cdot(x^3-x)^4\cdot(3x^2-1) \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK

$f(x)=\sqrt{x^2+x}$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}f(x)=\sqrt{x^2+x} \Rightarrow f(x)&=(x^2+x)^{\frac{1}{2}}\\ \Rightarrow f'(x)&=\frac{1}{2}(x^2+x)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(2x+1)\\ &=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+2}}$ olduğuna göre $f'(5)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2}} \Rightarrow f(x)=\left(x^2+2\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{3}(x^2+2)^{-\frac{4}{3}}\cdot 2x$$

$$\Rightarrow f'(5)=-\frac{1}{3}(5^2+2)^{-\frac{4}{3}}\cdot 2\cdot 5$$

$$=-\frac{1}{3}(27)^{-\frac{4}{3}}\cdot 10$$

$$=-\frac{10}{3}(3^3)^{-\frac{4}{3}}$$

$$=-\frac{10}{3}\cdot 3^{-4}$$

$$=-\frac{10}{243} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$f^3(2x)=x^2+x-3$

olduğuna göre $f'(2)$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f^3(2x)=x^2+x-3$ ifadesinde $x=1$ yazılırsa

$$f^3(2\cdot 1)=1^2+1-3 \Rightarrow f^3(2)=-1$$

$$\Rightarrow f(2)=-1 \text{ olur.}$$

$f^3(2x)=x^2+x-3$ eşitliğinde her iki tarafın türevi alınırsa

$3\cdot f^2(2x)\cdot[f'(2x)\cdot 2]=2x+1$ olur. Bu eşitlikte $x=1$ yazılırsa

$$3\cdot f^2(2)\cdot f'(2)\cdot 2=3$$

$$3\cdot(-1)^2\cdot f'(2)\cdot 2=3$$

$$6\cdot f'(2)=3$$

$$f'(2)=\frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$f(x^2-1)-g(-3x)=x^2-\frac{1}{x}$

olduğuna göre $3g'(6)-4f'(3)$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x^2-1)-g(-3x)=x^2-\frac{1}{x}$ eşitliğinde her iki tarafın türevi alınırsa

$2x\cdot f'(x^2-1)+3g'(-3x)=2x+\frac{1}{x^2}$ olur. Bu eşitlikte $x=-2$ yazılırsa

$-4f'(3)+3g'(6)=-4+\frac{1}{4}\Rightarrow 3g'(6)-4f'(3)=-\frac{15}{4}$ bulunur.

ÖRNEK

- $y=v^2-1$
- $v=x^3-1$

olduğuna göre

a) $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin x türünden eşitini bulunuz.

b) $\frac{dy}{dx}$ ifadesinin $x=2$ için değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

a) $y=v^2-1\Rightarrow\frac{dy}{dv}=2v$

$v=x^3-1\Rightarrow\frac{dv}{dx}=3x^2$

Bu değerler zincir kuralında yerine yazılırsa

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=2v\cdot 3x^2$$
$$=2(x^3-1)\cdot 3x^2$$
$$=6x^5-6x^2 \text{ bulunur.}$$

b) $\frac{dy}{dx}=6x^5-6x^2$ ifadesinde $x=2$ yazılırsa

$$6\cdot 2^5-6\cdot 2^2=192-24$$
$$=168 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

- $y = x^2 - x$
- $t = \sqrt{x+1}$

olduğuna göre $\dfrac{dy}{dt}$ ifadesinin $t = 2$ için değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$y = x^2 - x \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 2x - 1$ olur.

$t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x + 1$

$\Rightarrow x = t^2 - 1$

$\Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = 2t$ olur.

$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dt} = (2x-1) \cdot (2t)$ olur.

$t = 2 \Rightarrow x = 2^2 - 1 = 3$ olur. Bu değerler zincir kuralında yerine yazılırsa

$(2x-1) \cdot (2t) = (2 \cdot 3 - 1) \cdot (2 \cdot 2) = 20$ bulunur.

ÖRNEK

- $y = (u^2+1)^3$
- $u = \sqrt{t-1}$

olduğuna göre $\dfrac{dy}{dt}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$y = (u^2+1)^3 \Rightarrow \dfrac{dy}{du} = 3(u^2+1)^2 \cdot 2u$

$u = (t-1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{2}(t-1)^{-\frac{1}{2}}$ olur.

Bu değerler zincir kuralında yerlerine yazılırsa

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \left(3(u^2+1)^2 \cdot 2u\right) \cdot \left(\frac{1}{2}(t-1)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 3\left((\sqrt{t-1})^2 + 1\right)^2 \cdot \cancel{2\sqrt{t-1}} \cdot \frac{1}{\cancel{2\sqrt{t-1}}} \qquad (u = \sqrt{t-1})$$

$$= 3(t - \cancel{1} + \cancel{1})^2$$

$$= 3t^2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

- $g(x) = ax^2 - 2x$
- $h(x) = x^3 - bx$
- $f(x) = \begin{cases} g(x) & , x < 2 \text{ ise} \\ h(x) & , x \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu $x = 2$ noktasında türevli olduğuna göre $(h \circ g)'(1)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x)$ fonksiyonu $x = 2$ noktasında türevli olduğundan bu noktada sürekli olmalıdır.

Bu durumda $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$ olur.

- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (ax^2 - 2x) = 4a - 4$
- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^3 - bx) = 8 - 2b$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) \Rightarrow 4a - 4 = 8 - 2b$$
$$\Rightarrow 4a + 2b = 12$$
$$\Rightarrow 2a + b = 6 \text{ ....}(1) \text{ olur.}$$

f fonksiyonu $x = 2$ noktasında türevli ise $f'(2^-) = f'(2^+)$ olmalıdır.

- $f'(2^-)$ değerini bulmak için $f(x) = ax^2 - 2x$ seçilir.

$$f(x) = ax^2 - 2x \Rightarrow f'(x) = 2ax - 2$$
$$\Rightarrow f'(2^-) = 4a - 2 \text{ olur.}$$

- $f'(2^+)$ değerini bulmak için $f(x) = x^3 - bx$ seçilir.

$$f(x) = x^3 - bx \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - b$$
$$\Rightarrow f'(2^+) = 12 - b \text{ olur.}$$

$$f'(2^-) = f'(2^+) \Rightarrow 4a - 2 = 12 - b$$
$$\Rightarrow 4a + b = 14 \text{ ....}(2) \text{ olur.}$$

(1) ve (2) denklemleri ortak çözülürse

$$\begin{array}{rl} -1/ & 2a + b = 6 \\ + & 4a + b = 14 \\ \hline & 2a = 8 \Rightarrow a = 4 \text{ olur.} \end{array}$$

$$a = 4 \Rightarrow 4 \cdot 4 + b = 14$$
$$\Rightarrow b = -2 \text{ olur.}$$

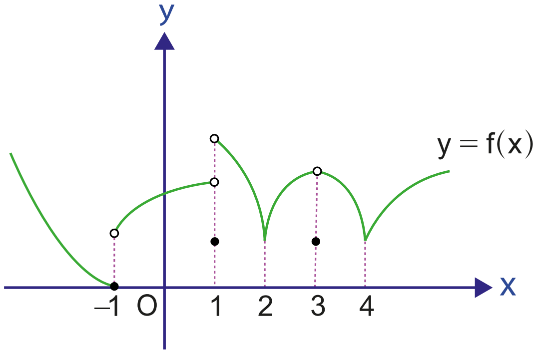
Bu durumda $g(x) = 4x^2 - 2x$ ve $h(x) = x^3 + 2x$ bulunur. Buna göre

$g(x) = 4x^2 - 2x \Rightarrow g'(x) = 8x - 2$ ve $h(x) = x^3 + 2x \Rightarrow h'(x) = 3x^2 + 2$ olur.

$$(h \circ g)'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) \Rightarrow (h \circ g)'(1) = h'(\underbrace{g(1)}_{2}) \cdot \underbrace{g'(1)}_{6}$$
$$= \underbrace{h'(2)}_{14} \cdot 6$$
$$= 84 \text{ bulunur.}$$

Alıştırmalar

1



Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $f(x)$ fonksiyonunun

a) Türevli olmadığı noktaların apsislerini bulunuz.

b) Sürekli olduğu hâlde türevli olmadığı noktaların apsislerini bulunuz.

c) Limiti olduğu hâlde türevli olmadığı noktaların apsislerini bulunuz.

2 $f(x) = \begin{cases} x - 2b & , \quad x < -2 \quad \text{ise} \\ ax^2 - bx & , \quad x \geq -2 \quad \text{ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu $x = -2$ apsisli noktada türevli olduğuna göre b değerini bulunuz.

3 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , \quad x < 1 \quad \text{ise} \\ 2x - 2 & , \quad 1 \leq x < 2 \quad \text{ise} \\ x^3 - 10x & , \quad 2 \leq x \quad \text{ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonunun kaç farklı x değeri için türevli olmadığını bulunuz.

4 $f(x) = \begin{cases} ax - 2b & , \quad x < 3 \quad \text{ise} \\ x^2 - 2ax & , \quad x \geq 3 \quad \text{ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu her x gerçek sayısı için türevlenebilir olduğuna göre b değerini bulunuz.

5 $f(x) = \begin{cases} ax - 2 & , \quad x < 3 \quad \text{ise} \\ bx^2 - 2ax & , \quad x \geq 3 \quad \text{ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu $x = 3$ apsisli noktasında sürekli olduğu hâlde türevli değildir. Buna göre b nin alamayacağı değeri bulunuz.

6 $f(x) = \begin{cases} x^2 - a & , \quad x < 1 \quad \text{ise} \\ bx - 2 & , \quad 1 \leq x < 2 \quad \text{ise} \\ ax^2 - 2bx + c & , \quad 2 \leq x \quad \text{ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu $x = 1$ apsisli noktasında türevli olup $x = 2$ apsisli noktasında sürekli olmadığına göre c nin alamayacağı değeri bulunuz.

7
- $f(x) = x^2$
- $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

olduğuna göre aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a) $(f + g)(x)$ **b)** $(f \cdot g)(x)$

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ **ç)** $(f \circ g)(x)$

8 $f(x)=(x^2-x)(x^3-x+1)$
fonksiyonunun $x=2$ noktasındaki türevinin değerini bulunuz.

9 $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)$
fonksiyonunun türevini bulunuz.

10 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x+1}$
fonksiyonunun $x=-2$ noktasındaki türevinin değerini bulunuz.

11 $f(x)=(x^2-3)^3$
fonksiyonunun türevini bulunuz.

12 $f(x)=\sqrt[3]{x^4-10x}$
olduğuna göre $f'(4)$ değerini bulunuz.

13
- $f(x)=2x^3-x$
- $g(x)=\dfrac{1}{x}-1$

olduğuna göre $(f\circ g)(x)$ fonksiyonunun $x=-1$ noktasındaki türevinin değerini bulunuz.

14
- $x=u^2-1$
- $u=3t-1$

olduğuna göre $\dfrac{dx}{dt}$ ifadesinin $t=1$ için değerini bulunuz.

15
- $y=t+2$
- $u=\sqrt{t}+1$

olduğuna göre $\dfrac{dy}{du}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

16
- $f(x)=x^3-x$
- $g(x)=x^2+x$

olduğuna göre aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

a) $(f+g)'(2)$ **b)** $(f-g)'(-1)$

c) $(f\cdot g)'(-1)$ **ç)** $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(1)$

d) $(f\circ g)'(-2)$ **e)** $(f^2)'(1)+(g^3)'(2)$

17
- $f(x)=ax^2-2ax$
- $g(x)=bx^3+bx$
- $(f+g)'(1)=(f-g)'(2)$

olduğuna göre a ile b arasındaki ilişkiyi bulunuz.

18
- $f(x)=x^2-ax+1$
- $g(x)=\dfrac{f(x+1)}{f(1-x)}$
- $g'(1)=0$

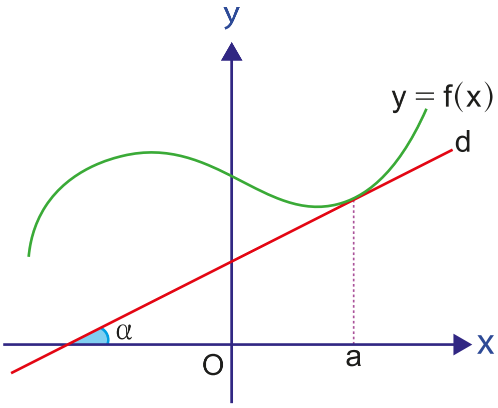
olduğuna göre a nın alabileceği değerler toplamını bulunuz.

19 Pozitif gerçek sayılarda tanımlı f ve g fonksiyonları için
- $f(x^2)=g(3x^2+1)-x^3+4x$
- $g'(13)=2$

olduğuna göre $f'(4)$ değerini bulunuz.

5.3. TÜREVİN UYGULAMALARI

5.3.1. Bir Fonksiyonun Artan veya Azalan Olduğu Aralıklar



Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği ve bu grafiğe $x = a$ apsisli noktasında çizilen teğeti olan d doğrusu verilmiştir. d doğrusu x ekseni ile pozitif yönde α radyanlık açı yapmaktadır.

f fonksiyonunun $x = a$ apsisli noktasındaki türevinin değeri, fonksiyona $x = a$ apsisli noktasında çizilen teğeti olan d doğrusunun eğimine eşittir. d doğrusunun eğimi m_t olmak üzere

$\mathbf{f'(a) = \tan\alpha = m_t}$ olduğu biliniyor.

Bu durumda

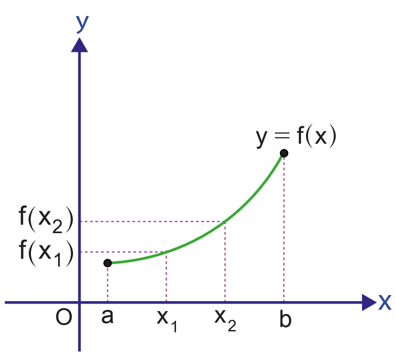
✓ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ise $\tan\alpha > 0$ olacağından $f'(a) > 0$ olur.

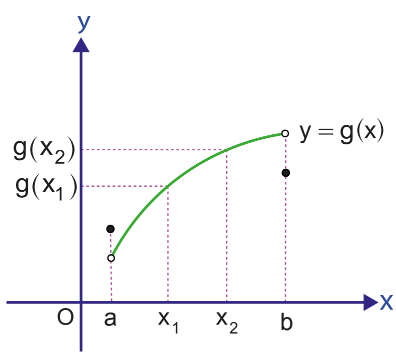
✓ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ise $\tan\alpha < 0$ olacağından $f'(a) < 0$ olur.

Sonuç olarak türevlenebilir bir fonksiyonun grafiğinin üzerindeki bir noktadan çizilen teğetinin x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı;

✓ Dar açı ise teğetin eğimi pozitif ve teğet doğrusu sağa yatık olur.

✓ Geniş açı ise teğetin eğimi negatif ve teğet doğrusu sola yatık olur.





$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ve $[a,b]$ nda sürekli olmak üzere

$\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ için

$x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ olduğundan

f fonksiyonu $[a,b]$ nda artandır.

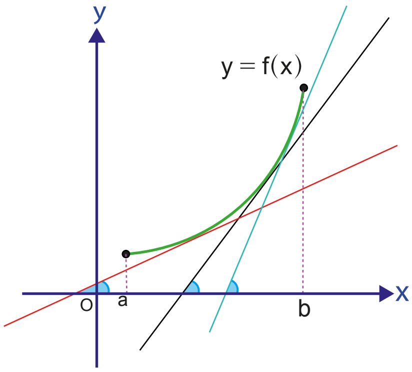
$g:[a,b] \to \mathbb{R}$ ve (a,b) nda sürekli olmak üzere

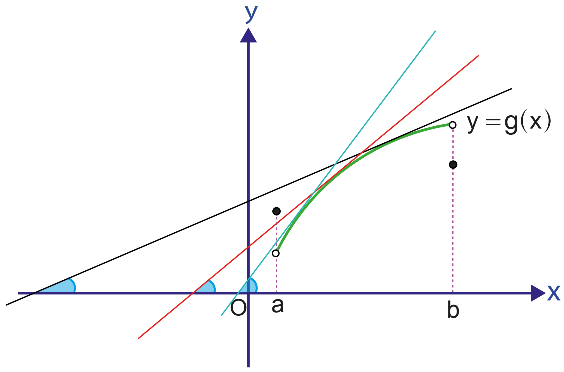
$\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ için

$x_1 < x_2$ iken $g(x_1) < g(x_2)$ olduğundan

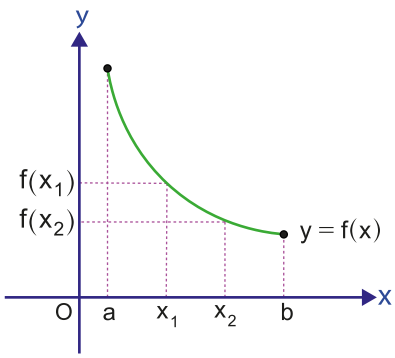
g fonksiyonu (a,b) nda artandır.

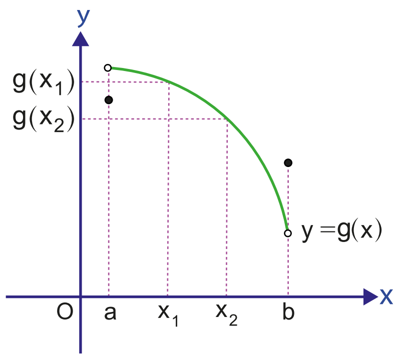
$[a,b]$ nda artan ve (a,b) nda türevlenebilen f fonksiyonu ile (a,b) nda artan ve (a,b) nda türevlenebilen g fonksiyonuna (a,b) nda çizilen teğetleri incelenirse





f ve g fonksiyonlarına (a,b) nda çizilen teğetlerinin x ekseni ile pozitif yönde dar açı yaptıkları görülmektedir. Bu durumda f ve g fonksiyonlarının (a,b) ndaki her noktada türevleri pozitiftir.





$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ve $[a,b]$ nda sürekli olmak üzere

$\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ için

$x_1 < x_2$ iken $f(x_1) > f(x_2)$ olduğundan

f fonksiyonu $[a,b]$ nda azalandır.

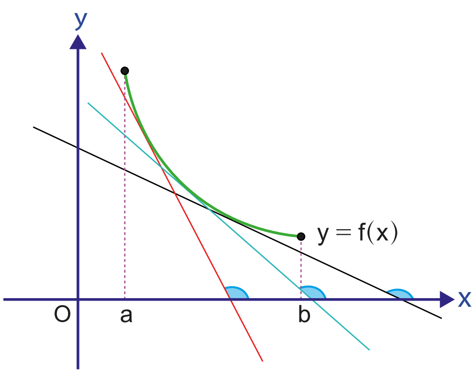
$g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ve (a,b) nda sürekli olmak üzere

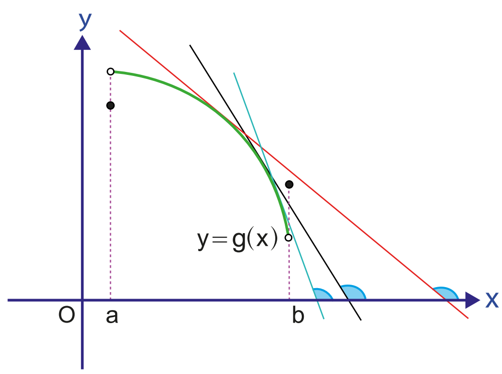
$\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ için

$x_1 < x_2$ iken $g(x_1) > g(x_2)$ olduğundan

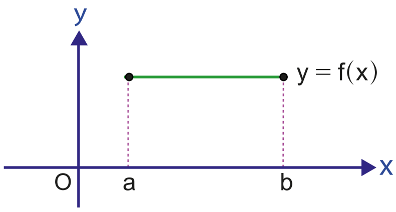
g fonksiyonu (a,b) nda azalandır.

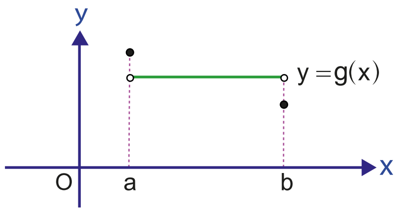
$[a,b]$ nda azalan ve (a,b) nda türevlenebilen f fonksiyonu ile (a,b) nda azalan ve (a,b) nda türevlenebilen g fonksiyonuna (a,b) nda çizilen teğetleri incelenirse





f ve g fonksiyonlarına (a,b) nda çizilen teğetlerinin x ekseni ile pozitif yönde geniş açı yaptıkları görülmektedir. Bu durumda f ve g fonksiyonlarının (a,b) ndaki her noktada türevleri negatiftir.





$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ve $[a,b]$ nda sürekli olmak üzere $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ için $f(x_1)=f(x_2)$ olduğundan f fonksiyonu $[a,b]$ nda sabit fonksiyondur.
f fonksiyonunun (a,b) ndaki her noktada türevi sıfırdır.

$g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ve (a,b) nda sürekli olmak üzere $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ için $g(x_1)=g(x_2)$ olduğundan g fonksiyonu (a,b) nda sabit fonksiyondur.
g fonksiyonunun (a,b) ndaki her noktada türevi sıfırdır.

SONUÇ

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ve f, $[a,b]$ nda sürekli, (a,b) nda türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere

- $\forall x\in(a,b)$ için $f'(x)>0 \Rightarrow f$ fonksiyonu $[a,b]$ nda artandır.
- $\forall x\in(a,b)$ için $f'(x)<0 \Rightarrow f$ fonksiyonu $[a,b]$ nda azalandır.
- $\forall x\in(a,b)$ için $f'(x)=0 \Leftrightarrow f$ fonksiyonu $[a,b]$ nda sabit fonksiyondur.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ve f, (a,b) nda sürekli, (a,b) nda türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere

- $\forall x\in(a,b)$ için $f'(x)>0 \Rightarrow f$ fonksiyonu (a,b) nda artandır.
- $\forall x\in(a,b)$ için $f'(x)<0 \Rightarrow f$ fonksiyonu (a,b) nda azalandır.
- $\forall x\in(a,b)$ için $f'(x)=0 \Leftrightarrow f$ fonksiyonu (a,b) nda sabit fonksiyondur.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2-12x+1$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu en geniş aralıkları bulunuz.

ÇÖZÜM

Türevlenebilir bir fonksiyon; türevinin pozitif olduğu aralıkta artan, negatif olduğu aralıkta azalan olduğundan fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıklar türevinin işaret tablosu incelenerek belirlenir.

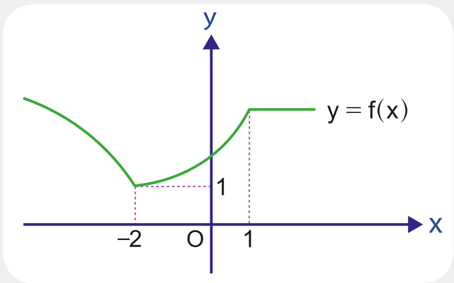
$f(x)=3x^2-12x+1 \Rightarrow f'(x)=6x-12$ olur.
$f'(x)=0$ denkleminin kökü bulunup işaret tablosu yapılarak incelenirse

$f'(x)=0 \Rightarrow 6x-12=0 \Rightarrow x=2$ bulunur.

x	$-\infty$	2	∞
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	azalan ↘		artan ↗

Bu durumda f fonksiyonunun, $(-\infty,2)$ nda türevi negatif olduğundan fonksiyon $(-\infty,2]$ nda azalan ve $(2,\infty)$ nda türevi pozitif olduğundan fonksiyon $[2,\infty)$ nda artandır.

ÖRNEK



Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre aşağıda verilen ifadelerin hangilerinin pozitif hangilerinin negatif olacağını bulunuz.

a) $f'(2) \cdot f'(-1)$

b) $f'(-3) \cdot f'(0)$

c) $f'(-3) - f'(-1)$

ç) $f'(5) - f'(-5)$

d) $\dfrac{f'(-1)}{f'(-4)}$

e) $f'(-2^-) - f'(1^-)$

ÇÖZÜM

f fonksiyonu,

- $(-\infty, -2]$ nda azalan olduğundan $\forall x \in (-\infty, -2)$ için $f'(x) < 0$ olur.
- $[-2, 1]$ nda artan olduğundan $\forall x \in (-2, 1)$ için $f'(x) > 0$ olur.
- $[1, \infty)$ nda sabit fonksiyon olduğundan $\forall x \in (1, \infty)$ için $f'(x) = 0$ olur. Bu durumda

$f'(-5)$, $f'(-4)$, $f'(-3)$ ve $f'(-2^-)$ negatif, $f'(-1)$, $f'(0)$ ve $f'(1^-)$ pozitif, $f'(2) = f'(5) = 0$ olur.

a) $f'(2) = 0$ ve $f'(-1) > 0$ olduğundan $\underbrace{f'(2)}_{0} \cdot \underbrace{f'(-1)}_{+} = 0$ olup pozitif ya da negatif değildir.

b) $f'(-3) < 0$ ve $f'(0) > 0$ olduğundan $\underbrace{f'(-3)}_{-} \cdot \underbrace{f'(0)}_{+} < 0$ olur.

c) $f'(-3) < 0$ ve $f'(-1) > 0$ olduğundan $\underbrace{f'(-3)}_{-} - \underbrace{f'(-1)}_{+} < 0$ olur.

ç) $f'(5) = 0$ ve $f'(-5) < 0$ olduğundan $\underbrace{f'(5)}_{0} - \underbrace{f'(-5)}_{-} > 0$ olur.

d) $f'(-1) > 0$ ve $f'(-4) < 0$ olduğundan $\dfrac{\overbrace{f'(-1)}^{+}}{\underbrace{f'(-4)}_{-}} < 0$ olur.

e) $f'(-2^-) < 0$ ve $f'(1^-) > 0$ olduğundan $\underbrace{f'(-2^-)}_{-} - \underbrace{f'(1^-)}_{+} < 0$ olur.

ÖRNEK

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x^3}{3} - 3x^2 - 8x + 2$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu <u>en geniş</u> aralıkları bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x) = \dfrac{2x^3}{3} - 3x^2 - 8x + 2 \Rightarrow f'(x) = 2x^2 - 6x - 8$ olur.

$f'(x) = 0$ denkleminin kökleri bulunup işaret tablosu yapılarak incelenirse

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Rightarrow 2x^2 - 6x - 8 = 0 \\ &\Rightarrow 2(x^2 - 3x - 4) = 0 \\ &\Rightarrow 2(x-4)(x+1) = 0 \\ &\Rightarrow x = 4 \text{ veya } x = -1 \text{ olur.} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-1		4	∞
$f'(x)$	+		−		+
$f(x)$	artan		azalan		artan

Bu durumda f fonksiyonu $(-\infty, -1] \cup [4, \infty)$ nda artan ve $[-1, 4]$ nda azalandır.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\ f(x)=x^3-2x^2-15x+a$ fonksiyonunun artan olmadığı en geniş aralığı bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x)=x^3-2x^2-15x+a \Rightarrow f'(x)=3x^2-4x-15$ olur.

$f'(x)=0$ denkleminin kökleri bulunup işaret tablosu incelenecek olursa

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-4x-15=0$$
$$\Rightarrow (3x+5)(x-3)=0$$
$$\Rightarrow x=-\frac{5}{3} \text{ veya } x=3 \text{ olur.}$$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		3		∞
f'(x)		+	0	−	0	+	
f(x)		artan		azalan		artan	

Bu durumda $f(x)$ fonksiyonunun artan olmadığı en geniş aralık $\left[-\frac{5}{3},3\right]$ dır.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\ f(x)=x^3-6x^2+12x+5$ fonksiyonunun artan olduğu en geniş aralığı bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x)=x^3-6x^2+12x+5 \Rightarrow f'(x)=3x^2-12x+12$ olur.

$f'(x)=0$ denkleminin kökleri bulunup işaret tablosu yapılarak incelenirse

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-12x+12=0$$
$$\Rightarrow 3(x-2)^2=0$$
$$\Rightarrow x=2 \text{ çift katlı kökü olur.}$$

x	$-\infty$		2		∞
f'(x)		+		+	
f(x)		artan		artan	

Bu durumda f fonksiyonu $\mathbb{R}$ de artandır. Bir başka ifadeyle bu fonksiyon daima artandır.

SONUÇ

Gerçek sayılar kümesinde tanımlı bir $f(x)$ fonksiyonu için $f'(x)=ax^2+bx+c$ olmak üzere

$ax^2+bx+c=0$ denkleminde

- $a>0$ ve $\Delta\leq 0$ ise f fonksiyonu daima artandır.
- $a<0$ ve $\Delta\leq 0$ ise f fonksiyonu daima azalandır.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+(m-1)x^2+3x-1$

fonksiyonunun daima artan olması için m nin alabileceği değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x)=x^3+(m-1)x^2+3x-1 \Rightarrow f'(x)=3x^2+2(m-1)x+3$ olur.

f fonksiyonunun daima artan olması için $f'(x)=0$ denkleminde x^2 nin katsayısı pozitif ve $\Delta\le 0$ olmalıdır. x^2 nin katsayısı olan 3 pozitif olduğundan $\Delta\le 0$ olmalıdır.

$$\begin{aligned}\Delta\le 0 \Rightarrow [2(m-1)]^2-4\cdot 3\cdot 3\le 0 &\Rightarrow 4(m-1)^2-36\le 0\\ &\Rightarrow 4(m-1)^2\le 36\\ &\Rightarrow (m-1)^2\le 9\\ &\Rightarrow |m-1|\le 3\\ &\Rightarrow -3\le m-1\le 3\\ &\Rightarrow -2\le m\le 4 \quad \text{bulunur.}\end{aligned}$$

ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(2-m)x^3-\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}+1$

fonksiyonunun daima azalan olması için m nin alabileceği değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x)=(2-m)x^3-\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}+1 \Rightarrow f'(x)=3\cdot(2-m)x^2-x-\frac{1}{3}$ olur.

f fonksiyonunun daima azalan olması için $f'(x)=0$ ikinci derece denkleminde x^2 nin katsayısı olan $3\cdot(2-m)$ negatif ve $\Delta\le 0$ olmalıdır.

$$\begin{aligned}3(2-m)<0 &\Rightarrow 2-m<0\\ &\Rightarrow 2<m \text{ ....(1) olur.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\le 0 &\Rightarrow (-1)^2-4\cdot 3\cdot(2-m)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\le 0\\ &\Rightarrow 1+8-4m\le 0\\ &\Rightarrow 9\le 4m\\ &\Rightarrow \frac{9}{4}\le m \text{ ....(2) olur.}\end{aligned}$$

(1) ve (2) den $\frac{9}{4}\le m$ bulunur.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, f fonksiyonu tanımlı olduğu aralıkta daima artan olan türevlenebilir bir fonksiyondur. Buna göre aşağıda verilen fonksiyonların hangilerinin artan hangilerinin azalan olduğunu bulunuz.

a) $f^2(x)$ **b)** $\dfrac{1}{f(x)}$ **c)** $f(x^2)$ **ç)** $(f\,o\,f)(x)$

ÇÖZÜM

$f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \Rightarrow x > 0$ ve $f(x) > 0$ olur.

f artan $\Rightarrow f'(x) > 0$ olur.

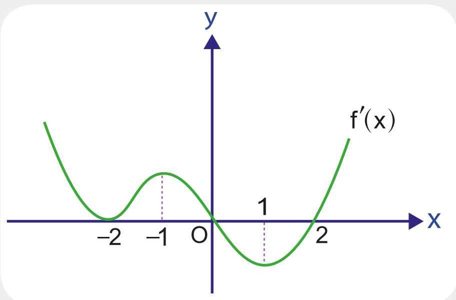
a) $[f^2(x)]' = 2 \cdot \underbrace{f(x)}_{+} \cdot \underbrace{f'(x)}_{+} > 0$ olduğundan $f^2(x)$ artandır.

b) $\dfrac{1}{f(x)} = [f(x)]^{-1} \Rightarrow ([f(x)]^{-1})' = -1 \cdot \underbrace{[f(x)]^{-2}}_{+} \cdot \underbrace{f'(x)}_{+} < 0$ olduğundan $\dfrac{1}{f(x)}$ azalandır.

c) $[f(x^2)]' = \underbrace{2x}_{+} \cdot \underbrace{f'(x^2)}_{+} > 0$ olduğundan $f(x^2)$ artandır.

ç) $(f\,o\,f)(x) = f(f(x)) \Rightarrow [f(f(x))]' = \underbrace{f'(\overbrace{f(x)}^{+})}_{+} \cdot \underbrace{f'(x)}_{+} > 0$ olduğundan $(f\,o\,f)(x)$ artandır.

ÖRNEK



Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir. Buna göre $f(x)$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu en geniş aralıkları bulunuz.

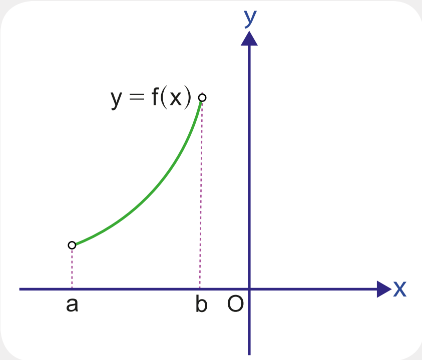
ÇÖZÜM

Grafiği verilen $f'(x)$ fonksiyonunun işaret tablosu yapılarak incelenirse

x	$-\infty$	-2		0		2		∞
$f'(x)$	$+$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	artan		artan		azalan		artan	

f fonksiyonunun, $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$ nda artan ve $[0, 2]$ nda azalan olduğu görülür.

ÖRNEK



Yanda (a, b) nda tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre aşağıda verilen fonksiyonların (a, b) nda artan veya azalan olup olmadıklarını bulunuz.

a) $x \cdot f(x)$ **b)** $f^2(x)$ **c)** $x^2 - f(x)$

ç) $\dfrac{1}{f(x)}$ **d)** $\sqrt{f(x)}$ **e)** $\dfrac{f(x)}{x}$

ÇÖZÜM

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği incelenirse (a, b) nda

$x < 0$

$f(x) > 0$

$f'(x) > 0$

olduğu görülür. Buna göre

a) $(x \cdot f(x))' = \underbrace{f(x)}_{+} + \underbrace{x}_{-} \cdot \underbrace{f'(x)}_{+}$ ifadesinin sonucunun pozitif veya negatif olduğu bilinemez.

Bu durumda $x \cdot f(x)$ fonksiyonunun bu aralıkta artan mı azalan mı olduğu belirlenemez.

b) $\left(f^2(x)\right)' = 2 \cdot \underbrace{f(x)}_{+} \cdot \underbrace{f'(x)}_{+} > 0$ olduğundan $f^2(x)$ fonksiyonu (a, b) nda artandır.

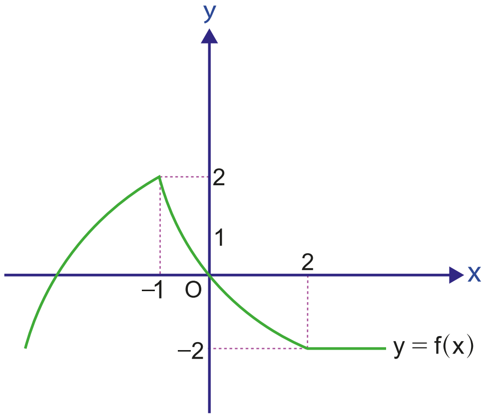
c) $\left(x^2 - f(x)\right)' = 2 \cdot \underbrace{x}_{-} - \underbrace{f'(x)}_{+} < 0$ olduğundan $x^2 - f(x)$ fonksiyonu (a, b) nda azalandır.

ç) $\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)' = -\dfrac{\overbrace{f'(x)}^{+}}{\underbrace{f^2(x)}_{+}} < 0$ olduğundan $\dfrac{1}{f(x)}$ fonksiyonu (a, b) nda azalandır.

d) $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \dfrac{\overbrace{f'(x)}^{+}}{2\underbrace{\sqrt{f(x)}}_{+}} > 0$ olduğundan $\sqrt{f(x)}$ fonksiyonu (a, b) nda artandır.

e) $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = \dfrac{\overbrace{f'(x)}^{+} \cdot \overbrace{x}^{-} - 1 \cdot \overbrace{f(x)}^{+}}{\underbrace{x^2}_{+}} < 0$ olduğundan $\dfrac{f(x)}{x}$ fonksiyonu (a, b) nda azalandır.

1



Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre aşağıdaki ifadelerin işaretlerini bulunuz.

a) $f'(-2) - f'(0)$ **b)** $f'(-1^{-}) - f'(-1^{+})$

c) $f'(1) + f'(3)$ **ç)** $f'(1) - f'(5)$

d) $f'(-2) \cdot f'(1)$ **e)** $f'(2^{-}) - f'(2^{+})$

2 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 8x - 10$

fonksiyonunun artan olduğu en geniş aralığı bulunuz.

3 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x - 5$

fonksiyonunun azalan olduğu en geniş aralığı bulunuz.

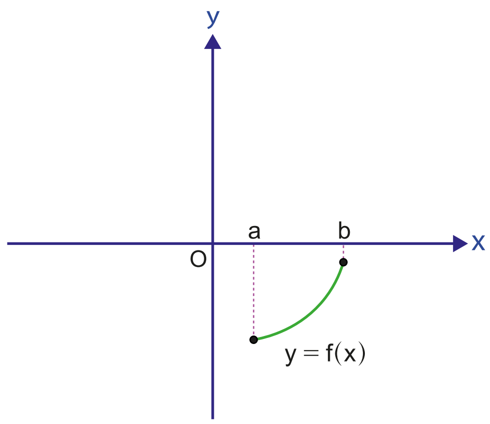
4 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 2ax^2 + ax - 2$

fonksiyonu daima artan olduğuna göre a nın alabileceği değer aralığını bulunuz.

5 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{a}{3}x^3 - (a+2)x^2 - x + 1$

fonksiyonu daima azalan olduğuna göre a nın alabileceği değer aralığını bulunuz.

6



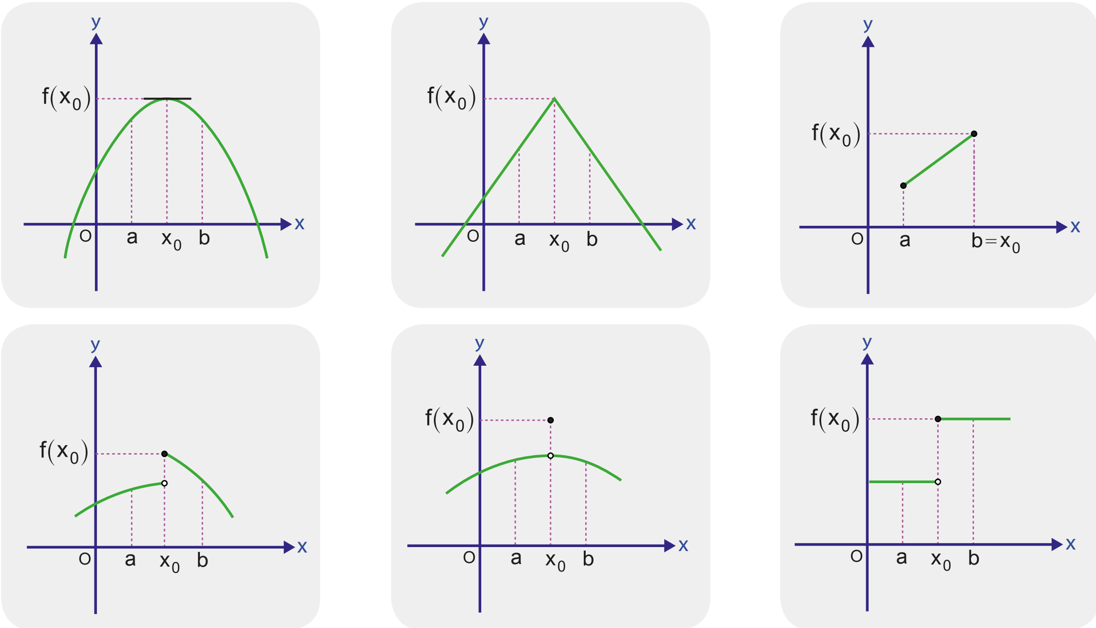
Yukarıda $[a, b]$ nda tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre aşağıda verilen fonksiyonların $[a, b]$ nda artan veya azalan olup olmadıklarını bulunuz.

a) $\frac{f(x)}{x}$ **b)** $f^2(x)$ **c)** $x + f(x)$

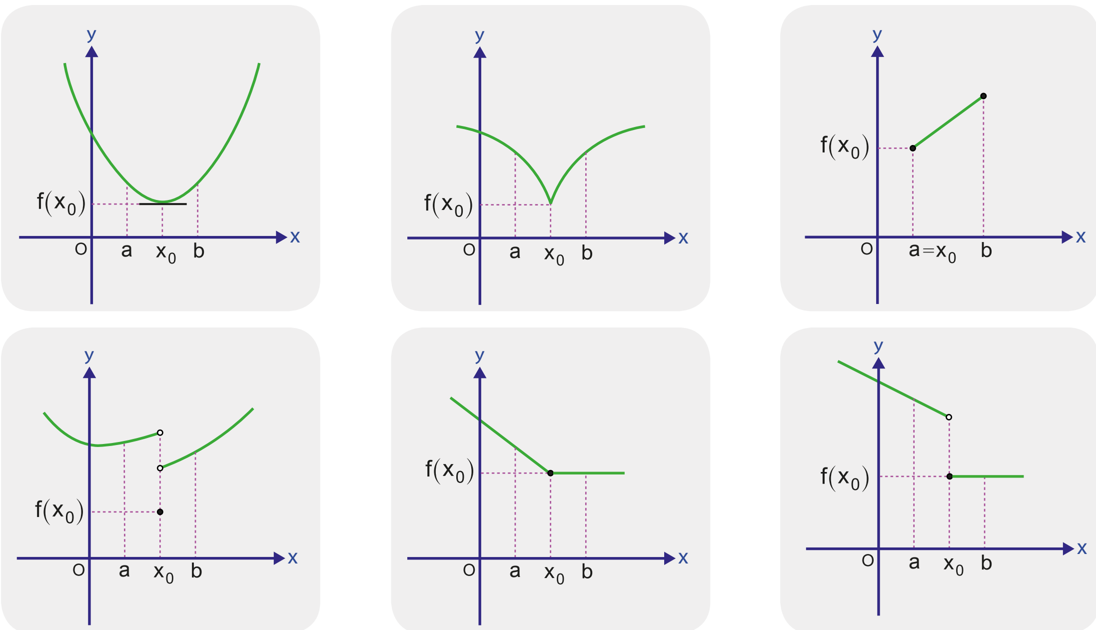
5.3.2. Bir Fonksiyonun Yerel Maksimum ve Yerel Minimum ile Mutlak Maksimum ve Mutlak Minimum Noktaları

✓ $f: A \to \mathbb{R}$ ve $(a,b) \subseteq A$ olmak üzere bir $x_0 \in (a,b)$ için fonksiyonun bu aralıktaki en büyük değeri $f(x_0)$ oluyorsa $(x_0, f(x_0))$ noktasına f fonksiyonunun bir **yerel maksimum noktası** denir.



Yukarıda grafiği verilen fonksiyonların $(x_0, f(x_0))$ noktaları yerel maksimum noktalarıdır.

✓ $f: A \to \mathbb{R}$ ve $(a,b) \subseteq A$ olmak üzere bir $x_0 \in (a,b)$ için fonksiyonun bu aralıktaki en küçük değeri $f(x_0)$ oluyorsa $(x_0, f(x_0))$ noktasına f fonksiyonunun bir **yerel minimum noktası** denir.



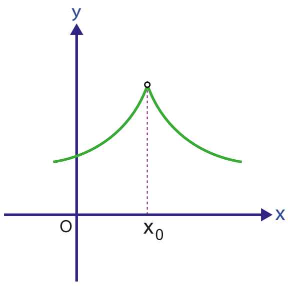
Yukarıda grafiği verilen fonksiyonların $(x_0, f(x_0))$ noktaları yerel minimum noktalarıdır.

✓ Bir fonksiyonun yerel maksimum ve yerel minimum noktalarına genel olarak **ekstremum noktaları** denir.

✓ Bir fonksiyonun tanımlı olduğu aralıktaki en büyük değerini aldığı noktaya **mutlak maksimum noktası,** en büyük değerine ise **mutlak maksimum değeri** denir.

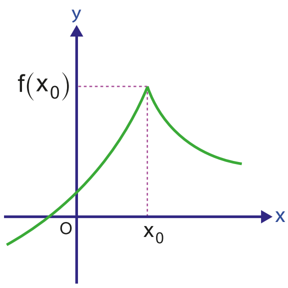
✓ Bir fonksiyonun tanımlı olduğu aralıktaki en küçük değerini aldığı noktaya **mutlak minimum noktası,** en küçük değerine ise **mutlak minimum değeri** denir.

Uyarı

■ 

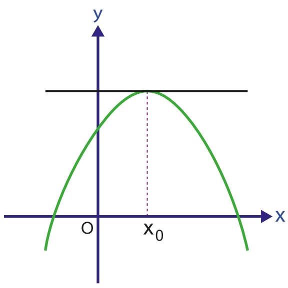
Bir fonksiyonun tanımlı olmadığı noktalarda ekstremum noktası yoktur.

Yanda grafiği verilen fonksiyonun x_0 apsisli noktasında ekstremum noktası yoktur.

■ 

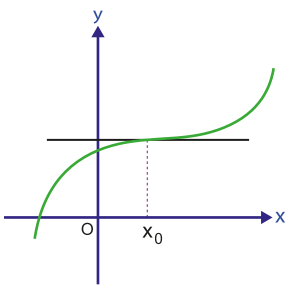
Bir fonksiyonun türevli olmadığı noktalar ekstremum noktaları olabilir.

Yanda grafiği verilen fonksiyonun x_0 noktası kırılma noktası olduğundan fonksiyonun x_0 noktasında türevi yoktur. Ancak fonksiyonun $(x_0, f(x_0))$ noktasında bir yerel maksimumu vardır.

■ 

Türevlenebilir bir fonksiyonun ekstremum noktalarında çizilen teğetleri x eksenine paralel olacağından bu teğetlerin eğimleri sıfırdır. Bu nedenle türevlenebilir bir fonksiyonun, ekstremum noktalarında türevi sıfırdır.

Yanda grafiği verilen fonksiyonun x_0 apsisli noktasında bir ekstremum noktası vardır. Burada $f'(x_0) = 0$ olur.

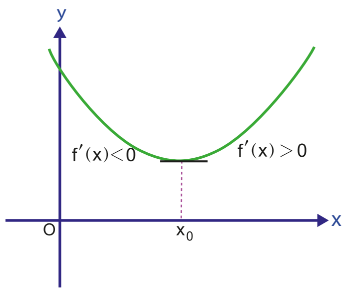
■ 

Türevlenebilir bir fonksiyonun türevinin sıfır olduğu her nokta ekstremum noktası olmak zorunda değildir.

Yanda grafiği verilen fonksiyonun x_0 apsisli noktasındaki teğetinin eğimi sıfır $(f'(x_0) = 0)$ olmasına rağmen bu nokta ekstremum noktası değildir.

SONUÇ

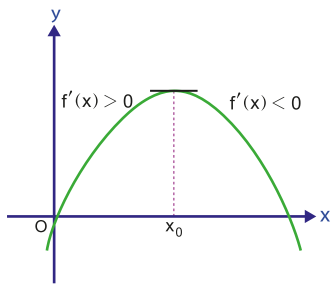
Bir fonksiyonun türevinin sıfır olduğu noktanın ekstremum noktası olabilmesi için fonksiyonun türevinin o noktada işaret değiştirmesi gerekir.



Yanda grafiği verilen f fonksiyonunun türevi, x_0 noktasının solunda negatif, sağında pozitif olduğundan fonksiyonun x_0 noktasında bir yerel minimumu vardır.

Bir başka ifadeyle f fonksiyonunun x_0 noktasının solunda azalan ve sağında artan olduğu görülmektedir.

Bir fonksiyonun azalanlıktan artanlığa geçtiği noktaya **yerel minimum noktası** denir.

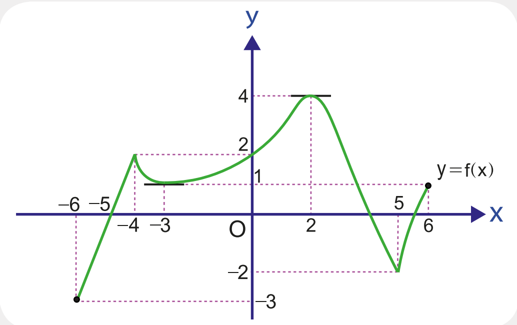


Yanda grafiği verilen fonksiyonun türevi, x_0 noktasının solunda pozitif, sağında negatif olduğundan fonksiyonun x_0 noktasında bir yerel maksimumu vardır.

Bir başka ifadeyle f fonksiyonunun x_0 noktasının solunda artan ve sağında azalan olduğu görülmektedir.

Bir fonksiyonun artanlıktan azalanlığa geçtiği noktaya **yerel maksimum noktası** denir.

ÖRNEK



Yanda $[-6, 6]$ nda tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre bu fonksiyonun yerel maksimum, yerel minimum, mutlak minimum ve mutlak maksimum noktalarını bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen fonksiyonun grafiği incelendiğinde

- $(-4, 2)$, $(2, 4)$ ve $(6, 1)$ noktaları fonksiyonun yerel maksimum noktalarıdır.

  $(2, 4)$ noktasında fonksiyon en büyük değerini aldığından bu nokta aynı zamanda fonksiyonun mutlak maksimum noktasıdır.

- $(-6, -3)$, $(-3, 1)$ ve $(5, -2)$ noktaları fonksiyonun yerel minimum noktalarıdır.

  $(-6, -3)$ noktasında fonksiyon en küçük değerini aldığından bu nokta aynı zamanda fonksiyonun mutlak minimum noktasıdır.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\ f(x)=x^3-3x^2+3$ fonksiyonunun ekstremum noktalarını bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x)=x^3-3x^2+3 \Rightarrow f'(x)=3x^2-6x$ olur.

$f(x)$ polinom fonksiyonu olduğundan her x gerçek sayısı için türevlidir. O hâlde $f'(x)=0$ denkleminin köklerinde $f'(x)$ işaret değiştiriyorsa $f'(x)=0$ denkleminin kökleri f fonksiyonunun ekstremum noktalarının apsisleridir.

$$\begin{aligned} f'(x)=0 &\Rightarrow 3x^2-6x=0 \\ &\Rightarrow 3x(x-2)=0 \\ &\Rightarrow x=0 \text{ veya } x=2 \text{ olur.} \end{aligned}$$

x	$-\infty$		0		2		∞
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		↗ artan	maks.	↘ azalan	min.	↗ artan	

$f(x)$ fonksiyonunun türevinin işaret tablosu incelenirse $f(x)$ fonksiyonunun $x=0$ da bir maksimumu ve $x=2$ de bir minimumu vardır.

$x=0$ maksimum noktasının apsisi olduğundan $f(0)=3$ fonksiyonun maksimum değeridir.
$x=2$ minimum noktasının apsisi olduğundan $f(2)=-1$ fonksiyonun minimum değeridir.

Bu durumda $(0,3)$ noktası fonksiyonun maksimum noktası ve $(2,-1)$ noktası fonksiyonun minimum noktasıdır. Bu iki nokta fonksiyonun ekstremum noktalarıdır.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R},\ f(x)=x^3+3x^2-5x+2$ fonksiyonunun ekstremum noktalarının apsisleri toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x)=x^3+3x^2-5x+2 \Rightarrow f'(x)=3x^2+6x-5$ olur.

$f(x)$ polinom fonksiyonu olduğundan her x gerçek sayısı için türevlidir. O hâlde $f'(x)=0$ denkleminin köklerinde $f'(x)$ işaret değiştiriyorsa $f'(x)=0$ denkleminin kökleri f fonksiyonunun ekstremum noktalarının apsisleridir.

$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+6x-5=0$ olur.

$$\begin{aligned} 3x^2+6x-5=0 \Rightarrow \Delta &= b^2-4ac \\ &= 6^2-4\cdot 3\cdot(-5) \\ &= 96 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		x_1		x_2		∞
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		↗ artan	maks.	↘ azalan	min.	↗ artan	

Bu denklemin diskriminantı pozitif olduğundan denklemin x_1 ve x_2 gibi iki farklı gerçek kökü vardır. $f(x)$ fonksiyonunun türevinin işaret tablosu incelenirse $f(x)$ fonksiyonun ekstremum noktalarının apsislerinin x_1 ve x_2 olduğu görülür. Bu durumda f fonksiyonunun ekstremum noktalarının apsisleri toplamı $3x^2+6x-5=0$ denkleminin köklerinin toplamıdır. Buna göre

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{6}{3}=-2$ bulunur.

ÖRNEK

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 2$ fonksiyonunun ekstremum noktalarının sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 4x + 3$ olur.

$f(x)$ polinom fonksiyonu her x gerçek sayısı için türevli olduğundan $f(x)$ fonksiyonunun ekstremum noktaları varsa bu noktalarda türevi sıfır olmalıdır.

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 4x + 3 = 0$ olur.

$$\begin{aligned} 3x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 \\ &= -20 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Bu denklemin diskriminantı negatif olduğundan fonksiyonun türevinin kökü yoktur. O hâlde fonksiyonun ekstremum noktası yoktur.

Böylece verilen fonksiyonun ekstremum noktalarının sayısı 0 olarak bulunur.

ÖRNEK

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^3 + 3x^2 + x - 2$ fonksiyonunun varsa ekstremum noktalarını bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x) = 3x^3 + 3x^2 + x - 2 \Rightarrow f'(x) = 9x^2 + 6x + 1$ olur.

$f(x)$ polinom fonksiyonu her x gerçek sayısı için türevli olduğundan $f(x)$ fonksiyonunun ekstremum noktaları varsa bu noktalarda türevi sıfır olmalıdır.

$f'(x) = 0 \Rightarrow 9x^2 + 6x + 1 = 0$ olur.

$$\begin{aligned} 9x^2 + 6x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 6^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 \\ &= 0 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	∞
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	↗ artan		↗ artan

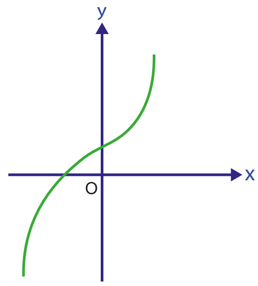
Bu denklemin diskriminantı sıfır olup $x = -\frac{1}{3}$ denklemin çift katlı köküdür.

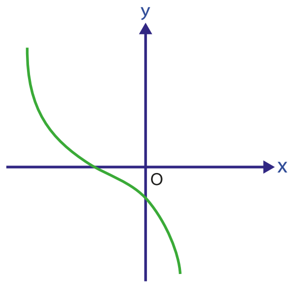
$f(x)$ fonksiyonunun türevinin işaret tablosu incelenirse $f(x)$ fonksiyonunun türevi $x = -\frac{1}{3}$ te işaret değiştirmediğinden bu nokta ekstremum noktası değildir.

O hâlde fonksiyonun ekstremum noktası yoktur.

SONUÇ

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)$ polinom fonksiyonu olmak üzere

- $f'(x) = 0$ denkleminin kökü yoksa ya da yalnızca çift katlı kökü varsa $f(x)$ fonksiyonu daima artan ya da daima azalan olur. Daima artan ya da daima azalan fonksiyonların ekstremum noktaları yoktur.
- 



Yukarıda daima artan ve daima azalan fonksiyonların grafiklerine örnek verilmiştir. Grafikler incelendiğinde ekstremum noktası olmayan yani daima artan ve daima azalan fonksiyonların bire bir ve örten olduğu görülür.

ÖRNEK

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2 + ax + 3$ fonksiyonu bire bir ve örten olduğuna göre a nın alabileceği en geniş değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x)$ polinom fonksiyonu olduğundan her x gerçek sayısı için türevlenebilir bir fonksiyondur.

$f(x)$ fonksiyonu bire bir örten olduğundan ekstremum noktası olmamalıdır.

$f(x)$ fonksiyonunun ekstremum noktası olmadığından daima artan ya da daima azalan olur.

O hâlde $f'(x) = 0$ denkleminin ya çift katlı kökü olmalıdır ya da kökü olmamalıdır. Bu durum $\Delta \le 0$ olması hâlinde gerçekleşir.

$f(x) = x^3 - x^2 + ax + 3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2x + a$ olur.

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x + a = 0$ olur.

$$3x^2 - 2x + a = 0 \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot a$$
$$= 4 - 12a \text{ olur.}$$

$$\Delta \le 0 \Rightarrow 4 - 12a \le 0$$
$$\Rightarrow 4 \le 12a$$
$$\Rightarrow \frac{1}{3} \le a \text{ olur.}$$

Bu durumda a nın alabileceği en geniş değer aralığı $\left[\frac{1}{3}, \infty\right)$ olur.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+mx^2+nx+1$ fonksiyonunun ekstremum noktalarından biri $A(1,3)$ olduğuna göre diğer ekstremum noktasının apsisini bulunuz.

ÇÖZÜM

$A(1,3)$ noktası $f(x)$ fonksiyonunun grafiği üzerinde olduğundan $f(1)=3$ olur.

$$f(x)=x^3+mx^2+nx+1 \Rightarrow f(1)=1^3+m\cdot 1^2+n\cdot 1+1$$
$$3=m+n+2$$
$$m+n=1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \text{ olur.}$$

$A(1,3)$ noktası türevlenebilir $f(x)$ fonksiyonunun bir ekstremum noktası olduğundan bu noktada fonksiyonun türevi sıfırdır. $f'(1)=0$ olur.

$$f(x)=x^3+mx^2+nx+1 \Rightarrow f'(x)=3x^2+2mx+n$$
$$\Rightarrow f'(1)=3\cdot 1^2+2m\cdot 1+n$$
$$0=3+2m+n$$
$$2m+n=-3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \text{ olur.}$$

(1) ve (2) denklemleri ortak çözülürse

$$\begin{array}{rl} -1/ & m+n=1 \\ + & 2m+n=-3 \\ \hline & m=-4 \text{ olur.} \end{array}$$

$$m=-4 \Rightarrow -4+n=1$$
$$n=5 \text{ olur.}$$

$f'(x)=3x^2+2mx+n \Rightarrow f'(x)=3x^2-8x+5$ olur.

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-8x+5=0$$
$$\Rightarrow (3x-5)(x-1)=0$$
$$\Rightarrow x=\frac{5}{3} \text{ veya } x=1 \text{ olur.}$$

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{3}$		∞
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	maks.	↘	min.	↗	

Bu durumda $f(x)$ fonksiyonunun diğer ekstremum noktasının apsisi $x=\frac{5}{3}$ bulunur.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-ax^2+bx-1$ fonksiyonuna $x=1$ apsisli noktasında çizilen teğeti, x ekseni ile pozitif yönde 135° lik açı yapmaktadır. f fonksiyonunun $x=2$ apsisli noktası bir ekstremum noktası olduğuna göre $a+b$ toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

f fonksiyonuna $x=1$ apsisli noktasından çizilen teğeti x ekseni ile pozitif yönde 135° lik açı yaptığından $f'(1)=\tan 135^\circ=-1$ olur.

f fonksiyonunun $x=2$ apsisli noktasında bir ekstremum noktası olduğundan $f'(2)=0$ olur.

$f(x)=x^3-ax^2+bx-1 \Rightarrow f'(x)=3x^2-2ax+b$

$f'(1)=\tan 135^\circ \Rightarrow 3-2a+b=-1$

$\Rightarrow 2a-b=4$ ....(1) olur.

$f'(2)=0 \Rightarrow 12-4a+b=0$

$\Rightarrow 4a-b=12$ ....(2) olur.

(1) ve (2) denklemleri ortak çözülürse

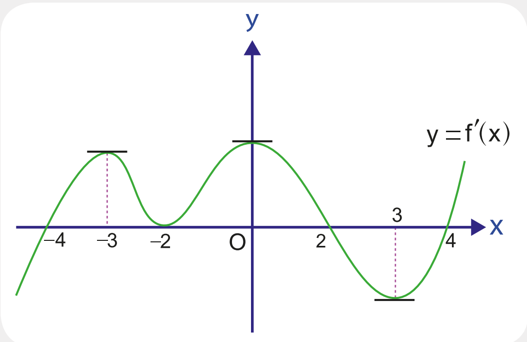
$$\begin{array}{rl} -1/ & 2a-b=4 \\ + & 4a-b=12 \\ \hline & 2a=8 \Rightarrow a=4 \text{ olur.} \end{array}$$

$a=4 \Rightarrow 2\cdot 4-b=4$

$b=4$ olur.

Bu durumda $a+b=8$ bulunur.

ÖRNEK



Yanda $y=f(x)$ fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir. Buna göre $f(x)$ fonksiyonunun yerel maksimum ve yerel minimum noktalarının apsislerini bulunuz.

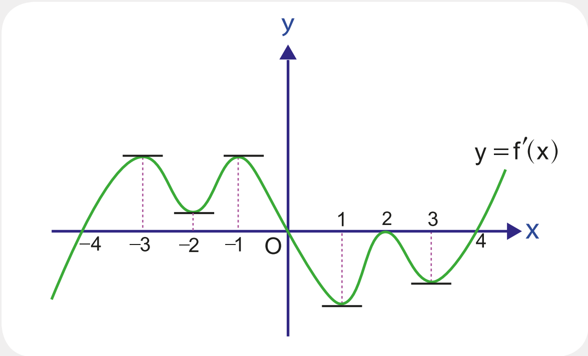
ÇÖZÜM

x	$-\infty$		-4		-2		2		4		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	min.	$\nearrow$		$\nearrow$	maks.	$\searrow$	min.	$\nearrow$	

f fonksiyonunun türevinin işaret tablosu incelenirse

- yerel minimum noktalarının apsisleri -4 ve 4 olur.
- Yerel maksimum noktasının apsisi 2 olur.

ÖRNEK



Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.

Bu grafiğe göre

I. f fonksiyonu $(1, 3)$ nda azalandır.

II. $f\left(-\frac{7}{2}\right) < f\left(-\frac{5}{2}\right) < f\left(-\frac{1}{2}\right)$ dir.

III. f fonksiyonunun $x = -2$, $x = 1$ ve $x = 3$ apsisli noktalarında yerel minimumu vardır.

IV. f fonksiyonunun 3 tane ekstremum noktası vardır.

ifadelerinden hangilerinin doğru olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

x	$-\infty$		-4		0		2		4		∞
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$	min.	$\nearrow$	maks.	$\searrow$		$\searrow$	min.	$\nearrow$	

f fonksiyonunun türevinin işaret tablosu incelenirse fonksiyonun
$(-\infty, -4] \cup [0, 4]$ nda azalan
$[-4, 0] \cup [4, \infty)$ nda artan
olduğu görülür.

I. $(1, 3)$ aralığı f fonksiyonunun azalan olduğu $(-\infty, -4] \cup [0, 4]$ nın alt kümesi olduğundan f fonksiyonu $(1, 3)$ nda azalandır.

II. $-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}$ ve $-\frac{1}{2}$ noktaları f fonksiyonunun artan olduğu $[-4, 0]$ alt aralığında bulunduklarından $f\left(-\frac{7}{2}\right) < f\left(-\frac{5}{2}\right) < f\left(-\frac{1}{2}\right)$ olur.

III. f fonksiyonunun türevinin işaret tablosu incelendiğinde $x = -4$ ve $x = 4$ apsisli noktalarında yerel minimum noktası vardır.

IV. f fonksiyonunun türevinin işaret tablosu incelendiğinde $x = -4$, $x = 0$ ve $x = 4$ apsisli noktalarında olmak üzere 3 tane ekstremum noktası vardır.

Bu durumda I, II ve IV doğrudur.

ÖRNEK

$f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + 24$

fonksiyonunun grafiğini Dinamik Geometri ve Matematik Yazılımı programında çizerek fonksiyonun ekstremum noktalarını ve değerlerini araştırınız.

ÇÖZÜM

Dinamik Geometri ve Matematik Yazılımı programını açınız.

1. Adım: Ekrana gelen görüntüdeki giriş kısmına $3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + 24$ yazıldığında grafik çizilir.

2. Adım: Giriş kısmına **f'** yazılır ve enter tuşuna basılırsa türev fonksiyonu ve grafiği görüntülenir.

3. Adım: Giriş kısmına kök yazılır ekranda görünen kök (< polinom >) seçilir ve **kök (f')** biçiminde yazılarak enter tuşuna basılırsa f fonksiyonunun türevinin kökleri cebir penceresinde ve grafikte görünür.

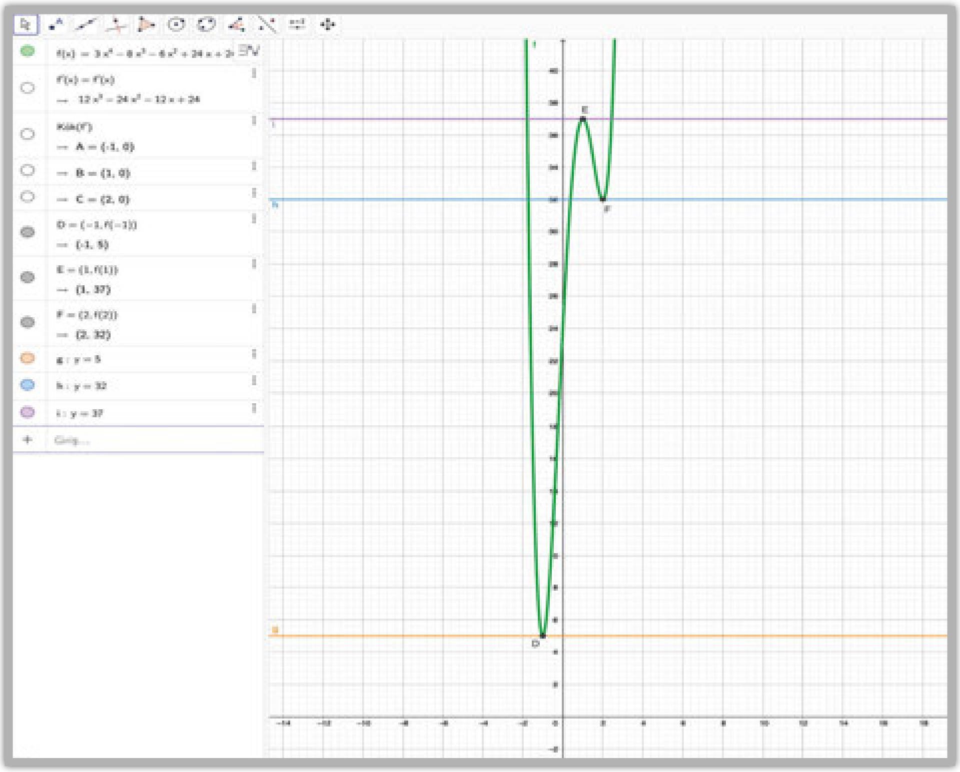
4. Adım: Türevin grafiğinin ve köklerinin grafikte görünmemesi için giriş kısmında yanlarındaki ● simgelerine tıklayarak görünmez yapınız ve sol üstteki ok simgesine tıklayınız.

5. Adım: Türevin kökleri olan $x = -1$, $x = 1$ ve $x = 2$ fonksiyonun ekstremum noktalarının apsisleri olacağından giriş bölümüne tek tek $(-1, f(-1))$, $(1, f(1))$ ve $(2, f(2))$ yazılarak fonksiyonun ekstremum noktaları cebir penceresi ve grafik üzerinde görüntülenir.

Grafik incelenirse

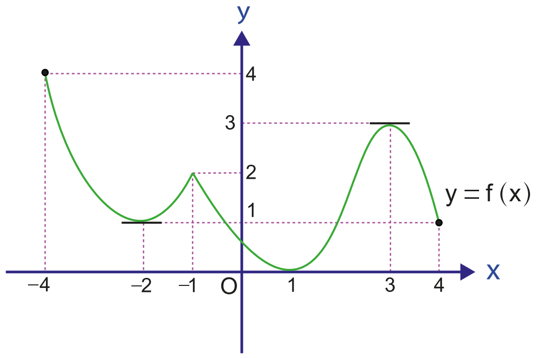
$(-1, 5)$ noktasınının mutlak minimum noktası ve mutlak minimum değerinin 5,
$(1, 37)$ noktasınının yerel maksimum noktası ve yerel maksimum değerinin 37 ve
$(2, 32)$ noktasınının yerel minimum noktası ve yerel minimum değerinin 32 olduğu görülür.

Ayrıca $y = 5$, $y = 32$ ve $y = 37$ doğruları giriş kısmına tek tek yazılır ve grafikleri çizilirse bu doğruların fonksiyonun grafiğine ekstremum noktalarında teğet olduğu görülür.



Alıştırmalar

1



Yukarıda $[-4,4]$ nda tanımlı $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre

a) f fonksiyonunun yerel minimum noktalarının apsislerini bulunuz.

b) f fonksiyonunun yerel maksimum noktalarının apsislerini bulunuz.

c) f fonksiyonunun mutlak maksimum ve mutlak minimum noktalarının apsislerinin toplamını bulunuz.

ç) f fonksiyonunun mutlak maksimum değeri ile mutlak minimum değerinin farkını bulunuz.

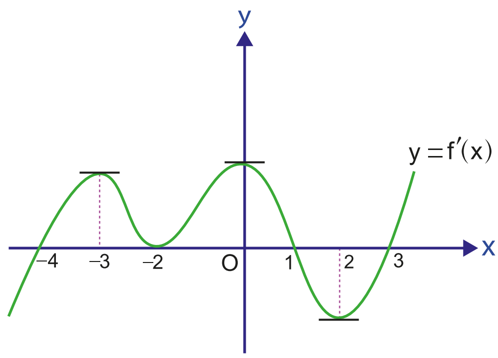
2 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^3-4x^2+2x-2$ fonksiyonunun ekstremum noktalarını bulunuz.

3 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x^3}{3}-3x^2+8x+k$ fonksiyonunun yerel minimum değeri $\dfrac{22}{3}$ olduğuna göre k değerini bulunuz.

4 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^3-mx^2+nx-2$ fonksiyonunun ekstremum noktalarından biri $A(-1,2)$ olduğuna göre diğer ekstremum noktasını bulunuz.

5 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^3+ax^2-bx-2$ fonksiyonuna $x=-1$ apsisli noktasından çizilen teğeti, x ekseni ile pozitif yönde 45° lik açı yapmaktadır. f fonksiyonunun $x=1$ noktasında bir ekstremumu olduğuna göre $\dfrac{b}{a}$ oranını bulunuz.

6



Yukarıda $y=f(x)$ fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir. Buna göre

a) f fonksiyonunun yerel minimum noktalarının apsislerini bulunuz.

b) f fonksiyonunun yerel maksimum noktasının apsisini bulunuz.

5.3.3. Türev Yardımıyla Bir Fonksiyonun Grafiğinin Çizimi

- ✓ Bir fonksiyonun grafiği çizilirken tanım kümesine dikkat edilmelidir. Bu bölümde yalnızca polinom fonksiyonlarının grafikleri çizileceğinden polinom fonksiyonlarının en geniş tanım kümesi olan gerçek sayılar kümesinde grafik çizimi yapılacaktır.
- ✓ Fonksiyonun eksenleri kestiği noktalara bakılmalıdır. $f(x)=0$ denkleminin tek katlı köklerinde grafik x eksenini keserken çift katlı köklerinde x eksenine teğet olacaktır.
- ✓ Fonksiyonun türevi yardımıyla varsa ekstremum noktaları bulunmalı ve artan ile azalanlık durumları incelenmelidir.

ÖRNEK

$f(x)=x^3-3x^2$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

Öncelikle fonksiyonun eksenleri kestiği noktalar araştırılır.

$x=0 \Rightarrow f(0)=0$ (y eksenini $(0,0)$ noktasında keser.)

$$y=0 \Rightarrow x^3-3x^2=0$$
$$\Rightarrow x^2\cdot(x-3)=0$$
$$\Rightarrow x^2=0 \text{ veya } x-3=0$$
$$\Rightarrow \underbrace{x=0}_{\text{çift kat kök}} \text{ veya } x=3$$

(x eksenini $(3,0)$ noktasında keser.)

(x eksenine $(0,0)$ noktasında teğettir.)

f fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıklar ile ekstremum noktaları incelenirse

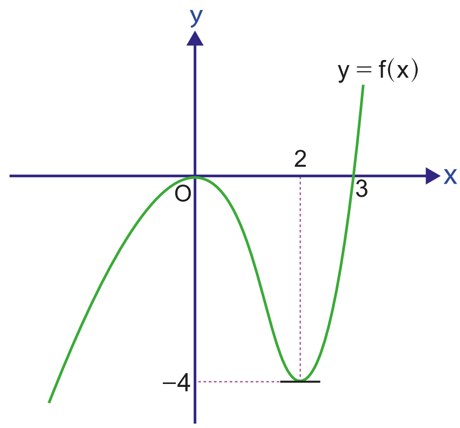
$$f(x)=x^3-3x^2 \Rightarrow f'(x)=3x^2-6x$$
$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-6x=0$$
$$\Rightarrow 3x\cdot(x-2)=0$$
$$\Rightarrow x=0 \text{ veya } x=2 \text{ olur.}$$

x	$-\infty$		0		2		∞
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		artan	maks.	azalan	min.	artan	

$f(x)$ fonksiyonunun türevinin işaret tablosuna göre

- $f(x)$ fonksiyonu $(-\infty,0]\cup[2,\infty)$ nda artandır.
- $f(x)$ fonksiyonu $[0,2]$ nda azalandır.
- $f(x)$ fonksiyonunun $x=0$ da bir maksimumu vardır ve maksimum değeri $f(0)=0$ olur.
- $f(x)$ fonksiyonunun $x=2$ de bir minimumu vardır ve minimum değeri $f(2)=-4$ olur.

Bu bilgilere göre $f(x)=x^3-3x^2$ fonksiyonunun grafiği yandaki gibi çizilir.



ÖRNEK

$f(x)=(x-2)(x^2+2x+1)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

Öncelikle fonksiyonun eksenleri kestiği noktalar araştırılır.

$x=0 \Rightarrow f(0)=-2$ (y eksenini $(0,-2)$ noktasında keser.)

$$
\begin{aligned}
y=0 &\Rightarrow (x-2)(x^2+2x+1)=0\\
&\Rightarrow (x-2)(x+1)^2=0\\
&\Rightarrow x-2=0 \text{ veya } (x+1)^2=0\\
&\Rightarrow x=2 \text{ veya } \underbrace{x=-1}_{\text{çift kat kök}}
\end{aligned}
$$

(x eksenini $(2,0)$ noktasında keser.)

(x eksenine $(-1,0)$ noktasında teğettir.)

f fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıklar ile ekstremum noktaları incelenirse

$$
\begin{aligned}
f(x)=(x-2)(x^2+2x+1) &\Rightarrow f(x)=x^3-3x-2\\
&\Rightarrow f'(x)=3x^2-3 \text{ olur.}
\end{aligned}
$$

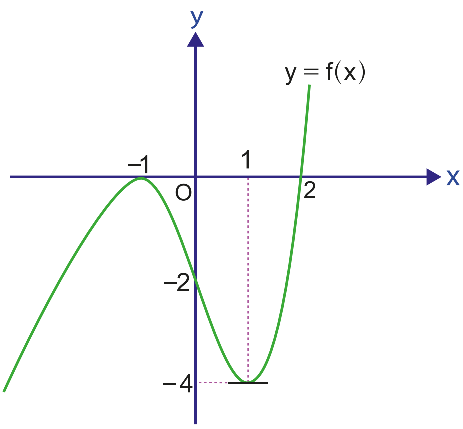
$$
\begin{aligned}
f'(x)=0 &\Rightarrow 3x^2-3=0\\
&\Rightarrow x^2=1\\
&\Rightarrow x=-1 \text{ veya } x=1 \text{ olur.}
\end{aligned}
$$

x	$-\infty$		-1		1		∞
$f'(x)$		+		−		+	
$f(x)$		$\nearrow$ artan	maks.	$\searrow$ azalan	min.	$\nearrow$ artan	

$f(x)$ fonksiyonunun türevinin işaret tablosuna göre

- $f(x)$ fonksiyonu $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ nda artandır.
- $f(x)$ fonksiyonu $[-1,1]$ nda azalandır.
- $f(x)$ fonksiyonunun $x=-1$ de bir maksimumu vardır ve maksimum değeri $f(-1)=0$ olur.
- $f(x)$ fonksiyonunun $x=1$ de bir minimumu vardır ve minimum değeri $f(1)=-4$ olur.

Bu bilgilere göre $f(x)=(x-2)(x^2+2x+1)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibi çizilir.



ÖRNEK

$f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

Öncelikle fonksiyonun eksenleri kestiği noktalar araştırılır.

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 4$ (y eksenini $(0,4)$ noktasında keser.)

$f(x) = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 1 = 0$ veya $x^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow (x = -1 \vee x = 1)$ veya $(x = -2 \vee x = 2)$ olur. (x eksenini $(-2,0)$, $(-1,0)$, $(1,0)$ ve $(2,0)$ noktalarında keser.)

f fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıklar ile ekstremum noktaları incelenirse

$f(x) = (x^2 - 1)\cdot(x^2 - 4) \Rightarrow f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

$\Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 10x$ olur.

$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 10x = 0$

$\Rightarrow x\cdot(4x^2 - 10) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ veya $4x^2 - 10 = 0$

$\Rightarrow x = 0 \vee x = -\dfrac{\sqrt{10}}{2} \vee x = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ olur.

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{10}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{10}}{2}$		∞
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		azalan	min.	artan	maks.	azalan	min.	artan	

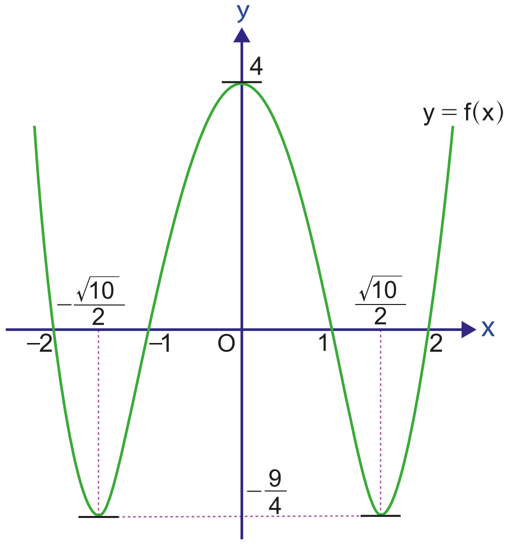
$f(x)$ fonksiyonunun türevinin işaret tablosuna göre

- $f(x)$ fonksiyonu $\left[-\dfrac{\sqrt{10}}{2}, 0\right] \cup \left[\dfrac{\sqrt{10}}{2}, \infty\right)$ nda artandır.
- $f(x)$ fonksiyonu $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right] \cup \left[0, \dfrac{\sqrt{10}}{2}\right]$ nda azalandır.
- $f(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ da bir maksimumu vardır ve maksimum değeri $f(0) = 4$ olur.
- $f(x)$ fonksiyonunun $x = -\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ ve $x = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ de minimumları vardır ve minimum değerleri

$f\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right) = -\dfrac{9}{4}$ ve $f\left(\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right) = -\dfrac{9}{4}$ olur.

Bu bilgilere göre $f(x) = (x^2 - 1)\cdot(x^2 - 4)$

fonksiyonunun grafiği yandaki gibi çizilir.



ÖRNEK

Türev yardımıyla daha önce grafikleri çizilen aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini, Dinamik Geometri ve Matematik Yazılımı programından yararlanarak çiziniz.

a) $f(x)=x^3-3x^2$

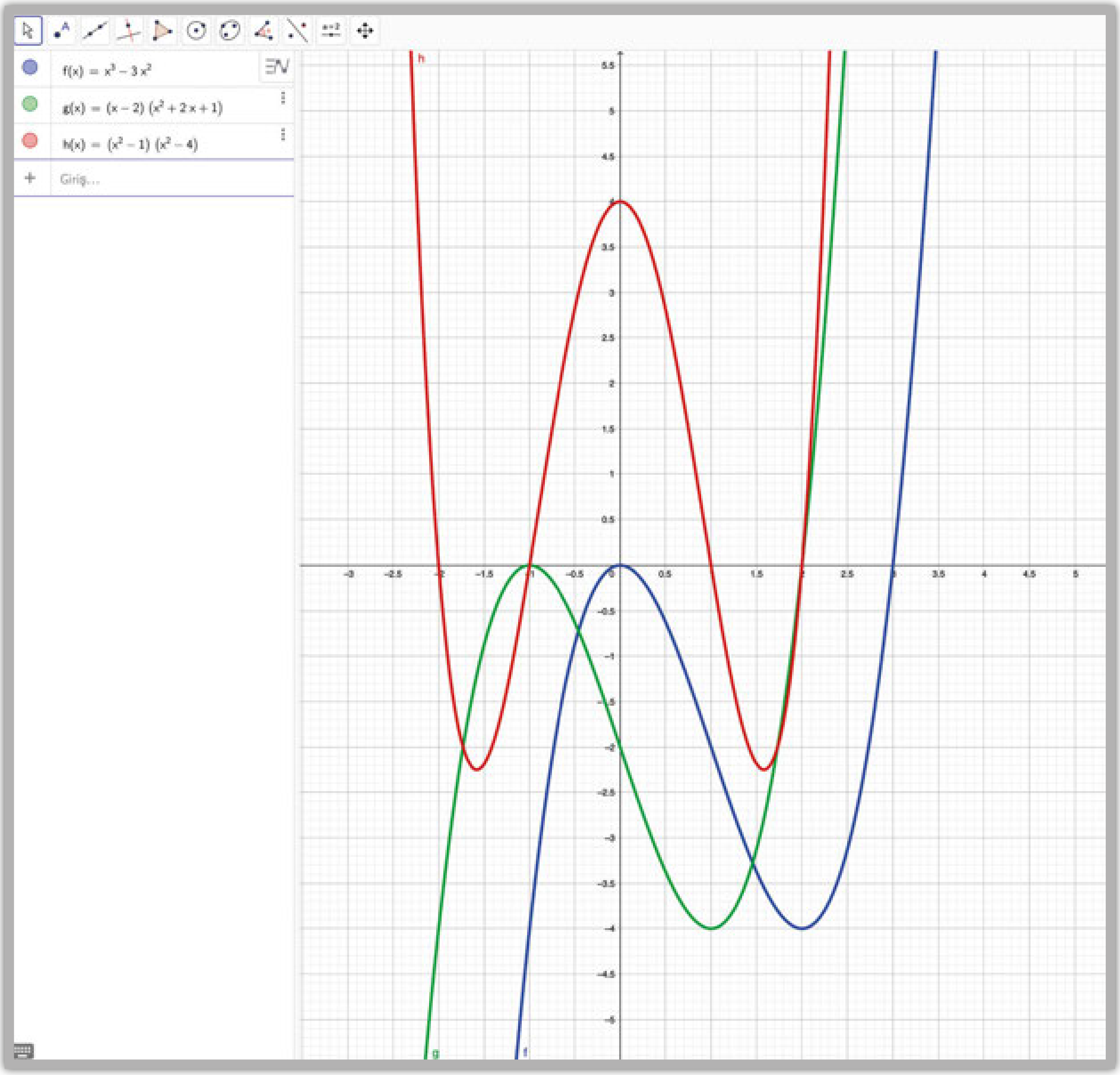
b) $g(x)=(x-2)(x^2+2x+1)$

c) $h(x)=(x^2-1)(x^2-4)$

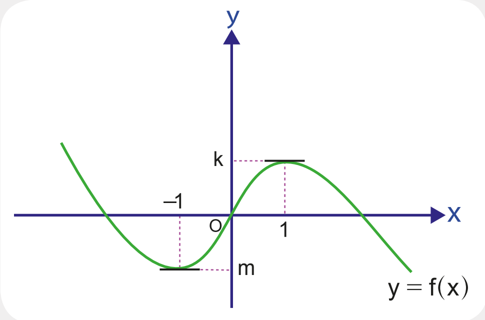
ÇÖZÜM

Dinamik Geometri ve Matematik Yazılımı programını açınız.

Giriş kısmına tek tek x^3-3x^2, $(x-2)(x^2+2x+1)$ ve $(x^2-1)(x^2-4)$ fonksiyonları yazılarak enter tuşuna basıldığında grafikler çizilir.



ÖRNEK



Yanda $f(x)=ax^3-2bx^2+3x$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre

a) k ve m değerlerini bulunuz.

b) f fonksiyonunun grafiğinin x eksenini kestiği noktaların koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

a) f fonksiyonunun grafiği incelendiğinde $x=-1$ apsisli noktasında fonksiyonun yerel minimumu ve $x=1$ apsisli noktasında fonksiyonun yerel maksimumu olduğundan

$f'(-1)=0$ ve $f'(1)=0$ olur.

$f(x)=ax^3-2bx^2+3x \Rightarrow f'(x)=3ax^2-4bx+3$

$f'(-1)=0 \Rightarrow 3a+4b+3=0$

$\Rightarrow 3a+4b=-3$ ....(1) olur.

$f'(1)=0 \Rightarrow 3a-4b+3=0$

$\Rightarrow 3a-4b=-3$ ....(2) olur.

(1) ve (2) denklemleri ortak çözülürse

$$\begin{array}{r} 3a+\cancel{4b}=-3 \\ +\;3a-\cancel{4b}=-3 \\ \hline 6a=-6 \Rightarrow a=-1 \text{ olur.} \end{array}$$

$a=-1 \Rightarrow 3\cdot(-1)+4b=-3$

$-3+4b=-3$

$b=0$ olur.

$a=-1$ ve $b=0 \Rightarrow f(x)=-x^3+3x$ olur.

$k=f(1)=2$ bulunur.

$m=f(-1)=-2$ bulunur.

b) $f(x)=0 \Rightarrow -x^3+3x=0$

$\Rightarrow x(3-x^2)=0$

$\Rightarrow x=0 \vee x=-\sqrt{3} \vee x=\sqrt{3}$ olur.

Bu durumda f fonksiyonunun x eksenini kestiği noktaların koordinatları $(-\sqrt{3},0)$, $(0,0)$ ve $(\sqrt{3},0)$ olarak elde edilir.

HATIRLATMA

★ $y = mx + n$ biçiminde verilen bir doğrunun eğimi **m** dir.

★ $ax + by + c = 0$ biçiminde verilen bir doğrunun eğimi $\mathbf{m = -\frac{a}{b}}$ olur.

★ Grafiği verilen bir doğrunun eğimi, bu doğrunun x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı α olmak üzere $\mathbf{m = \tan\alpha}$ olur.

★ $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi $\mathbf{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$ olur.

★ d_1 ve d_2 doğrularının eğimleri sırasıyla m_1 ve m_2 olmak üzere

$$\mathbf{d_1 /\!/ d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2} \text{ ve } \mathbf{d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1} \text{ olur.}$$

★ $A(x_0, y_0)$ noktasından geçen ve eğimi m olan doğrunun denklemi

$$\mathbf{y - y_0 = m(x - x_0)} \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$f(x) = x^2 - ax - 2$ eğrisine $x = 2$ apsisli noktasında çizilen teğeti, x ekseni ile pozitif yönde $135°$ açı yaptığına göre teğet doğrusunun denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

f fonksiyonuna $x = 2$ apsisli noktasında çizilen teğetin eğimi m_t ise $m_t = \tan 135° = f'(2)$ olur.

$f(x) = x^2 - ax - 2 \Rightarrow f'(x) = 2x - a$

$f'(2) = \tan 135° \Rightarrow 4 - a = -1$

$\Rightarrow a = 5$ olur.

$a = 5 \Rightarrow f(x) = x^2 - 5x - 2$

$\Rightarrow f(2) = -8$ olur.

O hâlde teğet doğrusu $(2, -8)$ noktasından geçmektedir.

$A(x_0, y_0)$ noktasından geçen ve eğimi m olan doğrunun denklemi $\mathbf{y - y_0 = m(x - x_0)}$ dir.

Buna göre $A(2, -8)$ noktasından geçen ve eğimi -1 olan teğet doğrusunun denklemi

$y - (-8) = -1 \cdot (x - 2) \Rightarrow y = -x - 6$ bulunur.

ÖRNEK

$f(x) = x^3 - x^2 + 2ax$ eğrisine $x = -1$ apsisli noktasında çizilen teğeti $2x - y + 1 = 0$ doğrusuna paralel olduğuna göre a değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$2x - y + 1 = 0$ doğrusunun eğimi 2 dir. f fonksiyonuna $x = -1$ apsisli noktasında çizilen teğeti bu doğruya paralel olduğundan fonksiyonun bu noktadaki teğetinin eğimi de 2 olur.

Bu durumda $f'(-1) = 2$ olur.

$f(x) = x^3 - x^2 + 2ax \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2x + 2a$

$\Rightarrow f'(-1) = 3(-1)^2 - 2(-1) + 2a$

$\Rightarrow f'(-1) = 5 + 2a$ olur.

$f'(-1) = 2 \Rightarrow 5 + 2a = 2$

$\Rightarrow a = -\frac{3}{2}$ bulunur.

ÖRNEK

$f(x)=x^2+ax+6$ eğrisine üzerindeki $A(1,4)$ noktasında çizilen teğet doğrusunun x eksenini hangi noktada keseceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

$A(1,4)$ noktası fonksiyonun grafiğinin üzerinde olduğundan $f(1)=4$ olur.

$$\begin{aligned} f(x)=x^2+ax+6 &\Rightarrow f(1)=1^2+a\cdot 1+6 \\ &\Rightarrow 4=7+a \\ &\Rightarrow a=-3 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Fonksiyona $A(1,4)$ noktasında çizilen teğetinin eğimi fonksiyonun o noktadaki türevine eşit olacağından teğetin eğimi $m_t=f'(1)$ olur.

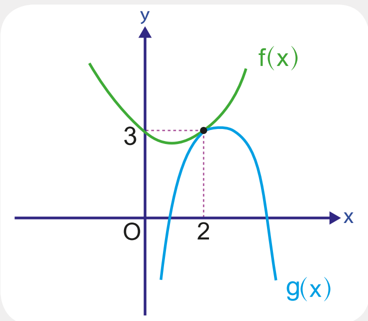
$$\begin{aligned} f(x)=x^2-3x+6 &\Rightarrow f'(x)=2x-3 \\ &\Rightarrow f'(1)=2\cdot 1-3 \\ &\Rightarrow m_t=-1 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

$A(1,4)$ noktasından geçen ve eğimi $m_t=-1$ olan teğet doğrusunun denklemi

$$y-4=-1\cdot(x-1)\Rightarrow y=-x+5 \text{ olur.}$$

$y=-x+5$ doğrusu $y=0$ için x eksenini $(5,0)$ noktasında keser.

ÖRNEK



Yanda $A(2,3)$ noktasında birbirine teğet olan $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

$$h(x)=x\cdot f(x)-2\cdot g(x)$$

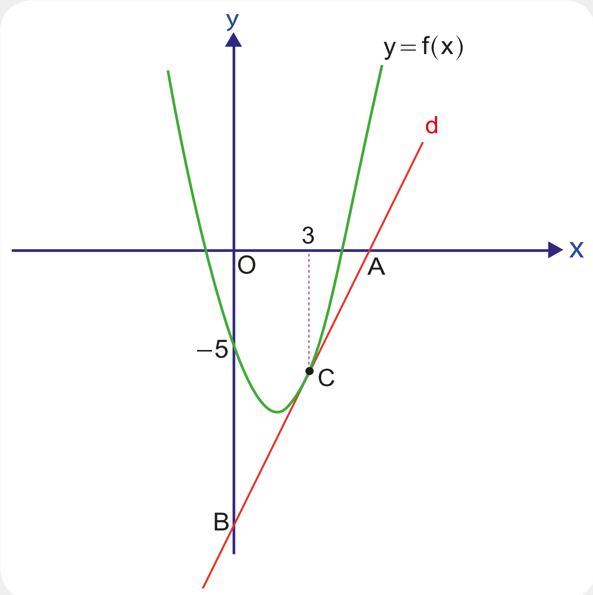
olduğuna göre h fonksiyonunun grafiğine $x=2$ apsisli noktasında çizilen teğetinin eğimini bulunuz.

ÇÖZÜM

$A(2,3)$ noktası her iki fonksiyonun da grafiği üzerinde olduğundan $f(2)=3$ ve $g(2)=3$ olur. f ve g fonksiyonları $A(2,3)$ noktasında birbirlerine teğet olduklarından bu noktadaki teğet doğruları çakışık olup f ve g fonksiyonlarının bu noktadaki türevleri eşit ve $f'(2)=g'(2)$ olur. Ayrıca h fonksiyonunun $x=2$ apsisli noktasındaki teğetinin eğimi $h'(2)$ olur. Buna göre

$$\begin{aligned} h(x)=x\cdot f(x)-2\cdot g(x) &\Rightarrow h'(x)=1\cdot f(x)+x\cdot f'(x)-2\cdot g'(x) \\ &\Rightarrow h'(2)=f(2)+\cancel{2\cdot f'(2)}-\cancel{2\cdot g'(2)} \\ &\Rightarrow h'(2)=3 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK



Yanda $f(x) = x^2 - 4x + k$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. f fonksiyonunun grafiğine $x = 3$ apsisli C noktasında çizilen d teğet doğrusu, x ve y eksenini sırasıyla A ve B noktalarında kesiyor. Buna göre AOB üçgeninin alanını bulunuz.

ÇÖZÜM

Fonksiyonun grafiği incelenirse y eksenini $(0, -5)$ noktasında kestiği görülür. Buna göre

$f(0) = -5 \Rightarrow 0^2 - 4 \cdot 0 + k = -5 \Rightarrow k = -5$ bulunur.

Bir fonksiyona $x = a$ apsisli noktasından çizilen teğetinin eğimi m_t ise $m_t = f'(a)$ olduğundan d doğrusunun eğimi $m_d = f'(3)$ olur.

$$\begin{aligned} f(x) = x^2 - 4x - 5 &\Rightarrow f'(x) = 2x - 4 \\ &\Rightarrow f'(3) = 2 \cdot 3 - 4 \\ &\Rightarrow m_d = 2 \text{ olur.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = 3 \Rightarrow f(3) &= 3^2 - 4 \cdot 3 - 5 \\ &= -8 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Bu durumda C noktasının koordinatı $C(3, -8)$ bulunur. $C(3, -8)$ noktasından geçen ve eğimi $m_d = 2$ olan d doğrusunun denklemi

$$y - (-8) = 2 \cdot (x - 3) \Rightarrow 2x - y - 14 = 0 \text{ olarak bulunur.}$$

$x = 0 \Rightarrow y = -14$ olduğundan d doğrusu y eksenini -14 ordinatlı noktada keser.

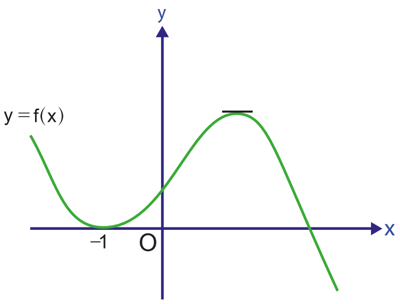
$y = 0 \Rightarrow x = 7$ olduğundan d doğrusu x eksenini $x = 7$ apsisli noktada keser.

Bu durumda $|AO| = 7$ birim ve $|OB| = 14$ birim elde edilir. Buna göre

$$\begin{aligned} A(AOB) &= \frac{|AO| \cdot |OB|}{2} \\ &= \frac{7 \cdot 14}{2} \\ &= 49 \text{ birimkare bulunur.} \end{aligned}$$

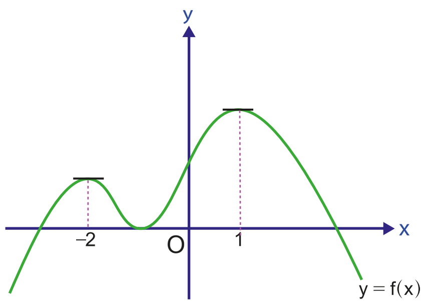
1 $f(x)=(x+1)(x^2-4x+4)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

2



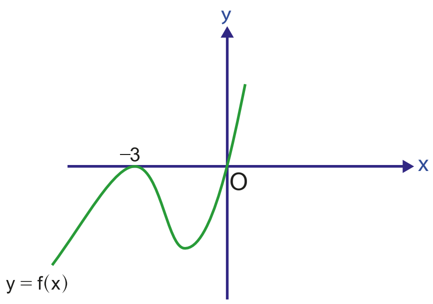
Yukarıda $f(x)=ax^3-bx^2+2x+2$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $a\cdot b$ çarpımını bulunuz.

3



Yukarıda $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $f'(x)=x^3+ax^2+x+2b$ olduğuna göre $a+b$ toplamını bulunuz.

4

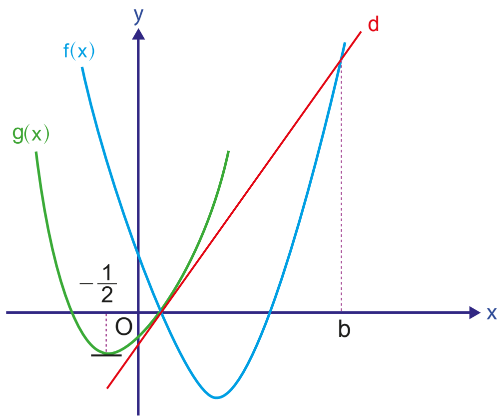


Yukarıda 3. dereceden bir polinom fonksiyonu olan $f(x)=x(x+a)^2$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $f(x)$ fonksiyonunun türevinin grafiğini çiziniz.

5 $f(x)=2x^3+x^2$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

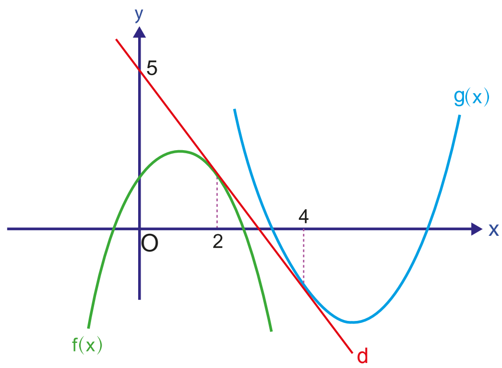
6 $f(x)=x^4-2x^2+1$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

7



Yukarıda x ekseni üzerinde kesişen $f(x)=x^2-6x+5$ ve $g(x)=x^2+mx+n$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. $f(x)$ ve $g(x)$ eğrilerinin kesim noktasında $g(x)$ eğrisine çizilen d teğet doğrusu, $f(x)$ fonksiyonunun grafiğini $x=b$ apsisli noktada kesiyor. Buna göre b değerini bulunuz.

8



Yukarıdaki grafikte d doğrusu $f(x)=-x^2+2x+1$ parabolüne $x=2$ apsisli noktada, $g(x)=x^2+ax+b$ parabolüne ise $x=4$ apsisli noktada teğettir. Buna göre $a+b$ toplamını bulunuz.

5.3.4. Maksimum ve Minimum Problemleri

Bilimde, mühendislikte ve iş hayatında bir fonksiyonun maksimum ve minimum değerlerinden sıklıkla yararlanılır. Örneğin, fabrikalarda minimum harcamayla maksimum kazanç elde etmek amaçlanır. Marketlerde satılan tüm konserve kutularının aynı fiziksel görüntüde ve yaklaşık 28,3 gram olduğu görülür. Bütün konserve kutularının belirli hacim ve aynı şekle sahip olmaları tesadüf değildir. Belirli bir hacimle üretilen konserve kutularında minimum miktarda metal kullanılarak firmaların minimum maliyetle maksimum kazanç elde etmesi sağlanabilir.

(Zill ve Warren, 2013)

Maksimum ve minimum problemlerinde en büyük ya da en küçük olması istenen değeri tek değişkene bağlı bir fonksiyon olarak ifade ettikten sonra bu fonksiyonun maksimum ya da minimum değeri araştırılır.

ÖRNEK

Toplamı 16 olan iki sayının çarpımının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

ÇÖZÜM

Toplamı 16 olan iki sayı sırasıyla x ve y ise $x+y=16$ olur.

$x+y=16 \Rightarrow y=16-x$ olur.

$x\cdot y$ ifadesinde y yerine $16-x$ yazılarak $x\cdot y$ ifadesi tek değişken türünden $x\cdot(16-x)$ olarak ifade edilebilir.

Bu durumda $x\cdot y$ çarpımı $f(x)=x\cdot(16-x)$ fonksiyonu ile ifade edilirse $x\cdot y$ çarpımının en büyük değerini alması için $f(x)=x\cdot(16-x)$ fonksiyonunun maksimum değeri bulunmalıdır.

$$f(x)=x\cdot(16-x) \Rightarrow f(x)=16x-x^2$$
$$\Rightarrow f'(x)=16-2x$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 16-2x=0$$
$$\Rightarrow 2x=16$$
$$\Rightarrow x=8 \text{ olur.}$$

x	$-\infty$	8	∞
f'(x)	+	0	−
f(x)	↗ artan	maks.	↘ azalan

$f(x)$ fonksiyonunun türevinin işaret tablosu incelenirse fonksiyonun maksimum değerini $x=8$ için aldığı görülür. Bu durumda fonksiyonun maksimum değeri $f(8)$ olup bu değer

$$f(8)=16\cdot 8-8^2$$
$$=64 \text{ olur.}$$

O hâlde toplamı 16 olan iki sayının çarpımının alabileceği en büyük değer 64 bulunur.

ÖRNEK

Duygu ve kardeşi Uğur, harçlıklarını harcamayıp biriktirerek Anneler Günü hediyesi almak istiyorlar. Duygu'nun günlük harçlığı x TL ve Uğur'un günlük harçlığı y TL dir. Duygu tüm harçlığını 3y gün ve Uğur ise tüm harçlığını 3x gün biriktiriyor. Duygu'nun 2 günlük harçlığı ile Uğur'un 3 günlük harçlığının toplamı 24 TL dir. Biriken toplam paranın en fazla olabilmesi için Duygu ve Uğur'un günlük harçlıklarının kaç TL olması gerektiğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Duygu'nun günlük harçlığı x TL olup 3y günde 3xy TL para biriktirir.
Uğur'un günlük harçlığı y TL olup 3x günde 3xy TL para biriktirir.
Bu durumda biriken toplam para olan 6xy TL nin maksimum olmasını sağlayan x ve y değerleri bulunmalıdır.
Duygu'nun 2 günlük harçlığı ile Uğur'un 3 günlük harçlığının toplamı 24 TL olduğundan
$2x+3y=24$ olur.

$2x+3y=24 \Rightarrow 3y=24-2x$ (Eşitliğin her iki tarafı 2x ile çarpılır ve 6xy elde edilir.)

$\Rightarrow 6xy=2x(24-2x)$

$=48x-4x^2$ elde edilir.

Bu durumda 6xy ifadesi $f(x)=48x-4x^2$ fonksiyonu ile ifade edilirse 6xy ifadesinin en büyük olması için $f(x)=48x-4x^2$ fonksiyonunu maksimum yapan x değeri bulunmalıdır.

$f(x)=48x-4x^2 \Rightarrow f'(x)=48-8x$

$f'(x)=0 \Rightarrow 48-8x=0$

$\Rightarrow x=6$ olur.

$x=6 \Rightarrow 2\cdot 6+3y=24$

$\Rightarrow y=4$ bulunur.

x	$-\infty$	6	∞
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	artan	maks.	azalan

Buna göre Duygu ve Uğur'un günlük harçlıklarının sırasıyla 6 TL ve 4 TL olması durumunda biriken toplam para en fazla olacaktır.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+4$ fonksiyonunun grafiği üzerindeki bir $A(a,b)$ noktasının koordinatları toplamının alabileceği <u>en küçük</u> değeri bulunuz.

ÇÖZÜM

$A(a,b) \Rightarrow b=f(a)$

$=a^2-3a+4$ olur.

$b=a^2-3a+4 \Rightarrow a+b=a+a^2-3a+4$

$=a^2-2a+4$ elde edilir.

Bu durumda $A(a,b)$ noktasının koordinatları toplamı $g(a)=a^2-2a+4$ fonksiyonu ile ifade edilirse $A(a,b)$ noktasının koordinatları toplamının en küçük olması için $g(a)=a^2-2a+4$ fonksiyonunun minimum değeri bulunmalıdır.

$g(a)=a^2-2a+4 \Rightarrow g'(a)=2a-2$

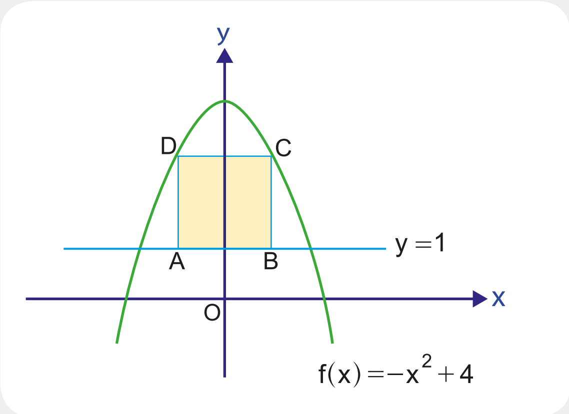
$g'(a)=0 \Rightarrow 2a-2=0$

$\Rightarrow a=1$ olur.

a	∞	1	∞
$g'(a)$	−	0	+
$g(a)$	azalan	min.	artan

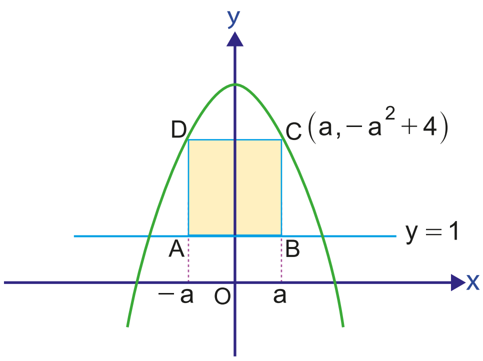
$g(a)$ fonksiyonunun türevinin işaret tablosu incelenirse fonksiyonun minimum değerini $a=1$ için aldığı görülür. Bu durumda fonksiyonun minimum değeri $g(1)$ olup bu değer
$g(1)=1^2-2\cdot 1+4=3$ bulunur.

ÖRNEK



Yanda $f(x) = -x^2 + 4$ parabolü ve $y = 1$ doğrusunun grafiği verilmiştir. A ve B köşeleri $y = 1$ doğrusu, C ve D köşeleri ise parabolün üzerinde olan parabol ile doğru arasındaki ABCD dikdörtgeninin alanının en çok kaç birimkare olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM



B ve C noktalarının apsisi $x = a$ olsun. Grafik y eksenine göre simetrik olduğundan A ve D noktalarının apsisi $x = -a$ olur. Grafiğe göre C noktası $f(x) = -x^2 + 4$ parabolünün üzerinde olduğundan C noktasının ordinatı $y = -a^2 + 4$ olur. Böylece

$|AB| = 2a$ birim

$|BC| = (-a^2 + 4) - 1$

$= 3 - a^2$ birim olur. Buna göre

$$\begin{aligned} A(ABCD) &= |AB| \cdot |BC| \\ &= 2a \cdot (3 - a^2) \\ &= 6a - 2a^3 \text{ birimkare olur.} \end{aligned}$$

Bu durumda ABCD dikdörtgeninin alanı $g(a) = 6a - 2a^3$ fonksiyonu ile ifade edilirse dikdörtgenin alanının en çok olması için $g(a) = 6a - 2a^3$ fonksiyonunun maksimum değeri bulunmalıdır.

$g(a) = 6a - 2a^3 \Rightarrow g'(a) = 6 - 6a^2$

$g'(a) = 0 \Rightarrow 6 - 6a^2 = 0$

$\Rightarrow a = 1$ veya $a = -1$ olur.

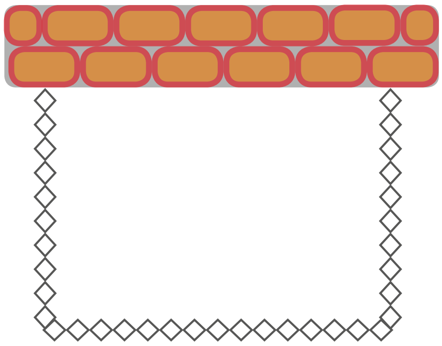
a	$-\infty$		-1		1		∞
$g'(a)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(a)$		$\searrow$	min.	$\nearrow$	maks.	$\searrow$	

$g(a)$ fonksiyonunun türevinin işaret tablosu incelenirse fonksiyonun maksimum değerini $a = 1$ için aldığı görülür. Bu durumda fonksiyonun maksimum değeri $g(1)$ olup bu değer

$$\begin{aligned} g(1) &= 6 \cdot 1 - 2 \cdot 1^3 \\ &= 4 \text{ olur.} \end{aligned}$$

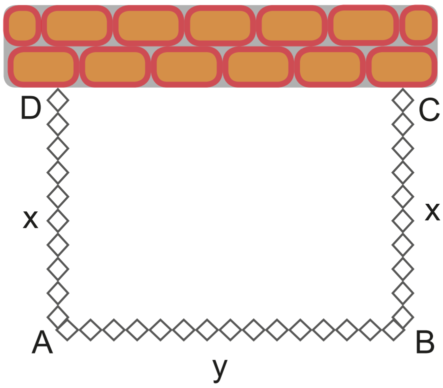
O hâlde ABCD dikdörtgeninin alanı en çok 4 birimkare bulunur.

ÖRNEK



Bir kişi evinin bahçesi için aldığı 16 metre tel ile şekildeki gibi bir tarafı duvar olan dikdörtgen biçimde bir kümes yapacaktır. Bu kümesin alanının en fazla kaç metrekare olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM



$|AB| = y$ metre ve $|AD| = |BC| = x$ metre olsun.
Bu durumda $2x + y = 16$ m olur.

$$A(ABCD) = x \cdot y$$
$$= x \cdot (16 - 2x) \qquad (y = 16 - 2x)$$
$$= 16x - 2x^2 \ \text{m}^2 \ \text{olur.}$$

Bu durumda ABCD dikdörtgeninin alanı $f(x) = 16x - 2x^2$ fonksiyonu ile ifade edilirse ABCD dikdörtgeninin alanının en çok olması için $f(x) = 16x - 2x^2$ fonksiyonunun maksimum değeri bulunmalıdır.

$f(x) = 16x - 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 16 - 4x$ olur.
$f'(x) = 0 \Rightarrow 16 - 4x = 0$
$\Rightarrow x = 4$ olur.

x	$-\infty$		4		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	maks.	$\searrow$	

$f(x)$ fonksiyonunun türevinin işaret tablosu incelenirse fonksiyonun maksimum değerini $x = 4$ için aldığı görülür. Bu durumda fonksiyonun maksimum değeri $f(4)$ olup bu değer

$$f(4) = 16 \cdot 4 - 2 \cdot 4^2$$
$$= 32 \ \text{olur.}$$

O hâlde kümesin alanı en fazla 32 metrekare bulunur.

ÖRNEK

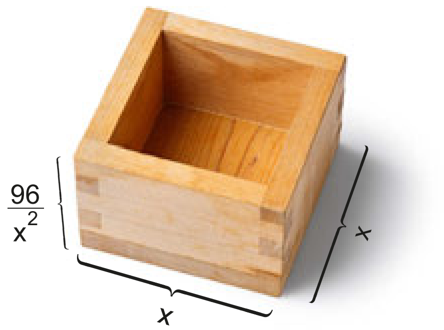
Görsel 5.6

Bir fabrikada hacmi 96 birimküp olan üstü açık kare prizma biçiminde kutular üretilecektir.

- Kutunun taban yüzeyinin birimkare maliyeti 3 TL
- Kutunun yan yüzeyinin birimkare maliyeti 1 TL

olduğuna göre bir kutunun maliyetinin en az kaç TL olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM



Kutunun taban ayrıtları x birim ve yüksekliği y birim ise hacmi

$x \cdot x \cdot y = 96$ birimküp olup $y = \dfrac{96}{x^2}$ birim bulunur.

Kutunun taban alanı $x \cdot x = x^2$ birimkare ve

Kutunun yan yüz alanı $4 \cdot x \cdot \dfrac{96}{x^2} = \dfrac{384}{x}$ birimkare olur.

Buna göre taban yüzeyinin birimkare maliyeti 3 TL olduğundan kutunun taban maliyeti $3 \cdot x^2$ TL ve yan yüzeyin birimkare maliyeti 1 TL olduğundan kutunun yan yüz maliyeti $1 \cdot \dfrac{384}{x} = \dfrac{384}{x}$ TL olur.

Bu durumda bir kutunun maliyeti $3x^2 + \dfrac{384}{x}$ TL bulunur.

Bir kutunun maliyeti $f(x) = 3x^2 + \dfrac{384}{x}$ fonksiyonu olarak ifade edilirse maliyetin minimum olması için bu fonksiyonun minimum değeri bulunmalıdır.

$f(x) = 3x^2 + \dfrac{384}{x} \Rightarrow f'(x) = 6x - \dfrac{384}{x^2}$ olur.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x - \frac{384}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{6x^3 - 384}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow 6x^3 - 384 = 0 \text{ ve } x^2 \neq 0$$

$$\Rightarrow x^3 = 64 \text{ ve } x \neq 0 \qquad \text{(Paydada çift kat kök)}$$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ ve } x \neq 0 \text{ olur.}$$

x	$-\infty$		0		4		∞
$f'(x)$		$-$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\searrow$	min.	$\nearrow$	

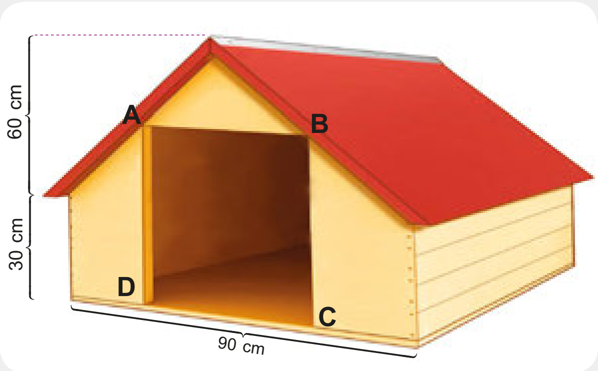
$f(x)$ fonksiyonunun türevinin işaret tablosu incelenirse fonksiyonun minimum değerini $x = 4$ için aldığı görülür. Bu durumda fonksiyonun minimum değeri $f(4)$ olup bu değer

$$f(4) = 3 \cdot 4^2 + \frac{384}{4}$$

$$= 144 \text{ olur.}$$

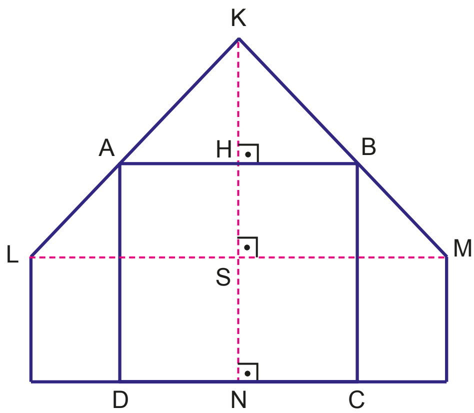
O hâlde bir kutunun maliyeti en az 144 TL bulunur.

ÖRNEK



Kış mevsiminde sokak hayvanları şiddetli soğuklar nedeniyle geceyi geçirmek için bir barınağa ihtiyaç duymaktadır. Büyük şehirlerde bu imkânı bulabilmelerine karşın küçük yerleşim yerlerinde hayvan barınakları olmadığı için soğuktan korunmak kedi ve köpeklerin önemli bir sorunu hâline gelmektedir. Bu nedenle bir meslek lisesinin Mobilya ve İç Mekân Tasarımı bölümünde öğretmen olan Mustafa Bey, gönüllü öğrencileri ile birlikte şehrin çeşitli yerlerine yerleştirilmek üzere kulübeler yapmayı planlamaktadır. Şekildeki gibi tasarladığı kulübeyi sınıfta tahtaya çizerek bunları nasıl yapacaklarını öğrencilerine anlatmıştır. Mustafa Bey, şekildeki uzunluklara göre planlanan kulübeye ABCD dikdörtgeni biçiminde bir kapı yapacaktır. Buna göre kapının alanının en fazla olması için kapının genişliğinin ve yüksekliğinin kaç cm olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM



$|KH| = x$ cm ve $|AB| = y$ cm olsun.

$|KS| = 60$ cm ve $|LM| = 90$ cm dir.

$\widehat{KAB} \sim \widehat{KLM}$ olduğundan $\dfrac{|KH|}{|KS|} = \dfrac{|AB|}{|LM|}$ olur.

Bu durumda $\dfrac{x}{60} = \dfrac{y}{90} \Rightarrow y = \dfrac{3x}{2}$ cm olur.

$|KN| = 90$ cm $\Rightarrow |HN| = |BC| = 90 - x$ cm olur.

$$\begin{aligned} A(ABCD) &= |AB| \cdot |BC| \\ &= y \cdot (90 - x) \\ &= \frac{3x}{2} \cdot (90 - x) \\ &= 135x - \frac{3x^2}{2} \text{ cm}^2 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Böylece kapının alanı $f(x) = 135x - \dfrac{3x^2}{2}$ fonksiyonu ile ifade edilirse kapının alanının en fazla olması için $f(x) = 135x - \dfrac{3x^2}{2}$ fonksiyonunun maksimum değeri bulunmalıdır.

$$f(x) = 135x - \frac{3x^2}{2} \Rightarrow f'(x) = 135 - 3x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 135 - 3x = 0$$

$$\Rightarrow x = 45 \text{ olur.}$$

x	$-\infty$	45	∞
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	maks.	$\searrow$

$f(x)$ fonksiyonunun türevinin işaret tablosu incelenirse fonksiyonun maksimum değerini $x = 45$ için aldığı görülür. Bu durumda

$|AB| = \dfrac{3x}{2} = \dfrac{3 \cdot 45}{2} = 67,5$ cm olur. $\qquad |BC| = 90 - x = 90 - 45 = 45$ cm olur.

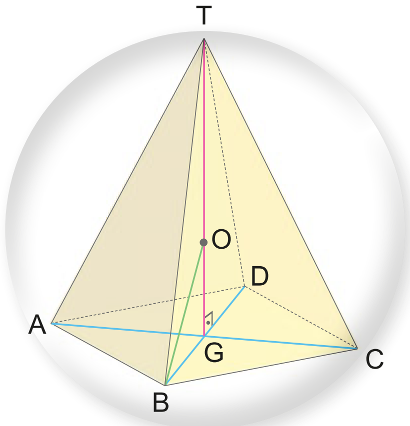
O hâlde ABCD dikdörtgeni biçimindeki kapının alanının en fazla olması için genişliği ve yüksekliği sırasıyla 67,5 cm ve 45 cm olmalıdır.

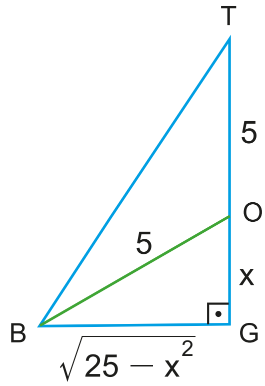
ÖRNEK


Görsel 5.7

Hediyelik kar küreleri üreten bir firma, içerisinde en büyük hacimli düzgün kare piramit bulunan 10 cm çapında kar küreleri üretecektir. Bu firmanın üreteceği kar kürelerinin içindeki piramidin yüksekliğinin kaç cm olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM





Küre içerisine yerleştirilen düzgün kare piramidin yüksekliği [TG], kürenin merkezinden geçer. [OT] ve [OB] kürenin yarıçapı olur.

[OT] ve [OB] yarıçap olduğundan $|OT| = |OB| = 5$ cm olur.

$|OG| = x$ ise OGB üçgeninde Pisagor teoreminden $|BG| = \sqrt{25-x^2}$ olur.

Kare piramidin yüksekliği $|TG| = x + 5$ cm ve karenin köşegenleri

$|BD| = |AC| = 2\sqrt{25-x^2}$ cm olur. Bu durumda kare piramidin hacmi

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{|AC|\cdot|BD|}{2}\cdot|TG| = \frac{1}{3}\cdot\frac{\cancel{2}\sqrt{25-x^2}\cdot 2\sqrt{25-x^2}}{\cancel{2}}\cdot(x+5)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 2(25-x^2)\cdot(x+5)$$

$$= \frac{2}{3}\cdot(-x^3-5x^2+25x+125) \text{ cm}^3 \text{ olur.}$$

Buna göre piramidin hacmi $f(x) = \frac{2}{3}\cdot(-x^3-5x^2+25x+125)$ fonksiyonu ile ifade edilirse piramidin hacminin en büyük olması için $f(x) = \frac{2}{3}\cdot(-x^3-5x^2+25x+125)$ fonksiyonunun maksimum değeri bulunmalıdır.

$$f(x) = \frac{2}{3}\cdot(-x^3-5x^2+25x+125) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}\cdot(-3x^2-10x+25) \text{ olur.}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2-10x+25 = 0$$
$$\Rightarrow (-3x+5)(x+5) = 0$$
$$\Rightarrow x = \frac{5}{3} \text{ veya } x = -5 \text{ olur.}$$

x	$-\infty$		-5		$\frac{5}{3}$		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	min.	$\nearrow$	maks.	$\searrow$	

Bu durumda firmanın üreteceği kar kürelerinin içerisindeki piramidin en büyük hacimli olması için piramidin yüksekliği $|TG| = x + 5 = \frac{5}{3} + 5 = \frac{20}{3}$ cm olmalıdır.

ÖRNEK

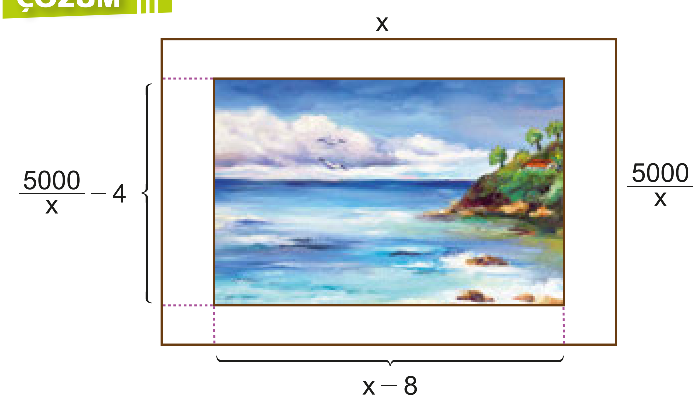
Resim öğretmeni Aslı Hanım, çalıştığı ilçedeki resim öğretmenleri ile birlikte 3 Aralık Dünya Engelliler Günü için bir proje hazırlamışlardır. Geliri ile ilçedeki ihtiyaç sahibi öğrencilere tekerlekli sandalye alınması amaçlanan bu proje "Engel Yok, Renkler Var!" adlı bir resim sergisi olarak planlanmıştır.

Görsel 5.8

Sergilenecek resimler, alanı yarım metrekare olan dikdörtgen biçimindeki tuvallere şekildeki gibi yanlarından dörder cm, alt ve üst kısımlarından ikişer cm boşluk bırakılarak yapılacaktır.

Aslı Hanım, resim yapacağı yüzeyin en büyük alana sahip olmasını istemektedir. Bunun için Aslı Hanım'ın seçeceği tuvalin eninin ve boyunun kaç cm olması gerektiğini bulunuz.

ÇÖZÜM



Tuvalin alanı 5000 cm^2 olacağından tuvalin boyu x cm ise eni $\frac{5000}{x}$ cm olur. Bu durumda resim alanı A ise

$$A = (x-8)\cdot\left(\frac{5000}{x} - 4\right)\ cm^2$$
$$= 5032 - 4x - \frac{40\,000}{x}\ cm^2 \text{ olur.}$$

Buna göre resim alanı $f(x) = 5032 - 4x - \frac{40\,000}{x}$ fonksiyonu ile ifade edilirse resim alanının en büyük olması için $f(x) = 5032 - 4x - \frac{40\,000}{x}$ fonksiyonunun maksimum değeri bulunmalıdır.

$$f(x) = 5032 - 4x - \frac{40\,000}{x} \Rightarrow f'(x) = -4 + \frac{40\,000}{x^2}$$
$$= \frac{40\,000 - 4x^2}{x^2} \text{ olur.}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 40\,000 - 4x^2 = 0$ ve $x^2 \neq 0$

$\Rightarrow x^2 = 10\,000$ ve $x \neq 0$ (Paydada çift kat kök)

$\Rightarrow (x = -100$ veya $x = 100)$ ve $x \neq 0$ olur.

x	$-\infty$		-100		0		100		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	min.	↗	‖	↗	maks.	↘	

f(x) fonksiyonunun türevinin işaret tablosu incelenirse f(x) fonksiyonunun maksimum değerini $x = 100$ için aldığı görülür.

$x = 100 \Rightarrow \frac{5000}{x} = \frac{5000}{100} = 50$ olur.

Bu durumda Aslı Hanım'ın seçeceği tuvalin alanının en büyük olması için tuvalin eni ve boyu sırasıyla 50 cm ve 100 cm olmalıdır.

ÖRNEK

Bilgi Öğretmen, Şehitler Günü'nde okulundaki öğrencilere millî ve manevi değerleri yaşatmak amacıyla 18 Mart'ta Çanakkale Şehitliği'ne bir gezi planlamıştır. Bilgi Öğretmen bir tur şirketinden gezi ücreti için aşağıdaki teklifi almıştır.

Gezi ücreti kişi başı 120 TL dir. Ancak tur şirketi daha çok öğrencinin Çanakkale Şehitliği'ni görebilmesi amacıyla geziye katılan öğrenci sayısının 60 tan fazla olması hâlinde 60 ın üzerindeki her bir öğrenci için geziye katılan tüm öğrencilere ellişer kuruş indirim yapacaktır.

Görsel 5.9

Örneğin geziye 80 öğrenci katılırsa 60 ın üzerindeki 20 öğrenci için her öğrenciye, $20 \cdot 0,5 = 10$ TL indirim yapılacak ve kişi başı gezi ücreti 110 TL olacaktır.

Bu durumda tur şirketinin

a) Maksimum gelir elde etmesi için geziye kaç öğrencinin katılması gerektiğini bulunuz.

b) Maksimum gelir elde etmesi için geziye katılan öğrencilerin kişi başı kaç TL ücret ödemesi gerektiğini bulunuz.

c) Maksimum gelirinin kaç TL olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

x geziye katılan öğrenci sayısı olmak üzere tur şirketinin geliri

$$f(x) = \begin{cases} 120x & , \quad x \le 60 \quad \text{ise} \\ x(120 - (x-60) \cdot 0,5) & , \quad x > 60 \quad \text{ise} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 120x & , \quad x \le 60 \quad \text{ise} \\ -\dfrac{x^2}{2} + 150x & , \quad x > 60 \quad \text{ise} \end{cases}$$

biçiminde bir fonksiyon olarak tanımlanabilir. $x = 60$ için $f(60) = 7200$ TL gelir elde edilir.

a) $x > 60$ için tur şirketinin geliri olan $f(x)$ fonksiyonunu maksimum yapan x değeri bulunmalıdır.

$$x > 60 \Rightarrow f(x) = -\frac{x^2}{2} + 150x$$
$$\Rightarrow f'(x) = -x + 150$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow -x + 150 = 0$$
$$\Rightarrow x = 150 \quad \text{olur.}$$

x	$-\infty$	150	∞
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	maks.	↘

Bu durumda geziye 150 öğrenci katıldığında yapılacak gezinin geliri maksimum olur.

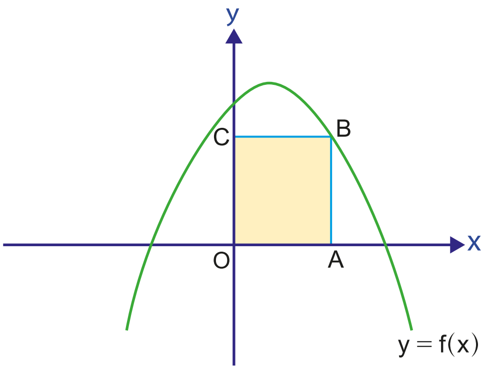
b) $150 - 60 = 90$ öğrenci için tur şirketi $90 \cdot 0,5 = 45$ TL kişi başı indirim yapar.
O hâlde geziye katılan öğrenciler kişi başı $120 - 45 = 75$ TL ücret ödeyecektir.

c) Tur şirketinin maksimum geliri $f(150) = -\dfrac{150^2}{2} + 150 \cdot 150$
$= 11\,250$ TL olur.

Alıştırmalar

1 $x^2 \cdot y = 108$ olduğuna göre $x + y$ toplamının alabileceği en küçük değeri bulunuz.

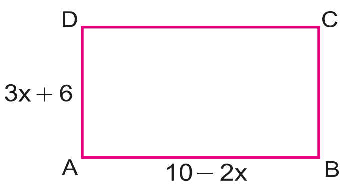
2



Yukarıda $f(x) = -x^2 + 4x + 6$ parabolünün grafiği verilmiştir. Buna göre grafikte gösterilen OABC dikdörtgeninin çevresinin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

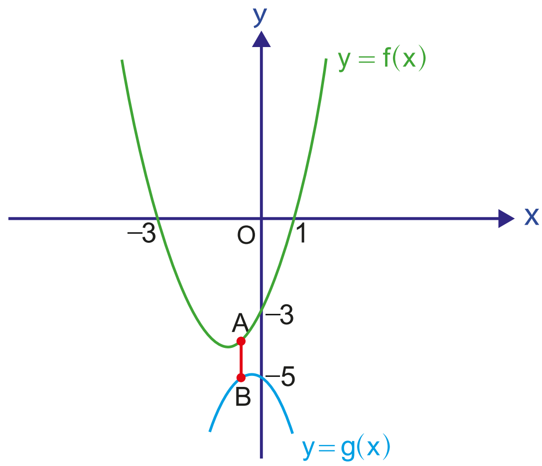
3 $f(x) = 3x^2 + 5x + 4$ eğrisinin üzerindeki bir noktanın koordinatları toplamının alabileceği en küçük değeri bulunuz.

4



Yukarıda farklı iki kenarının uzunlukları $(3x + 6)$ cm ve $(10 - 2x)$ cm olan ABCD dikdörtgeni verilmiştir. Bu dikdörtgenin alanının en çok kaç cm^2 olacağını bulunuz.

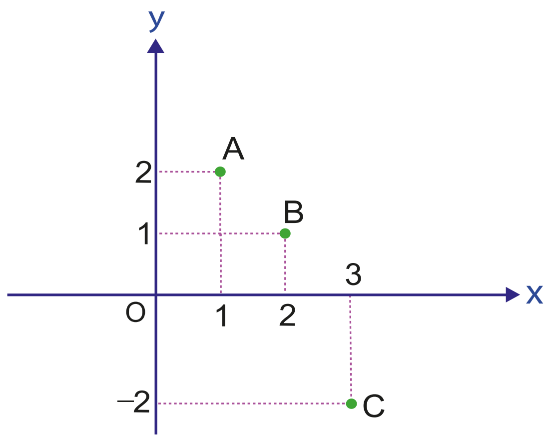
5



Yukarıda $f(x) = x^2 + 2x - 3$ ve $g(x) = -x^2 - x - 5$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. A noktası $f(x)$ fonksiyonunun grafiği ve B noktası $g(x)$ fonksiyonunun grafiği üzerindedir. $[AB]$ y eksenine paralel olduğuna göre $[AB]$ nın uzunluğunun alabileceği en küçük değeri bulunuz.

6 Yarıçapı 1 metre olan bir kürenin içerisine tepe noktası kürenin merkezinde olacak şekilde yerleştirilebilecek en büyük hacimli kare piramidin yüksekliğinin kaç metre olacağını bulunuz.

7



Koordinat sisteminde x ekseni üzerindeki bir $D(a, 0)$ noktasının $A(1, 2)$, $B(2, 1)$ ve $C(3, -2)$ noktalarına olan uzaklıklarının kareleri toplamının en küçük değerinin kaç olduğunu bulunuz.

Ölçme ve Değerlendirme 1

A) 1-5. cümlelerde boş bırakılan yerlere uygun ifadeleri yazınız.

1 Bir fonksiyonun $x = a$ apsisli noktasındaki soldan limiti sağdan limitine eşit değilse fonksiyonun bu noktada limiti ....

2 $f(x)$, 3. dereceden polinom fonksiyonu ise $f(x)$ in en fazla .... tane ekstremum noktası vardır.

3 Bir fonksiyonun $x = a$ apsisli noktasındaki limiti görüntüsüne eşit ise fonksiyon $x = a$ apsisli noktasında .... denir.

4 Türevlenebilir bir fonksiyonun türevinin pozitif olduğu aralıkta fonksiyon .... olur.

5 Türevlenebilir bir fonksiyonun ekstremum noktaları varsa fonksiyonun bu noktalarda türevi .... olur.

B) 6. soruda numaralar ile verilen ifadeleri harf ile verilen ifadelerle eşleştiriniz.

6 $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{x}$

fonksiyonu veriliyor. Buna göre numaralar ile verilen türevlerin değerlerini bularak harflerle verilen sonuçlar ile eşleştiriniz.

I. $f'(-3)$

II. $f'(-1)$

III. $f'(\sqrt{2})$

IV. $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$

V. $f'(2)$

VI. $f'\left(-\dfrac{1}{3}\right)$

a) $\dfrac{13}{2}$

b) $\dfrac{28}{3}$

c) 1

ç) $\dfrac{244}{9}$

d) 2

e) $\dfrac{19}{4}$

f) 4

g) $\dfrac{49}{4}$

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.

C) 7-15. açık uçlu soruları cevaplandırınız.

7 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^2 - 2x}{x + 2} = 3$

olduğuna göre a nın alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

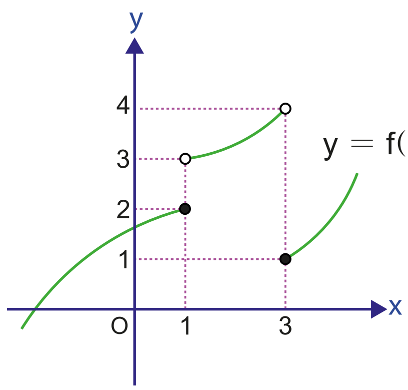
8 $f(x) = \begin{cases} bx^2 - ax \ , & x < 2 \ \text{ ise} \\ 2ax + b \ , & x \geq 2 \ \text{ ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu veriliyor.

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$ ve $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -2$

olduğuna göre $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ ifadesinin değeri kaçtır?

9



Yukarıda $y = f(x - 2)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) + \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) + \lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$

ifadesinin değeri kaçtır?

10 Doğrusal olarak hareket eden bir hareketliye ait konum (metre), zaman (saniye) fonksiyonu $x(t) = t^3 - t^2 + 2$ olduğuna göre bu hareketlinin 3. saniyedeki anlık hızı kaç m/sn. dir?

11 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4} & , \quad x < -3 \quad \text{ise} \\ \dfrac{x + 2}{x + 4} & , \quad x \geq -3 \quad \text{ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonunun sürekli olmadığı kaç x değeri vardır?

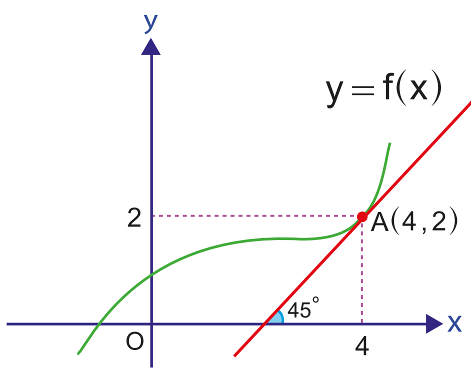
12 $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x^2} + \sqrt{x}$ eğrisine $x = \dfrac{1}{4}$ apsisli noktasında çizilen teğetinin eğimi kaçtır?

13 $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$ olduğuna göre

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ ifadesinin değeri kaçtır?

14 $f(x) = x^3 - 6x$ eğrisine $x = 2$ apsisli noktasında çizilen teğeti x eksenini hangi apsisli noktada keser?

15



Yukarıda verilen grafikte x ekseni ile pozitif yönde 45° lik açı yapan d doğrusu $f(x)$ fonksiyonuna $A(4, 2)$ noktasında teğettir. Buna göre $g(x) = (x + 1) \cdot f(x)$ şeklinde verilen $g(x)$ fonksiyonunun $x = 4$ noktasındaki teğetinin eğimi nedir?

D) 16-31. çoktan seçmeli soruları çözünüz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

16 $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x^2 - 3x - 14}{x - 2}$

ifadesinin değeri kaçtır?

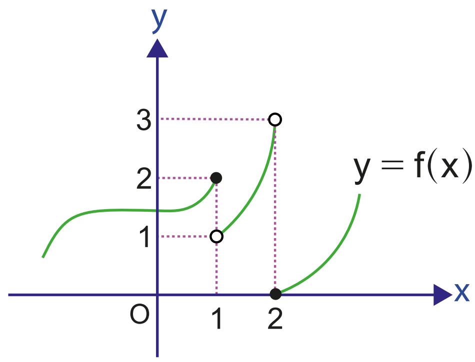
A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

17 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) -4 B) -2 C) 0 D) 2 E) 4

18



Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$ B) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1$

C) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3$ D) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 0$

E) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ yoktur.

19 $\lim\limits_{x \to 2t} \dfrac{x^3 - 8t^3}{x^2 - 4t^2}$

ifadesinin eşiti nedir?

A) $-3t$ B) 0 C) t D) 2t E) 3t

20 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x-\dfrac{1}{x}}$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) -2 B) -1 C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

21
- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$
- $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$

olduğuna göre $f(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $3x-2$ B) $2x+1$ C) $\dfrac{x+1}{2x-1}$

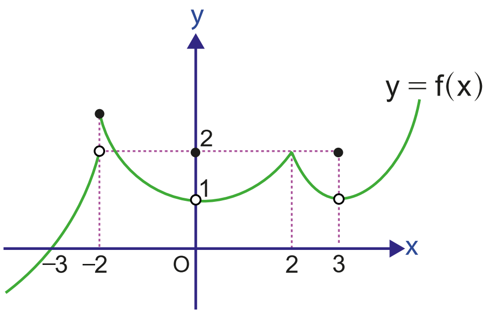
D) $2x-1$ E) $\dfrac{2x-1}{3x-5}$

22 $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-2ax+4}$

fonksiyonu her x gerçek sayısı için sürekli olduğuna göre a aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) -3 B) -2 C) 1 D) 2 E) 3

23



Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre $f(x)$ fonksiyonu kaç farklı x değeri için limiti olmasına rağmen sürekli değildir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

24 $f(x) = \begin{cases} 2ax-3 & , \ x < 1 \text{ ise} \\ 5 & , \ x = 1 \text{ ise} \\ bx^2-ax & , \ x > 1 \text{ ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu her x gerçek sayısı için sürekli olduğuna göre $a \cdot b$ çarpımı kaçtır?

A) 36 B) 32 C) 24 D) 18 E) 6

25 $f(x) = (3x^2+x-1)^2$

olduğuna göre $f'(2)$ değeri kaçtır?

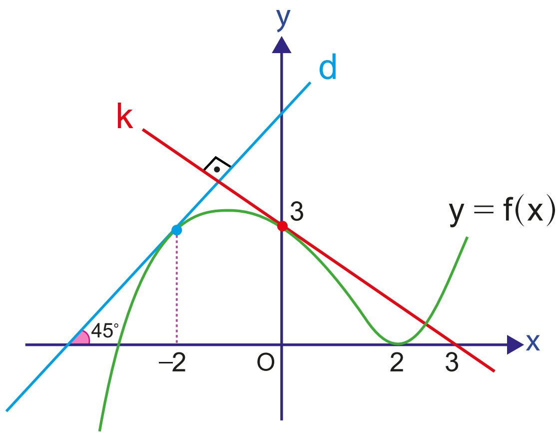
A) 256 B) 289 C) 338 D) 396 E) 424

26 $f(x) = (\sqrt{x}+1)^3$

olduğuna göre $f'(4)$ değeri kaçtır?

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{19}{6}$ C) $\frac{25}{8}$ D) $\frac{27}{4}$ E) 7

27



Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

- Bu eğriye $x = -2$ apsisli noktasındaki d teğet doğrusu x ekseni ile pozitif yönde 45° lik açı yapmaktadır.
- Bu eğriye $x = 0$ apsisli noktasındaki k teğet doğrusu d doğrusuna diktir.

Buna göre $f'(0) - f'(-2)$ değeri kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

28 • $y = x^3 + 1$
• $x = \sqrt{t} - 1$

olduğuna göre $\frac{dy}{dt}$ ifadesinin $t = 9$ için değeri kaçtır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) − 1

29 $f(x) = x^3 - ax^2 + ax - 2$

fonksiyonunun ekstremum noktası yoktur.

Buna göre a aşağıdakilerden hangisi olamaz?

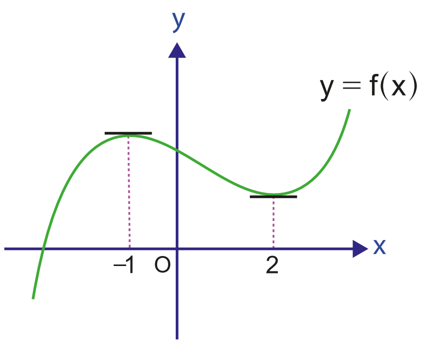
A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

30 • $f(x) = x^2 - x$
• $g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$

olduğuna göre $(f \circ g)'(1)$ değeri kaçtır?

A) − 2 B) $-\frac{3}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 2

31

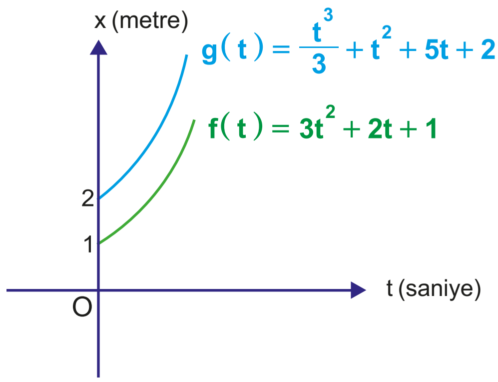


Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre $f(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$
B) $2x^3 - 4x^2 - 6x + 2$
C) $x^3 - x^2 + 2x - 1$
D) $x^3 - x^2 - x - 2$
E) $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x - 1$

E) 32-34. üst düzey beceri sorularını şekle ve metne göre cevaplayınız.



Yukarıda doğrusal olarak hareket eden iki hareketliye ait konum-zaman grafikleri verilmiştir. Buna göre;

32 Bu iki hareketlinin anlık hızları kaçıncı saniyelerde eşit olur?

33 Anlık hızları ilk kez eşit olduğu ana kadar geçen sürede bu iki hareketlinin ortalama hızları kaç m/sn. dir?

34 Bu iki hareketlinin anlık hızlarının eşit olduğu anlar arasında aldıkları yolların oranı kaçtır?

Ölçme ve Değerlendirme 2

A) 1-5. cümlelerde boş bırakılan yerlere uygun ifadeleri yazınız.

1 Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti fonksiyonun o noktadaki görüntüsüne eşit değilse fonksiyon o noktada ....değildir.

2 Bir fonksiyon bir noktada sürekli değilse bu noktada .... yoktur.

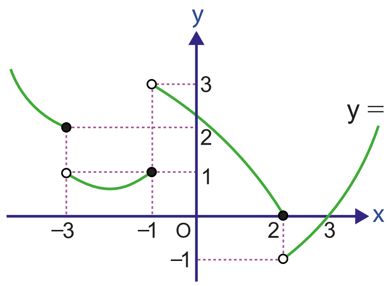
3 Bir fonksiyonun sürekli olup türevli olmadığı noktalara .... noktaları denir.

4 Türevlenebilir bir fonksiyonun azalanlıktan artanlığa geçtiği noktalarına fonksiyonunun .... noktaları denir.

5 Türevlenebilir bir fonksiyona bir noktasında çizilen teğetinin eğimi, fonksiyonun o noktadaki ....değerine eşittir.

B) 6. soruda numaralar ile verilen ifadeleri harf ile verilen ifadelerle eşleştiriniz.

6



Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre aşağıdaki limitleri karşılarındaki değerler ile eşleştiriniz.

I. $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$

II. $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$

III. $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$

IV. $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$

V. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

VI. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

VII. $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

a) 1
b) 0
c) 2
ç) -2
d) $\frac{1}{2}$
e) 3
f) yoktur.
g) $\frac{5}{2}$
h) -1

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.

C) 7-17. açık uçlu soruları cevaplandırınız.

7
- $\lim\limits_{x \to 2} (ax - b + 1) = 6$
- $\lim\limits_{x \to -1} (ax + x - b) = 1$

olduğuna göre $a \cdot b$ çarpımı kaçtır?

8 $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + b, & x < 1 \text{ ise} \\ 3ax - 2b, & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu veriliyor. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$ olduğuna göre $a \cdot b$ çarpımı kaçtır?

9 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9}$ ifadesinin değeri kaçtır?

10 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1, & x < a \text{ ise} \\ 3x - 2, & x \geq a \text{ ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu $x = a$ noktasında sürekli değildir. Buna göre a nın alamayacağı değerler toplamı kaçtır?

11 $f(x) = \begin{cases} 2x - 3a, & x < -3 \text{ ise} \\ x^2 - 2ax + 3, & x \geq -3 \text{ ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu her x gerçek sayısı için sürekli olduğuna göre a kaçtır?

12 $f(x) = \begin{cases} ax - b, & x < -2 \text{ ise} \\ x^2 - a, & -2 \leq x < 3 \text{ ise} \\ x + 2a, & x \geq 3 \text{ ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu yalnızca $x = -2$ için süreksiz olduğuna göre b kaç olamaz?

13 • $y = t^2 - t$

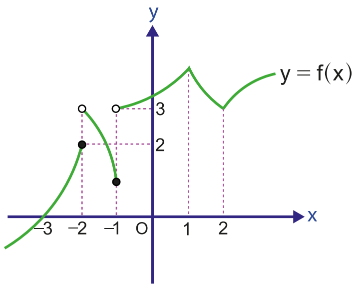
• $t = x^3 + x$

olduğuna göre $\dfrac{dy}{dx}$ ifadesinin $x = 1$ için değeri kaçtır?

14 $f(x) = \begin{cases} ax + b & , \ x < 2 \ \text{ise} \\ x^2 - ax & , \ x \geq 2 \ \text{ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu $x = 2$ için sürekli olmasına rağmen türevli değildir. Buna göre b kaç olamaz?

15



Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $f(x)$ fonksiyonunun sürekli olduğu hâlde türevsiz olduğu noktaların apsisleri toplamı kaçtır?

16 $f(x) = ax^3 - 3x^2 + 2$ fonksiyonu veriliyor.

$$\lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h}$$

olduğuna göre a kaçtır?

17 $f(x) = x^2 - 2x + 2$

$g(x) = 2x - 1$

fonksiyonları veriliyor. $(f \circ g)(x)$ fonksiyonunun $x = a$ apsisli noktasındaki teğeti x eksenine paralel olduğuna göre a kaçtır?

D) 18-32. çoktan seçmeli soruları çözünüz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

18 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 16}{x^2 - 2x}$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 32

19 $f(x) = \begin{cases} ax - 2 & , \ x < 2 \ \text{ise} \\ a^2 - 1 & , \ x = 2 \ \text{ise} \\ \dfrac{a}{x} + 1 & , \ x > 2 \ \text{ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu için

$$\lim_{x \to 2^-} 2f(x) - \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x)}{2} = 3$$

olduğuna göre $f(2)$ kaçtır?

A) -1 B) 1 C) 2 D) 3 E) 5

20 • $a, b \in \mathbb{R}$

• $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x^2 + ax - 2a}{x^2 - 4} = b$

olduğuna göre $a \cdot b$ çarpımı kaçtır?

A) 3 B) 2 C) 0 D) -2 E) -3

21 I. Bir fonksiyon limiti olduğu her noktada sürekli olmayabilir.

II. Bir fonksiyonun sürekli olduğu her noktasında limiti vardır.

III. Bir fonksiyonun sürekli olduğu her noktasında türevi vardır.

IV. Bir fonksiyon türevli olduğu her noktasında sürekli olmayabilir.

Yukarıdaki ifadelerden hangileri daima doğrudur?

A) I ve II B) II ve III C) III ve IV

D) I, II ve III E) I, II ve IV

22
- $\lim_{x\to 1}(f+g)(x) = 2$
- $\lim_{x\to -2}(g-f)(x) = -1$

olduğuna göre f(x) ve g(x) fonksiyonları aşağıdakilerden hangisi <u>olabilir</u>?

	f(x)	g(x)
A)	$2x-1$	$x+1$
B)	$\frac{x-2}{x+1}$	$\frac{2x+3}{2x}$
C)	x^2-x	$\frac{3x+1}{x+1}$
D)	$x+2$	$1-2x$
E)	$x+3$	$\frac{2x+4}{x+1}$

23 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x<1 \text{ ise} \\ x-2, & x\geq 1 \text{ ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı f(x) fonksiyonu veriliyor. $(f+g)(x)$ fonksiyonu $x=1$ apsisli noktasında süreklidir.

Buna göre $\lim_{x\to 1^+} g(x) - \lim_{x\to 1^-} g(x)$ farkı kaçtır?

A) 6 B) 4 C) 2 D) -2 E) -4

24 $f(x) = \begin{cases} ax^2-a, & x<2 \text{ ise} \\ 2ax+3, & x\geq 2 \text{ ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı f(x) fonksiyonu $x=2$ apsisli noktasında süreklidir.

Buna göre $f'(2^+)+f'(2^-)$ toplamı kaçtır?

A) -24 B) -18 C) -12 D) -8 E) -2

25 $f(x) = \begin{cases} 2ax-b+1, & x<1 \text{ ise} \\ bx+3a-2, & x\geq 1 \text{ ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı f(x) fonksiyonunun $x=1$ noktasında türevi olduğuna göre $a+b$ toplamı kaçtır?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{6}{5}$ D) $\frac{9}{5}$ E) 2

26 $f(x) = (x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)$

olduğuna göre $f'(2)$ değeri kaçtır?

A) -100 B) -80 C) -75 D) -60 E) -40

27
- $g(x) = x^2+1$
- $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

olduğuna göre $(g \circ h)'\left(\frac{1}{4}\right)$ değeri kaçtır?

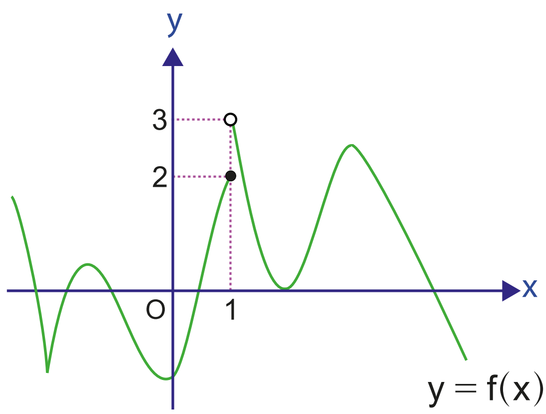
A) 5 B) 10 C) -10 D) -16 E) -20

28 $f(x) = \frac{x^5}{5} + x^3 - 4x + 2$

fonksiyonunun yerel minimum ve yerel maksimum değerlerinin toplamı kaçtır?

A) -4 B) $\frac{32}{5}$ C) 16 D) $\frac{128}{5}$ E) 4

29

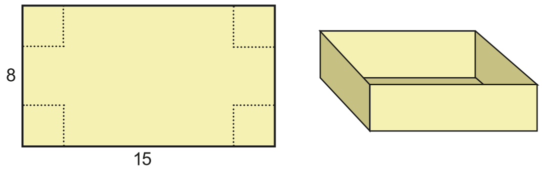


Yukarıda $y=f(x)$ fonksiyonun grafiği verilmiştir.

Buna göre |f(x)| fonksiyonunun kaç noktada türevi yoktur?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

30

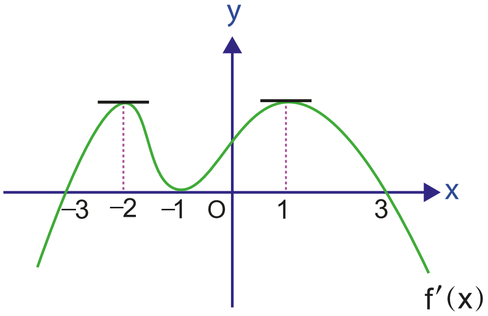


Boyutları 8 cm ve 15 cm olan bir kartonun köşelerinden eş kareler kesilip katlanarak şekildeki gibi üstü açık bir dikdörtgenler prizması yapılmak isteniyor.

Bu prizmanın hacminin <u>en büyük</u> olması için kesilen eş karelerden birinin alanı kaç cm^2 olmalıdır?

A) 9 B) $\frac{36}{25}$ C) $\frac{25}{9}$ D) $\frac{16}{9}$ E) 2

31



Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.

Buna göre $f(x)$ fonksiyonunun ekstremum noktalarının apsisleri aşağıdakilerden hangisidir?

A) $-3, 3$ B) $-2, 1$ C) -1

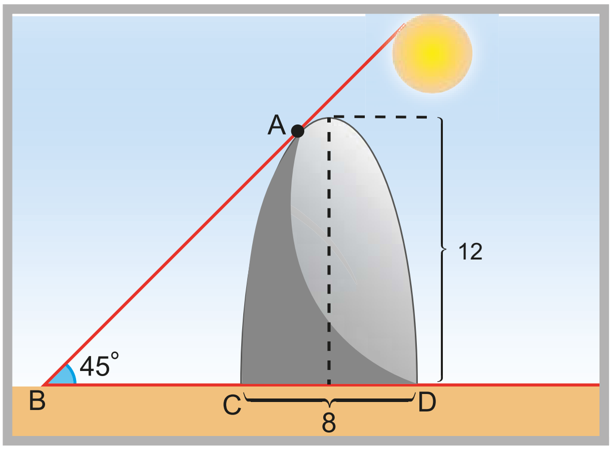
D) $-3, -1, 3$ E) $-2, -1, 1$

32 Bir ayrıtı x metre uzunluğunda olan küp şeklindeki bir mermer bloğun üretim maliyeti hacim üzerinden metreküp başına 1000 TL, satış fiyatı ise yüzey alanı üzerinden metrekare başına yine 1000 TL olarak hesaplanmaktadır.

Buna göre x kaç metre olursa bu mermer bloğun satışından elde edilen kâr <u>en fazla</u> olur?

A) 9 B) 8 C) 6 D) 4 E) 2

E) 33. ve 34. üst düzey beceri sorularını şekle ve metne göre cevaplayınız.



Yukarıdaki şekilde kesiti parabolik olan kubbe biçimindeki yapının C ve D ayakları arası 8 metre ve yapının en uç noktasının yerden yüksekliği 12 metredir. Güneşli bir günde yapıya A noktasında teğet olacak şekilde gelen güneş ışını yer düzlemi ile 45° lik açı yapmaktadır. Yapının gölgesi B noktasında bittiğine göre;

33 A noktasının yerden yüksekliği kaç metredir?

34 Yapının gölgesinin boyu olan |BC| kaç metredir?

Ölçme ve Değerlendirme 3

A) 1-6. cümlelerde boş bırakılan yerlere uygun ifadeleri yazınız.

1. Bir fonksiyonun tanımlı olmadığı bir noktada .... olabilir.

2. Bir fonksiyon sürekli olduğu bir noktada .... olmayabilir.

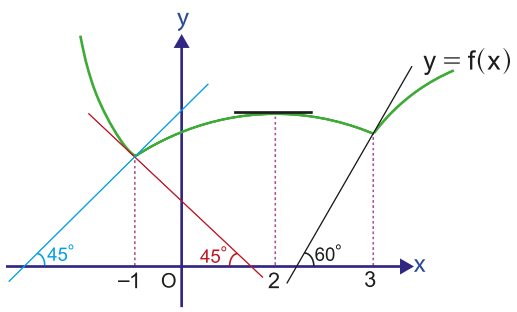
3. Bir fonksiyon bir noktada türevli ise o noktada ....olur.

4. Bir fonksiyonun kırılma noktalarında .... yoktur.

5. Türevlenebilir bir fonksiyonun artanlıktan azalanlığa geçtiği noktalarına fonksiyonun .... noktaları denir.

6. Türevlenebilir bir fonksiyonun türevinin negatif olduğu aralıkta fonksiyon .... olur.

B) 7. soruda numaralar ile verilen ifadeleri harf ile verilen ifadelerle eşleştiriniz.

7. 

Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği ve grafiğe kırılma noktalarında çizilen teğetleri verilmiştir. Buna göre aşağıdaki türevleri karşılarındaki değerler ile eşleştiriniz.

I. $f'(-1^-)$

II. $f'(-1^+)$

III. $f'(2)$

IV. $f'(3^+)$

V. $f'(3)$

a) 1

b) yoktur

c) $-\sqrt{3}$

ç) -1

d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

e) 0

f) $\sqrt{3}$

I.	II.	III.	IV.	V.

C) 8-17. açık uçlu soruları cevaplandırınız.

8. $\lim_{x \to 2} f(x+1) = 3$ olduğuna göre

$\lim_{x \to 3} \dfrac{f(x) - f^2(x)}{3f(x) + 1}$ ifadesinin değeri kaçtır?

9. $f(x) = \begin{cases} 2ax + 5 \ , & x < 2 \text{ ise} \\ x^2 + ax \ , & x \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı f fonksiyonunun $x = 2$ apsisli noktasında limiti yoktur. Buna göre a kaç olamaz?

10. $\lim_{x \to 2} \dfrac{ax^2 + 2x - 3}{x - 2}$

ifadesinin değeri bir gerçek sayı olduğuna göre bu limit değeri kaçtır?

11. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 12}{(x^2 - 4)(x^2 + 3x + 2)}$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonun sürekli olduğu en geniş küme nedir?

12. $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 6x + a}$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu sürekli olduğu en geniş küme $\mathbb{R} - \{k\}$ olduğuna göre $a \cdot k$ çarpımı kaçtır?

13 $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 3}{ax^2 - 2x + 3}$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu her x gerçek sayısı için sürekli olduğuna göre a nın alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

14
- $f(x) = x^2 - 2ax$
- $g(x) = 3x^2 + bx$
- $(f + g)'(1) = 2$
- $(f - g)'(2) = 2$

olduğuna göre $a + b$ toplamı kaçtır?

15
- $f(x) = x^2 + ax$
- $g(x) = ax^2 - 3x$
- $(f \cdot g)'(2) = 3$

olduğuna göre a nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?

16
- $f(x) = x^2 + x$
- $g(x) = 4 - x^2$
- $h(x) = x^2 - 9$

olduğuna göre $(f \cdot g)'(1) + (g \cdot h)'(1)$ değeri kaçtır?

17
- $f(x) = x^2 - ax$
- $g(x) = ax^3 - 2x$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(1) = 3$

olduğuna göre a nın alabileceği değerler çarpımı kaçtır?

D) 18-29. çoktan seçmeli soruları çözünüz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

18 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & , \ x < 2 \ \text{ ise} \\ \sqrt{2x} + 1 & , \ x \geq 2 \ \text{ ise} \end{cases}$

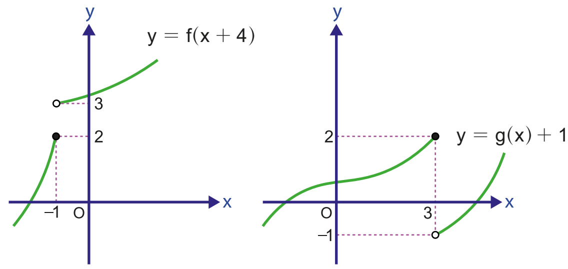
$g(x) = \begin{cases} x^3 - ax & , \ x < 2 \ \text{ ise} \\ x - b & , \ x \geq 2 \ \text{ ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları veriliyor.

$\lim\limits_{x \to 2} (f(x) - g(x)) = 4$ olduğuna göre $a \cdot b$ çarpımı kaçtır?

A) 9 B) 3 C) 0 D) -3 E) -9

19



Yukarıda $f(x + 4)$ ve $g(x) + 1$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

Buna göre $\lim\limits_{x \to 3^+} (f(x) + g(x))$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 2 B) 1 C) 0 D) -1 E) -2

20 $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\cos\frac{x}{9} \cdot \cos\frac{x}{18} - \sin\frac{x}{9} \cdot \sin\frac{x}{18}}{\sin\frac{x}{12} \cdot \cos\frac{x}{12}}$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $-2\sqrt{3}$ B) $-\sqrt{3}$ C) 0 D) $\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

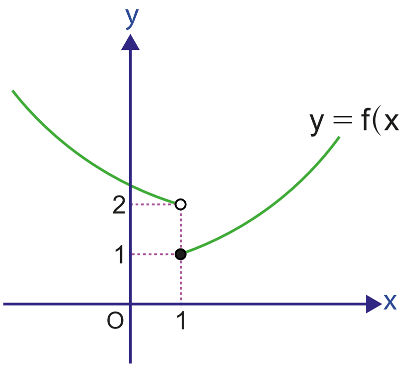
21

- $f(x) = x^2 - \frac{1}{x} + ax$
- $f'\left(\frac{1}{2}\right) = f''\left(\frac{-1}{2}\right)$

olduğuna göre a kaçtır?

A) 6 B) 8 C) 10 D) 13 E) 15

22



Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$f(x) - g(x)$ fonksiyonu $x = 1$ apsisli noktasında sürekli olduğuna göre $\lim_{x \to 1^-} g(x) - \lim_{x \to 1^+} g(x)$ farkı kaçtır?

A) − 2 B) − 1 C) 0 D) 1 E) 2

23 Yarıçapı r cm olan bir bilyenin üretim maliyeti hacim üzerinden cm^3 başına 2 kuruş ve satış fiyatı yüzey alanı üzerinden cm^2 başına 3 kuruş olarak hesaplanmaktadır.

Buna göre 100 tane bilyenin satışından elde edilebilecek maksimum kâr kaç π TL olur?

A) 18 B) 24 C) 30 D) 36 E) 42

24

- $f(x) = x - \frac{1}{x}$
- $g(x) = \sqrt{x} + 1$

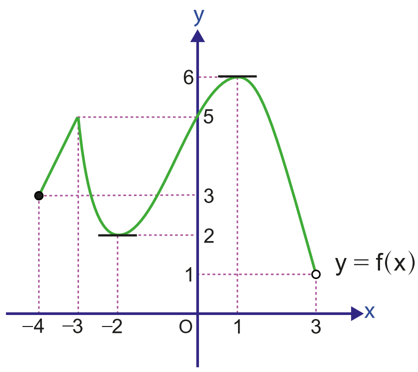
olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi <u>yanlıştır</u>?

A) $(f + g)'(1) = \frac{5}{2}$ B) $(f - g)'(4) = \frac{13}{16}$

C) $(f \cdot g)'(9) = \frac{448}{81}$ D) $\left(\frac{f}{g}\right)'(1) = -1$

E) $(fog)'(4) = \frac{5}{18}$

25



Yukarıda $[-4, 3)$ nda tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre aşağıdaki ifadelerin hangileri <u>yanlıştır</u>?

I. f(x) fonksiyonunun 4 tane ekstremum noktası vardır.
II. f(x) fonksiyonunun mutlak minimum değeri 1 dir.
III. f(x) fonksiyonunun mutlak maksimum değeri 6 dır.
IV. f(x) fonksiyonunun yerel maksimum değerleri toplamı 14 tür.
V. f(x) fonksiyonunun yerel minimum değerleri toplamı 5 tir.

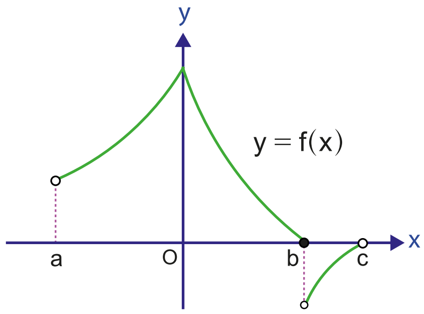
A) I ve III B) I ve IV C) II ve IV D) II ve V E) IV ve V

26 $f(x) = 2x^2 - x + k$
$g(x) = -x^2 + mx - 2n$

parabolleri $A(-1, 4)$ noktasında birbirlerine teğet olduklarına göre $m + k + n$ toplamı kaçtır?

A) 4 B) 2 C) 0 D) − 3 E) − 5

27



Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre aşağıdakilerden hangisi <u>yanlıştır</u>?

A) $(a,0)$ nda $f(x)$ artandır.

B) (b,c) nda $f^2(x)$ azalandır.

C) $(0,b)$ nda $f^3(x)$ azalandır.

D) (b,c) nda $x^2 \cdot f(x)$ azalandır.

E) $(0,b)$ nda $x^2 - f(x)$ artandır.

28 Aşağıda türevlenebilir bir $f(x)$ fonksiyonunun türevinin işaret tablosu verilmiştir.

x	$-\infty$		-3		-1		2		∞
$f'(x)$		$+$	o	$-$	o o	$-$	o	$+$	

Buna göre aşağıdakilerden hangisi <u>yanlıştır</u>?

A) $f(-5) < f(-4)$

B) $f(x)$ fonksiyonu $[-3,2]$ nda azalandır.

C) $f(x)$ fonksiyonu $(-\infty,-3]$ nda artandır.

D) $f(x)$ fonksiyonunun 2 tane ekstremum noktası vardır.

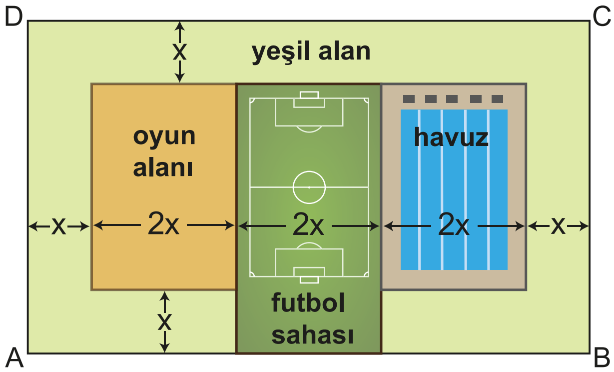
E) $f(-2) < f(1)$

29 $f(x) = ax^2 - 3x + b$ eğrisine $x = -2$ apsisli noktasından çizilen teğeti, $x = 3$ apsisli noktasından çizilen teğetine diktir.

Buna göre a nın alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

A) -3 B) -1 C) $-\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 2

E) 30-32. üst düzey beceri sorularını şekle ve metne göre cevaplayınız.



Bir belediye çevresi 720 metre olan şekildeki gibi ABCD dikdörtgeni biçiminde yeşil alana, oyun alanına, havuza ve futbol sahasına sahip bir park planı yapmıştır.

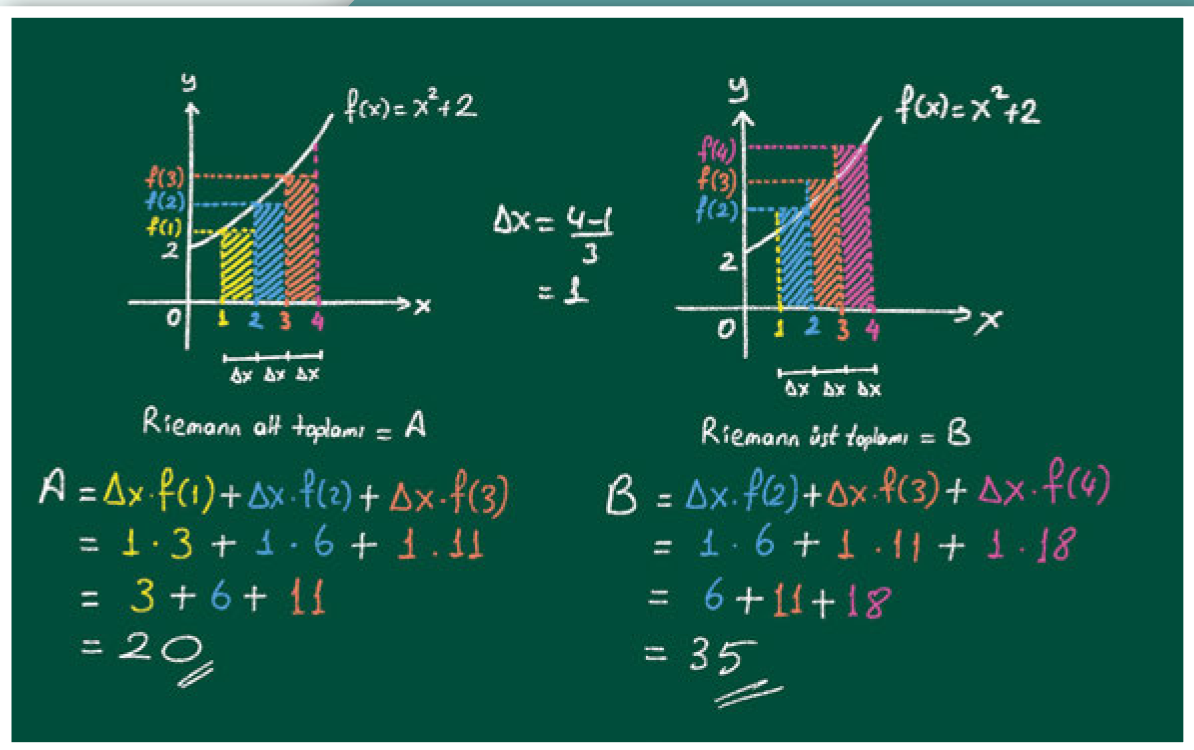
Oyun alanı, havuz ve futbol sahası dikdörtgen biçiminde ve şekildeki oranlara uygun olarak yapılacaktır.

Park, futbol sahası <u>en büyük</u> alana sahip olacak şekilde yapılacağına göre;

30 x uzunluğu kaç metre olur?

31 Parkın tamamının alanı kaç metrekare olur?

32 Parkın yeşil alanı kaç metrekare olur?



6

İNTEGRAL

6.1. BELİRSİZ İNTEGRAL
6.2. BELİRLİ İNTEGRAL VE UYGULAMALARI

HAZIRLIK ÇALIŞMALARI

- Türevi bilinen bir fonksiyonun kendisi bulunabilir mi?
- Günlük hayatta karşılaşılan ve bilinen geometrik şekillere benzemeyen bir bölgenin alanı nasıl hesaplanabilir?

6.1. BELİRSİZ İNTEGRAL

6.1.1. Belirsiz İntegral ve İntegral Alma Kuralları

Türevi $f'(x)=2x$ olan $f(x)$ fonksiyonu,

$f(x)=x^2$

$f(x)=x^2+2$

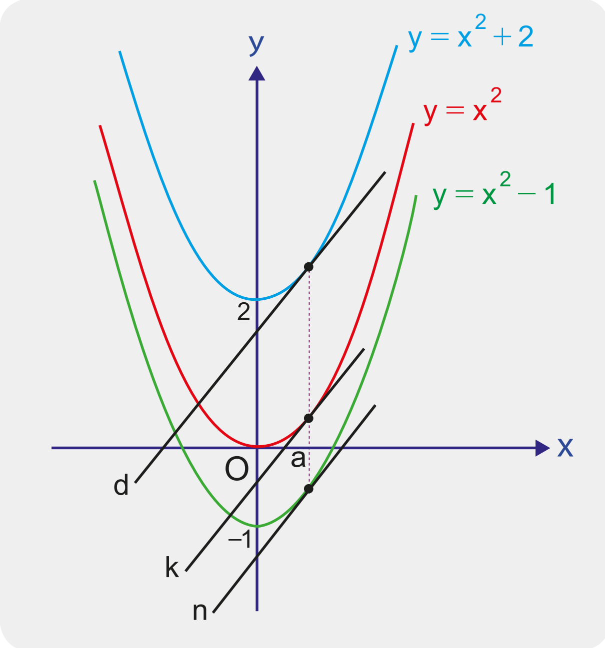
$f(x)=x^2-1$

vb. bir fonksiyondur. Bu fonksiyonların grafikleri incelenirse, herhangi bir a apsisli noktada her üç fonksiyona çizilen d, k ve n teğet doğrularının eğimi

$m_d = m_k = m_n = f'(a) = 2a$

olup doğruların birbirine paralel olduğu görülür.

Bu durum c bir gerçek sayı olmak üzere $f(x)=x^2+c$ biçimindeki tüm fonksiyonlar için geçerlidir.



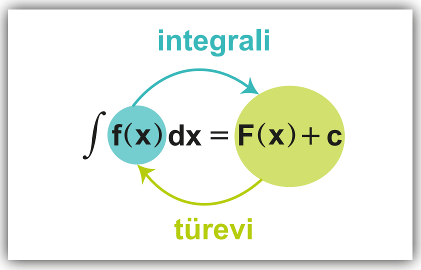
O hâlde türevi $f'(x)=2x$ olan $f(x)$ fonksiyonu, $f(x)=x^2+c$, (c sabit) olarak ifade edilebilir.

$F(x)$ fonksiyonun türevi $f(x)$ olsun. $f(x)$ fonksiyonunun türevi alınmadan önceki hâli olan $F(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ fonksiyonunun **ters türevi** veya **belirsiz integrali** denir.

Bir fonksiyonun ters türevini bulma işlemine **integral alma işlemi** denir.

Bir $f(x)$ fonksiyonunun belirsiz integrali $\int \mathbf{f(x)\,dx}$ biçiminde ifade edilir. Bu integralin bulunması için $F'(x)=f(x)$ olacak şekilde bir $F(x)$ fonksiyonu araştırılır ve c sabit sayısı bu fonksiyona eklenerek $f(x)$ fonksiyonunun belirsiz integrali $F(x)+c$ olarak elde edilir. Burada c sabit sayısına **integral sabiti** denir. Bu durumda

$$\int \mathbf{f(x)\,dx = F(x)+c} \quad \text{olur.}$$



SONUÇ

$$\int f(x)\,dx = F(x)+c \Rightarrow \frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = \overbrace{\frac{d}{dx}(F(x)+c)}^{f(x)} \quad \text{(Eşitliğin her iki tarafının türevi alınır.)}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\int \mathbf{f(x)\,dx = f(x)} \quad \text{olur.}$$

ÖRNEK

$\int f(x)\,dx = x^3 - 2x^2 + x + c$ olduğuna göre $f(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen eşitliğe göre $f(x)$ fonksiyonunun integrali $x^3 - 2x^2 + x + c$ olduğundan $x^3 - 2x^2 + x + c$ ifadesinin türevi $f(x)$ olur.

$(x^3 - 2x^2 + x + c)' = f(x) \Rightarrow f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ bulunur.

ÖRNEK

$\int (f(x) + 3x^2 + x)dx = x \cdot f(x)$ olduğuna göre f fonksiyonunun türevini bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen eşitliğe göre $f(x) + 3x^2 + x$ ifadesinin integrali $x \cdot f(x)$ olduğundan $x \cdot f(x)$ ifadesinin türevi $f(x) + 3x^2 + x$ olur.

$$(x \cdot f(x))' = f(x) + 3x^2 + x \Rightarrow \cancel{1 \cdot f(x)} + x \cdot f'(x) = \cancel{f(x)} + 3x^2 + x$$

$$\Rightarrow \cancel{x} \cdot f'(x) = \cancel{x}(3x + 1)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x + 1 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\int \frac{f(x)}{x} dx = \frac{x^2}{2} - 6x + c$ olduğuna göre $f(x)$ fonksiyonunun yerel minimum değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\int \frac{f(x)}{x} dx = \frac{x^2}{2} - 6x + c \Rightarrow \frac{d}{dx}\int \frac{f(x)}{x} dx = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2} - 6x + c\right)$$

(Verilen eşitliğin her iki tarafının türevi alınır.)

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x} = x - 6$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - 6x$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x - 6 \text{ olur.}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0$

$\Rightarrow x = 3$ elde edilir.

	$-\infty$	3	∞
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	min.	↗

$f(x) = x^2 - 6x \Rightarrow f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3$

$\Rightarrow f(3) = -9$ bulunur.

Bu durumda $f(x)$ fonksiyonunun yerel minimum değeri -9 olur.

İntegral Alma Kuralları

$n \neq -1$ ve $n \in \mathbb{Q}$ olmak üzere

$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \Rightarrow F'(x) = x^n$ olduğundan $\displaystyle\int \mathbf{x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c}$ olur.

ÖRNEK

Aşağıdaki integrallerin eşitlerini bulunuz.

a) $\int dx$ **b)** $\int x\,dx$ **c)** $\int x^2\,dx$ **ç)** $\int x^5 dx$

ÇÖZÜM

a) $$\int dx = \int x^0 dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + c = \frac{x^1}{1} + c = x + c$$

b) $$\int x\,dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + c = \frac{x^2}{2} + c$$

c) $$\int x^2\,dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + c = \frac{x^3}{3} + c$$

ç) $$\int x^5\,dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + c = \frac{x^6}{6} + c$$ bulunur.

ÖRNEK

Aşağıdaki integrallerin eşitini bulunuz.

a) $\int x\sqrt{x}\,dx$ **b)** $\int \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

ÇÖZÜM

a) $$\int x\sqrt{x}\,dx = \int x \cdot x^{\frac{1}{2}}\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c = \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + c = \frac{2x^2\sqrt{x}}{5} + c$$ bulunur.

b) $$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\,dx = \int x^{\frac{1}{6}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{6}+1}}{\frac{1}{6}+1} + c = \frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}} + c = \frac{6\sqrt[6]{x^7}}{7} + c = \frac{6x\sqrt[6]{x}}{7} + c$$ bulunur.

$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\int \mathbf{a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx} \text{ olur.}$$

$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot f(x)$ ....(1) $\qquad \left(\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int f(x)\,dx = f(x)\right)$

$\dfrac{d}{dx}\left(a \cdot \displaystyle\int f(x)\,dx\right) = a \cdot \dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int f(x)\,dx\right) = a \cdot f(x)$ ....(2)

(1) ve (2) eşitliklerinden $\displaystyle\int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx$ olur.

ÖRNEK

Aşağıdaki integrallerin eşitini bulunuz.

a) $\displaystyle\int 3x^4\,dx$

b) $\displaystyle\int 6x^2\,dx$

ÇÖZÜM

a) $\displaystyle\int 3x^4\,dx = 3 \cdot \int x^4\,dx$

$= 3 \cdot \dfrac{x^5}{5} + c$

$= \dfrac{3x^5}{5} + c$ bulunur.

b) $\displaystyle\int 6x^2\,dx = 6 \cdot \int x^2\,dx$

$= 6 \cdot \dfrac{x^3}{3} + c$

$= 2x^3 + c$ bulunur.

f ve g sürekli iki fonksiyon olmak üzere

$$\int \mathbf{(f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx}$$

$$\int \mathbf{(f(x)-g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx} \text{ olur.}$$

İki fonksiyonun toplamının veya farkının integrali, bu fonksiyonların integrallerinin toplamına veya farkına eşittir.

$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int (f(x) \mp g(x))\,dx = f(x) \mp g(x)$ ....(1)

$\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int f(x)\,dx \mp \int g(x)\,dx\right) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int f(x)\,dx \mp \dfrac{d}{dx}\int g(x)\,dx$

$= f(x) \mp g(x)$ ....(2)

(1) ve (2) eşitliklerinden

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int (f(x)-g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$\int (4x^3 - 3x^2)\,dx$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\int (4x^3 - 3x^2)\,dx = \int 4x^3\,dx - \int 3x^2\,dx$$
$$= 4\cdot\int x^3\,dx - 3\cdot\int x^2\,dx$$
$$= 4\cdot\left(\frac{x^4}{4} + c_1\right) - 3\cdot\left(\frac{x^3}{3} + c_2\right)$$
$$= x^4 - x^3 + \underbrace{4c_1 - 3c_2}_{c}$$
$$= x^4 - x^3 + c \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\int \left(2x - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\int \left(2x - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int \left(2x - x^{-2} + x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$
$$= \frac{2x^2}{2} - \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$
$$= x^2 + \frac{1}{x} + 2\sqrt{x} + c \text{ bulunur.}$$

Uyarı

İntegral alma işlemi farklı değişkenlere göre de uygulanabilir.

ÖRNEK

Aşağıdaki integrallerin eşitini bulunuz.

a) $\int dv$

b) $\int 2t\,dt$

ÇÖZÜM

a)
$$\int dv = \int v^0\,dv$$
$$= \frac{v^1}{1} + c$$
$$= v + c \text{ bulunur.}$$

b)
$$\int 2t\,dt = 2\int t\,dt$$
$$= \cancel{2}\cdot\frac{t^2}{\cancel{2}} + c$$
$$= t^2 + c \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\int \frac{t^4-1}{t^2}\,dt$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\int \frac{t^4-1}{t^2}\,dt = \int \left(\frac{t^4}{t^2}-\frac{1}{t^2}\right)dt$$
$$= \int (t^2-t^{-2})dt$$
$$= \frac{t^3}{3}-\frac{t^{-1}}{-1}+c$$
$$= \frac{t^3}{3}+\frac{1}{t}+c \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\int \frac{u^3-u^2+1}{u^2}\,du$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\int \frac{u^3-u^2+1}{u^2}\,du = \int \left(\frac{u^3}{u^2}-\frac{u^2}{u^2}+\frac{1}{u^2}\right)du$$
$$= \int \left(u-1+u^{-2}\right)du$$
$$= \frac{u^2}{2}-u+\frac{u^{-1}}{-1}+c$$
$$= \frac{u^2}{2}-u-\frac{1}{u}+c \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\int \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx = \int \left(\frac{x}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$
$$= \int \left(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$
$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c$$
$$= \frac{2\sqrt{x^3}}{3}-2\sqrt{x}+c$$
$$= \frac{2x\sqrt{x}}{3}-2\sqrt{x}+c \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\int (x^2-1)(4x-3)\,dx$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\int (x^2-1)(4x-3)\,dx = \int (4x^3-3x^2-4x+3)\,dx$$
$$= \frac{\cancel{4}x^4}{\cancel{4}} - \frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}} - \frac{4x^2}{2} + 3x + c$$
$$= x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x + c \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\int \frac{x^3-8}{x^2+2x+4}\,dx$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\int \frac{x^3-8}{x^2+2x+4}\,dx = \int \frac{(x-2)\cdot\cancel{(x^2+2x+4)}}{\cancel{x^2+2x+4}}\,dx$$
$$= \int (x-2)\,dx$$
$$= \frac{x^2}{2} - 2x + c \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

- $f'(x) = 2x-3$
- $f(1) = 3$

olduğuna göre $f(0)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x)$ fonksiyonunun türevi $2x-3$ olduğundan $2x-3$ ifadesinin integrali de $f(x)$ olur. Buna göre

$$f'(x) = 2x-3 \Rightarrow f(x) = \int (2x-3)\,dx$$
$$\Rightarrow f(x) = x^2 - 3x + c \text{ olur.}$$

$$f(x) = x^2-3x+c \Rightarrow f(1) = 1^2 - 3\cdot 1 + c$$
$$\Rightarrow 3 = -2 + c$$
$$\Rightarrow c = 5 \text{ elde edilir.}$$

Bu durumda $f(x) = x^2 - 3x + 5 \Rightarrow f(0) = 5$ bulunur.

ÖRNEK

- $h(x) = \int f'(x) \cdot g(x)\,dx + \int g'(x) \cdot f(x)\,dx$
- $f(2) \cdot g(2) = 5$
- $f(1) \cdot g(1) = 4$
- $h(2) = 3$

olduğuna göre $h(1)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} h(x) &= \int f'(x) \cdot g(x)\,dx + \int g'(x) \cdot f(x)\,dx \\ &= \int (f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x))\,dx \qquad ((f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)) \\ &= \int (f(x) \cdot g(x))'\,dx \\ &= f(x) \cdot g(x) + c \text{ olur.} \end{aligned}$$

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) + c \Rightarrow \underbrace{h(2)}_{3} = \underbrace{f(2) \cdot g(2)}_{5} + c$$

$$\Rightarrow 3 = 5 + c$$

$$\Rightarrow c = -2 \text{ olur.}$$

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) - 2 \Rightarrow h(1) = \underbrace{f(1) \cdot g(1)}_{4} - 2$$

$$= 4 - 2$$

$$= 2 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

- $h(x) = \int \frac{f'(x)}{x}\,dx - \int \frac{f(x)}{x^2}\,dx$
- $2h(2) = f(2) + 4$
- $f(-1) = 5$

olduğuna göre $h(-1)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$h(x) = \int \frac{f'(x)}{x}\,dx - \int \frac{f(x)}{x^2}\,dx \Rightarrow h(x) = \int \left(\frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2}\right)dx$$

$$\Rightarrow h(x) = \int \left(\frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2}\right)dx \qquad \left(\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow h(x) = \int \left(\frac{f(x)}{x}\right)'dx$$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{f(x)}{x} + c \text{ olur.}$$

$$h(x) = \frac{f(x)}{x} + c \Rightarrow h(2) = \frac{f(2)}{2} + c$$

$$\Rightarrow \underbrace{2h(2)}_{f(2)+4} = f(2) + 2 \cdot c$$

$$\Rightarrow \cancel{f(2)} + 4 = \cancel{f(2)} + 2 \cdot c$$

$$\Rightarrow c = 2 \text{ elde edilir.}$$

Bu durumda

$$h(x) = \frac{f(x)}{x} + 2 \Rightarrow h(-1) = \frac{f(-1)}{-1} + 2$$

$$\Rightarrow h(-1) = \frac{5}{-1} + 2$$

$$\Rightarrow h(-1) = -3 \text{ bulunur.}$$

Alıştırmalar

1 $\dfrac{d}{dx}\int (x^3 - x^2 + 2)\,dx$

ifadesinin $x = 2$ için değerini bulunuz.

2 $\int x \cdot f(x)\,dx = x^4 - 8x^2$

olduğuna göre $f(x)$ fonksiyonunun $x = 2$ apsisli noktasındaki teğetinin eğimini bulunuz.

3 $\int \dfrac{f(x)}{x}\,dx = x^2 - 3x + c$

olduğuna göre $f(x)$ fonksiyonunun yerel minimum değerini bulunuz.

4 $\int \left(x\sqrt[3]{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

ifadesinin eşitini bulunuz.

5 $\int \dfrac{t^2 - t}{\sqrt{t}}\,dt$

ifadesinin eşitini bulunuz.

6
- $f(x) = \int (x-1)\left(\dfrac{1}{x^3} + 1\right)dx$
- $f(1) = 1$

olduğuna göre $f(-1)$ değerini bulunuz.

7 $\int \dfrac{12x^4 - 12}{x - 1}\,dx$

ifadesinin eşitini bulunuz.

8
- $f'(x) = x^2 - 2x + 2$
- $f(2) = 1$

olduğuna göre $f(0)$ değerini bulunuz.

9
- $h(x) = \int f(x)\,dx + \int x \cdot f'(x)\,dx$
- $h(1) = f(1)$
- $f(2) = 3$

olduğuna göre $h(2)$ değerini bulunuz.

10 Türevi $f'(x) = 2x - a$ olan $f(x)$ fonksiyonunun $A(2, 8)$ noktasında bir yerel minimumu olduğuna göre $f(1)$ değerini bulunuz.

6.1.2. Değişken Değiştirme Yöntemi

Diferansiyel Kavramı

Türevlenebilir bir $f(x)$ fonksiyonunun türevi $\frac{d}{dx}(f(x)) = f'(x)$ olmak üzere $d(f(x))$ ifadesine $f(x)$ fonksiyonunun **diferansiyeli** denir ve

$$\mathbf{d(f(x)) = f'(x)\,dx} \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$f(x) = x^2 - x$ fonksiyonunun diferansiyelini bulunuz.

ÇÖZÜM

$d(f(x)) = f'(x)\,dx \Rightarrow d(f(x)) = (2x-1)\,dx$ bulunur.

ÖRNEK

$y = u^3 - \frac{1}{u}$ olduğuna göre dy nin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$dy = \left(u^3 - \frac{1}{u}\right)' du \Rightarrow dy = \left(3u^2 + \frac{1}{u^2}\right) du$ bulunur.

ÖRNEK

$u = (x^2 + x)^2$ eşitliğinin iki tarafının diferansiyelini alınız.

ÇÖZÜM

$$du = \left((x^2+x)^2\right)' dx \Rightarrow du = 2 \cdot (x^2 + x) \cdot (2x+1)\,dx$$
$$= (4x^3 + 6x^2 + 2x)\,dx \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$u = 3x - 2$ olduğuna göre dx ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$u = 3x - 2 \Rightarrow du = 3\,dx$

$\Rightarrow dx = \frac{du}{3}$ olur.

Değişken Değiştirme Yöntemi

İntegral alma kuralları ile alınması zor olan bazı integraller değişken değiştirme yöntemi kullanılarak daha basit integraller hâline getirildikten sonra kolayca integrali alınabilir.

$n \neq 0$, $n \neq -1$ ve $n \in \mathbb{Q}$ olmak üzere

$\int (f(x))^n \cdot f'(x)\,dx$ biçimindeki integrallerde sırasıyla aşağıdaki adımlar uygulanır.

$f(x) = u$ ($f(x) = u$ dönüşümü yapılır.)

$f'(x)\,dx = du$ (Her iki tarafın diferansiyeli alınır.)

$$\int \underbrace{(f(x))^n}_{u^n} \cdot \underbrace{f'(x)\,dx}_{du} = \int u^n\,du$$ (Dönüşüm ve diferansiyel verilen integralde yerine yazılır.)

$$= \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$ (İntegral alınır.)

$$= \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + c$$ (u yerine eşiti olan $f(x)$ yazılır.)

ÖRNEK

$\int (x-1)^5\,dx$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x - 1 = u$ ($x - 1 = u$ dönüşümü yapılır.)

$dx = du$ (Her iki tarafın diferansiyeli alınır.)

$$\int \underbrace{(x-1)^5}_{u^5} \underbrace{dx}_{du} = \int u^5\,du$$ (Dönüşüm ve diferansiyel verilen integralde yerine yazılır.)

$$= \frac{u^6}{6} + c$$ (İntegral alınır.)

$$= \frac{(x-1)^6}{6} + c$$ (u yerine eşiti olan $x - 1$ yazılır.)

ÖRNEK

$\int (3x-1)^4\,dx$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$3x - 1 = u \Rightarrow 3\,dx = du$

$\Rightarrow dx = \frac{1}{3}du$

$$\int \underbrace{(3x-1)^4}_{u^4}\,\underbrace{dx}_{\frac{1}{3}du} = \int u^4 \cdot \frac{1}{3}du$$

$$= \frac{1}{3}\int u^4\,du$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^5}{5} + c$$

$$= \frac{(3x-1)^5}{15} + c \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\int (x^2+x)^3(2x+1)\,dx$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2+x=u \Rightarrow (2x+1)\,dx = du$

$$\int \underbrace{(x^2+x)^3}_{u^3} \cdot \underbrace{(2x+1)\,dx}_{du} = \int u^3\,du$$

$$= \frac{u^4}{4} + c$$

$$= \frac{(x^2+x)^4}{4} + c \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\int x\sqrt{x^2+2}\,dx$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2+2=u \Rightarrow 2x\,dx = du$

$\Rightarrow x\,dx = \frac{1}{2}du$

$$\int x\sqrt{x^2+2}\,dx = \int \underbrace{\sqrt{x^2+2}}_{\sqrt{u}} \cdot \underbrace{x\,dx}_{\frac{1}{2}du} = \int \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2}du$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{\sqrt{u^3}}{3} + c$$

$$= \frac{\sqrt{(x^2+2)^3}}{3} + c \text{ bulunur.}$$

$f(x) \neq 0$, $n \neq 0$, $n \neq 1$ ve $n \in \mathbb{Q}$ olmak üzere

$\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n}\,dx$ biçimindeki integrallerde $\mathbf{f(x) = u}$ dönüşümü yapılır.

$f(x) = u \Rightarrow f'(x)\,dx = du$ olur.

$$\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n}\,dx = \int \underbrace{\frac{1}{[f(x)]^n}}_{\frac{1}{u^n}} \cdot \underbrace{f'(x)\,dx}_{du} = \int \frac{1}{u^n}\,du$$

$$= \int u^{-n}\,du$$

$$= \frac{u^{-n+1}}{-n+1} + c$$

$$= \frac{[f(x)]^{1-n}}{1-n} + c \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\int \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$2x + 1 = u \Rightarrow 2\,dx = du$

$\Rightarrow dx = \frac{1}{2}\,du$

$$\int \underbrace{\frac{1}{(2x+1)^2}}_{\frac{1}{u^2}} \underbrace{dx}_{\frac{1}{2}du} = \int \frac{1}{u^2} \cdot \frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\int u^{-2}\,du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-1}}{-1} + c$$

$$= -\frac{1}{2u} + c$$

$$= -\frac{1}{2(2x+1)} + c$$

$$= -\frac{1}{4x+2} + c \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\int \frac{x}{x^4 - 2x^2 + 1}\,dx$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\int \frac{x}{x^4 - 2x^2 + 1}\,dx = \int \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx$$

$x^2 - 1 = u \Rightarrow 2x\,dx = du$

$\Rightarrow x\,dx = \frac{1}{2}\,du$

$$\int \frac{x}{(x^2-1)^2}dx = \int \underbrace{\frac{1}{(x^2-1)^2}}_{\frac{1}{u^2}} \cdot \underbrace{x\,dx}_{\frac{1}{2}du} = \int \frac{1}{u^2}\cdot\frac{1}{2}du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int u^{-2}du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-1}}{-1}+c$$

$$= -\frac{1}{2u}+c$$

$$= -\frac{1}{2x^2-2}+c \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK

$\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2-2x-1}}dx$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$x^2-2x-1 = u \Rightarrow (2x-2)\,dx = du$$

$$\Rightarrow (x-1)\,dx = \frac{1}{2}du$$

$$\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2-2x-1}}dx = \int \underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-2x-1}}}_{\frac{1}{\sqrt[3]{u}}} \cdot \underbrace{(x-1)\,dx}_{\frac{1}{2}du} = \int \frac{1}{\sqrt[3]{u}}\cdot\frac{1}{2}du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int u^{-\frac{1}{3}}du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+c$$

$$= \frac{3\sqrt[3]{u^2}}{4}+c$$

$$= \frac{3\sqrt[3]{(x^2-2x-1)^2}}{4}+c \quad \text{bulunur.}$$

$\int f'(g(x))\cdot g'(x)\,dx$ biçimindeki integrallerde $\mathbf{g(x)=u}$ dönüşümü yapılır.

$$g(x)=u \Rightarrow g'(x)\,dx = du$$

$$\int \underbrace{f'(g(x))}_{f'(u)}\cdot\underbrace{g'(x)\,dx}_{du} = \int f'(u)\,du$$

$$= f(u)+c$$

$$= f(g(x))+c \quad \text{olur.}$$

ÖRNEK

$\int x \cdot f'(x^2)\,dx$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$x^2 = u \Rightarrow 2x\,dx = du$$
$$\Rightarrow x\,dx = \frac{1}{2}\,du$$

$$\int \underbrace{f'(x^2)}_{f'(u)} \cdot \underbrace{x\,dx}_{\frac{1}{2}du} = \int f'(u) \cdot \frac{1}{2}\,du$$
$$= \frac{f(u)}{2} + c$$
$$= \frac{f(x^2)}{2} + c \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK

- $g(x) = \int x^2 \cdot f'(x^3 - 1)\,dx$
- $f(0) = 3,\ g(1) = 5$ ve $f(7) = -9$

olduğuna göre $g(2)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$x^3 - 1 = u \Rightarrow 3x^2\,dx = du$$
$$\Rightarrow x^2\,dx = \frac{1}{3}\,du$$

$$g(x) = \int \underbrace{f'(x^3 - 1)}_{f'(u)} \cdot \underbrace{x^2\,dx}_{\frac{1}{3}du} = \int f'(u) \cdot \frac{1}{3}\,du$$
$$= \frac{1}{3}f(u) + c$$
$$= \frac{f(x^3 - 1)}{3} + c \quad \text{olur.}$$

$$g(x) = \frac{f(x^3 - 1)}{3} + c \Rightarrow g(1) = \frac{f(0)}{3} + c$$
$$5 = \frac{3}{3} + c$$
$$5 = 1 + c$$
$$c = 4 \quad \text{elde edilir.}$$

$$g(x) = \frac{f(x^3 - 1)}{3} + 4 \Rightarrow g(2) = \frac{f(7)}{3} + 4$$
$$= -\frac{9}{3} + 4$$
$$= 1 \quad \text{bulunur.}$$

Alıştırmalar

1 $f(x)=\sqrt{x^3-x}$ olduğuna göre $f(x)$ fonksiyonunun diferansiyelini bulunuz.

2 $\int (x+2)^4\,dx$ ifadesinin eşitini bulunuz.

3 $\int x\left(x^2-1\right)^5 dx$ ifadesinin eşitini bulunuz.

4 $\int x^2(x-3)\left(x^2+3x+9\right)dx$ ifadesinin eşitini bulunuz.

5 $\int \sqrt{3x+2}\,dx$ ifadesinin eşitini bulunuz.

6 $\int (3x+2)^3\,dx$ ifadesinin eşitini bulunuz.

7 $\int \frac{1}{(5x-1)^3}\,dx$ ifadesinin eşitini bulunuz.

8 $\int \frac{1}{x^2-4x+4}\,dx$ ifadesinin eşitini bulunuz.

9 $\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx$ ifadesinin eşitini bulunuz.

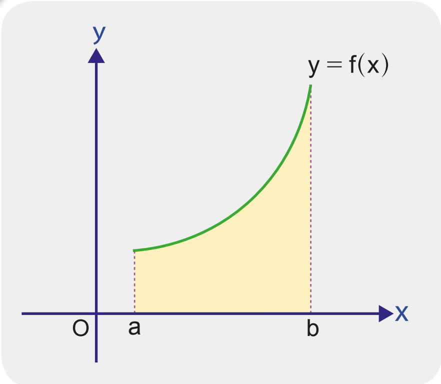
10 $\int (x+1)\sqrt{x^2+2x+2}\,dx$ ifadesinin eşitini bulunuz.

11 $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$ ifadesinin eşitini bulunuz.

12 $\int \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\,dx$ ifadesinin eşitini bulunuz.

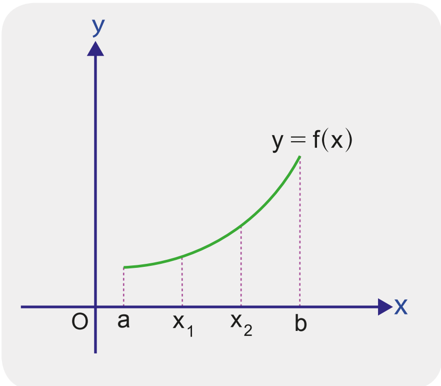
6.2. BELİRLİ İNTEGRAL VE UYGULAMALARI

6.2.1. Bir Fonksiyonun Grafiği ile x Ekseni Arasında Kalan Sınırlı Bölgenin Alanının Riemann Toplamı Yardımıyla Yaklaşık Olarak Hesaplanması

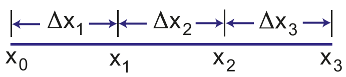


Yanda $[a, b]$ nda tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$[a, b]$ nda $y = f(x)$ eğrisi ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanı Alman matematikçi Bernhard Riemann (Bernard Riman) tarafından hesaplanmıştır.



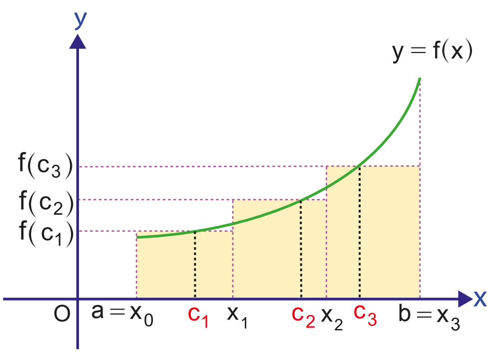
$[a, b]$ nda $a < x_1 < x_2 < b$ olmak üzere $a = x_0$ ve $b = x_3$ seçilerek oluşturulan $P = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ kümesine $[a, b]$ nın bir bölüntüsü denir. (Bu bölüntü eşit aralıklarla olmak zorunda değildir.)



$$\left.\begin{array}{l} |x_1 - x_0| = \Delta x_1 \\ |x_2 - x_1| = \Delta x_2 \\ |x_3 - x_2| = \Delta x_3 \end{array}\right\} \text{alt aralıkların genişlikleridir.}$$

Eğer $[a, b]$, n tane eşit alt aralığa bölünecek olursa ortak genişlik $\mathbf{\Delta x = \dfrac{b - a}{n}}$ olur.

Riemann Toplamı



✓ $c_1 \in [x_0, x_1]$ için $f(c_1)$, $[x_0, x_1]$ nın görüntü kümesinin bir elemanı,

✓ $c_2 \in [x_1, x_2]$ için $f(c_2)$, $[x_1, x_2]$ nın görüntü kümesinin bir elemanı,

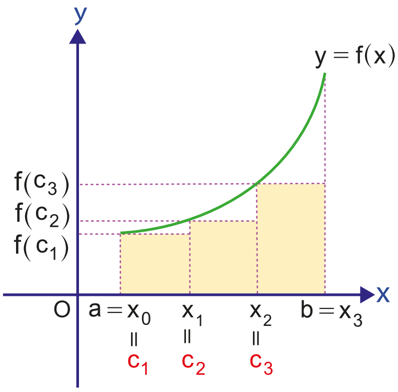
✓ $c_3 \in [x_2, x_3]$ için $f(c_3)$, $[x_2, x_3]$ nın görüntü kümesinin bir elemanı olmak üzere

Grafikte oluşan boyalı dikdörtgenlerin toplam alanını veren

$$\Delta x_1 \cdot f(c_1) + \Delta x_2 \cdot f(c_2) + \Delta x_3 \cdot f(c_3)$$

toplamına $f(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ na ait bir **Riemann toplamı** denir. Burada $[a,b]$ 3 alt aralığa ayrılmıştır. Eğer $[a,b]$ daha fazla alt aralığa ayrılırsa bulunan Riemann toplamının değeri, eğrinin altında kalan alanın değerine daha yakın olur.

Riemann Alt Toplamı



✓ $c_1 \in [x_0, x_1]$ için $f(c_1)$, $[x_0, x_1]$ nın görüntü kümesinin en küçük elemanı,

✓ $c_2 \in [x_1, x_2]$ için $f(c_2)$, $[x_1, x_2]$ nın görüntü kümesinin en küçük elemanı,

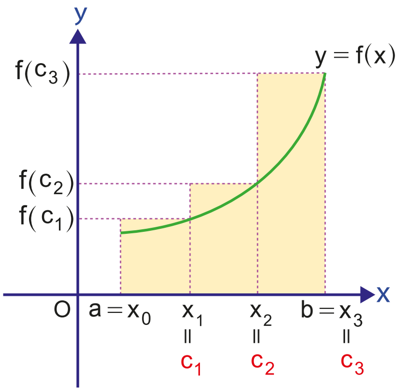
✓ $c_3 \in [x_2, x_3]$ için $f(c_3)$, $[x_2, x_3]$ nın görüntü kümesinin en küçük elemanı olmak üzere

Grafikteki eğrinin altında oluşan boyalı dikdörtgenlerin toplam alanını veren

$$\Delta x_1 \cdot f(c_1) + \Delta x_2 \cdot f(c_2) + \Delta x_3 \cdot f(c_3)$$

toplamına $f(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ na ait bir **Riemann alt toplamı** denir. Burada $[a,b]$ 3 alt aralığa ayrılmıştır. Eğer $[a,b]$ daha fazla alt aralığa ayrılırsa bulunan Riemann alt toplamının değeri, eğrinin altında kalan alanın değerine daha yakın olur.

Riemann Üst Toplamı



✓ $c_1 \in [x_0, x_1]$ için $f(c_1)$, $[x_0, x_1]$ nın görüntü kümesinin en büyük elemanı,

✓ $c_2 \in [x_1, x_2]$ için $f(c_2)$, $[x_1, x_2]$ nın görüntü kümesinin en büyük elemanı,

✓ $c_3 \in [x_2, x_3]$ için $f(c_3)$, $[x_2, x_3]$ nın görüntü kümesinin en büyük elemanı olmak üzere

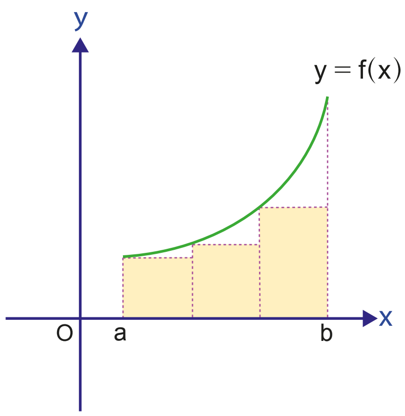
Grafikteki eğrinin üzerinde oluşan boyalı dikdörtgenlerin toplam alanını veren

$$\Delta x_1 \cdot f(c_1) + \Delta x_2 \cdot f(c_2) + \Delta x_3 \cdot f(c_3)$$

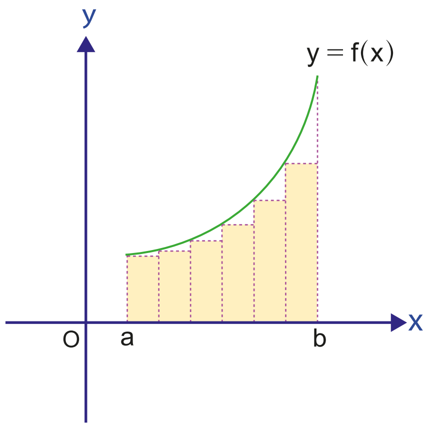
toplamına $f(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ na ait bir **Riemann üst toplamı** denir. Burada $[a,b]$ 3 alt aralığa ayrılmıştır. Eğer $[a,b]$ daha fazla alt aralığa ayrılırsa bulunan Riemann üst toplamının değeri, eğrinin altında kalan alanın değerine daha yakın olur.

$[a,b]$ nda $f(x) > 0$ ise $[a,b]$ nda f fonksiyonunun grafiğinin altında kalan alanın değeri Riemann alt ve üst toplamlarının arasında bir değer olur.

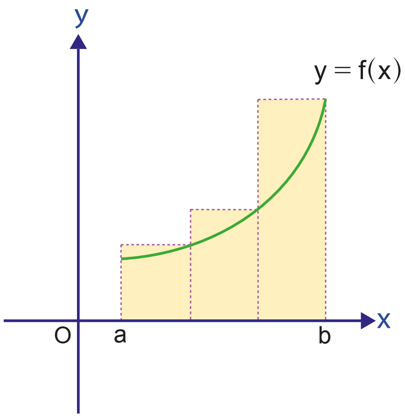
Aşağıda $[a,b]$ 3 ve 6 alt aralığa ayrılarak Riemann toplamları gösterilmiştir.



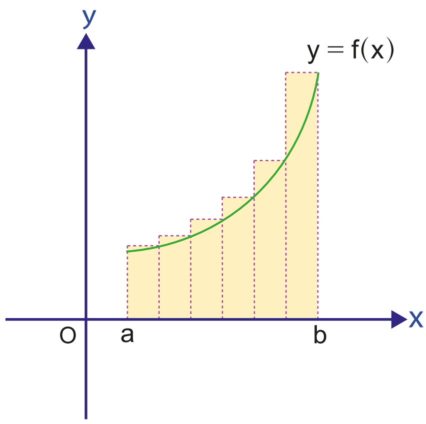
3 alt aralığa göre Riemann alt toplamı



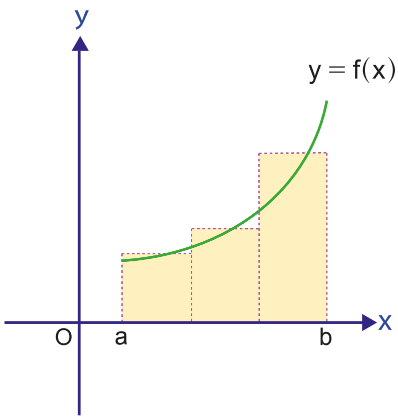
6 alt aralığa göre Riemann alt toplamı



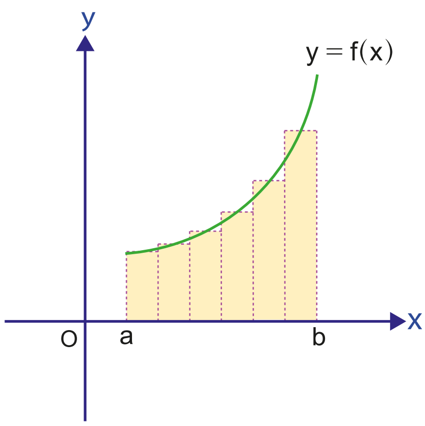
3 alt aralığa göre Riemann üst toplamı



6 alt aralığa göre Riemann üst toplamı



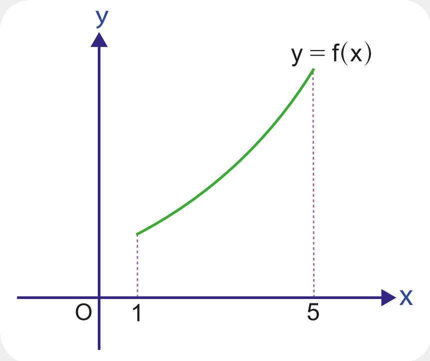
3 alt aralığa göre Riemann toplamı



6 alt aralığa göre Riemann toplamı

Grafiklere dikkat edilirse aralık sayısı arttıkça eğrinin altında kalan boşlukların veya eğrinin üzerinde kalan fazla alanların küçüldüğü görülür. Buna göre aralık sayısı arttıkça hesaplanan Riemann toplamlarının, eğrinin altında kalan alana daha yakın sonuçlar verdiği görülür.

ÖRNEK



Yanda $[1,5]$ nda tanımlı $f(x) = x^2 + 2$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $[1,5]$ nı 4 eşit alt aralığa bölerek

a) Riemann alt toplamını bulunuz.

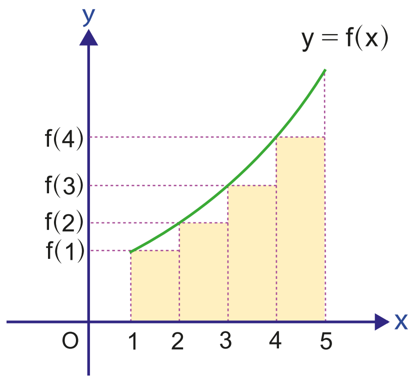
b) Riemann üst toplamını bulunuz.

c) Her alt aralığın orta noktasına göre hesaplanan Riemann toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

Alt aralıklar eşit olduğundan ortak genişlik $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{5-1}{4} = 1$ olur.

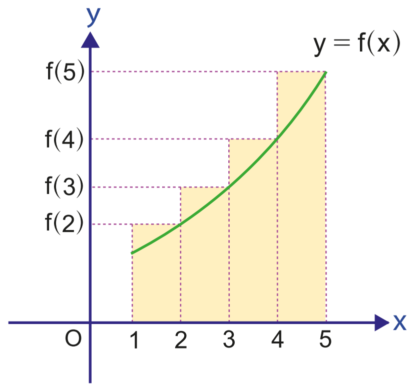
a)



Yandaki grafikte gösterilen Riemann alt toplamı A ise

$$
\begin{aligned}
A &= \Delta x \cdot f(1) + \Delta x \cdot f(2) + \Delta x \cdot f(3) + \Delta x \cdot f(4) \\
&= 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(2) + 1 \cdot f(3) + 1 \cdot f(4) \\
&= 1 \cdot 3 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 11 + 1 \cdot 18 \\
&= 3 + 6 + 11 + 18 \\
&= 38 \ \text{bulunur.}
\end{aligned}
$$

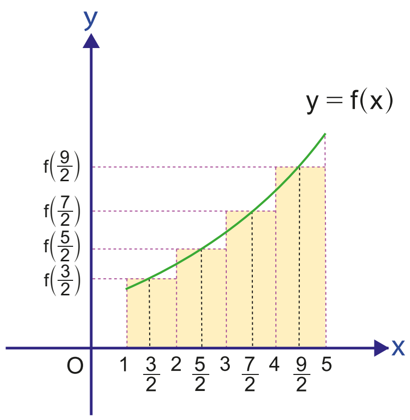
b)



Yandaki grafikte gösterilen Riemann üst toplamı B ise

$$
\begin{aligned}
B &= \Delta x \cdot f(2) + \Delta x \cdot f(3) + \Delta x \cdot f(4) + \Delta x \cdot f(5) \\
&= 1 \cdot f(2) + 1 \cdot f(3) + 1 \cdot f(4) + 1 \cdot f(5) \\
&= 1 \cdot 6 + 1 \cdot 11 + 1 \cdot 18 + 1 \cdot 27 \\
&= 6 + 11 + 18 + 27 \\
&= 62 \ \text{bulunur.}
\end{aligned}
$$

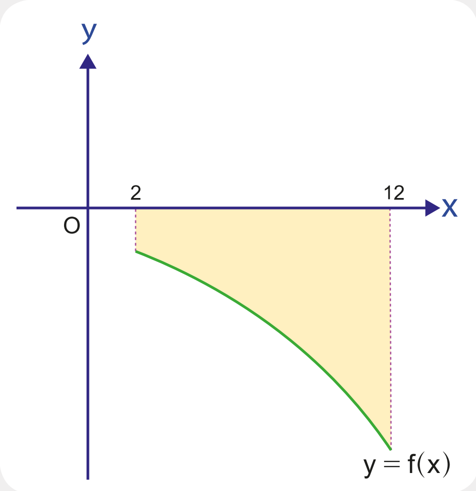
c)



Yandaki grafikte gösterilen Riemann toplamı C ise

$$
\begin{aligned}
C &= \Delta x \cdot f\left(\frac{3}{2}\right) + \Delta x \cdot f\left(\frac{5}{2}\right) + \Delta x \cdot f\left(\frac{7}{2}\right) + \Delta x \cdot f\left(\frac{9}{2}\right) \\
&= 1 \cdot f\left(\frac{3}{2}\right) + 1 \cdot f\left(\frac{5}{2}\right) + 1 \cdot f\left(\frac{7}{2}\right) + 1 \cdot f\left(\frac{9}{2}\right) \\
&= 1 \cdot \frac{17}{4} + 1 \cdot \frac{33}{4} + 1 \cdot \frac{57}{4} + 1 \cdot \frac{89}{4} \\
&= \frac{17}{4} + \frac{33}{4} + \frac{57}{4} + \frac{89}{4} \\
&= 49 \ \text{bulunur.}
\end{aligned}
$$

ÖRNEK



Yanda $[2,12]$ nda tanımlı $f(x)=-x^2+2$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Bu eğri ile x ekseni arasında kalan boyalı bölgenin alanını, $[2,12]$ nı 5 eşit alt aralığa bölerek

a) Riemann alt toplamı yardımıyla yaklaşık olarak hesaplayınız.

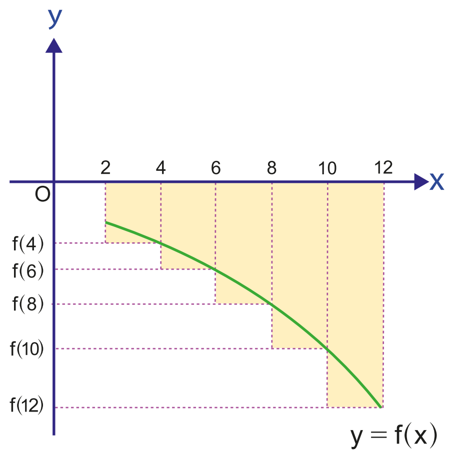
b) Riemann üst toplamı yardımıyla yaklaşık olarak hesaplayınız.

c) Alt aralıkların orta noktalarına göre Riemann toplamı yardımıyla hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$[2,12]$ 5 eşit alt aralığa ayrılacağından ortak genişlik $\Delta x=\dfrac{12-2}{5}=2$ olur.

a)

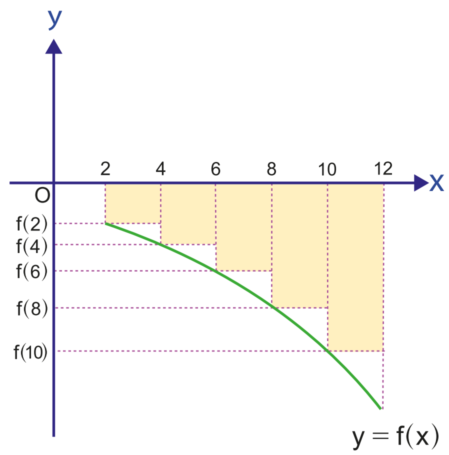


$y=f(x)$ fonksiyonunun $[2,12]$ 5 eşit alt aralığa ayrılarak hesaplanan Riemann alt toplamı A ise

$$\begin{aligned}A&=\Delta x\cdot f(4)+\Delta x\cdot f(6)+\Delta x\cdot f(8)+\Delta x\cdot f(10)+\Delta x\cdot f(12)\\&=2\cdot(-14)+2\cdot(-34)+2\cdot(-62)+2\cdot(-98)+2\cdot(-142)\\&=-28-68-124-196-284\\&=-700 \text{ olur.}\end{aligned}$$

$y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği x ekseninin altında kaldığından Riemann alt toplamı negatif olur. Buna göre $f(x)$ fonksiyonu ile x ekseni arasında kalan alan yaklaşık olarak 700 birimkare bulunur.

b)

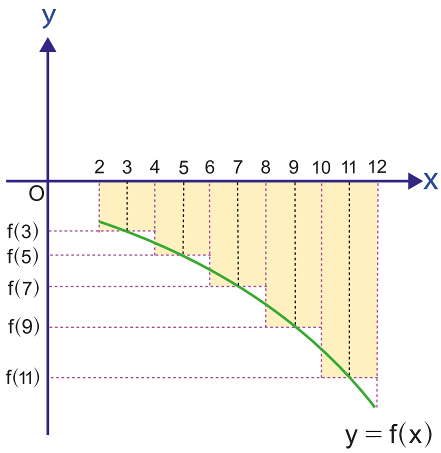


$y=f(x)$ fonksiyonunun $[2,12]$ 5 eşit alt aralığa ayrılarak hesaplanan Riemann üst toplamı B ise

$$\begin{aligned}B&=\Delta x\cdot f(2)+\Delta x\cdot f(4)+\Delta x\cdot f(6)+\Delta x\cdot f(8)+\Delta x\cdot f(10)\\&=2\cdot(-2)+2\cdot(-14)+2\cdot(-34)+2\cdot(-62)+2\cdot(-98)\\&=-4-28-68-124-196\\&=-420 \text{ olur.}\end{aligned}$$

$y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği x ekseninin altında kaldığından Riemann üst toplamı negatif olur. Buna göre $f(x)$ fonksiyonu ile x ekseni arasında kalan alan yaklaşık olarak 420 birimkare bulunur.

c)

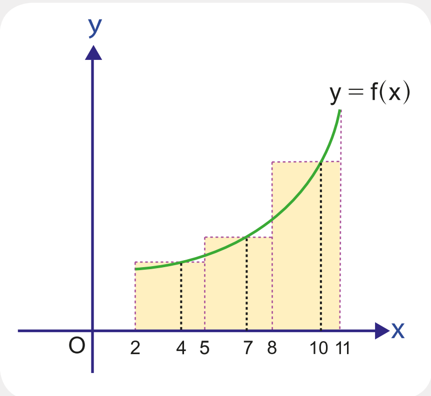


$y = f(x)$ fonksiyonunun $[2,12]$ 5 eşit alt aralığa ayrılarak bu aralıkların orta noktalarına göre hesaplanan Riemann toplamı C ise

$$\begin{aligned} C &= \Delta x \cdot f(3) + \Delta x \cdot f(5) + \Delta x \cdot f(7) + \Delta x \cdot f(9) + \Delta x \cdot f(11) \\ &= 2 \cdot (-7) + 2 \cdot (-23) + 2 \cdot (-47) + 2 \cdot (-79) + 2 \cdot (-119) \\ &= -14 - 46 - 94 - 158 - 238 \\ &= -550 \text{ olur.} \end{aligned}$$

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği x ekseninin altında kaldığından Riemann toplamı negatif olur. Buna göre $f(x)$ fonksiyonu ile x ekseni arasında kalan alan yaklaşık olarak 550 birimkare bulunur.

ÖRNEK



Yanda $[2,11]$ nda tanımlı $f(x) = x^2 + 1$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Grafikte 3 eşit alt aralığa göre gösterilmiş olan Riemann toplamını hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$[2,11]$ 3 eşit alt aralığa ayrıldığından ortak genişlik $\Delta x = \dfrac{11-2}{3} = 3$ olur.

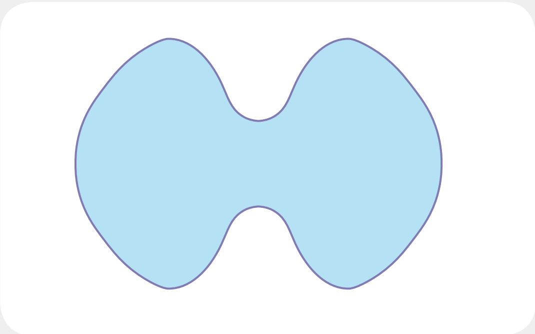
Grafikte verilen Riemann toplamları $x = 4$, $x = 7$ ve $x = 10$ noktalarına göre gösterilmiştir. Bu durumda $y = f(x)$ fonksiyonunun $[2,11]$ 3 eşit alt aralığa ayrılarak hesaplanan Riemann toplamı A ise

$$\begin{aligned} A &= \Delta x \cdot f(4) + \Delta x \cdot f(7) + \Delta x \cdot f(10) \\ &= 3 \cdot 17 + 3 \cdot 50 + 3 \cdot 101 \\ &= 51 + 150 + 303 \\ &= 504 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

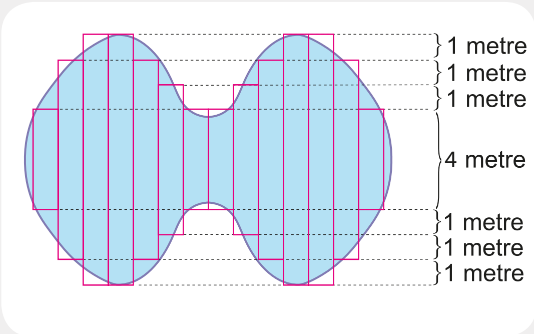
Uyarı

Bilinen geometri formülleri ile hesaplanamayan bazı sınırlı bölgelerin alanlarının yaklaşık değerleri Riemann toplamları yardımı ile hesaplanabilir.

ÖRNEK



Şekil 1



Şekil 2

Şekil 1 deki havuzun tabanı metrekare maliyeti 50 TL olan fayanslarla kaplanacaktır.

Bu havuzun alanı Riemann toplamı mantığıyla Şekil 2 deki gibi genişliği 1 metre olan alt aralıklara ayrılarak oluşturulan dikdörtgenler yardımıyla hesaplanacaktır.

Riemann toplamı Şekil 2 de verilen ölçülere göre hesaplanırsa havuzun tabanının fayans ile kaplanması için harcanacak paranın yaklaşık olarak kaç TL olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

biçiminde 4 tane

biçiminde 2 tane

biçiminde 4 tane

biçiminde 4 tane

Verilen Şekil 2 incelendiğinde havuzun alanı, 14 tane dikdörtgenin alanlarının toplamı ile yaklaşık olarak hesaplanabilir. Buna göre havuzun alanı yaklaşık olarak

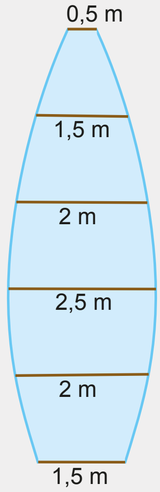
$$4\cdot(1\cdot 4)+2\cdot(1\cdot 6)+4\cdot(1\cdot 8)+4\cdot(1\cdot 10)=16+12+32+40$$
$$=100 \text{ metrekare olur.}$$

Bu durumda havuzun tabanının fayans ile kaplanması için harcanacak para $50\cdot 100=5000$ TL olarak bulunur.

Bu havuzun alanının yaklaşık olarak hesaplanması için genişliği 1 metre olan dikdörtgenler kullanılmıştır. Kullanılan dikdörtgenlerin genişliği küçüldükçe kullanılacak olan dikdörtgen sayısı da artacaktır. Dikdörtgen genişliği sıfıra yaklaşırken dikdörtgenlerin sayısı da sonsuza yaklaşır. Havuzun alanı, bu dikdörtgenler yardımıyla dikdörtgen sayısı sonsuza yaklaşırken limit olarak ifade edilirse bulunacak limit değeri alanın gerçek değerini verecektir.

ÖRNEK

Şekil 1



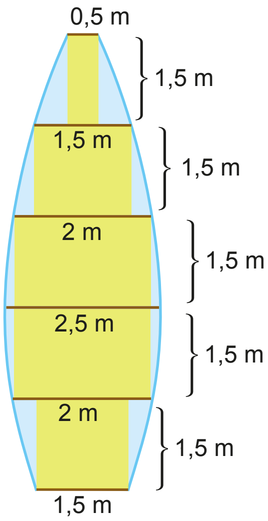
Şekil 2

Şekil 1 de Serkan Bey'e ait üç özdeş yelkeni bulunan bir yelkenli gösterilmiştir. Yelkenlerin her birinde Şekil 2 de ölçüleri verilen 1,5 metre arayla yatay olarak yerleştirilmiş 6 tane çıta vardır.

Serkan Bey yelken kumaşlarını yenilemek için bir firmadan metrekare maliyeti 100 TL olan kumaş kullanılması durumunda 4500 TL fiyat teklifi almıştır.

Serkan Bey firmanın güvenilir bir teklif verip vermediğini belirlemek istemiş ve fiyat aralığını Riemann alt ve üst toplamı mantığıyla hesaplamıştır. Serkan Bey'in yaptığı hesaba göre firmanın teklifinin etik olup olmadığını belirleyiniz.

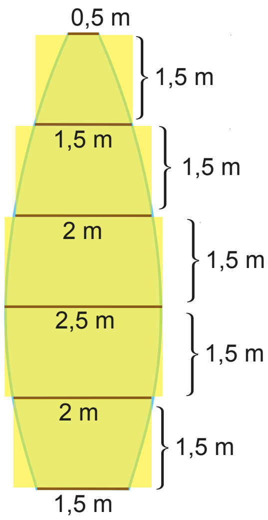
ÇÖZÜM



Riemann alt toplamı mantığıyla hesaplanan alan A ise

$$\begin{aligned} A &= 1{,}5 \cdot 0{,}5 + 1{,}5 \cdot 1{,}5 + 1{,}5 \cdot 2 + 1{,}5 \cdot 2 + 1{,}5 \cdot 1{,}5 \\ &= 0{,}75 + 2{,}25 + 3 + 3 + 2{,}25 \\ &= 11{,}25 \text{ m}^2 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Buna göre bir yelkenlinin kumaş maliyeti $11{,}25 \cdot 100 = 1125$ TL olup üç yelkenlinin kumaş maliyeti $1125 \cdot 3 = 3375$ TL bulunur.



Riemann üst toplamı mantığıyla hesaplanan alan B ise

$$\begin{aligned} B &= 1{,}5 \cdot 1{,}5 + 1{,}5 \cdot 2 + 1{,}5 \cdot 2{,}5 + 1{,}5 \cdot 2{,}5 + 1{,}5 \cdot 2 \\ &= 2{,}25 + 3 + 3{,}75 + 3{,}75 + 3 \\ &= 15{,}75 \text{ m}^2 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Buna göre bir yelkenlinin kumaş maliyeti $15{,}75 \cdot 100 = 1575$ TL olup üç yelkenlinin kumaş maliyeti $1575 \cdot 3 = 4725$ TL bulunur.

Bu durumda tüm yelkenlerin kumaşla kaplama maliyeti 3375 TL ile 4725 TL arasında olmalıdır. Buna göre firmanın verdiği 4500 TL fiyat teklifi bu aralıkta olduğundan etiktir.

ÖRNEK

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2}{5}+1$ olduğuna göre $[-4,6]$ nda $f(x)$ fonksiyonunun grafiği ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanını, Dinamik Geometri ve Matematik Yazılımı programını kullanarak Riemann alt ve üst toplamı yöntemiyle 10, 50 ve 500 eş parçaya ayırarak yaklaşık olarak hesaplayınız.

ÇÖZÜM

Dinamik Geometri ve Matematik Yazılımı programını açınız.

1. Adım: Sırasıyla simgesi, açılan menüde Görünüm ve ardından Grafik 2 tıklanır. Böylece ekrana yan yana iki grafik penceresi gelir.

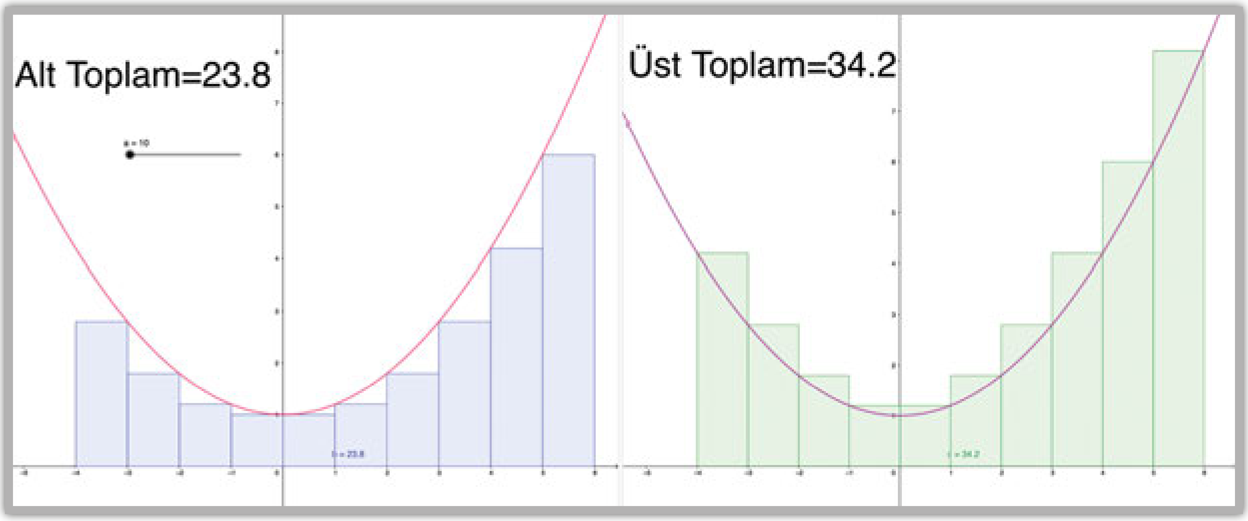
2. Adım: 1. grafik penceresi üzerine tıklayınız. Ardından Giriş çubuğuna alttaki ekran klavyesini kullanarak $\frac{x^2}{5}+1$ yazınız ve enter tuşuna basınız. 2. grafik penceresine de tıklayarak aynı işlemi tekrarlayınız. Böylece $\frac{x^2}{5}+1$ fonksiyonunun grafiği, 1. grafik penceresinde f ve 2. grafik penceresinde g olarak görüntülenir.

3. Adım: Üstteki araç çubuğunda butonuna tıklayınız. 1. grafik penceresi üzerinde herhangi bir noktaya sol tıklayınız. Açılan sürgü butonunda, minimum çubuğuna 1, maksimum çubuğuna 500 yazarak Tamam butonuna tıklayınız. a sürgü çubuğu elde edilecektir.

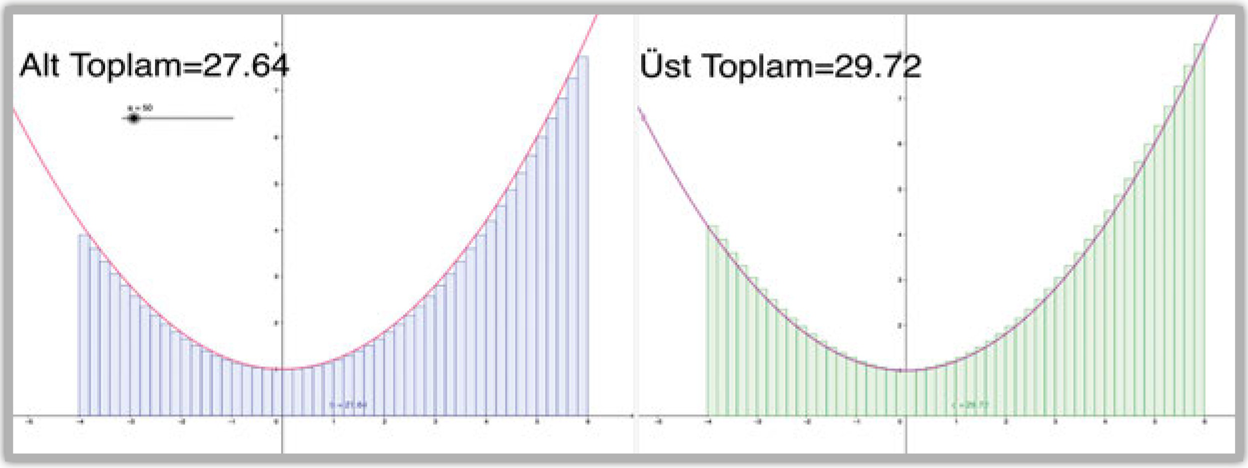
4. Adım: Giriş çubuğuna "Alt" yazdığınızda açılan pencerede 4. sıradaki Alt Toplam(<fonksiyon>,<başlangıç x-değeri>,<bitiş x-değeri>,<dikdörtgen sayısı>) sekmesini tıklayınız. Bu sekmede parantez içindeki ifadeleri silerek $(\mathbf{f,-4,6,a})$ biçiminde yazınız ve enter tuşuna basınız. Riemann alt toplamı şekil olarak elde edilir. Üstteki araç çubuğunda butonuna tıklayarak 2. sıradaki Metin butonuna tıklayınız. 1. grafik alanına gelip sol tıkladığınızda metin penceresi açılacaktır. Metin penceresinde "Alt Toplam =" yazıp gelişmiş butonuna tıklayarak sekmesi seçilir. Açılan menüde **b** harfine ardından Tamam butonuna tıklayınız. 1. grafik penceresinde alt toplamın değeri görünecektir.

5. Adım: Giriş çubuğuna "Üst" yazdığınızda açılan pencerede 5. sıradaki Üst Toplam(<işlev>,<sayı>,<sayı>,<sayı>) sekmesini tıklayınız. Bu sekmede parantez içindeki ifadeleri silerek $(\mathbf{g,-4,6,a})$ biçiminde yazınız ve enter tuşuna basınız. Riemann üst toplamı şekil olarak elde edilir. Metin butonuna tıklayınız. 2. grafik alanına gelip sol tıkladığınızda metin penceresi açılacaktır. Metin penceresinde "Üst Toplam =" yazıp gelişmiş butonuna tıklayarak sekmesi tıklanıp açılan menüde **c** harfine ardından Tamam butonuna tıklayınız. 2. grafik penceresinde üst toplamın değeri görünecektir.

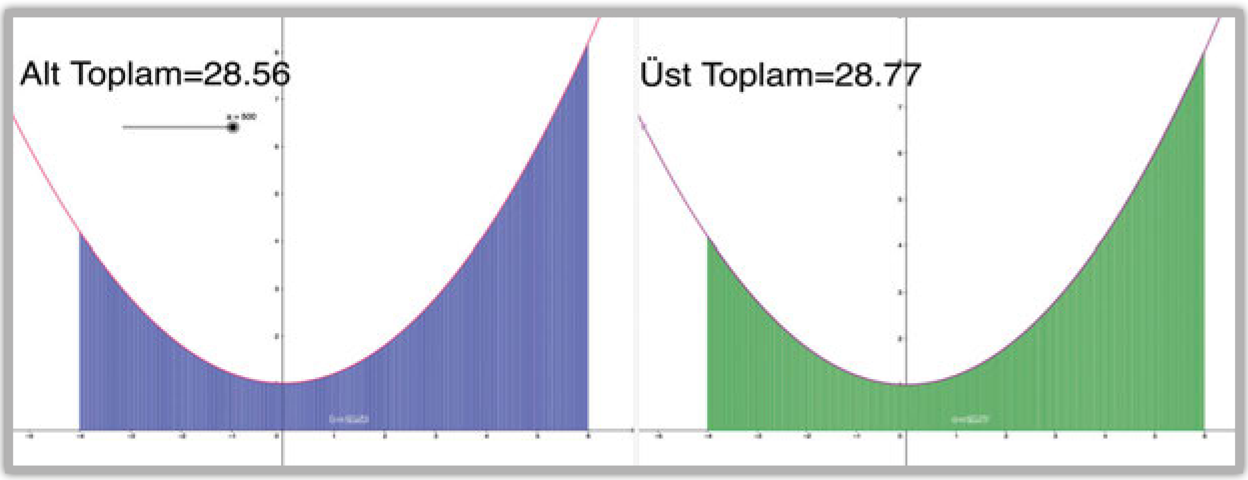
6. Adım: a sürgüsü sağa doğru kaydırılarak 10 sayısına getirildiğinde $[-4,6]$ 10 eşit parçaya bölünerek 1. grafikte Riemann alt toplamı yardımıyla alan yaklaşık olarak $23,8$ birimkare ve 2. grafikte Riemann üst toplamı yardımıyla alan yaklaşık olarak $34,2$ birimkare olarak hesaplanır.



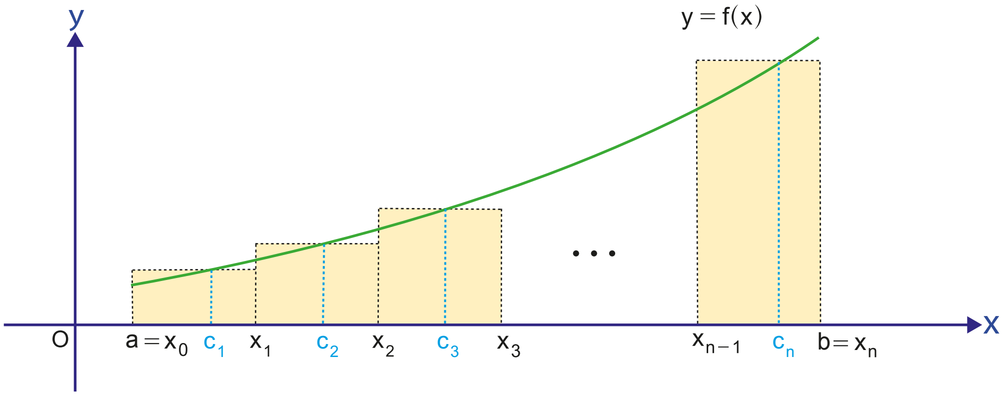
7. Adım: a sürgüsü sağa doğru kaydırılarak 50 sayısına getirildiğinde $[-4,6]$ 50 eşit parçaya bölünerek 1. grafikte Riemann alt toplamı yardımıyla alan yaklaşık olarak $27,64$ birimkare ve 2. grafikte Riemann üst toplamı yardımıyla alan yaklaşık olarak $29,72$ birimkare olarak hesaplanır.



8. Adım: a sürgüsü sağa doğru kaydırılarak 500 sayısına getirildiğinde $[-4,6]$ 500 eşit parçaya bölünerek 1. grafikte Riemann alt toplamı yardımıyla alan yaklaşık olarak $28,56$ birimkare ve 2. grafikte Riemann üst toplamı yardımıyla alan yaklaşık olarak $28,77$ birimkare olarak hesaplanır.



SONUÇ



$y = f(x)$ fonksiyonunda $[a, b]$ n adet eşit alt aralığa bölünsün.

$$c_1 \in [x_0, x_1]$$
$$c_2 \in [x_1, x_2]$$
$$\vdots$$
$$c_n \in [x_{n-1}, x_n]$$

ve alt aralıkların genişliği $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ olmak üzere f fonksiyonunun $[a, b]$ nda hesaplanan Riemann toplamı A ise $y = f(x)$ eğrisinin altında kalan alan yaklaşık olarak

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \Delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{c}_1) + \Delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{c}_2) + \Delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{c}_3) + \ldots + \Delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{c}_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \Delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{c}_k) \end{aligned}$$

olarak ifade edilir.

$[a, b]$ nda $f(x)$ fonksiyonunun altında kalan alan, $[a, b]$ nın daha fazla alt aralığa bölünmesi durumunda daha yakın değerler verecektir. Buna göre Riemann toplamı n nin sonsuza yaklaşması durumunda $y = f(x)$ ile x ekseni arasında kalan alanı vereceğinden bu alan

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{c}_k)$$

limiti ile hesaplanır.

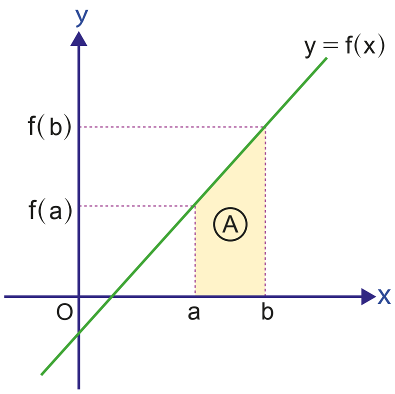
Burada $f(x) > 0$ olduğuna dikkat ediniz. $f(x) < 0$ olması hâlinde yukarıdaki limit değeri negatif olacaktır. Bu durumda bu limit değeri fonksiyonun grafiği ile x ekseni arasında kalan alanın negatif değerine eşit olacaktır.

Ayrıca $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{c}_k)$ değerine f fonksiyonunun $[a, b]$ ndaki belirli integrali denir.

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{c}_k) = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{x})\, \mathbf{dx}$$

biçiminde ifade edilir.

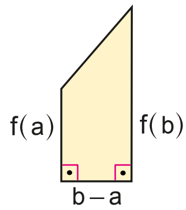
6.2.2. Bir Fonksiyonun Belirli İntegrali ile Belirsiz İntegrali Arasındaki İlişki



Yanda $f(x) = mx + n$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $[a, b]$ nda $f(x)$ fonksiyonunun grafiği ile x ekseni arasında kalan dik yamuğun alanı A birimkare olsun.

Bu dik yamuğun alanı hesaplanırsa

$$A = \frac{f(a)+f(b)}{2}\cdot(b-a)$$
$$= \frac{ma+n+mb+n}{2}\cdot(b-a)$$
$$= \left(m\left(\frac{a+b}{2}\right)+n\right)\cdot(b-a) \text{ olur.}$$



$f(x)$ fonksiyonunun integrali $F(x)$ olsun.

$$F(x) = \int f(x)\,dx \Rightarrow F(x) = \int (mx+n)\,dx$$
$$= \frac{mx^2}{2} + nx + c \text{ olur.}$$

$$F(x) = \frac{mx^2}{2} + nx + c \Rightarrow F(b) - F(a) = \left(\frac{mb^2}{2} + nb + c\right) - \left(\frac{ma^2}{2} + na + c\right)$$
$$= \frac{mb^2}{2} + nb \cancel{+c} - \frac{ma^2}{2} - na \cancel{-c}$$
$$= m\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right) + n(b-a)$$
$$= m\cdot\frac{(b-a)(b+a)}{2} + n(b-a)$$
$$= \left(m\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)+n\right)(b-a)$$
$$= A \text{ bulunur.}$$

Sonuç olarak $f(x)$ fonksiyonunun integrali $F(x)$ olmak üzere $[a, b]$ nda $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin altında kalan alan $F(b) - F(a)$ olur.

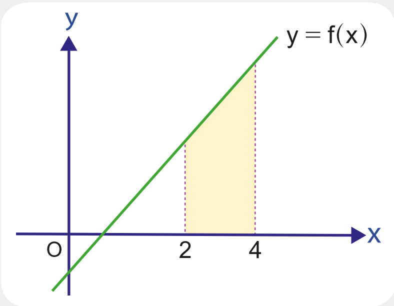
$f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ nda sürekli ve $F'(x) = f(x)$ olmak üzere

$$\int_a^b \mathbf{f(x)\,dx = F(b) - F(a)} \text{ olur.}$$

$$\int_a^b \mathbf{f(x)\,dx = (F(x)+c)\Big|_a^b = (F(b)+c) - (F(a)+c)}$$
$$\mathbf{= F(b) \cancel{+c} - F(a) \cancel{-c}}$$
$$\mathbf{= F(b) - F(a)}$$

(Bu işlemde c sabitleri sadeleştiğinden belirli integralde c sabiti bulunmaz.)

ÖRNEK



Yanda $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre boyalı bölgenin alanının integral yardımıyla nasıl ifade edileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Yukarıda, $[2,4]$ nda $f(x)$ fonksiyonunun grafiği ile x ekseni arasında kalan sınırlı bölgenin alanı gösterilmiştir. Bu alan $\int_2^4 f(x)\,dx$ integrali ile hesaplanır.

ÖRNEK

$\int_2^5 (2x+1)\,dx$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\int_2^5 (2x+1)\,dx=(x^2+x)\Big|_2^5=(5^2+5)-(2^2+2)$$
$$=30-6$$
$$=24 \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$\int_1^3 (3x^2-2)\,dx$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\int_1^3 (3x^2-2)\,dx=(x^3-2x)\Big|_1^3=(3^3-2\cdot 3)-(1^3-2\cdot 1)$$
$$=21-(-1)$$
$$=22 \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$\int_0^4 \left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\int_0^4 \left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int_0^4 \left(x-x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_0^4=\left(\frac{x^2}{2}-2\sqrt{x}\right)\Bigg|_0^4$$

$$=\left(\frac{4^2}{2}-2\sqrt{4}\right)-\left(\frac{0^2}{2}-2\sqrt{0}\right)$$

$=4$ bulunur.

ÖRNEK

$\int_2^3 f'(x)\,dx=3$ ve $f(2)+f(3)=5$ olduğuna göre $f(2)\cdot f(3)$ çarpımının sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\int_2^3 f'(x)\,dx=3 \Rightarrow f(x)\Big|_2^3=3$$

$\Rightarrow f(3)-f(2)=3$ olur.

$$\begin{array}{rl} & \cancel{f(2)}+f(3)=5 \\ + & f(3)-\cancel{f(2)}=3 \\ \hline & 2f(3)=8 \Rightarrow f(3)=4 \end{array}$$ olur.

$f(2)+f(3)=5 \Rightarrow f(2)+4=5$

$\Rightarrow f(2)=1$ olur. Bu durumda $f(2)\cdot f(3)=1\cdot 4=4$ bulunur.

ÖRNEK

$\int_{-1}^3 (x^2-x)^2(6x-3)\,dx$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen integralde $x^2-x=u$ dönüşümü yapılırsa

$x^2-x=u \Rightarrow (2x-1)\,dx=du$ olur.

Yapılan dönüşüme göre belirli integralin sınırları değiştirilirse

$x=-1 \Rightarrow u=(-1)^2-(-1)=2$

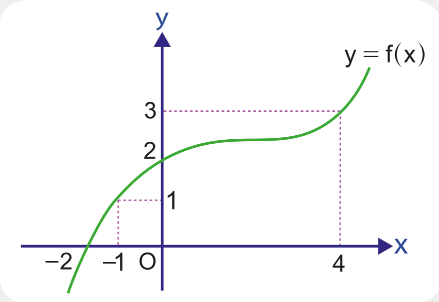
$x=3 \Rightarrow u=3^2-3=6$ olur.

Yapılan dönüşüm ve yeni sınırlar verilen belirli integrale uygulanırsa

$$\int_{-1}^3 (x^2-x)^2(6x-3)\,dx=\int_{\underbrace{-1}_{2}}^{\overbrace{3}^{6}} 3\underbrace{(x^2-x)^2}_{u^2}\underbrace{(2x-1)\,dx}_{du}=\int_2^6 3u^2\,du=u^3\Big|_2^6=6^3-2^3$$

$=208$ bulunur.

ÖRNEK



Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre

$$\int_{-2}^{0} f'(x)\,dx + \int_{-1}^{4} f'(x)\,dx$$

ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

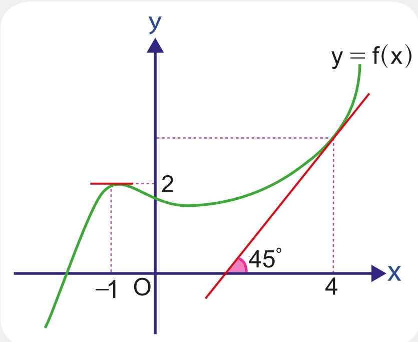
f fonksiyonunun grafiği incelendiğinde $f(-2) = 0$, $f(-1) = 1$, $f(0) = 2$ ve $f(4) = 3$ olduğu görülür.

$$\int_{-2}^{0} f'(x)\,dx + \int_{-1}^{4} f'(x)\,dx = f(x)\Big|_{-2}^{0} + f(x)\Big|_{-1}^{4} = [f(0) - f(-2)] + [f(4) - f(-1)]$$

$$= (2 - 0) + (3 - 1)$$

$= 4$ bulunur.

ÖRNEK



Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $f(x)$ fonksiyonunun grafiğine $x = 4$ apsisli noktasında çizilen teğeti x ekseni ile pozitif yönde 45° açı yaptığına göre

$$\int_{-1}^{4} [f''(x) + f'(x) \cdot f''(x)]\,dx$$

ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

f fonksiyonunun grafiği incelendiğinde $f'(-1) = 0$ ve $f'(4) = \tan 45^\circ = 1$ olduğu görülür.

Verilen integralde $f'(x) = u$ dönüşümü yapılır ve diferansiyel alınırsa

$f'(x) = u \Rightarrow f''(x)\,dx = du$ olur.

Yapılan dönüşüme göre belirli integralin sınırları değiştirilirse

$x = -1 \Rightarrow u = f'(-1)$
$= 0$ olur.

$x = 4 \Rightarrow u = f'(4)$
$= 1$ olur.

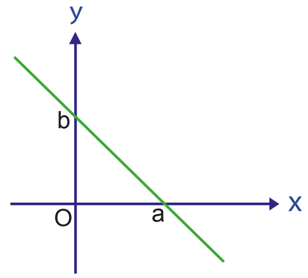
Dönüşüm ve yeni sınırlar verilen belirli integrale uygulanırsa

$$\int_{-1}^{4} [f''(x) + f'(x) \cdot f''(x)]\,dx = \int_{-1}^{4} \underbrace{(1 + f'(x))}_{1+u} \cdot \underbrace{f''(x)\,dx}_{du} = \int_{0}^{1} (1 + u)\,du = \left(u + \frac{u^2}{2}\right)\Big|_{0}^{1}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2}\right) - (0 + 0^2)$$

$= \dfrac{3}{2}$ bulunur.

HATIRLATMA

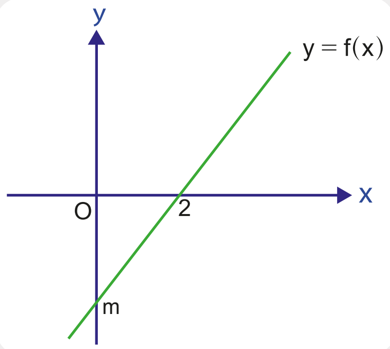


Doğrusal bir fonksiyonun grafiği eksenleri

$x = a$ ve $y = b$ de kesiyorsa

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ olur.}$$

ÖRNEK



Yanda doğrusal $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$$\int_{-2}^{4} f'(3x)\,dx = 9$$

olduğuna göre m değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen $f(x)$ fonksiyonun grafiği x eksenini $x = 2$ ve y eksenini $y = m$ de kestiğinden

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{m} = 1 \Rightarrow y = -\frac{mx}{2} + m$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{mx}{2} + m \text{ olur.}$$

Verilen integralde $3x = u$ dönüşümü yapılırsa

$$3x = u \Rightarrow 3\,dx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{3} \text{ olur.}$$

Yapılan dönüşüme göre sınırlar değiştirilirse

$x = -2 \Rightarrow u = -6$

$x = 4 \Rightarrow u = 12$ olur.

$$\int_{-2}^{4} \underbrace{f'(3x)}_{f'(u)}\,\underbrace{dx}_{\frac{du}{3}} = 9 \Rightarrow \frac{1}{3}\int_{-6}^{12} f'(u)\,du = 9 \Rightarrow \int_{-6}^{12} f'(u)\,du = 27$$

$$\Rightarrow f(u)\Big|_{-6}^{12} = 27$$

$$\Rightarrow f(12) - f(-6) = 27$$

$$\Rightarrow -5m - 4m = 27$$

$$\Rightarrow m = -3 \text{ bulunur.}$$

6.2.3. Belirli İntegralin Özellikleri

$f(x)$ fonksiyonun integrali $F(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonunun integrali $G(x)$ olsun.

$[a, b]$ nda integrallenebilir f ve g fonksiyonları için belirli integralin aşağıdaki özellikleri vardır.

ÖZELLİK 1

Belirli integralde alt ve üst sınırlar eşit ise belirli integralin değeri sıfırdır.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^a = F(a) - F(a) = 0$$

Örneğin

$$\int_2^2 x^2(x^2+1)^5\,dx = 0 \text{ olur.}$$

ÖZELLİK 2

Belirli integralde alt ve üst sınırlar yer değiştirirse belirli integral işaret değiştirir.

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = F(x)\Big|_b^a = F(a) - F(b) = -\underbrace{(F(b) - F(a))}_{\int_a^b f(x)\,dx} = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Örneğin

$$\int_1^2 (x-1)\,dx = -\int_2^1 (x-1)\,dx \text{ olur.}$$

ÖZELLİK 3

$a < c < b$ olmak üzere $\int_a^b f(x)\,dx$ integrali aşağıdaki gibi iki integralin toplamı olarak ifade edilebilir.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \underbrace{F(b) - F(c)}_{\int_c^b f(x)\,dx} + \underbrace{F(c) - F(a)}_{\int_a^c f(x)\,dx} = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Örneğin

$$\int_1^4 (x^2-1)\,dx = \int_1^2 (x^2-1)\,dx + \int_2^4 (x^2-1)\,dx \text{ veya } \int_1^4 (x^2-1)\,dx = \int_1^3 (x^2-1)\,dx + \int_3^4 (x^2-1)\,dx$$

vb. biçimde ifade edilebilir.

ÖZELLİK 4

Bir fonksiyonun bir sabitle çarpımının belirli integrali, fonksiyonun belirli integralinin sabitle çarpımına eşittir.

$$\boldsymbol{\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\cdot \int_a^b f(x)\,dx}$$

$$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = (k\cdot F(x))\Big|_b^a = k\cdot F(b) - k\cdot F(a) = k\cdot \underbrace{(F(b)-F(a))}_{\int_a^b f(x)\,dx} = k\cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

Örneğin

$$\int_2^3 (5x^2-5)\,dx = \int_2^3 5\cdot(x^2-1)\,dx = 5\cdot \int_2^3 (x^2-1)\,dx \text{ olur.}$$

ÖZELLİK 5

İki fonksiyonun toplamının ya da farkının belirli integrali, belirli integrallerin toplamına ya da farkına eşit olur.

$$\boldsymbol{\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx}$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = (F(x)+G(x))\Big|_a^b = F(b)+G(b)-(F(a)+G(a))$$

$$= \underbrace{F(b)-F(a)}_{\int_a^b f(x)\,dx} + \underbrace{G(b)-G(a)}_{\int_a^b g(x)\,dx} = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\boldsymbol{\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx}$$

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = (F(x)-G(x))\Big|_a^b = F(b)-G(b)-(F(a)-G(a))$$

$$= \underbrace{F(b)-F(a)}_{\int_a^b f(x)\,dx} - \underbrace{(G(b)-G(a))}_{\int_a^b g(x)\,dx} = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

Örneğin

$$\int_2^3 (x^3+x^2-x)\,dx = \int_2^3 x^3\,dx + \int_2^3 x^2\,dx - \int_2^3 x\,dx \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$\int_{-1}^{1} 3\cdot f(x)\,dx = 5$ olduğuna göre $\int_{1}^{-1} 6\cdot f(x)\,dx$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\int_{1}^{-1} 6\cdot f(x)\,dx = -\int_{-1}^{1} 6\cdot f(x)\,dx = -\int_{-1}^{1} 2\cdot 3\cdot f(x)\,dx = -2\cdot \underbrace{\int_{-1}^{1} 3\cdot f(x)\,dx}_{5} = -2\cdot 5 = -10 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\int_{1}^{3} (3x^2 - ax + 1)\,dx + \int_{1}^{3} ((a+2)x+2)\,dx$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\int_{1}^{3} (3x^2 - ax + 1)\,dx + \int_{1}^{3} ((a+2)x+2)\,dx = \int_{1}^{3} \left(3x^2 - ax + 1 + (a+2)x + 2\right)dx$$

$$= \int_{1}^{3} \left(3x^2 - \cancel{ax} + 1 + \cancel{ax} + 2x + 2\right)dx$$

$$= \int_{1}^{3} \left(3x^2 + 2x + 3\right)dx$$

$$= \left(x^3 + x^2 + 3x\right)\Big|_{1}^{3}$$

$$= \left(3^3 + 3^2 + 3\cdot 3\right) - \left(1^3 + 1^2 + 3\cdot 1\right)$$

$$= 45 - 5$$

$$= 40 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\int_{1}^{2} (2x+1)\,dx + \int_{2}^{3} (2x+1)\,dx + \int_{3}^{5} (2x+1)\,dx$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\int_{1}^{2} (2x+1)\,dx + \int_{2}^{3} (2x+1)\,dx + \int_{3}^{5} (2x+1)\,dx = \int_{1}^{5} (2x+1)\,dx$$

$$= \left(x^2 + x\right)\Big|_{1}^{5}$$

$$= \left(5^2 + 5\right) - \left(1^2 + 1\right)$$

$$= 30 - 2$$

$$= 28 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\int_1^2 (x+\sqrt{x})\,dx + \int_2^1 (x^2-x+\sqrt{x})\,dx$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\int_1^2 (x+\sqrt{x})\,dx + \int_2^1 (x^2-x+\sqrt{x})\,dx = \int_1^2 (x+\sqrt{x})\,dx - \int_1^2 (x^2-x+\sqrt{x})\,dx$$

$$= \int_1^2 (x+\cancel{\sqrt{x}}-x^2+x-\cancel{\sqrt{x}})\,dx$$

$$= \int_1^2 (-x^2+2x)\,dx$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Bigg|_1^2$$

$$= \left(-\frac{2^3}{3}+2^2\right)-\left(-\frac{1^3}{3}+1^2\right)$$

$$= \frac{4}{3}-\frac{2}{3}$$

$$= \frac{2}{3} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$2\int_1^3 (x^3-x)\,dx - \int_1^4 2x^3\,dx$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$2\int_1^3 (x^3-x)\,dx - \int_1^4 2x^3\,dx = \int_1^3 (2x^3-2x)\,dx - \int_1^3 2x^3\,dx - \int_3^4 2x^3\,dx$$

$$= \int_1^3 (\cancel{2x^3}-2x-\cancel{2x^3})\,dx - \int_3^4 2x^3\,dx$$

$$= \int_1^3 (-2x)\,dx - \int_3^4 2x^3\,dx$$

$$= -x^2\Big|_1^3 - \frac{x^4}{2}\Big|_3^4$$

$$= -(3^2-1^2)-\left(\frac{4^4}{2}-\frac{3^4}{2}\right)$$

$$= -8-\frac{175}{2}$$

$$= -\frac{191}{2} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$\int_1^2 x^3\,dx + 3\int_1^2 x^2\,dx + 3\int_1^2 x\,dx + \int_1^2 dx$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x^3\,dx + 3\int_1^2 x^2\,dx + 3\int_1^2 x\,dx + \int_1^2 dx &= \int_1^2 x^3\,dx + \int_1^2 3x^2\,dx + \int_1^2 3x\,dx + \int_1^2 dx \\
&= \int_1^2 \left(x^3 + 3x^2 + 3x + 1\right)dx \\
&= \int_1^2 (x+1)^3\,dx \\
&= \left.\frac{(x+1)^4}{4}\right|_1^2 \\
&= \frac{(2+1)^4}{4} - \frac{(1+1)^4}{4} \\
&= \frac{81}{4} - \frac{16}{4} \\
&= \frac{65}{4} \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

ÖRNEK

$\binom{7}{0}\int_0^1 x^7\,dx + \binom{7}{1}\int_0^1 x^6\,dx + \binom{7}{2}\int_0^1 x^5\,dx + \ldots + \binom{7}{7}\int_0^1 dx$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}
\binom{7}{0}\int_0^1 x^7\,dx + \binom{7}{1}\int_0^1 x^6\,dx + \ldots + \binom{7}{7}\int_0^1 dx &= \int_0^1 \binom{7}{0}x^7\,dx + \int_0^1 \binom{7}{1}x^6\,dx + \ldots + \int_0^1 \binom{7}{7}dx \\
&= \int_0^1 \left[\binom{7}{0}x^7 + \binom{7}{1}x^6 + \ldots + \binom{7}{7}\right]dx \\
&= \int_0^1 (x+1)^7\,dx \\
&= \left.\frac{(x+1)^8}{8}\right|_0^1 \\
&= \left[\frac{(1+1)^8}{8} - \frac{(0+1)^8}{8}\right] \\
&= \frac{2^8}{8} - \frac{1}{8} \\
&= \frac{255}{8} \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

Parçalı Fonksiyonların Belirli İntegrali

$g(x)$ ve $h(x)$ integrallenebilir iki fonksiyon ve $a \le c \le b$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & , \quad x < c \quad \text{ise} \\ h(x) & , \quad x \ge c \quad \text{ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ ndaki integralini bulmak için integral, fonksiyonun kuralının değiştiği c noktasına göre

$$\int_a^b \mathbf{f(x)\,dx} = \int_a^c \mathbf{g(x)\,dx} + \int_c^b \mathbf{h(x)\,dx}$$

biçiminde iki integralin toplamı olarak yazılmalıdır.

ÖRNEK

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - x & , \quad x < -1 \quad \text{ise} \\ 2x + 3 & , \quad x \ge -1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\int_{-2}^{1} f(x)\,dx = \int_{-2}^{-1} (3x^2 - x)\,dx + \int_{-1}^{1} (2x+3)\,dx$$

$$= \left(x^3 - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{-1} + (x^2 + 3x)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= \left[\left((-1)^3 - \frac{(-1)^2}{2}\right) - \left((-2)^3 - \frac{(-2)^2}{2}\right)\right] + \left[(1^2 + 3\cdot 1) - ((-1)^2 + 3\cdot(-1))\right]$$

$$= \left[\left(-1 - \frac{1}{2}\right) - (-8 - 2)\right] + [4 - (1 - 3)]$$

$$= \left(-\frac{3}{2} + 10\right) + (4 + 2)$$

$$= \frac{17}{2} + 6$$

$$= \frac{29}{2} \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & , \quad x\le -2 \quad \text{ise} \\ 2x-1 & , \quad -2<x<0 \quad \text{ise} \\ 4x^3 & , \quad 0\le x \quad \text{ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre $\int_{-3}^{1} f(x)\,dx$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{1} f(x)\,dx &= \int_{-3}^{-2} (x+1)\,dx+\int_{-2}^{0} (2x-1)\,dx+\int_{0}^{1} 4x^3\,dx \\
&=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-3}^{-2}+(x^2-x)\Bigg|_{-2}^{0}+x^4\Bigg|_{0}^{1} \\
&=\left[\left(\frac{(-2)^2}{2}+(-2)\right)-\left(\frac{(-3)^2}{2}+(-3)\right)\right]+\left[(0^2-0)-((-2)^2-(-2))\right]+\left[1^4-0^4\right] \\
&=\left(0-\frac{3}{2}\right)+(-6)+1 \\
&=-\frac{3}{2}-6+1 \\
&=-\frac{13}{2} \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

ÖRNEK

$\int_{1}^{4} |x-2|\,dx$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x)=|x-2|$ fonksiyonu parçalı fonksiyon olarak yazılırsa

$$f(x)=\begin{cases} -x+2 & , \quad x<2 \quad \text{ise} \\ x-2 & , \quad 2\le x \quad \text{ise} \end{cases}$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{4} |x-2|\,dx &= \int_{1}^{2} (-x+2)\,dx+\int_{2}^{4} (x-2)\,dx \\
&=\left(-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{1}^{2}+\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Bigg|_{2}^{4} \\
&=\left[\left(-\frac{2^2}{2}+2\cdot 2\right)-\left(-\frac{1^2}{2}+2\right)\right]+\left[\left(\frac{4^2}{2}-2\cdot 4\right)-\left(\frac{2^2}{2}-2\cdot 2\right)\right] \\
&=\left[(-2+4)-\left(-\frac{1}{2}+2\right)\right]+[(8-8)-(2-4)] \\
&=\left(2-\frac{3}{2}\right)+(0+2) \\
&=\frac{5}{2} \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

Alıştırmalar

1 $\int_{2}^{5} (3x^2 - 2x)\,dx$

ifadesinin değerini bulunuz.

2 $\int_{1}^{4} \left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

ifadesinin değerini bulunuz.

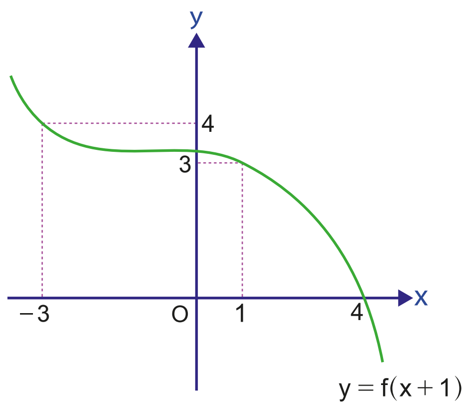
3 $\int_{1}^{4} \left(\frac{1}{x^2} + \sqrt{x}\right) dx$

ifadesinin değerini bulunuz.

4 $\int_{0}^{1} \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

ifadesinin değerini bulunuz.

5

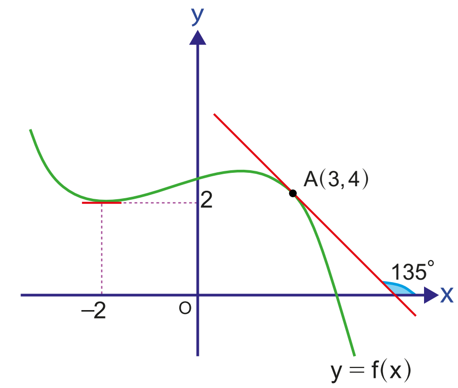


Yukarıda $y = f(x+1)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre

$$\int_{-1}^{1} f'(-2x)\,dx$$

ifadesinin değerini bulunuz.

6

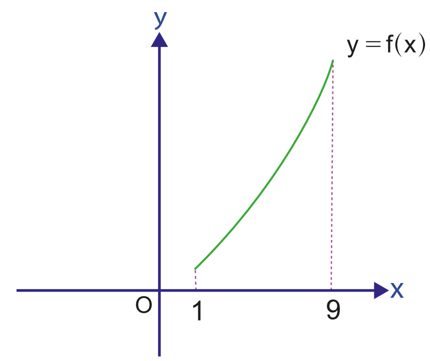


Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $f(x)$ fonksiyonuna A(3,4) noktasında çizilen teğeti, x ekseni ile pozitif yönde 135° lik açı yaptığına göre

$$\int_{-2}^{3} [f''(x) + f'(x)]\,dx$$

ifadesinin değerini bulunuz.

7



Yukarıda $[1, 9]$ nda tanımlı $f(x) = x^2 + x - 1$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre $[1, 9]$ nı 4 eşit alt aralığa bölerek $f(x)$ fonksiyonunun

a) Riemann alt toplamını bulunuz.

b) Riemann üst toplamını bulunuz.

c) Riemann toplamını her alt aralığın orta noktasına göre bulunuz.

8 $\displaystyle\int_0^1 (f(x)+x\cdot f'(x))\,dx=5$

olduğuna göre $f(1)$ değerini bulunuz.

9 $\displaystyle\int_1^5 (ax^3-2x)\,dx+\int_1^5 ((4-a)x^3+3x^2)\,dx$

ifadesinin değerini bulunuz.

10 $\displaystyle\int_1^2 (x-2)\cdot(x+2)^3\,dx-\int_1^2 (x+2)^4\,dx$

ifadesinin değerini bulunuz.

11 $\displaystyle 3\int_1^2 x^2\,dx+\int_2^5 3x^2\,dx+3\int_5^{10} x^2\,dx$

ifadesinin değerini bulunuz.

12 $f(x)=\begin{cases} 6x^2-1 & , \quad x<2 \quad \text{ise} \\ 4x+1 & , \quad x\geq 2 \quad \text{ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$$

ifadesinin değerini bulunuz.

13 $\displaystyle\int_2^5 |x-3|\,dx$

ifadesinin değerini bulunuz.

14 $\displaystyle 3\int_{-2}^{2} |x^2-1|\,dx$

ifadesinin değerini bulunuz.

15 $f(x+1)=\begin{cases} x-1 & , \quad x\leq 4 \quad \text{ise} \\ x+1 & , \quad x>4 \quad \text{ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre

$$\int_2^4 f'(2x-1)\,dx$$

ifadesinin değerini bulunuz.

16 $\displaystyle A=\int_{-1}^{1} x^5\,dx+10\int_{-1}^{1} x^3\,dx+5\int_{-1}^{1} x\,dx$

$\displaystyle B=5\int_{-1}^{1} x^4\,dx+10\int_{-1}^{1} x^2\,dx+\int_{-1}^{1} dx$

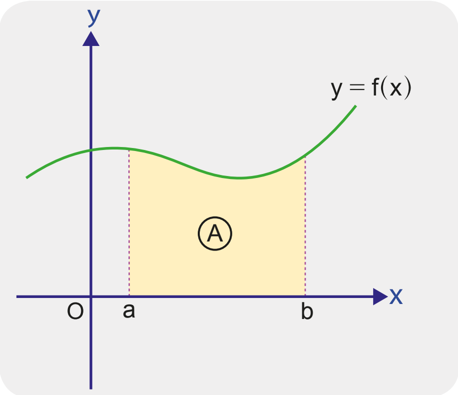
olduğuna göre $A-B$ farkının değerini bulunuz.

6.2.4. Belirli İntegral ile Alan Hesabı

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $y=f(x)$ fonksiyonu integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği, $x=a$ ve $x=b$ doğruları ile x ekseni arasında kalan sınırlı bölgenin alanı

$$\mathbf{A=\int_a^b |f(x)|\,dx}$$

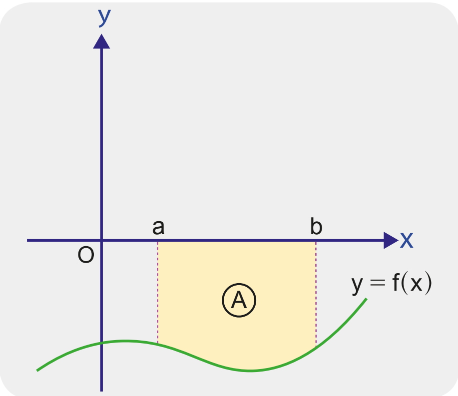
integrali ile hesaplanır.



$y=f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ nda pozitif değerli ise diğer bir ifadeyle $f(x)$ fonksiyonunun grafiği, $x=a$ ve $x=b$ doğruları ile x ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanı x ekseninin üzerinde kalıyorsa $|f(x)|=f(x)$ olacağından bu bölgenin alanı

$$\mathbf{A=\int_a^b f(x)\,dx}$$

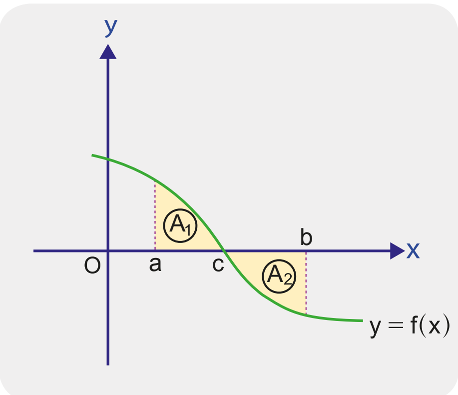
integrali ile hesaplanır.



$y=f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ nda negatif değerli ise diğer bir ifadeyle $f(x)$ fonksiyonunun grafiği, $x=a$ ve $x=b$ doğruları ile x ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanı x ekseninin altında kalıyorsa $|f(x)|=-f(x)$ olacağından bu bölgenin alanı

$$\mathbf{A=-\int_a^b f(x)\,dx}$$

integrali ile hesaplanır.



$y=f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ nda pozitif ve negatif değerlerin her ikisini de alıyorsa

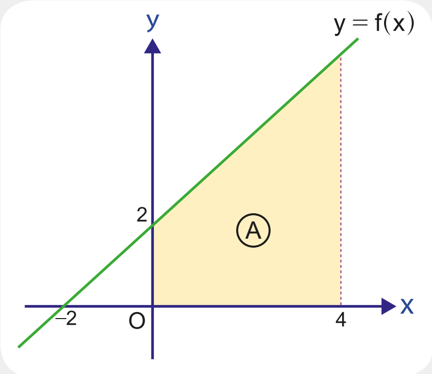
$$|f(x)|=\begin{cases} f(x) & , \quad a\le x\le c \text{ ise} \\ -f(x) & , \quad c<x\le b \text{ ise}\end{cases}$$

olduğundan $f(x)$ fonksiyonunun grafiği, $x=a$ ve $x=b$ doğruları ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanı

$$\mathbf{A=A_1+A_2=\int_a^c f(x)\,dx-\int_c^b f(x)\,dx}$$

integrali ile hesaplanır.

ÖRNEK



Yanda $y = f(x)$ doğrusal fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre grafikteki boyalı bölgenin alanını integral yardımı ile bulunuz.

ÇÖZÜM

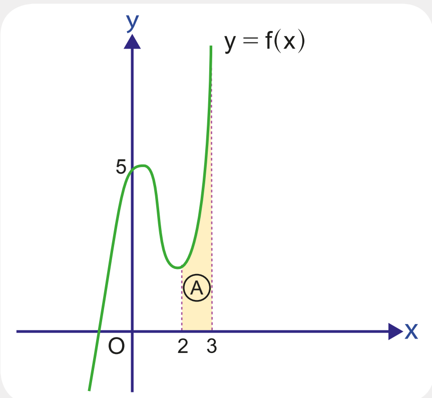
$y = f(x)$ fonksiyonu eğimi 1 olan $(-2, 0)$ noktasından geçen doğrusal bir fonksiyondur.
O hâlde $f(x) = x + 2$ olur.

$$A = \int_0^4 (x+2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_0^4$$

$$= \left(\frac{4^2}{2} + 2\cdot 4\right) - \left(\frac{0^2}{2} + 2\cdot 0\right)$$

$= 16$ birimkare bulunur.

ÖRNEK



Yandaki $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 5$ fonksiyonunun grafiği, $x = 2$ ve $x = 3$ doğruları ile x ekseni arasında kalan sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$A = \int_2^3 (x^3 - 3x^2 + x + 5)\,dx = \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} + 5x\right)\Bigg|_2^3$$

$$= \left(\frac{3^4}{4} - 3^3 + \frac{3^2}{2} + 5\cdot 3\right) - \left(\frac{2^4}{4} - 2^3 + \frac{2^2}{2} + 5\cdot 2\right)$$

$$= \left(\frac{81}{4} - 27 + \frac{9}{2} + 15\right) - (4 - 8 + 2 + 10)$$

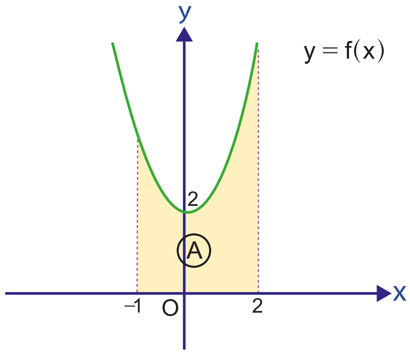
$$= \frac{51}{4} - 8$$

$= \dfrac{19}{4}$ birimkare bulunur.

ÖRNEK

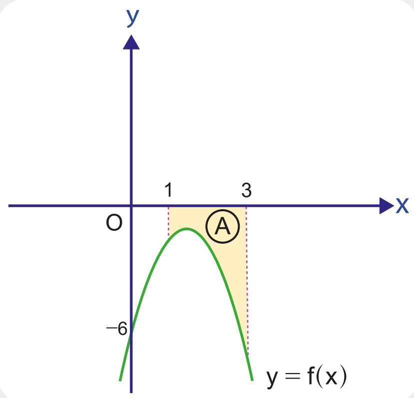
$f(x) = 3x^2 + 2$ eğrisi, $x = -1$ ve $x = 2$ doğruları ile x ekseni arasında kalan sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

ÇÖZÜM



$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{2} (3x^2 + 2)\,dx \\
&= (x^3 + 2x)\Big|_{-1}^{2} \\
&= (2^3 + 2 \cdot 2) - ((-1)^3 + 2 \cdot (-1)) \\
&= 12 - (-3) \\
&= 15 \text{ birimkare bulunur.}
\end{aligned}
$$

ÖRNEK



Yandaki $f(x) = -3x^2 + 8x - 6$ fonksiyonunun grafiği, $x = 1$ ve $x = 3$ doğruları ile x ekseni arasında kalan sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

ÇÖZÜM

İstenilen alan x ekseninin altında kaldığından

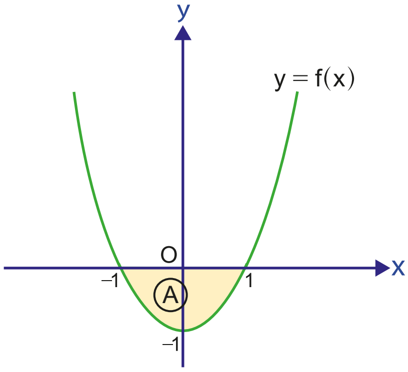
$$
\begin{aligned}
A &= -\int_{1}^{3} (-3x^2 + 8x - 6)\,dx \\
&= \int_{1}^{3} (3x^2 - 8x + 6)\,dx \\
&= (x^3 - 4x^2 + 6x)\Big|_{1}^{3} \\
&= (3^3 - 4 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3) - (1^3 - 4 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1) \\
&= 9 - 3 \\
&= 6 \text{ birimkare bulunur.}
\end{aligned}
$$

ÖRNEK

$f(x) = x^2 - 1$ fonksiyonunun grafiği ile x ekseni arasında kalan sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen fonksiyonun grafiği incelendiğinde istenilen alanın x eksenin altında olduğu görülmektedir.



$$A = -\int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\,dx = \int_{-1}^{1} (-x^2 + 1)\,dx$$

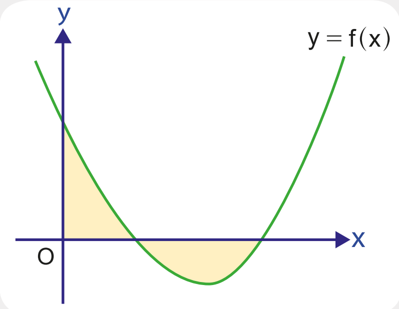
$$= \left(-\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \left(-\frac{1^3}{3} + 1\right) - \left(-\frac{(-1)^3}{3} - 1\right)$$

$$= \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)$$

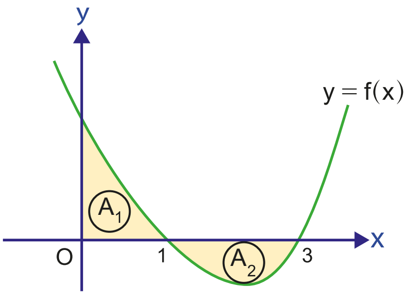
$$= \frac{4}{3} \text{ birimkare bulunur.}$$

ÖRNEK



Yanda $f(x) = x^2 - 4x + 3$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre grafikte gösterilen boyalı bölgelerin alanlarının toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM



$f(x) = x^2 - 4x + 3$ fonksiyonunun x eksenini kestiği noktalar

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x - 1)\cdot(x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ veya } x = 3 \text{ olur.}$$

A_1 alanı x ekseninin üzerinde ve A_2 alanı x ekseninin altında olduğundan A_1 ve A_2 alanlarının toplamı

$$A_1 + A_2 = \int_{0}^{1} (x^2 - 4x + 3)\,dx - \int_{1}^{3} (x^2 - 4x + 3)\,dx$$

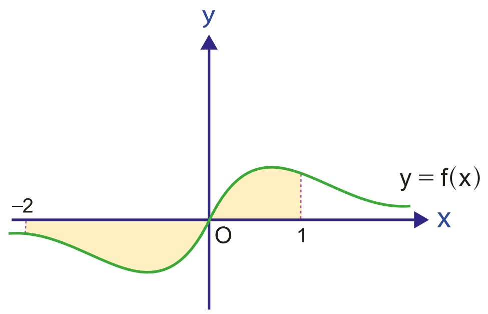
$$= \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right)\Big|_{0}^{1} - \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right)\Big|_{1}^{3}$$

$$= \left[\left(\frac{1^3}{3} - 2\cdot 1^2 + 3\cdot 1\right) - \left(\frac{0^3}{3} - 2\cdot 0^2 + 3\cdot 0\right)\right] - \left[\left(\frac{3^3}{3} - 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 2\cdot 1^2 + 3\cdot 1\right)\right]$$

$$= \left(\frac{4}{3} - 0\right) - \left(0 - \frac{4}{3}\right)$$

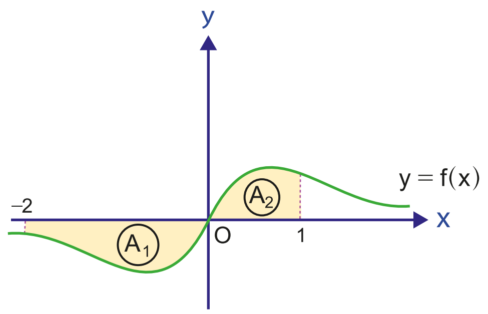
$$= \frac{8}{3} \text{ birimkare bulunur.}$$

ÖRNEK



Yanda $f(x)=\dfrac{x}{(x^2+1)^2}$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre grafikte gösterilen boyalı bölgelerin alanlarının toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM



A_1 alanı x ekseninin alt kısmında ve
A_2 alanı x ekseninin üst kısmında olduğundan

$$A=A_1+A_2=-\int_{-2}^{0}\frac{x}{(x^2+1)^2}dx+\int_{0}^{1}\frac{x}{(x^2+1)^2}dx$$

integralinde $x^2+1=u$ dönüşümü yapılırsa

$$x^2+1=u\Rightarrow 2x\,dx=du$$
$$\Rightarrow x\,dx=\frac{du}{2} \text{ olur.}$$

İntegrallerin sınırları değiştirilirse

$x=-2\Rightarrow u=5$

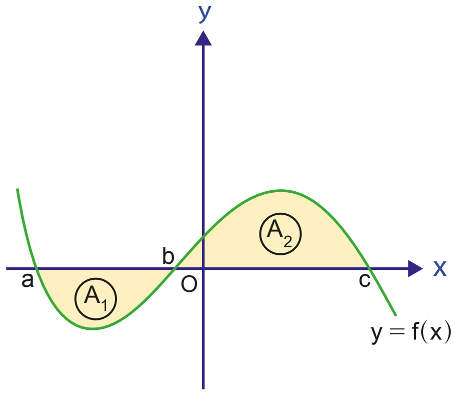
$x=0\Rightarrow u=1$

$x=1\Rightarrow u=2$ olur.

Yapılan dönüşüm ve yeni sınırlar verilen belirli integrale uygulanırsa

$$A=A_1+A_2=-\int_{5}^{1}\frac{\frac{du}{2}}{u^2}+\int_{1}^{2}\frac{\frac{du}{2}}{u^2}$$
$$=-\frac{1}{2}\int_{5}^{1}u^{-2}du+\frac{1}{2}\int_{1}^{2}u^{-2}du$$
$$=\frac{1}{2u}\Bigg|_{5}^{1}-\frac{1}{2u}\Bigg|_{1}^{2}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1}\right)$$
$$=\frac{2}{5}+\frac{1}{4}$$
$$=\frac{13}{20} \text{ birimkare bulunur.}$$

Uyarı



Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği ve eksenler arasında kalan sınırlı bölgelerinin alanları A_1 ve A_2 olmak üzere

- $\int_a^c f(x)\,dx$ ifadesinin değeri

$$\int_a^c f(x)\,dx = -A_1 + A_2$$

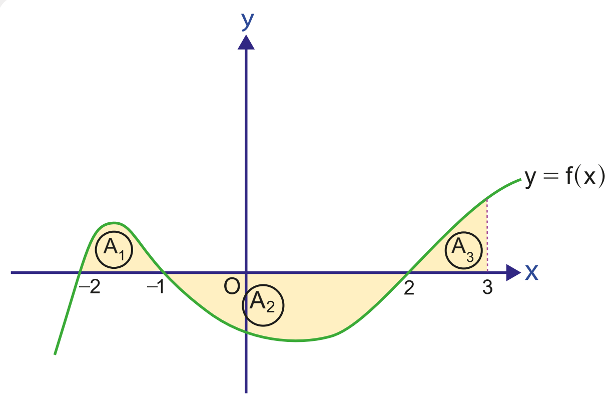
olur.

- $[a, c]$ nda $f(x)$ fonksiyonunun grafiği ile x ekseni arasında kalan sınırlı bölgenin alanı

$$\int_a^c |f(x)|\,dx = A_1 + A_2$$

olur.

ÖRNEK



Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun $[-2, 3]$ nda x ekseni ile arasında kalan A_1, A_2 ve A_3 sınırlı bölgelerinin alanları gösterilmiştir.

$A_1 = 5$ birimkare
$A_2 = 10$ birimkare
$A_3 = 3$ birimkare

olduğuna göre aşağıdaki integrallerin değerlerini bulunuz.

a) $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ **b)** $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$ **c)** $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$

ç) $\int_{-1}^{3} |f(x)|\,dx$ **d)** $\int_{-2}^{3} |f(x)|\,dx$ **e)** $\int_{-2}^{2} |f(x)|\,dx$

ÇÖZÜM

a) $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = A_1 + (-A_2)$

$= 5 + (-10)$

$= -5$

b) $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = A_1 + (-A_2) + A_3$

$= 5 + (-10) + 3$

$= -2$

c) $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = -A_2 + A_3$

$= -10 + 3$

$= -7$

ç) $\int_{-1}^{3} |f(x)|\,dx = A_2 + A_3$

$= 10 + 3$

$= 13$

d) $\int_{-2}^{3} |f(x)|\,dx = A_1 + A_2 + A_3$

$= 5 + 10 + 3$

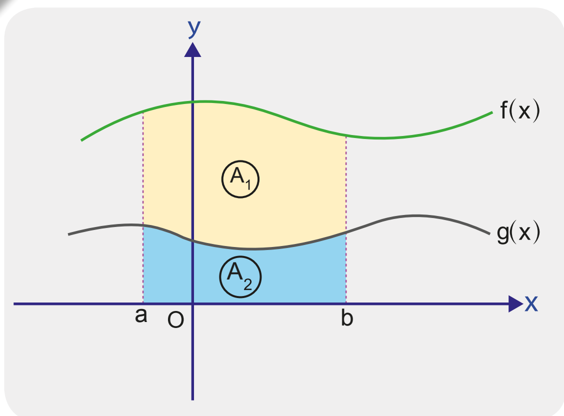
$= 18$

e) $\int_{-2}^{2} |f(x)|\,dx = A_1 + A_2$

$= 5 + 10$

$= 15$

İki Fonksiyonun Grafiği Arasında Kalan Sınırlı Bölgenin Alanı

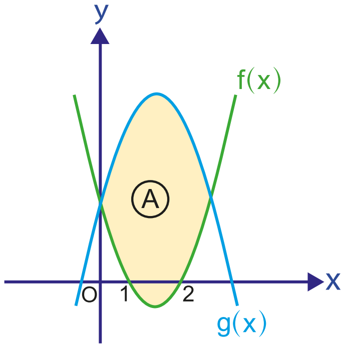


Yanda gösterilen $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının grafikleri ile $x = a$ ve $x = b$ doğruları arasında kalan sınırlı bölgenin alanı A_1; $g(x)$ fonksiyonunun grafiği, $x = a$ ve $x = b$ doğruları ile x ekseni arasında kalan sınırlı bölgenin alanı A_2 olmak üzere

$$\left.\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= A_1 + A_2 \\ \int_a^b g(x)\,dx &= A_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_1 = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \Rightarrow \mathbf{A_1 = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx} \quad \text{olur.}$$

Sonuç olarak $[a, b]$ nda iki fonksiyonun grafiği arasında kalan alanı bulmak için üstteki fonksiyondan alttaki fonksiyon çıkarılarak integral alınır.

ÖRNEK



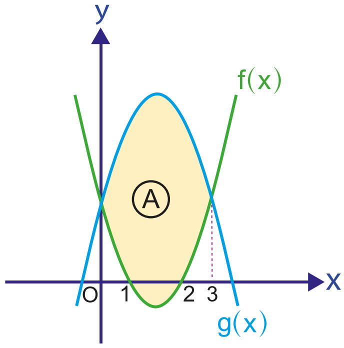
Yanda $f(x)=x^2-3x+2$ ve $g(x)=-x^2+3x+2$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

Buna göre $f(x)$ ve $g(x)$ eğrileri arasında kalan A sınırlı bölgesinin alanını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\left.\begin{aligned} y&=x^2-3x+2\\ y&=-x^2+3x+2 \end{aligned}\right\}$$ eğrilerinin kesim noktalarını bulmak için ortak çözüm yapılırsa

$$\begin{aligned} x^2-3x+2=-x^2+3x+2 &\Rightarrow 2x^2-6x=0\\ &\Rightarrow 2x\cdot(x-3)=0\\ &\Rightarrow x=0 \text{ veya } x=3 \text{ olur.} \end{aligned}$$



Bu durumda $[0,3]$ nda üstteki $g(x)$ fonksiyonundan alttaki $f(x)$ fonksiyonu çıkarılarak integral alınırsa

$$\begin{aligned} A=\int_0^3 (g(x)-f(x))\,dx &= \int_0^3 \left[(-x^2+3x+2)-(x^2-3x+2)\right]dx\\ &= \int_0^3 (-2x^2+6x)\,dx\\ &= \left(-\frac{2x^3}{3}+3x^2\right)\Bigg|_0^3\\ &= \left(-\frac{2\cdot 3^3}{3}+3\cdot 3^2\right)-\left(-\frac{2\cdot 0^3}{3}+3\cdot 0^2\right)\\ &= (-18+27)-(0+0)\\ &= 9-0\\ &= 9 \text{ birimkare bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

$f(x) = -x^2 + 4x + 2$ ve $g(x) = x^2 - 6x + 10$ fonksiyonlarının grafikleri arasında kalan sınırlı bölgenin alanını Dinamik Geometri ve Matematik Yazılımı programını kullanarak hesaplayınız.

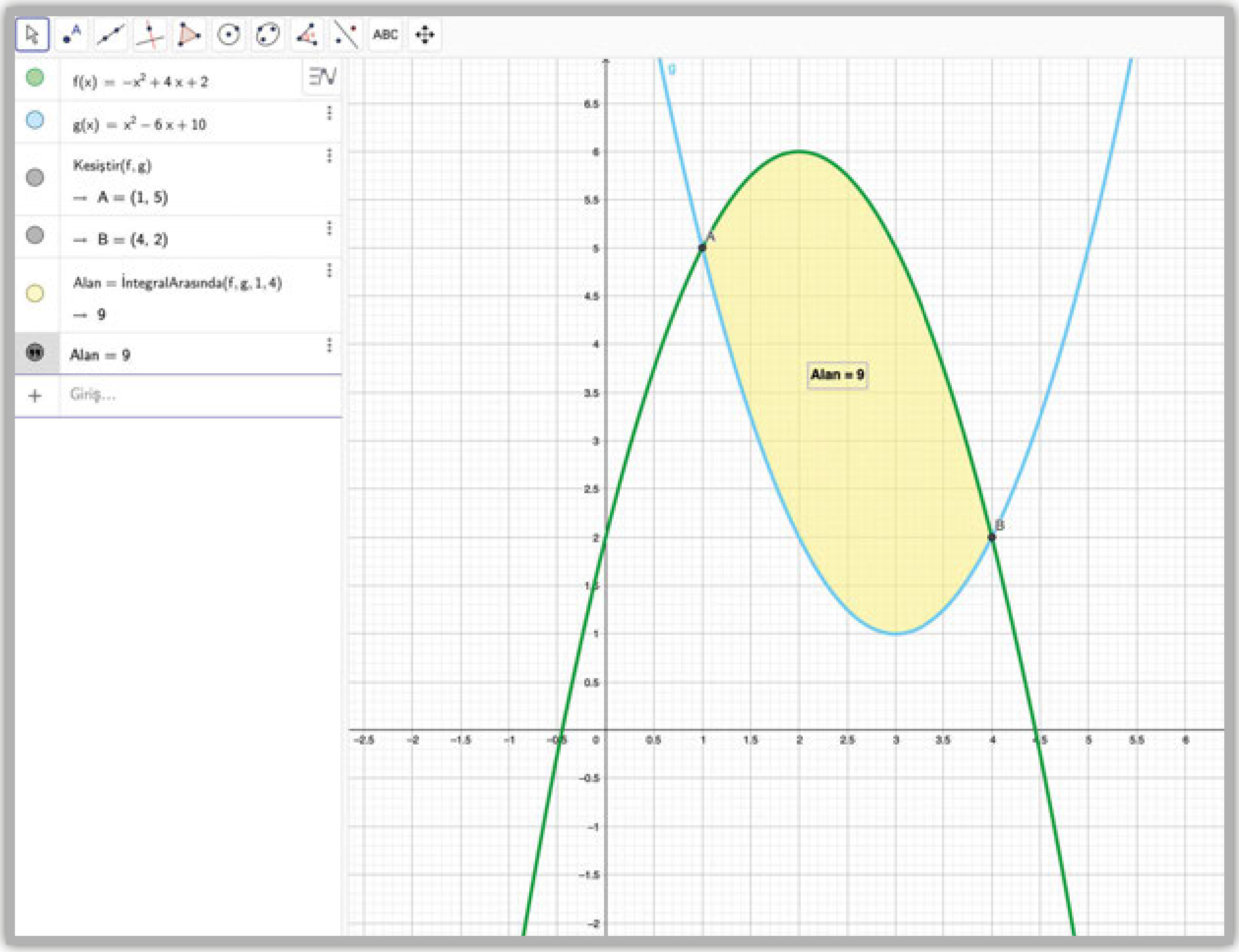
ÇÖZÜM

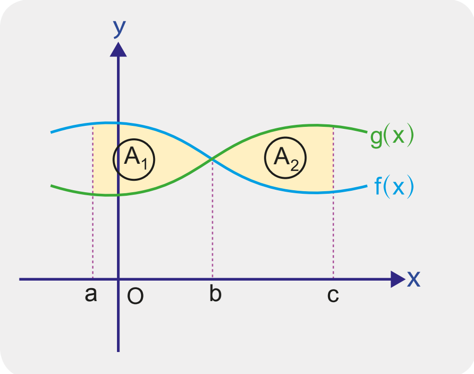
Dinamik Geometri ve Matematik Yazılımı programını açınız.

1. Adım: Giriş çubuğuna alttaki ekran klavyesini kullanarak $-x^2 + 4x + 2$ yazarak enter tuşuna basınız. Ardından $x^2 - 6x + 10$ yazarak enter tuşuna basınız. Her iki fonksiyonun grafiği çizilecektir.

2. Adım: Giriş çubuğuna kesiştir yazıldığında açılan pencerede 2. sıradaki Kesiştir(<Nesne>, <Nesne>) sekmesini tıklayınız. Bu sekmede **Kesiştir(f, g)** yazıldığında fonksiyonların kesim noktaları olan A(1,5) ve B(4,2) noktaları görünür. Bu durumda f ve g fonksiyonlarının kesim noktalarının apsisleri 1 ve 4 olur.

3. Adım: Giriş çubuğuna Alan = İntegral yazınız. Açılan pencerede 5. sıradaki Alan = İntegralArasında(<fonksiyon>,<fonksiyon>,<başlangıç x-değeri>,<bitiş x-değeri>) sekmesini tıklayınız. Bu sekmede **Alan = İntegral(f, g, 1, 4)** yazarak boyalı alan elde edilir. Enter tuşuna bastığınızda hesaplanan alan hem koordinat sistemi üzerinde hem de cebir penceresinde 9 birimkare olarak görülecektir.

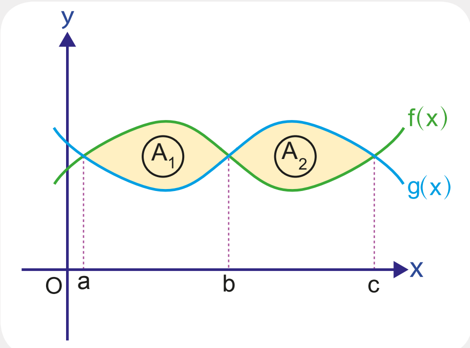




Eğer $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının grafikleri yandaki gibi verilirse boyalı bölgelerin toplam alanı, A_1 ve A_2 alanlarının ayrı ayrı hesaplanarak toplanması ile bulunur.

$$\mathbf{A = A_1 + A_2 = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx + \int_b^c (g(x) - f(x))\,dx} \text{ olur.}$$

ÖRNEK



Yanda $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

- A_1 ve A_2 bulundukları sınırlı bölgelerin alanları
- $\int_a^c (f(x) - g(x))\,dx = 3$
- $\int_b^c (f(x) - g(x))\,dx = -5$

olduğuna göre A_1 ve A_2 alanlarının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$A_1 = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

$$A_2 = \int_b^c (g(x) - f(x))\,dx \text{ olur.}$$

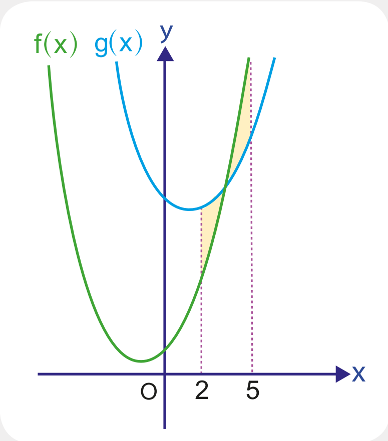
$$\int_b^c (f(x) - g(x))\,dx = -5 \Rightarrow A_2 = 5 \text{ birimkare olur.}$$

$$\underbrace{\int_a^c (f(x) - g(x))\,dx}_{3} = \underbrace{\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx}_{A_1} + \underbrace{\int_b^c (f(x) - g(x))\,dx}_{-A_2}$$

$$3 = A_1 - 5$$

$$A_1 = 8 \text{ birimkare bulunur.}$$

ÖRNEK



Yanda $f(x)=x^2+2x+2$ ve $g(x)=x^2-x+11$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Buna göre boyalı bölgelerin alanlarının toplamını bulunuz.

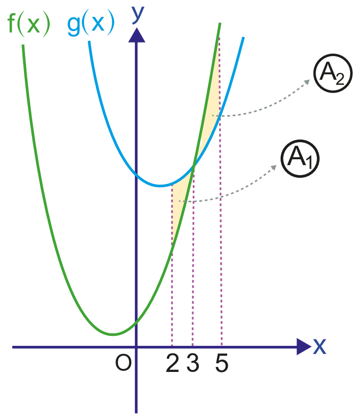
ÇÖZÜM

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2+2x+2 \\ y=x^2-x+11 \end{array}\right\}$$

eğrilerinin kesim noktasını bulmak için ortak çözüm yapılırsa

$$\cancel{x^2}+2x+2=\cancel{x^2}-x+11 \Rightarrow 3x=9$$
$$\Rightarrow x=3 \text{ olur.}$$

Boyalı bölgelerin alanları toplamı A olsun.
Bu durumda $A=A_1+A_2$ olur.



$$A=A_1+A_2=\int_2^3 (g(x)-f(x))\,dx+\int_3^5 (f(x)-g(x))\,dx$$

$$=\int_2^3 \left[(x^2-x+11)-(x^2+2x+2)\right]dx+\int_3^5 \left[(x^2+2x+2)-(x^2-x+11)\right]dx$$

$$=\int_2^3 (-3x+9)\,dx+\int_3^5 (3x-9)\,dx$$

$$=\left(-\frac{3x^2}{2}+9x\right)\Bigg|_2^3+\left(\frac{3x^2}{2}-9x\right)\Bigg|_3^5$$

$$=\left[\left(-\frac{3\cdot 3^2}{2}+9\cdot 3\right)-\left(-\frac{3\cdot 2^2}{2}+9\cdot 2\right)\right]+\left[\left(\frac{3\cdot 5^2}{2}-9\cdot 5\right)-\left(\frac{3\cdot 3^2}{2}-9\cdot 3\right)\right]$$

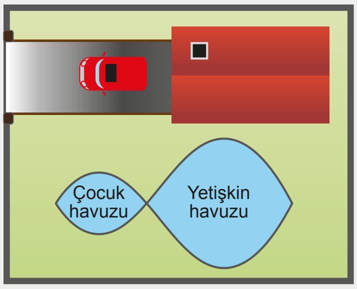
$$=\left(\frac{27}{2}-12\right)+\left(-\frac{15}{2}-\left(-\frac{27}{2}\right)\right)$$

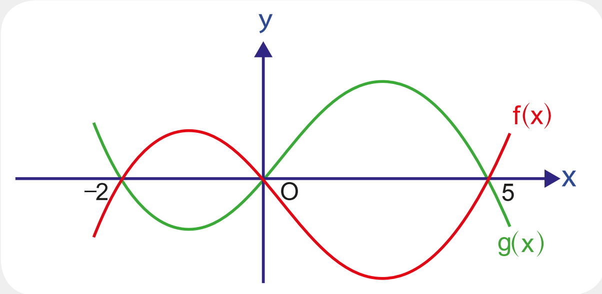
$$=\frac{3}{2}+6$$

$$=\frac{15}{2} \text{ birimkare bulunur.}$$

ÖRNEK

Mühendis Özgür Bey evinin bahçesine şekildeki gibi 50 cm derinliğinde bir çocuk havuzu ve 150 cm derinliğinde yetişkin yüzme havuzu yapmayı planlıyor. Özgür Bey havuzu koordinat sisteminde modelleyerek havuzun bahçede kapladığı alanı ve alabileceği su miktarını hesaplamak istiyor.





Özgür Bey havuzu grafikteki gibi

- $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-x^2-\dfrac{10x}{3}$
- $g(x)=-\dfrac{x^3}{3}+x^2+\dfrac{10x}{3}$

fonksiyonları ile koordinat sistemindeki 1 birimi 1 metre kabul ederek modelliyor. Özgür Beyin hesabına göre

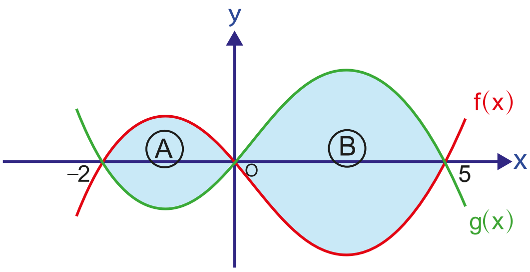
a) Çocuk havuzunun kaplayacağı alanın kaç m^2 olacağını bulunuz.

b) Yetişkin havuzunun kaplayacağı alanın kaç m^2 olacağını bulunuz.

c) Çocuk havuzunun kaç m^3 su alacağını bulunuz.

ç) Yetişkin havuzunun kaç m^3 su alacağını bulunuz.

ÇÖZÜM



Grafiğe göre çocuk havuzunun alanı A ve yetişkin havuzunun alanı B ile ifade edilirse

a) $A=\int_{-2}^{0}(f(x)-g(x))\,dx$

$$=\int_{-2}^{0}\left[\left(\frac{x^3}{3}-x^2-\frac{10x}{3}\right)-\left(-\frac{x^3}{3}+x^2+\frac{10x}{3}\right)\right]dx$$

$$=\int_{-2}^{0}\left(\frac{2x^3}{3}-2x^2-\frac{20x}{3}\right)dx$$

$$=\left(\frac{x^4}{6}-\frac{2x^3}{3}-\frac{10x^2}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{0}$$

$$=\left(\frac{0^4}{6}-\frac{2\cdot 0^3}{3}-\frac{10\cdot 0^2}{3}\right)-\left(\frac{(-2)^4}{6}-\frac{2\cdot(-2)^3}{3}-\frac{10\cdot(-2)^2}{3}\right)$$

$$=0-\left(-\frac{16}{3}\right)$$

$=\dfrac{16}{3}\ m^2$ bulunur.

b) $B = \int_0^5 (g(x) - f(x))\,dx$

$$= \int_0^5 \left[\left(-\frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{10x}{3}\right) - \left(\frac{x^3}{3} - x^2 - \frac{10x}{3}\right)\right] dx$$

$$= \int_0^5 \left(-\frac{2x^3}{3} + 2x^2 + \frac{20x}{3}\right) dx$$

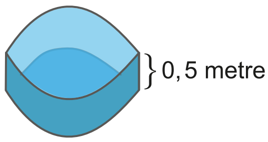
$$= \left(-\frac{x^4}{6} + \frac{2x^3}{3} + \frac{10x^2}{3}\right)\Bigg|_0^5$$

$$= \left(-\frac{5^4}{6} + \frac{2\cdot 5^3}{3} + \frac{10\cdot 5^2}{3}\right) - \left(-\frac{0^4}{6} + \frac{2\cdot 0^3}{3} + \frac{10\cdot 0^2}{3}\right)$$

$$= \left(-\frac{625}{6} + \frac{250}{3} + \frac{250}{3}\right) - 0$$

$$= \frac{125}{2}\ \text{m}^2 \text{ bulunur.}$$

c)



Çocuk havuzu

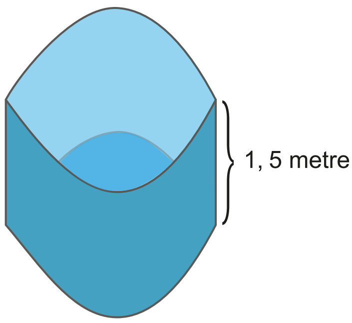
Dik prizmaların hacimleri taban alanı ile yüksekliğinin çarpımına eşittir. Çocuk havuzu da bir dik prizma olduğundan $V_ç$ çocuk havuzunun hacmi olmak üzere

$V_ç =$ Taban alanı $\cdot$ Yükseklik

$$= \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{8}{3}\ \text{m}^3 \text{ bulunur.}$$

ç)



Yetişkin havuzu

V_y yetişkin havuzunun hacmi olmak üzere

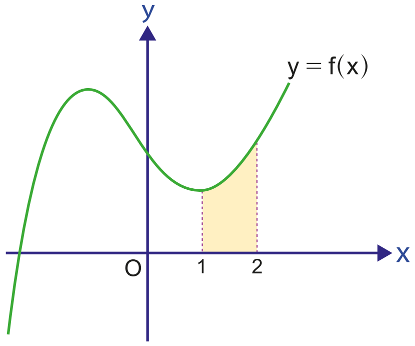
$V_y =$ Taban alanı $\cdot$ Yükseklik

$$= \frac{125}{2} \cdot \frac{3}{2}$$

$$= \frac{375}{4}\ \text{m}^3 \text{ bulunur.}$$

Alıştırmalar

1



Yukarıda $f(x) = x^3 - 3x + 4$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

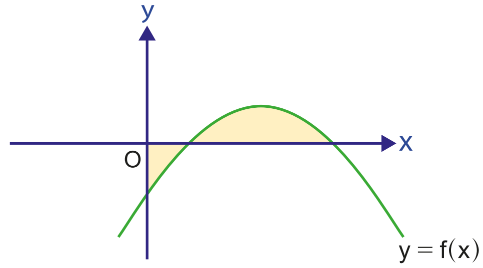
Buna göre grafikteki boyalı bölgenin alanını bulunuz.

2 $f(x) = 3x^2 + 2x + 2$ fonksiyonunun grafiği, $x = -1$ ve $x = 2$ doğruları ile x ekseni arasında kalan sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

3 $f(x) = -3x^2 + 2x - 5$ fonksiyonunun grafiği, $x = -1$ ve $x = 1$ doğruları ile x ekseni arasında kalan sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

4 $f(x) = 4 - x^2$ eğrisi ile eksenler arasında koordinat sisteminin I. bölgesindeki sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

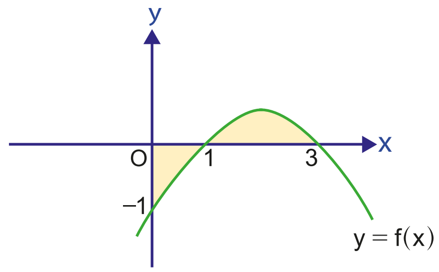
5



Yukarıda $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre grafikteki boyalı bölgelerin alanlarının toplamını bulunuz.

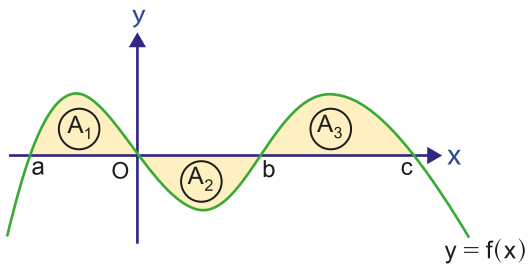
6



Yukarıda $y = f(x)$ parabolünün grafiği verilmiştir.

Buna göre boyalı bölgelerin alanlarının toplamı kaç birimkaredir?

7

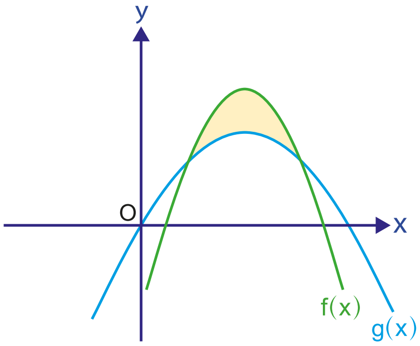


Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $f(x)$ fonksiyonunun grafiği ile x ekseni arasında kalan A_1, A_2 ve A_3 bölgelerinin alanları sırasıyla 4, 6 ve 3 birimkare olduğuna göre

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_0^c f(x)\,dx$$

ifadesinin değerini bulunuz.

8



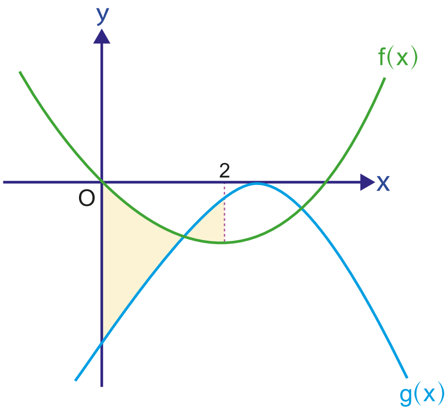
Yukarıda

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 4x - \frac{10}{3}$$

$$g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x$$

fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Buna göre grafikteki $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının arasında kalan boyalı bölgenin alanını bulunuz.

9



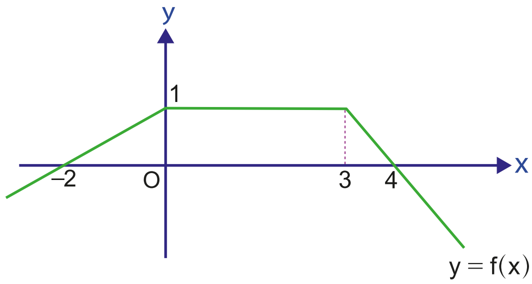
Yukarıda

$$f(x) = 4x^2 - 16x$$

$$g(x) = -3x^2 + 18x - 27$$

fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Buna göre grafikteki boyalı bölgelerin alanlarının toplamını bulunuz.

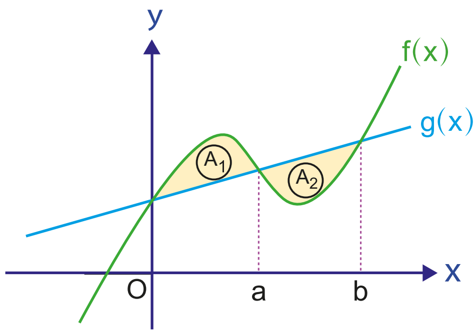
10



Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre aşağıdaki integrallerin değerini hesaplayınız.

a) $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$ **b)** $\int_{-3}^{4} |f(x)|\,dx$ **c)** $\int_{2}^{6} f(x)\,dx$

11

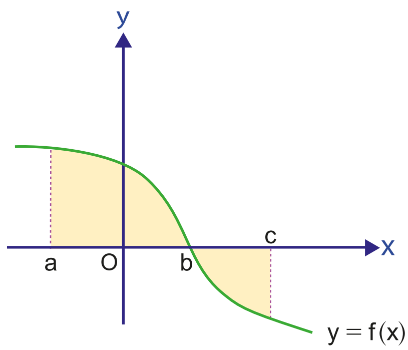


Yukarıda $f(x)$ eğrisi ile $g(x)$ doğrusunun grafikleri verilmiştir. A_1 ve A_2 bulundukları bölgelerin alanlarıdır. Buna göre

$\int_{0}^{b} [g(x) - f(x)]\,dx$ ifadesinin A_1 ve A_2

türünden eşitini bulunuz.

12



Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre boyalı bölgelerin toplam alanını veren integral ifadesini yazınız.

Ölçme ve Değerlendirme 1

A) 1-4. sorularda boş bırakılan yerlere uygun ifadeleri yazınız.

1 $f'(x)\,dx$ ifadesine $f(x)$ fonksiyonunun .... denir.

2 Bir integrali daha kolay bir integral hâline getirerek almak için .... yöntemi kullanılır.

3 $\int x\cdot(x^2+2)^5\,dx$ integralini almak için $u=$................. dönüşümü yapılır.

4 $\int_a^b f(x)dx$ integraline $f(x)$ fonksiyonunun .... integrali denir.

B) 5. soruda numaralar ile verilen ifadeleri harf ile verilen ifadelerle eşleştiriniz.

5 Aşağıda numaralarla verilen belirsiz integrallerin eşitlerini harf ile verilen sonuçlarla eşleştiriniz.

I. $\int dx$

II. $\int x\,dx$

III. $\int x^2\,dx$

IV. $\int \frac{1}{x^2}\,dx$

V. $\int \sqrt{x}\,dx$

VI. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

a) $\frac{x^2}{2}+c$

b) $-\frac{1}{x}+c$

c) x^2+c

ç) $x+c$

d) $\frac{2\sqrt{x^3}}{3}+c$

e) $\frac{x^3}{3}+c$

f) $\frac{1}{\sqrt{x}}+c$

g) $\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}+c$

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.

C) 6-11. açık uçlu soruları cevaplandırınız.

6 $\int (x+1)\cdot(x^2+2x-1)^3\,dx$

ifadesinin eşiti nedir?

7 $\int_1^2 x^2\cdot(x^3-1)^2\,dx$

ifadesinin değeri nedir?

8 $\int \frac{x\cdot f'(x)-f(x)}{x^2}\,dx$

ifadesinin eşiti nedir?

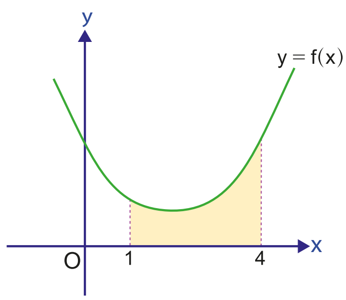
9 $\int x\cdot f'(1-x^2)\,dx$

ifadesinin eşiti nedir?

10 $\int \frac{3}{(x^2-1)^2}\,dx-\int \frac{1}{(x^3-x)^2}\,dx$

ifadesinin eşiti nedir?

11



Yukarıda $f(x)=x^2-4x+6$ fonksiyonunun grafiği, $x=1$ ve $x=4$ doğruları ile x ekseni arasında kalan boyalı bölgenin alanı kaç birimkaredir?

D) 12-45. çoktan seçmeli soruları çözünüz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

12 $\int x^a\,dx = \frac{x^3}{3} + c$

olduğuna göre a kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3

13 $f(x) = \int (x^3 - x^2)\,dx$

olduğuna göre $f'(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^3 - x^2$
B) $3x^2 - 2x$
C) $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + c$
D) $\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + c$
E) $6x - 2 + c$

14 $f(x)$, $g(x)$ ve $h(x)$ ikinci mertebeden türevlenebilir fonksiyonlardır.

- $f(x) = \int g(x)\,dx$
- $g(x) = \int h(x)\,dx$

olduğuna göre aşağıdaki eşitliklerden hangisi yanlıştır?

A) $f'(x) = g(x)$
B) $g'(x) = h(x)$
C) $f''(x) = h(x)$
D) $g''(x) = h'(x)$
E) $f(x) = g'(x)$

15 $f(x) = \int (x^2 - 3x - 2)\,dx$

olduğuna göre $f(x)$ fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?

A) -5 B) -4 C) -3 D) -2 E) -1

16 $f(x) = \int (3x^2 - 6x - 1)\,dx$

olduğuna göre $f(x)$ fonksiyonunun ekstremum noktalarının apsisleri toplamı kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 4

17 $\int \frac{1}{x^3}\,dx$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{x^3} + c$ B) $-\frac{1}{2x^2} + c$ C) $-\frac{1}{4x^4} + c$
D) $\frac{4}{x^4} + c$ E) $\frac{2}{x^2} + c$

18 $\int x \cdot f(x)\,dx = x^3 - x + 1$

olduğuna göre $f(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2 + \frac{1}{x} - 1 + c$
B) $3x + c$
C) $3x - \frac{1}{x}$
D) $\frac{x^3}{4} - \frac{x}{2} + 1 + c$
E) $3x^2 - 1$

19 $\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x}\,dx$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + c$
B) $\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{\sqrt[3]{x}}{3} + c$
C) $\frac{2\sqrt{x}}{3} + \frac{3\sqrt[3]{x}}{2} + c$
D) $\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + c$
E) $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x}} + c$

20 $\int (x - 1) \cdot P(x)\,dx = x^3 + ax^2 - x$

eşitliğini sağlayan $P(x)$ polinomu için $P(1)$ değeri kaçtır?

A) 6 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

21 $\int \frac{x + 1}{\sqrt{x}}\,dx$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{2\sqrt{x}}{3} - \frac{1}{\sqrt{x}} + c$
B) $\frac{2\sqrt[3]{x}}{3} + \frac{2}{\sqrt{x}} + c$
C) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} + c$
D) $\frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 2\sqrt{x} + c$
E) $\frac{3\sqrt{x^3}}{2} + \frac{\sqrt{x}}{2} + c$

22 **Aşağıdaki eşitliklerden hangisi yanlıştır?**

A) $\int x\,dt = xt + c$ B) $\int u\,du = \frac{u^2}{2} + c$

C) $\int \frac{v}{y}\,dv = \frac{v^2}{2y} + c$ D) $\int n\,dm = \frac{n^2}{2} + c$

E) $\int dz = z + c$

23
- $t = x + 1$
- $f(x) = \int (2t - 1)\,dt$

olduğuna göre $f(x)$ fonksiyonunun ekstremum noktasının apsisi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $-\frac{1}{4}$ E) -1

24 $\int \frac{x^6 - 1}{x^2 - x + 1}\,dx$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{x^7}{7} - x + c$

B) $x^4 + x^3 - x + c$

C) $\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - x + c$

D) $\frac{x^3}{3} - x + c$

E) $\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + c$

25 $\int x^2 \cdot (x^3 - 1)^3\,dx$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{(x^3 - 1)^4}{4} + c$ B) $\frac{(x^3 - 1)^4}{12} + c$

C) $\frac{(x^3 - 1)^4}{3} + c$ D) $\frac{x^3 \cdot (x^3 - 1)^3}{4} + c$

E) $(x^3 - 1)^4 + c$

26 **Diferansiyeli $(4x + 1)\,dx$ olan fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $4x + 1$ B) 4

C) $2x^2 + x + c$ D) $2x^2 + c$

E) $\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + c$

27
- $g(x) = \int f(x)\,dx + \int x \cdot f'(x)\,dx$
- $f(2) = 1$
- $g(2) = 3$
- $f(1) = -1$

olduğuna göre $g(1)$ değeri kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

28
- $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$
- $f(-1) = 3$

olduğuna göre $f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin y eksenini kestiği noktanın ordinatı kaçtır?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) -2

29 $\int_4^1 \left(\frac{1}{x^2} - \sqrt{x}\right)dx$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{78}{19}$ B) $\frac{35}{6}$ C) $\frac{35}{36}$ D) $\frac{47}{12}$ E) $\frac{163}{3}$

30 $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\,dx$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} + c$ B) $\frac{2}{\sqrt{x^2 + 1}} + c$

C) $\sqrt{x^2 + 1} + c$ D) $\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2} + c$

E) $2\sqrt{x^2 + 1} + c$

31 $9\int x^2 \cdot (x^6 - 1)\,dx$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^9 - x^3 + c$ B) $x^9 - 3x^3 + c$

C) $\frac{x^9}{3} - x^3 + c$ D) $x^9 - \frac{x^3}{3} + c$

E) $\frac{x^9}{3} - \frac{x^3}{3} + c$

32 $\int \frac{f'(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $f(\sqrt{x})+c$ B) $\sqrt{x}\cdot f(\sqrt{x})+c$
C) $2f(\sqrt{x})+c$ D) $\frac{f(\sqrt{x})}{2}+c$
E) $f(x)+c$

33
- $g(x)=\int \sqrt{x}\cdot f'(x\sqrt{x})\,dx$
- $g(1)=2f(1)$
- $g(4)=3f(8)$

olduğuna göre $\frac{f(1)}{f(8)}$ oranı kaçtır?

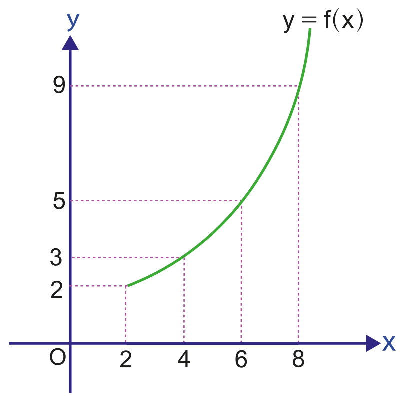
A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{7}$ C) $\frac{7}{3}$ D) $\frac{7}{4}$ E) $\frac{3}{7}$

34 $\int_{2}^{3}(3x^2-2x)\,dx$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

35



Yukarıda $[2,8]$ nda tanımlı $f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre $\int_{2}^{8} f(x)\,dx$ ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisi olamaz?

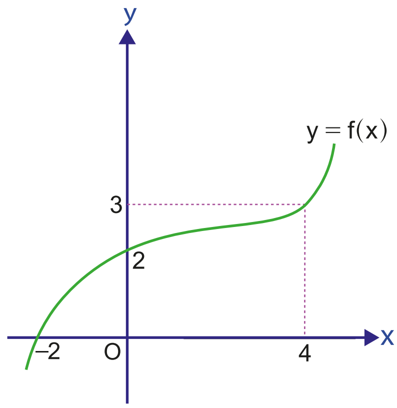
A) 27 B) 28 C) 29 D) 32 E) 35

36
- $\int_{1}^{2} x\cdot f'(x^2)dx=5$
- $3f(4)-2f(1)=4$

olduğuna göre $f(1)+f(4)$ toplamı kaçtır?

A) -42 B) -38 C) -36
D) -34 E) -28

37



Yukarıda $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre $\int_{-1}^{2} f'(2x)\,dx$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) $-\frac{3}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 2

38
- $a=\int_{1}^{2}(x^2-x)\,dx$
- $b=\int_{1}^{-1}(x-x^2)\,dx$
- $c=\int_{3}^{2}(x^2-x)\,dx$

olduğuna göre $\int_{-1}^{3}(x^2-x)\,dx$ ifadesinin a, b ve c türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a+b-c$ B) $a-b-c$
C) $-a+b+c$ D) $-a-b+c$
E) $a-b+c$

39 $f(x) = \begin{cases} x - 1 & , \quad x \geq 1 \quad \text{ise} \\ \sqrt{x} & , \quad x < 1 \quad \text{ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu veriliyor.

Buna göre $\int_0^4 f(x)dx$ ifadesinin değeri kaçtır?

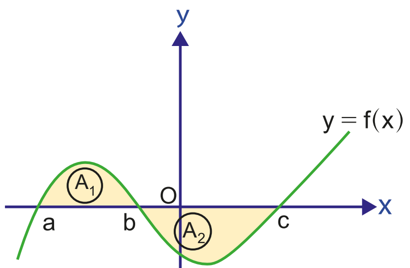
A) $\frac{19}{3}$ B) $\frac{25}{6}$ C) $\frac{31}{6}$ D) $\frac{17}{2}$ E) 9

40 $\int_0^3 |x - 1| dx$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

41



Yukarıdaki $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

- $\int_a^c f(x)dx = -5$
- $\int_a^c |f(x)|dx = 11$

A_1 ve A_2 bulundukları bölgelerin alanları olduğuna göre A_1 kaç birimkaredir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

42 **$f(x) = x^3 + 2$ fonksiyonun grafiği, $x = 2$ doğrusu ve eksenler arasında kalan sınırlı bölgenin alanı kaç birimkaredir?**

A) 12 B) $\frac{24}{5}$ C) 8 D) 6 E) 5

43
- $a = \int_1^2 (x^5 - 1)^2 dx$
- $b = \int_1^2 (x^5 + 1)^2 dx$

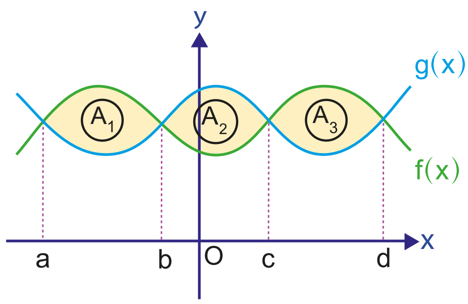
olduğuna göre $a - b$ farkı kaçtır?

A) –42 B) –34 C) 34 D) 42 E) 56

44 **$f(x) = 3x^2 - 2x + 2$ fonksiyonunun grafiği, $x = 1$ ve $x = 3$ doğruları ile x ekseni arasında kalan sınırlı bölgenin alanı kaç birimkaredir?**

A) 18 B) 20 C) 22 D) 24 E) 30

45



Yukarıdaki $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

A_1, A_2 ve A_3 alanları sırasıyla 3, 2 ve 4 birimkare olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $\int_a^c [f(x) - g(x)]dx = 1$

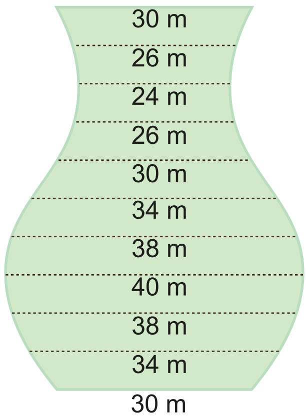
B) $\int_b^d [g(x) - f(x)]dx = -2$

C) $\int_a^d [f(x) - g(x)]dx = 5$

D) $\int_c^b [f(x) - g(x)]dx = 2$

E) $\int_d^c [f(x) - g(x)]dx = 4$

E) 46-48. üst düzey beceri sorularını şekle ve metne göre cevaplayınız.



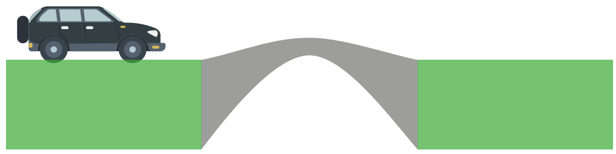
Bir parkta düz bir zemine şekildeki gibi bir yeşil alan yapılacaktır. Yeşil alanın en geniş yeri 40 metre ve en dar yeri 24 metre olacaktır. Şekilde gösterilen tüm aralıklar eşit ve ikişer metre olduğuna göre;

46 Bu yeşil alan, Riemann alt toplamı mantığıyla hesaplanırsa yaklaşık olarak kaç metrekare bulunur?

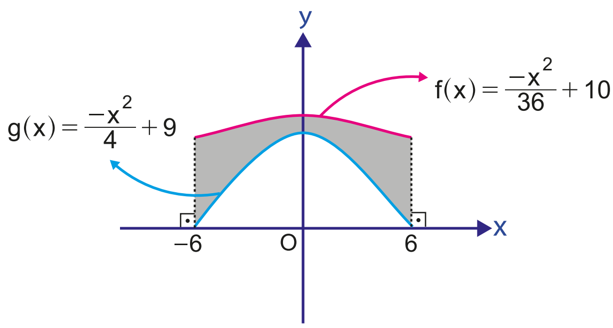
47 Bu yeşil alan, Riemann üst toplamı mantığıyla hesaplanırsa yaklaşık olarak kaç metrekare bulunur?

48 Bu alanı yeşillendirmek için metrekaresi 8 TL olan hazır çim kullanılacağına göre bu alanın yeşillendirme maliyeti hangi fiyatlar arasında olur?

49. ve 50. üst düzey beceri sorularını şekle ve metne göre cevaplayınız.



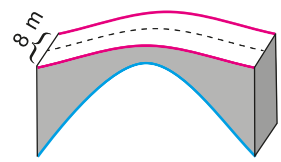
Bir mühendis şekildeki gibi alt ve üst sınırları parabolik olacak şekilde betondan bir köprü planı çizmiştir. Mühendis koordinat sisteminde 1 birimi 1 metre kabul ederek ölçeklendirip aşağıdaki çizimi yapmıştır.



Bu köprü plana uygun olarak yapıldığına göre;

49 Köprünün yan yüzeylerinin metrekare fiyatı 10 TL olan kaplama malzemesi ile kaplanması durumunda kaplama maliyeti kaç TL olur?

50



Yol 8 metre genişliğinde yapılacaktır. Bu köprü için metreküp fiyatı 150 TL olan beton kullanılması durumunda beton maliyeti kaç TL olur?

Ölçme ve Değerlendirme 2

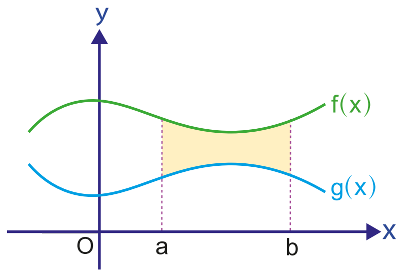
A) 1-4. cümlelerde boş bırakılan yerlere uygun ifadeleri yazınız.

1 Bir eğrinin altında kalan alan .... toplamı yardımıyla yaklaşık olarak hesaplanabilir.

2 Bir $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ ve $x = b$ doğruları ile x ekseni arasında kalan alan .... integrali ile hesaplanır.

3 İki fonksiyonun toplamının integrali .... toplamına eşittir.

4



Yukarıdaki boyalı bölgenin alanı .... integrali ile hesaplanır.

B) 5. soruda numaralar ile verilen ifadeleri harf ile verilen ifadelerle eşleştiriniz.

5 Aşağıda numaralarla verilen belirli integrallerin değerlerini bularak harf ile verilen sonuçlarla eşleştiriniz.

I. $\int_{1}^{1} (x^2 + 1)^5 dx$

II. $\int_{1}^{2} x\,dx$

III. $\int_{-1}^{1} (2x - 1)\,dx$

IV. $\int_{2}^{3} (x^2 - ax)\,dx + \int_{2}^{3} (ax + 1)\,dx$

V. $\int_{0}^{1} 2x \cdot (x^2 + 1)^4\,dx$

a) $\dfrac{3}{2}$

b) $\dfrac{22}{3}$

c) -1

ç) -2

d) $\dfrac{1}{2}$

e) 3

f) 0

g) $\dfrac{31}{5}$

I.	II.	III.	IV.	V.

C) 6-11. açık uçlu soruları cevaplandırınız.

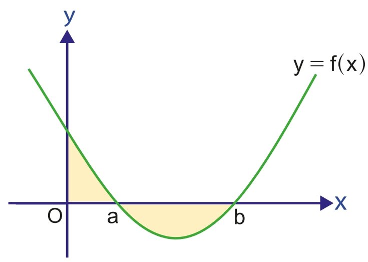
6 $\int x \cdot f'(x^2) \cdot f(x^2)\,dx$ ifadesinin eşiti nedir?

7 $\int \dfrac{2x - 3}{(x^2 - 3x)^3}\,dx$ ifadesinin eşiti nedir?

8 $\int \dfrac{f'(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$ ifadesinin eşiti nedir?

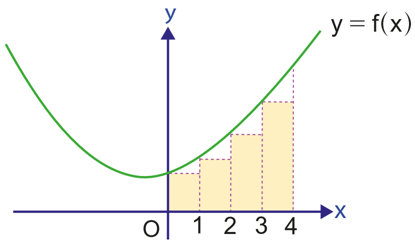
9 $\int \dfrac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2 \cdot f^2\left(\frac{1}{x}\right)}\,dx$ ifadesinin eşiti nedir?

10



Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre boyalı bölgenin alanını veren integral ifadesi nedir?

11



Yukarıda $f(x) = x^2 + 2x + 2$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $[0, 4]$ aralığı 4 eşit alt aralığa bölünerek hesaplanan Riemann alt toplamı kaçtır?

D) 12-36. çoktan seçmeli soruları çözünüz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

12 **Aşağıdaki eşitliklerden hangisi yanlıştır?**

A) $d(x^3 - x) = (3x^2 - 1)dx$

B) $d(x \cdot f(x)) = (f(x) + x \cdot f'(x))dx$

C) $\int d(f(x)) = f(x) + c$

D) $\int x\,dt = \frac{x^2}{2} + c$

E) $\int x \cdot t\,dt = \frac{x \cdot t^2}{2} + c$

13 $x^3 - 3x^2 + x - 1 = \int f(x)\,dx$

olduğuna göre $f(x)$ fonksiyonunun ekstremum noktasının ordinatı kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

14 $x^4 - ax^2 + 2x + 2 = \int f(x)\,dx$

eşitliğini sağlayan $f(x)$ fonksiyonunun $x = -1$ apsisli noktasında bir yerel maksimumu olduğuna göre yerel minimum noktasının ordinatı kaçtır?

A) -6 B) -4 C) -2 D) 2 E) 4

15 $\int x\sqrt{x\sqrt[3]{x}}\,dx$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{3\sqrt[3]{x^8}}{8} + c$ B) $\frac{2\sqrt[3]{x^6}}{7} + c$

C) $\frac{\sqrt[3]{x^8}}{2} + c$ D) $\frac{\sqrt[6]{x^7}}{6} + c$

E) $\frac{\sqrt[3]{x^5}}{5} + c$

16 $\int \frac{x^2}{x+1}dx - \int \frac{1}{x+1}dx$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x + c$ B) $x^2 + c$

C) $x^2 - x + c$ D) $\frac{x^2}{2} - x + c$

E) $\frac{x^3}{3} - x + c$

17 $\int \frac{f(-x) \cdot g'(x) + f'(-x) \cdot g(x)}{f^2(-x)}dx$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{f(x)}{g(x)} + c$ B) $\frac{f(-x)}{g(x)} + c$

C) $\frac{g(x)}{f(-x)} + c$ D) $\frac{g(-x)}{f(-x)} + c$

E) $\frac{g(-x)}{f(x)} + c$

18 $\frac{d}{dx}\int_1^2 (4x + 1)\,dx$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) 0 B) $4x + 1$ C) $x^2 + x$

D) $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c$ E) 2

19 $\int x^2 \cdot f(x) \cdot f'(x)\,dx = x^4 - 3x^3 + 2$

eşitliğini sağlayan $f(x)$ fonksiyonu doğrusal bir fonksiyondur.

$f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin x ekseni ile yaptığı açı, dar açı olduğuna göre $f(0)$ kaçtır?

A) $-\frac{9}{2}$ B) -4 C) -3 D) $-\frac{7}{2}$ E) $-\frac{5}{2}$

20

- $f(x) = \dfrac{x-2}{3x-2}$
- $g(x) = \dfrac{2x-2}{3x-1}$

olduğuna göre $\int_{1}^{2} (fog)(x)\,dx$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) -4 B) -2 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{4}{3}$

21 $f(x) = \begin{cases} g'(x) + 2x &, x < 2 \text{ ise} \\ g'(x) - 4x &, x \geq 2 \text{ ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu veriliyor.

$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = 5$

olduğuna göre $g(3) - g(-2)$ farkı kaçtır?

A) 5 B) 8 C) 10 D) 12 E) 15

22

- $f'(x) = 2x + 1$
- $g'(x) = 3x^2 - 1$
- $f(0) = g(0)$

olduğuna göre $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının kesim noktalarının apsisleri toplamı kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

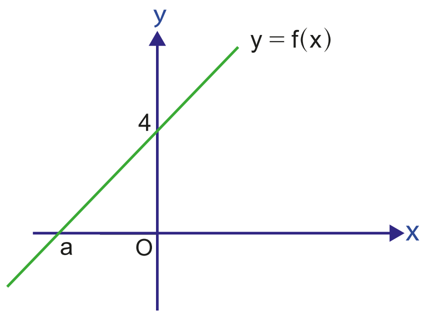
23

- $2f(1) = 3f(-1)$
- $\int_{-1}^{1} f'(-x)\,dx = 5$

olduğuna göre $f(1)$ kaçtır?

A) -15 B) -10 C) -5 D) 10 E) 15

24

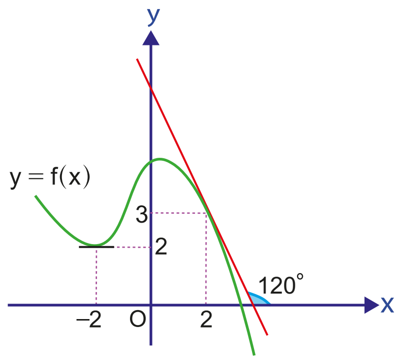


Yukarıda $y = f(x)$ doğrusal fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$\int_{-1}^{2} f'(x)\,dx = 2$ olduğuna göre a kaçtır?

A) -8 B) -6 C) -4 D) -2 E) -1

25

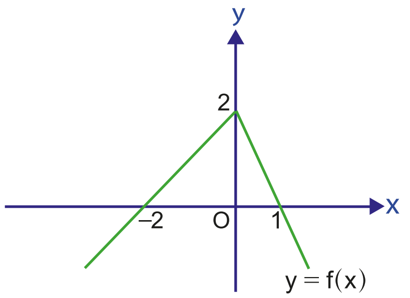


Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $f(x)$ fonksiyonunun $x = 2$ apsisli noktasındaki teğeti x ekseni ile pozitif yönde 120° açı yapmaktadır.

Buna göre $\int_{-2}^{2} f'(x) \cdot (1 + f''(x))\,dx$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) $-\frac{3}{4}$ B) $-\frac{4}{7}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{7}{4}$ E) $\frac{5}{2}$

26



Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

- $-2 < a < 0$
- $\int_{a}^{1} f(x)\,dx = \frac{5}{2}$

olduğuna göre a kaçtır?

A) $-\frac{3}{2}$ B) -1 C) $-\frac{3}{4}$ D) $-\frac{1}{2}$ E) $-\frac{1}{3}$

27 **$f(x) = 4x - x^2$ eğrisi ile $y = 2x$ doğrusu arasında kalan sınırlı bölgenin alanı kaç birimkaredir?**

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{5}{3}$

28 $\int_{1}^{3} \frac{d(x^3 - x^2)}{x}$

ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

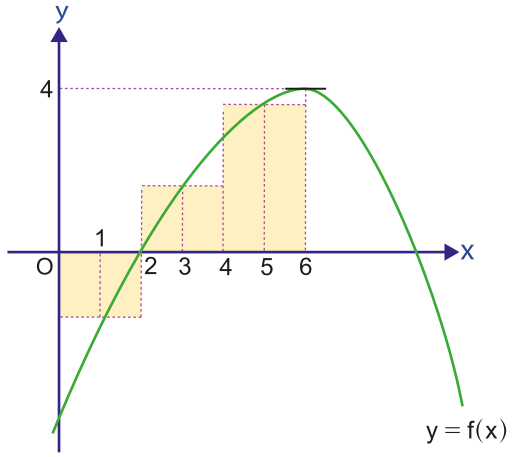
A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14

29 $\int_{a-1}^{a+1} (2x + 1)\,dx = 18$

olduğuna göre a kaçtır?

A) 6 B) 4 C) 2 D) -2 E) -4

30



Yukarıda $y = f(x)$ parabolünün grafiği verilmiştir. Grafikte $f(x)$ fonksiyonunun $[0, 6]$ nda Riemann toplamı gösterilmiştir.

- Grafikte gösterilen Riemann toplamı A
- $\int_{0}^{6} f(x)\,dx = B$

olduğuna göre $|A - B|$ değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

31 $\int_{2}^{3} (f(x) - 2x)\,dx + \int_{3}^{2} (f(x) + 1)\,dx$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) -8 B) -6 C) -4 D) -2 E) 0

32 $\int_{0}^{\sqrt{3}} x \cdot \sqrt{x^2 + 1}\,dx$

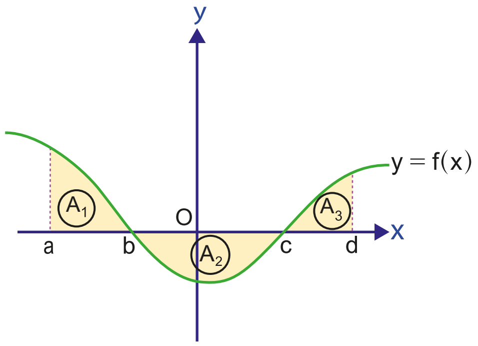
ifadesinin değeri kaçtır?

A) 0 B) $\frac{7}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) 1

33 **$f(x) = 3x^2 + 12x - 10$ eğrisi ile $y = 5$ doğrusu arasında kalan sınırlı bölgenin alanı kaç birimkaredir?**

A) 216 B) 144 C) 128 D) 108 E) 96

34



Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. $[a, d]$ nda f fonksiyonu ile x ekseni arasında kalan bölgelerin alanları

- $A_1 = 5$ birimkare
- $A_2 = 9$ birimkare
- $A_3 = 7$ birimkare

olduğuna göre aşağıdaki ifadelerden hangisi yanlıştır?

A) $\int_a^c |f(x)|dx = 14$ B) $\int_a^d f(x)dx = 3$

C) $\int_b^d |f(x)|dx = 16$ D) $\int_d^a |f(x)|dx = 21$

E) $\int_c^a f(x)dx = 4$

35 $\int_1^3 |x^2 - 4|dx$

ifadesinin değeri kaçtır?

A) 12 B) 10 C) 9 D) 8 E) 4

36

- $\int_1^3 f(x)\,dx = 5$
- $\int_2^4 f(x)\,dx = 8$

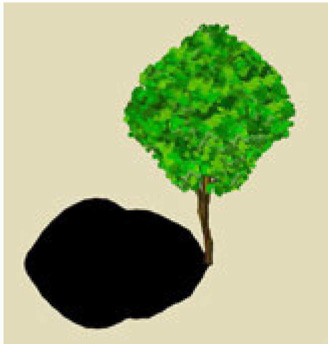
olduğuna göre $\int_1^2 f(x)\,dx - \int_3^4 f(x)\,dx$

integrallerinin farkı kaçtır?

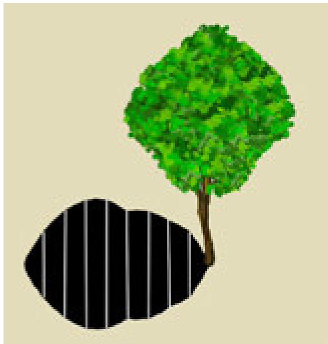
A) −8 B) −5 C) −3 D) 3 E) 13

E) 37-38. üst düzey beceri sorularını şekle ve metne göre cevaplayınız.

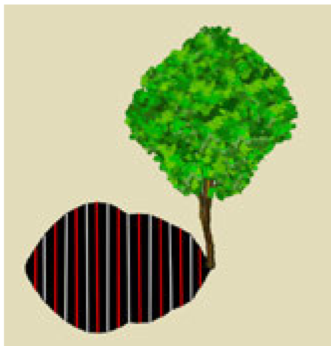
Matematik öğretmeni Özge Hanım derste Riemann toplamlarını anlattıktan sonra 1 metrekareye ortalama 4 kişinin sığabileceğini belirtiyor.



Özge Öğretmen öğrencilerine bahçedeki ağacı göstererek bu ağacın gölgesine şu an yaklaşık olarak kaç kişinin sığabileceğini soruyor.



Öğrenciler, ağacın gölgesinin sınırlarını tebeşirle belirledikten sonra şekildeki gibi birbirine paralel çizgiler çizerek 1 metre genişliğinde şeritler oluşturuyorlar.



Öğrenciler, daha sonra her iki çizgi arasına şekildeki gibi birbirine paralel kırmızı çizgiler çiziyorlar. Sonrasında beyaz çizgiler arasındaki uzaklığı en, kırmızı çizgilerin uzunluğunu ise boy kabul eden dikdörtgenler oluşturarak Riemann toplamı mantığıyla ağacın gölgesinin alanını yaklaşık olarak hesaplamak istiyorlar.

Kırmızı çizgilerin boyları soldan sağa sırasıyla 3, 5, 6, 7, 6, 5, 4, 3 ve 2 metre olduğuna göre;

37 Öğrenciler ağacın gölgesini yaklaşık olarak kaç metrekare olarak hesaplarlar?

38 Öğrenciler ağacın gölgesine yaklaşık olarak kaç kişinin sığacağını bulur?

7

ANALİTİK GEOMETRİ

7.1. ÇEMBERİN ANALİTİK İNCELENMESİ

HAZIRLIK ÇALIŞMALARI

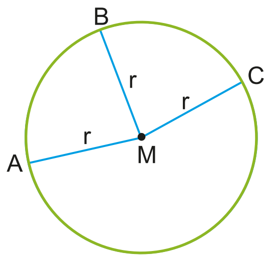
- Çember nedir?
- Analitik düzlemde merkezi orijinde olan bir çemberin yarıçapı 5 birim ise çember üzerindeki bir A(x,y) noktası için x ile y arasındaki ilişki nedir?
- Çemberin merkezi, 2 birim sağa ve 3 birim yukarı ötelenirse x ile y arasındaki ilişki ne olur?

7.1. ÇEMBERİN ANALİTİK İNCELENMESİ

7.1.1. Çember Denklemi

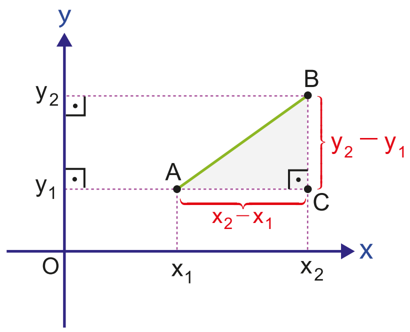
HATIRLATMA

Düzlemde sabit bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesine **çember** denir. Sabit noktaya **çemberin merkezi**, çember üzerindeki herhangi bir noktanın çemberin merkezine olan uzaklığına ise **çemberin yarıçapı** denir.



Yanda verilen çemberde sabit M noktası çemberin merkezi ve $|MA| = |MB| = |MC| = r$ çemberin yarıçapıdır.

Analitik düzlemde bir çemberin belirli olabilmesi için merkezi ve yarıçapı ya da üç noktası bilinmelidir.



Dik koordinat sisteminde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları arasındaki uzaklık ACB dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanarak hesaplanabilir.

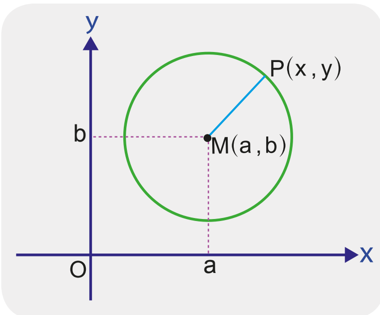
$|AC| = (x_2 - x_1)$ birim ve $|BC| = (y_2 - y_1)$ birim olduğundan

$$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\mathbf{|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \text{ olur.}$$

Merkezi ve Yarıçapı Verilen Çemberin Denklemi

Analitik düzlemde $M(a, b)$ merkezli ve r yarıçaplı çember üzerinde bir $P(x, y)$ noktası alınırsa $M(a, b)$ ile $P(x, y)$ noktaları arasındaki uzaklık



$|MP| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ olur. $|MP| = r$ olduğundan

$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ bulunur.

Bu eşitliğin her iki tarafının karesi alınarak

$\mathbf{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$ denklemi elde edilir.

$\mathbf{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$ denklemine merkezi $M(a, b)$ ve yarıçapı r birim olan **çemberin standart denklemi** denir. Çember üzerindeki bir $P(x, y)$ noktası çemberin denklemini sağlar.

ÖRNEK

Merkezi $M(2,3)$ ve yarıçapı $r=4$ birim olan çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

Merkezi M(a,b) ve yarıçapı r birim olan çemberin standart denklemi $(\mathbf{x}-\mathbf{a})^2+(\mathbf{y}-\mathbf{b})^2=\mathbf{r}^2$ olduğundan merkezi $M(2,3)$ ve yarıçapı $r=4$ birim olan çemberin standart denklemi $(x-2)^2+(y-3)^2=4^2 \Rightarrow (x-2)^2+(y-3)^2=16$ olarak bulunur.

ÖRNEK

Merkezi $M(-3,2)$ ve yarıçapı $r=5$ birim olan bir çember veriliyor. Buna göre

a) Çemberin standart denklemini bulunuz.

b) $P(2,k)$ noktası çember üzerinde ise k değerini bulunuz.

c) Çemberin y eksenini kestiği noktaları bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Çemberin standart denklemi

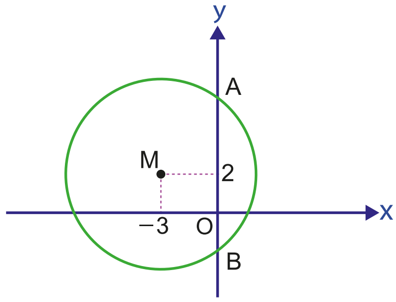
$(x-(-3))^2+(y-2)^2=5^2 \Rightarrow (x+3)^2+(y-2)^2=25$ olur.

b) $P(2,k)$ noktası çember üzerinde olduğundan çemberin denklemini sağlar.
Denklemde x yerine 2 ve y yerine k yazılırsa

$$(2+3)^2+(k-2)^2=25$$
$$25+(k-2)^2=25$$
$$(k-2)^2=0$$
$$k=2 \quad \text{bulunur.}$$

c) Çemberin y eksenini kestiği noktalar A ve B olsun. Bu noktaları bulabilmek için çember denkleminde x yerine 0 yazılırsa

$$x=0 \Rightarrow (0+3)^2+(y-2)^2=25$$
$$\Rightarrow 9+(y-2)^2=25$$
$$\Rightarrow (y-2)^2=16$$
$$\Rightarrow y-2=4 \text{ veya } y-2=-4$$
$$\Rightarrow y=6 \text{ veya } y=-2 \text{ bulunur.}$$

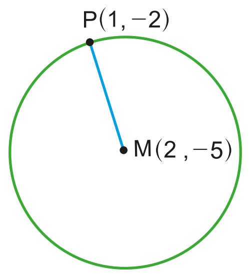


Böylece çemberin y eksenini kestiği noktalar $A(0,6)$ ve $B(0,-2)$ olarak elde edilir.

ÖRNEK

Merkezi $M(2,-5)$ olan ve $P(1,-2)$ noktasından geçen çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM



Çemberin merkezi ile çember üzerindeki herhangi bir nokta arasındaki uzaklık, çemberin yarıçapını verir.

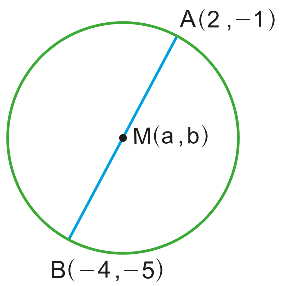
$$\begin{aligned} r &= |MP| \\ &= \sqrt{(2-1)^2+(-5-(-2))^2} \\ &= \sqrt{1+9} \\ &= \sqrt{10} \text{ birim bulunur.} \end{aligned}$$

Böylece merkezi $M(2,-5)$ ve yarıçapı $r=\sqrt{10}$ birim olan çemberin standart denklemi $(x-2)^2+(y-(-5))^2=(\sqrt{10})^2 \Rightarrow (x-2)^2+(y+5)^2=10$ olarak elde edilir.

ÖRNEK

$A(2,-1)$ ve $B(-4,-5)$ olmak üzere $[AB]$ çaplı çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM



$[AB]$ çap olduğundan $[AB]$ nın orta noktası çemberin merkezidir. Çemberin merkezi $M(a,b)$ ise

$$a=\frac{2+(-4)}{2}=-1$$

$$b=\frac{-1+(-5)}{2}=-3 \text{ olur.}$$

Buna göre çemberin merkezi $M(-1,-3)$ bulunur.

$|MA|=|MB|=r$ olup

$$\begin{aligned} |MA| &= \sqrt{(2-(-1))^2+((-1)-(-3))^2} \\ &= \sqrt{3^2+2^2} \\ &= \sqrt{9+4} \\ &= \sqrt{13} \text{ birim bulunur.} \end{aligned}$$

Bu durumda merkezi $M(-1,-3)$ ve yarıçapı $r=\sqrt{13}$ birim olan çemberin standart denklemi

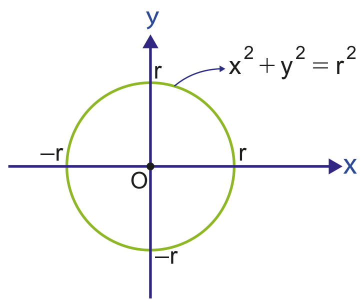
$(x-(-1))^2+(y-(-3))^2=(\sqrt{13})^2 \Rightarrow (x+1)^2+(y+3)^2=13$ olarak elde edilir.

Bazı Özel Çemberlerin Denklemleri

1. Merkezi Orijinde Olan Çemberin Denklemi

Merkezi orijinde ve yarıçapı r birim olan çemberin standart denklemi

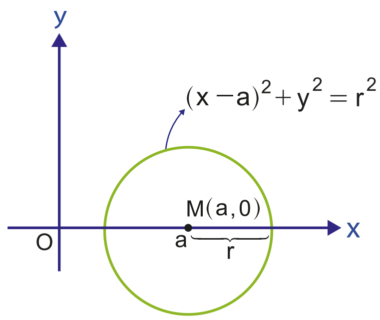
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \Rightarrow (x-0)^2+(y-0)^2=r^2$$
$$\Rightarrow \mathbf{x^2+y^2=r^2} \quad \text{olur.}$$



2. Merkezi x Ekseni Üzerinde Olan Çemberin Denklemi

Merkezi x ekseni üzerinde bulunan bir çemberde merkezin koordinatları $M(a,0)$ olacaktır. Çemberin yarıçapı r birim ise bu çemberin standart denklemi

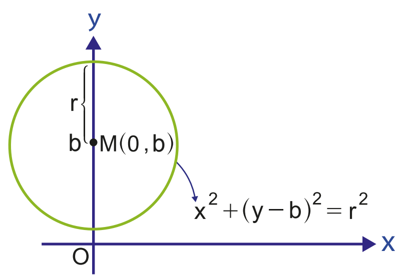
$$\mathbf{(x-a)^2+y^2=r^2} \quad \text{olur.}$$



3. Merkezi y Ekseni Üzerinde Olan Çemberin Denklemi

Merkezi y ekseni üzerinde bulunan bir çemberde merkezin koordinatları $M(0,b)$ olacaktır. Çemberin yarıçapı r birim ise bu çemberin standart denklemi

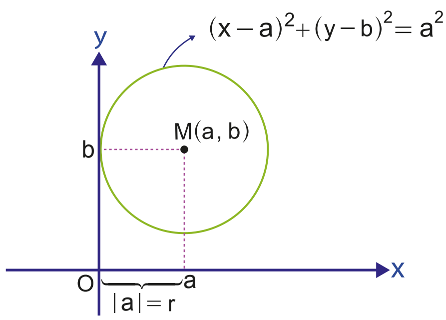
$$\mathbf{x^2+(y-b)^2=r^2} \quad \text{olur.}$$



4. y Eksenine Teğet Olan Çemberin Denklemi

Merkezi M(a,b) ve yarıçapı r birim olan bir çember, y eksenine teğet ise $r=|a|$ olur. Bu durumda çemberin standart denklemi

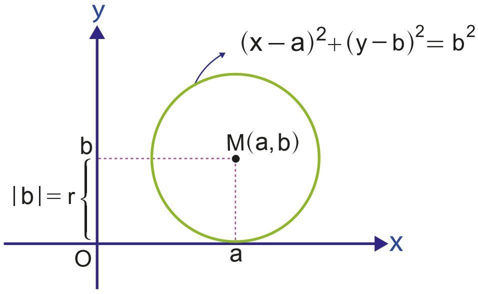
$$\mathbf{(x-a)^2+(y-b)^2=a^2} \quad \text{olur.}$$



5. x Eksenine Teğet Olan Çemberin Denklemi

Merkezi M(a,b) ve yarıçapı r birim olan bir çember, x eksenine teğet ise $r = |b|$ olur. Bu durumda çemberin standart denklemi

$$(\mathbf{x}-\mathbf{a})^2 + (\mathbf{y}-\mathbf{b})^2 = \mathbf{b}^2 \quad \text{olur.}$$



6. Her İki Eksene de Teğet Olan Çemberin Denklemi

Çember her iki eksene de teğet ise $r = |a| = |b|$ olur. Bu durumda eksenlere teğet olan çemberlerin merkezleri $y = x$ veya $y = -x$ doğruları üzerinde olacaktır. Eğer çemberin merkezi

I. bölgede ise merkezi $M_1(r, r)$ ve denklemi

$$(\mathbf{x}-\mathbf{r})^2 + (\mathbf{y}-\mathbf{r})^2 = \mathbf{r}^2 \quad \text{olur.}$$

II. bölgede ise merkezi $M_2(-r, r)$ ve denklemi

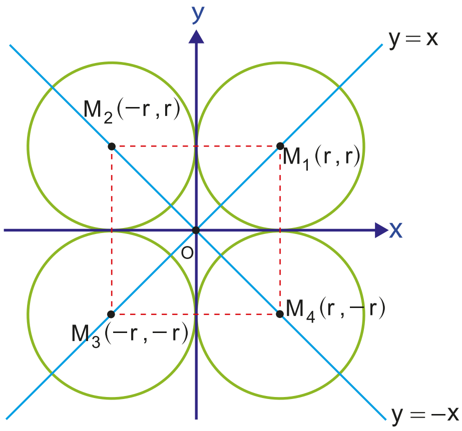
$$(\mathbf{x}+\mathbf{r})^2 + (\mathbf{y}-\mathbf{r})^2 = \mathbf{r}^2 \quad \text{olur.}$$

III. bölgede ise merkezi $M_3(-r, -r)$ ve denklemi

$$(\mathbf{x}+\mathbf{r})^2 + (\mathbf{y}+\mathbf{r})^2 = \mathbf{r}^2 \quad \text{olur.}$$

IV. bölgede ise merkezi $M_4(r, -r)$ ve denklemi

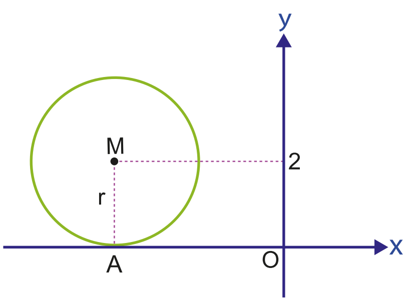
$$(\mathbf{x}-\mathbf{r})^2 + (\mathbf{y}+\mathbf{r})^2 = \mathbf{r}^2 \quad \text{olur.}$$



ÖRNEK

Merkezi $M(-3, 2)$ olan çember A noktasında x eksenine teğettir. Bu çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM



$|MA| = r$ olup $r = 2$ birim bulunur.

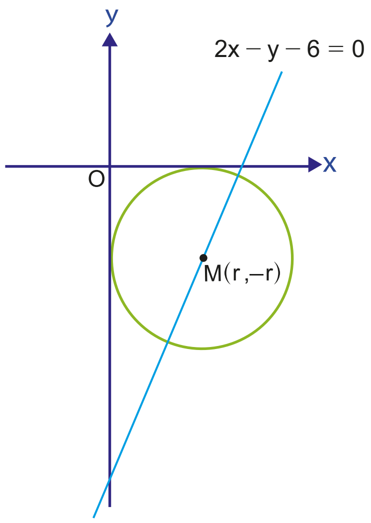
Merkezi $M(-3, 2)$ ve yarıçapı $r = 2$ birim olan çemberin standart denklemi

$$(x-(-3))^2 + (y-2)^2 = 2^2 \Rightarrow (x+3)^2 + (y-2)^2 = 4 \quad \text{bulunur.}$$

ÖRNEK

Merkezi $2x - y - 6 = 0$ doğrusu üzerinde bulunan ve her iki eksene de IV. bölgede teğet olan çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM



IV. bölgede eksenlere teğet olan r yarıçaplı çemberin merkezi $M(r, -r)$ noktasıdır. Bu nokta $2x - y - 6 = 0$ doğrusu üzerinde olduğundan doğrunun denklemini sağlar.

$2x - y - 6 = 0$ doğru denkleminde x yerine r ve y yerine $-r$ yazılırsa

$$2x - y - 6 = 0 \Rightarrow 2r - (-r) - 6 = 0$$
$$3r - 6 = 0$$
$$r = 2 \text{ olur.}$$

Bu durumda çemberin standart denklemi

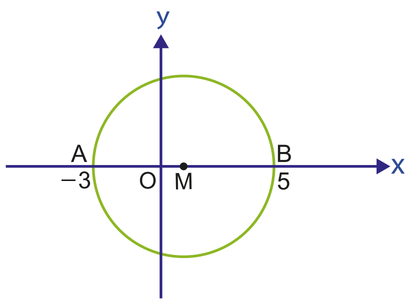
$(x - r)^2 + (y + r)^2 = r^2$ olduğundan $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$

bulunur.

ÖRNEK

Merkezi x ekseni üzerinde olan ve x eksenini $A(-3, 0)$ ve $B(5, 0)$ noktalarında kesen çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM



$[AB]$ çemberin çapı olduğundan $[AB]$ nın orta noktası çemberin merkezidir. Buna göre

çemberin merkezi M ise

$$M\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = M(1, 0) \text{ olur.}$$

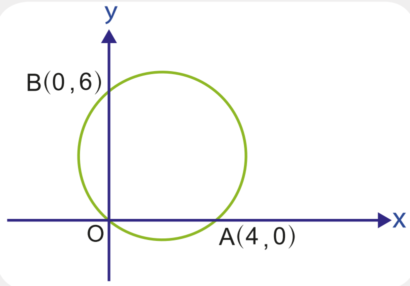
Çemberin çapı $[AB]$ ise

$$|AB| = |AO| + |OB|$$
$$= 3 + 5$$
$$= 8 \text{ birim olur.}$$

Çemberin çapı 8 birim olduğundan yarıçapı 4 birimdir. Bu durumda çemberin standart denklemi

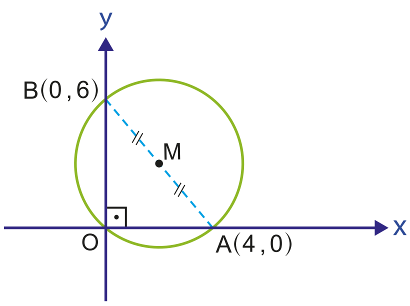
$(x - 1)^2 + (y - 0)^2 = 4^2 \Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 16$ olarak bulunur.

ÖRNEK



Yanda verilen çember $A(4,0)$, $B(0,6)$ ve $O(0,0)$ noktalarından geçtiğine göre bu çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM



Şekilde $A(4,0)$ ve $B(0,6)$ noktaları birleştirilerek $[AB]$ çizilir. $m(\widehat{BOA})=90^\circ$ olduğundan $[AB]$ çaptır. M, $[AB]$ nın orta noktası olduğundan

$M\left(\frac{0+4}{2},\frac{6+0}{2}\right)=M(2,3)$ olur.

$$|AB|=\sqrt{(0-4)^2+(6-0)^2}$$
$$=\sqrt{16+36}$$
$$=\sqrt{52}=2\sqrt{13} \text{ birimdir.}$$

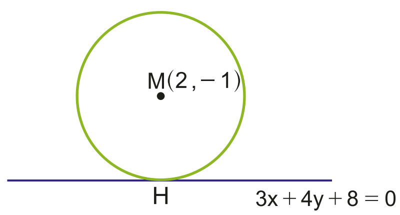
$[AB]$ çap olduğundan çemberin yarıçapı $r=\frac{|AB|}{2}=\frac{2\sqrt{13}}{2}=\sqrt{13}$ birim bulunur.

Bu durumda çemberin standart denklemi $(x-2)^2+(y-3)^2=13$ olarak elde edilir.

HATIRLATMA

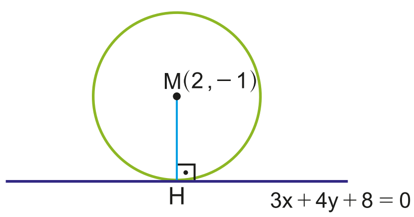
$A(x_1,y_1)$ noktasının $ax+by+c=0$ doğrusuna olan uzaklığı $d=\frac{|a\cdot x_1+b\cdot y_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ olur.

ÖRNEK



Yandaki şekilde merkezi $M(2,-1)$ olan çember $3x+4y+8=0$ doğrusuna H noktasında teğettir. Buna göre bu çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM



Yandaki şekilde de görüldüğü gibi çemberin yarıçapı, merkezinin teğet doğrusuna olan uzaklığına eşittir. O hâlde $M(2,-1)$ noktasının $3x+4y+8=0$ doğrusuna olan uzaklığı yarıçapa eşittir.

Bu durumda yarıçap

$$r=|MH|=\frac{|3\cdot 2+4\cdot(-1)+8|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2 \text{ birim olur.}$$

Merkezi $M(2,-1)$ ve yarıçapı 2 birim olan çemberin standart denklemi

$(x-2)^2+(y-(-1))^2=2^2 \Rightarrow (x-2)^2+(y+1)^2=4$ olarak elde edilir.

Çemberin Genel Denklemi

Merkezi $M(a,b)$ ve yarıçapı r birim olan çemberin standart denklemi

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

şeklindedir. Bu denklem düzenlenerek

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0 \quad \text{olur.}$$

$$-2a=D,\ -2b=E \text{ ve } a^2+b^2-r^2=F \text{ alınırsa}$$

$$\mathbf{x^2+y^2+Dx+Ey+F=0}$$

denklemi elde edilir. Bu denkleme **çemberin genel denklemi** denir.

$$\left.\begin{aligned} D&=-2a\Rightarrow a=-\frac{D}{2}\\ E&=-2b\Rightarrow b=-\frac{E}{2}\end{aligned}\right\} \text{ olduğundan çemberin merkezi } \mathbf{M\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)} \text{ olur.}$$

Çemberin yarıçapı

$$\begin{aligned} a^2+b^2-r^2=F &\Rightarrow \left(-\frac{D}{2}\right)^2+\left(-\frac{E}{2}\right)^2-r^2=F\\ &\Rightarrow \frac{D^2}{4}+\frac{E^2}{4}-r^2=F\\ &\Rightarrow D^2+E^2-4\cdot r^2=4\cdot F\\ &\Rightarrow 4\cdot r^2=D^2+E^2-4\cdot F\\ &\Rightarrow \mathbf{r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{D^2+E^2-4\cdot F}} \text{ olur.}\end{aligned}$$

$D^2+E^2-4\cdot F$ ifadesi için aşağıdaki durumlar vardır.

✓ $D^2+E^2-4\cdot F>0$ ise verilen denklem bir çember belirtir.

✓ $D^2+E^2-4\cdot F=0$ ise verilen denklem bir nokta belirtir. Bu nokta $M\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ dir.

✓ $D^2+E^2-4\cdot F<0$ ise verilen denklem gerçek sayılar kümesinde çember belirtmez.

ÖRNEK

$x^2+y^2+6x-4y+10=0$ denkleminin bir çember belirtip belirtmeyeceğini, çember belirtiyorsa merkezini ve yarıçapını bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2+y^2+6x-4y+10=0$ denkleminde $D=6$, $E=-4$ ve $F=10$ olduğundan

$$\begin{aligned} D^2+E^2-4\cdot F &= 6^2+(-4)^2-4\cdot 10 \\ &= 36+16-40 \\ &= 12 \text{ olur.} \end{aligned}$$

$D^2+E^2-4\cdot F$ ifadesi pozitif olduğundan verilen denklem bir çember belirtir.

Çemberin merkezi

$$\begin{aligned} M\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right) &= M\left(-\frac{6}{2},-\frac{(-4)}{2}\right) \\ &= M(-3,2) \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Çemberin yarıçapı

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{D^2+E^2-4\cdot F} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{6^2+(-4)^2-4\cdot 10} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{36+16-40} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{12} \\ &= \sqrt{3} \text{ birim bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

$x^2+y^2-x+2y+5=0$ denkleminin bir çember belirtip belirtmediğini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2+y^2-x+2y+5=0$ denkleminde $D=-1$, $E=2$ ve $F=5$ olduğundan

$$\begin{aligned} D^2+E^2-4\cdot F &= (-1)^2+2^2-4\cdot 5 \\ &= 1+4-20 \\ &= -15 \text{ olur.} \end{aligned}$$

$D^2+E^2-4\cdot F$ ifadesi negatif olduğundan verilen denklem gerçek sayılar kümesinde bir çember belirtmez.

ÖRNEK

$x^2+y^2+2x-4y+5=0$ denkleminin bir çember belirtip belirtmeyeceğini, çember belirtiyorsa merkezini ve yarıçapını bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2+y^2+2x-4y+5=0$ denkleminde $D=2$, $E=-4$ ve $F=5$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} D^2+E^2-4\cdot F &= 2^2+(-4)^2-4\cdot 5 \\ &= 4+16-20 \\ &= 0 \text{ olur.} \end{aligned}$$

$D^2+E^2-4\cdot F$ ifadesi sıfıra eşit olduğundan verilen denklem gerçek sayılar kümesinde bir nokta belirtir. Bu noktanın koordinatları

$$\begin{aligned} M\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right) &= M\left(-\frac{2}{2},-\frac{(-4)}{2}\right) \\ &= M(-1,2) \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

Genel denklemi $x^2+y^2-6x+4y+k=0$ olan çemberin yarıçapı $r=2\sqrt{2}$ birim olduğuna göre k gerçek sayısının değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2+y^2-6x+4y+k=0$ çember denkleminde $D=-6$, $E=4$ ve $F=k$ olur. Bu durumda

$$r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{D^2+E^2-4\cdot F} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\sqrt{36+16-4\cdot k}=2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{52-4\cdot k}=4\sqrt{2}$$ (Her iki tarafın karesi alınır.)

$$52-4\cdot k=32$$

$$-4\cdot k=-20$$

$$k=5 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK

$x^2+y^2+2x-3y+a=0$ denklemi bir çember belirttiğine göre a nın değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2+y^2+2x-3y+a=0$ denkleminde $D=2$, $E=-3$ ve $F=a$ olup $D^2+E^2-4\cdot F>0$ olmalıdır.

$$\begin{aligned} D^2+E^2-4\cdot F>0 &\Rightarrow 2^2+(-3)^2-4\cdot a>0 \\ &\Rightarrow 4+9-4a>0 \\ &\Rightarrow \frac{13}{4}>a \text{ olur.} \end{aligned}$$

Buna göre a nın değer aralığı $\left(-\infty,\frac{13}{4}\right)$ bulunur.

Merkezi $M(a, b)$ ve yarıçapı r birim olan çemberin standart denklemi olan

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ifadesinin düzenlenmesi ile elde edilen

$$\mathbf{x^2+y^2+Dx+Ey+F=0}$$

çemberin genel denklemine dikkat edilirse denklemde xy li terimin bulunmadığı görülür.

Ayrıca bu denklemde eşitliğin her iki tarafı sabit bir k sayısı ile çarpılırsa yukarıdaki ifadeye özdeş

$$\mathbf{k\cdot x^2+k\cdot y^2+k\cdot Dx+k\cdot Ey+k\cdot F=0}$$

denklemi elde edilir. Elde edilen son denklemde x^2 ve y^2 li terimlerin katsayıları aynı olup ifade yine bir çember denklemidir.

SONUÇ

$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$ denkleminin bir çember belirtmesi için

1. $C=0$ olmalıdır.

2. x^2 li ve y^2 li terimlerin katsayıları eşit $(A=B\neq 0)$ olmalıdır.

3. Verilen denklem, x^2 ve y^2 li terimlerin katsayıları 1 olacak şekilde düzenlenerek genel çember denklemi elde edilir ve çember olma şartı incelenir.

ÖRNEK

$4x^2-5y^2+6x-8y+13=0$ denkleminin bir çember belirtip belirtmeyeceğini, çember belirtiyorsa merkezini ve yarıçapını bulunuz.

ÇÖZÜM

$4x^2-5y^2+6x-8y+13=0$ denkleminde x^2 ve y^2 li terimlerin katsayıları farklı olduğundan bu denklem bir çember belirtmez. Denklem bir çember belirtmediği için merkezinden ve yarıçapından söz edilemez.

ÖRNEK

Genel denklemi $(2k-3)\cdot x^2+(6-k)\cdot y^2-6x+12y+4k=0$ olan çemberin merkezini ve yarıçapını bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen denklemin bir çember belirtmesi için x^2 ve y^2 li terimlerin katsayıları eşit olmalıdır.

$2k-3=6-k \Rightarrow k=3$ olur.

Verilen denklemde $k=3$ yazılırsa $3x^2+3y^2-6x+12y+12=0$ denklemi elde edilir.
Denklemin her iki tarafı 3 ile bölünürse $x^2+y^2-2x+4y+4=0$ çember denklemi elde edilir.
Bu denklemde $D=-2$, $E=4$ ve $F=4$ olur. Bu durumda çemberin merkezi

$$M\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)=M\left(-\frac{(-2)}{2},-\frac{4}{2}\right)$$
$$=M(1,-2) \text{ olarak bulunur.}$$

Çemberin yarıçapı ise

$$r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{D^2+E^2-4\cdot F} \Rightarrow r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-2)^2+4^2-4\cdot 4}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4+\cancel{16}-\cancel{16}}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4}$$
$$=1 \text{ birim elde edilir.}$$

ÖRNEK

$x^2+y^2+4mxy+(2m+6)x+(5m+8)y-m=0$ denklemi bir çember belirttiğine göre bu çemberin yarıçapını bulunuz.

ÇÖZÜM

Genel çember denkleminde xy li terim bulunamaz. Bu durumda $4m=0 \Rightarrow m=0$ olur.
Verilen denklemde $m=0$ yazılırsa $x^2+y^2+6x+8y=0$ denklemi elde edilir.
Burada $D=6$, $E=8$ ve $F=0$ olur. Böylece çemberin yarıçapı

$$r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{D^2+E^2-4\cdot F}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6^2+8^2-4\cdot 0}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{36+64-0}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{100}$$
$$=5 \text{ birim bulunur.}$$

ÖRNEK

Aşağıdaki çemberleri Dinamik Geometri ve Matematik Yazılımı programını kullanarak çiziniz.

a) Merkezi $A(2,3)$ ve yarıçapı 3 birim olan çember,

b) Merkezi $B(-6,-1)$ olan ve $C(-2,0)$ noktasından geçen çember,

c) $D(0,-5)$, $E(4,-5)$ ve $F(2,-3)$ noktalarından geçen çember.

ÇÖZÜM

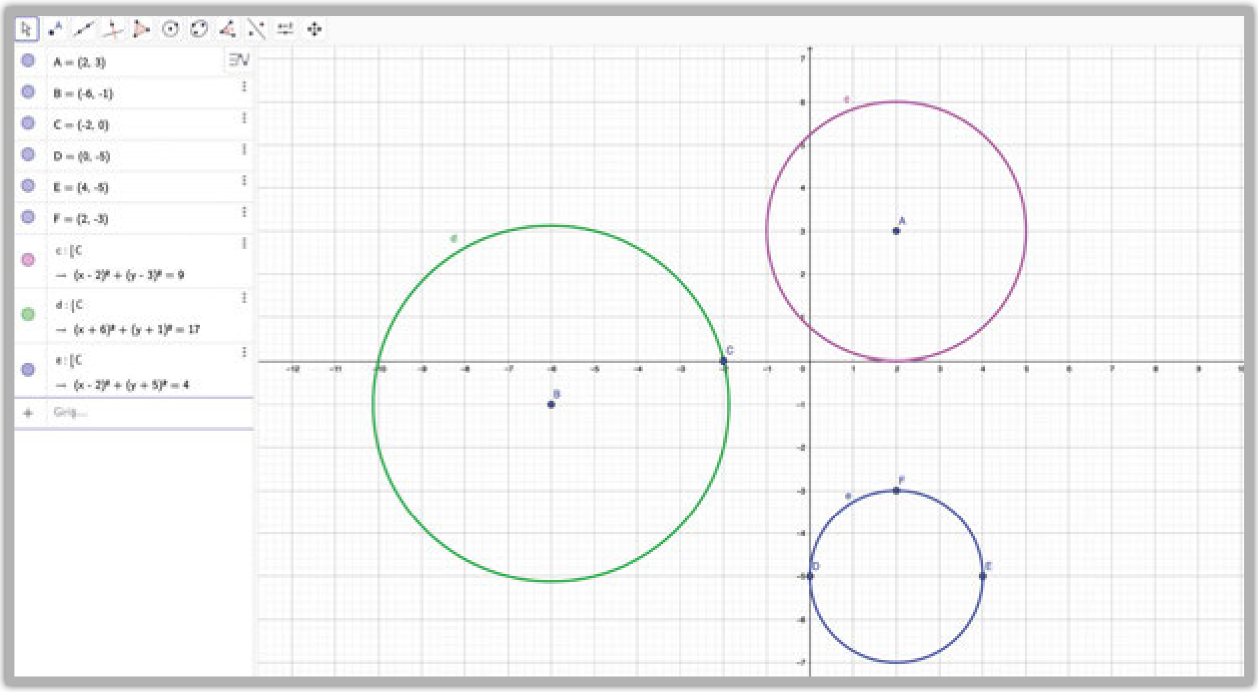
Dinamik Geometri ve Matematik Yazılımı programını açınız.

1. Adım: Giriş çubuğuna sırasıyla $(2,3)$, $(-6,-1)$, $(-2,0)$, $(0,-5)$, $(4,-5)$ ve $(2,-3)$ yazılarak enter tuşuna basıldığında A, B, C, D, E ve F noktaları cebir penceresinde ve grafikte görüntülenecektir.

2. Adım: Üstteki araç çubuğunda 5. sıradaki  simgesi tıklandığında açılan menüde ikinci sıradaki Merkez ve yarıçapla çember seçilir. Ardından grafikteki A noktası tıklandıktan sonra açılan pencerede yarıçap için 3 yazılarak Tamam butonu tıklanır. Böylece merkezi $A(2,3)$ ve yarıçapı 3 birim olan çember çizilmiş olur.

3. Adım: Üstteki araç çubuğunda 5. sıradaki simge tekrar tıklandığında açılan menüde ilk sıradaki Merkez ve bir noktadan geçen çember seçilir. Ardından grafikte önce B noktası sonra C noktası tıklanır. Böylece merkezi $B(-6,-1)$ olan ve $C(-2,0)$ noktasından geçen çember çizilmiş olur.

4. Adım: Üstteki araç çubuğunda 5. sıradaki simge bir kez daha tıklandığında açılan menüde dördüncü sıradaki Üç noktadan geçen çember seçilir. Ardından grafikte sırasıyla D, E ve F noktaları tıklanır. Böylece $D(0,-5)$, $E(4,-5)$ ve $F(2,-3)$ noktalarından geçen çember çizilmiş olur.



Alıştırmalar

1 Merkezi $M(3,-7)$ ve yarıçapı $r=6$ birim olan çemberin standart denklemini bulunuz.

2 Merkezi $M(-4,2)$ ve yarıçapı $r=5$ birim olan çember üzerindeki bir nokta $P(1,k)$ olduğuna göre k değerini bulunuz.

3 Merkezi $M(-2,-4)$ ve yarıçapı $r=\sqrt{13}$ birim olan çemberin y eksenini kestiği noktaların koordinatlarını bulunuz.

4 Merkezi $M(3,-2)$ olan ve $P(-1,-2)$ noktasından geçen çemberin standart denklemini bulunuz.

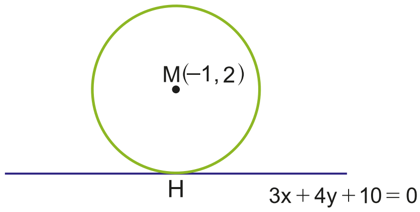
5 $A(1,-1)$ ve $B(3,9)$ olmak üzere $[AB]$ nı çap kabul eden çemberin standart denklemini bulunuz.

6 $A(5,0)$, $B(0,3)$ ve $O(0,0)$ noktalarından geçen çemberin standart denklemini bulunuz.

7 Merkezi x ekseni üzerinde olan ve x eksenini $A(-2,0)$ ve $B(6,0)$ noktalarında kesen çemberin standart denklemini bulunuz.

8 Merkezi $3x-y+8=0$ doğrusu üzerinde bulunan ve her iki eksene de analitik düzlemin III. bölgesinde teğet olan çemberin standart denklemini bulunuz.

9



Yukarıdaki şekilde merkezi $M(-1,2)$ olan çember $3x+4y+10=0$ doğrusuna H noktasında teğettir. Bu çemberin standart denklemini bulunuz.

10 $x^2+y^2-10x-12y+12=0$ denklemi bir çember belirtir mi? Çember belirtiyorsa merkezini ve yarıçapını bulunuz.

11 $x^2+y^2+4x-6y+13=0$
denklemi bir çember belirtir mi? Çember belirtiyorsa merkezini ve yarıçapını bulunuz.

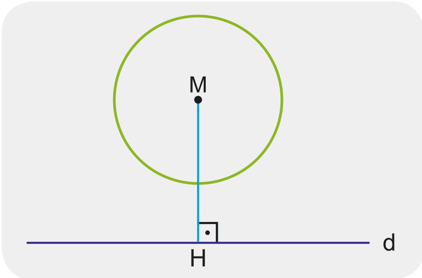
12 Genel denklemi $x^2+y^2-8x+6y+k=0$ olan çemberin yarıçapı $r=2\sqrt{5}$ birim olduğuna göre k değerini bulunuz.

13 $(k-2)x^2+(6-k)y^2-2kx+4y+6=0$
denklemi bir çember denklemi olduğuna göre bu çemberin merkezini ve yarıçapını bulunuz.

7.1.2. Denklemleri Verilen Doğru ile Çemberin Birbirine Göre Durumları

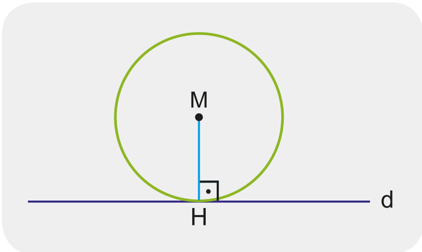
✓ Doğru ile çemberin birbirine göre durumları, çemberin merkezinin doğruya olan uzaklığına göre değerlendirilir. Herhangi bir d doğrusu ile merkezi M ve yarıçapı r olan çemberin birbirine göre üç durumu vardır.

I.



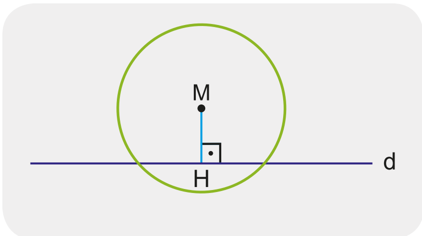
$|MH| > r$ ise doğru çemberi kesmez.

II.



$|MH| = r$ ise doğru çembere teğettir.

III.



$|MH| < r$ ise doğru çemberi iki noktada keser.

✓ Genel denklemi $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ olan çember ile $y = mx + n$ doğrusunun ortak çözümü yapılarak doğru ile çemberin birbirine göre durumları incelenir. Çember denkleminde y yerine $mx + n$ yazılarak $ax^2 + bx + c = 0$ biçiminde ikinci dereceden bir denklem elde edilir. Bu denklemin diskriminantı $\Delta = b^2 - 4ac$ olmak üzere

I. $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ise elde edilen denklemin kökü yoktur. Bu durumda doğru çemberi kesmez.

II. $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ise elde edilen denklemin çift katlı kökü vardır. Bu durumda doğru çembere teğettir. Denklemin kökü, doğrunun çembere teğet olduğu noktanın apsisidir.

III. $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ise elde edilen denklemin farklı iki kökü vardır. Bu durumda doğru çemberi iki noktada keser. Denklemin kökleri, doğru ile çemberin kesim noktalarının apsisleridir.

ÖRNEK

Denklemi $y = x + 2$ olan doğru ile $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ çemberinin birbirine göre durumunu belirleyiniz.

ÇÖZÜM

$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ çember denkleminde $D = -2$, $E = 4$ ve $F = -20$ olup çemberin merkezi

$$M\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) = M\left(-\frac{(-2)}{2}, -\frac{4}{2}\right) = M(1, -2)$$

yarıçapı

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 + 80} = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5 \text{ birim bulunur.}$$

Çemberin merkezinin $y = x + 2$ doğrusuna olan uzaklığı d birim olsun.
$y = x + 2$ doğrusunun denklemi $x - y + 2 = 0$ şeklinde yazılarak $M(1, -2)$ noktasının $x - y + 2 = 0$ doğrusuna olan uzaklığı

$$d = \frac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ birim bulunur.}$$

$d < r$ olduğundan doğru çemberi iki noktada kesmektedir.

ÖRNEK

$4x + 3y + 14 = 0$ doğrusu ile $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$ çemberinin birbirine göre durumunu belirleyiniz.

ÇÖZÜM

$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$ çemberinin merkezi

$$M\left(-\frac{4}{2}, -\frac{(-6)}{2}\right) = M(-2, 3)$$

yarıçapı

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 36 - 4 \cdot 4} = 3 \text{ birim olur.}$$

$M(-2, 3)$ noktasının $4x + 3y + 14 = 0$ doğrusuna olan uzaklığı d birim olsun.

$$d = \frac{|4 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 + 14|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|15|}{5} = 3 \text{ birim bulunur.}$$

$d = r$ olduğundan doğru çembere teğettir.

ÖRNEK

$4x + 3y + 24 = 0$ doğrusu ile $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$ çemberinin birbirine göre durumunu belirleyiniz.

ÇÖZÜM

$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$ çemberinin merkezi

$$M\left(-\frac{4}{2}, -\frac{(-6)}{2}\right) = M(-2, 3)$$

yarıçapı

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 36 - 4 \cdot 9} = 2 \text{ birim olur.}$$

$M(-2, 3)$ noktasının $4x + 3y + 24 = 0$ doğrusuna olan uzaklığı d birim olsun.

$$\begin{aligned} d &= \frac{|4 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 + 24|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \\ &= \frac{|25|}{5} \\ &= 5 \text{ birim bulunur.} \end{aligned}$$

$d = 5$ ve $r = 2$ olduğundan $d > r$ olur. Bu durumda doğru çemberi kesmez.

ÖRNEK

Denklemi $y = x - 1$ olan doğru ile $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 5 = 0$ çemberinin varsa kesim noktalarını bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2 + y^2 + 4x + 6y - 5 = 0$ çember denkleminde y yerine $x - 1$ yazılırsa

$$\begin{aligned} x^2 + (x-1)^2 + 4x + 6(x-1) - 5 &= 0 \\ x^2 + x^2 - 2x + 1 + 4x + 6x - 6 - 5 &= 0 \\ 2x^2 + 8x - 10 &= 0 \\ x^2 + 4x - 5 &= 0 \text{ denklemi elde edilir.} \end{aligned}$$

$a = 1$, $b = 4$ ve $c = -5$ olur. $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 36 > 0$ olduğundan doğru çemberi iki noktada kesmektedir.

$$\begin{aligned} x^2 + 4x - 5 = 0 &\Rightarrow (x+5) \cdot (x-1) = 0 \\ &\Rightarrow x = 1 \text{ veya } x = -5 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Bu değerler kesim noktalarının apsisleri olup ordinatları ise

$$x = -5 \Rightarrow y = -5 - 1 = -6 \qquad x = 1 \Rightarrow y = 1 - 1 = 0 \text{ bulunur.}$$

O hâlde çember ile doğrunun kesim noktaları $(-5, -6)$ ve $(1, 0)$ olur.

ÖRNEK

$5x + 12y + m = 0$ doğrusu $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$ çemberini kesmediğine göre m nin alabileceği en büyük negatif tam sayı değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$ çemberinin merkezi

$$M\left(-\frac{(-4)}{2}, -\frac{10}{2}\right) = M(2, -5)$$

yarıçapı

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 100 - 52} = 4 \text{ birim olur.}$$

Doğru çemberi kesmediğine göre çemberin merkezinin $5x + 12y + m = 0$ doğrusuna olan uzaklığı yarıçaptan büyük olmalıdır.

Merkezin doğruya uzaklığı d birim ise $d > r$ olmalıdır.

$$d > r \Rightarrow \frac{|5 \cdot 2 + 12 \cdot (-5) + m|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} > 4$$

$$\Rightarrow \frac{|m - 50|}{13} > 4$$

$$\Rightarrow |m - 50| > 52$$

$$\Rightarrow m - 50 > 52 \text{ veya } m - 50 < -52$$

$$\Rightarrow m > 102 \text{ veya } m < -2 \text{ olur.}$$

O hâlde m nin alabileceği en büyük negatif tam sayı değeri -3 olur.

ÖRNEK

$x^2 + y^2 = r^2$ çemberi ile $\sqrt{3} \cdot x - y - 7 = 0$ doğrusunun ortak noktası olmadığına göre çemberin yarıçapının alabileceği en büyük tam sayı değerinin kaç birim olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2 + y^2 = r^2$ çemberinin merkezi $M(0, 0)$ ve yarıçapı r birimdir.

Çember merkezinin $\sqrt{3} \cdot x - y - 7 = 0$ doğrusuna olan uzaklığı d birim ise $d > r$ olmalıdır.

$$d > r \Rightarrow \frac{|\sqrt{3} \cdot 0 - 0 - 7|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} > r$$

$$\Rightarrow \frac{|-7|}{2} > r$$

$$\Rightarrow \frac{7}{2} > r \text{ olur.}$$

Bu durumda r nin alabileceği en büyük tam sayı değeri 3 birim olur.

ÖRNEK

$3x + 4y + 3 = 0$ doğrusu ve $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$ çemberi veriliyor. Buna göre

a) Çemberin merkezinin doğruya olan uzaklığının kaç birim olduğunu bulunuz.

b) Çemberin doğruya <u>en yakın</u> noktasının doğruya olan uzaklığının kaç birim olduğunu bulunuz.

c) Çemberin doğruya <u>en uzak</u> noktasının doğruya olan uzaklığının kaç birim olduğunu bulunuz.

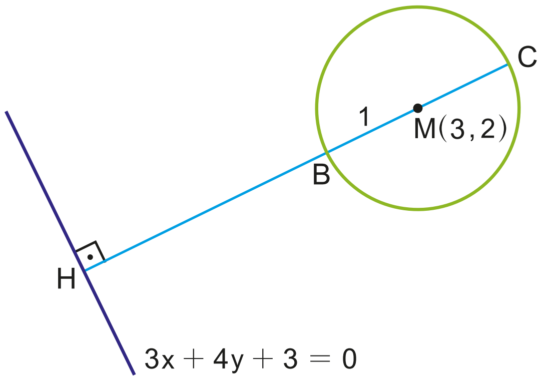
ÇÖZÜM

$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$ çemberinin merkezi

$$M\left(-\frac{(-6)}{2}, -\frac{(-4)}{2}\right) = M(3, 2)$$

yarıçapı

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 16 - 48} = 1 \text{ birim olur.}$$



a) Çemberin merkezinin doğruya olan uzaklığı $|HM|$ dur.

$$\begin{aligned} |HM| &= \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \\ &= \frac{20}{5} \\ &= 4 \text{ birim olur.} \end{aligned}$$

b) Şekilde görüldüğü gibi çemberin doğruya olan uzaklığının en küçük değeri $|HB|$ dur.

$$\begin{aligned} |HB| &= |HM| - |MB| \\ &= 4 - 1 \\ &= 3 \text{ birim bulunur.} \end{aligned}$$

c) Şekilde görüldüğü gibi çemberin doğruya olan uzaklığının en büyük değeri $|HC|$ dur.

$$\begin{aligned} |HC| &= |HM| + |MC| \\ &= 4 + 1 \\ &= 5 \text{ birim bulunur.} \end{aligned}$$

ÖRNEK

$x^2+y^2-4x-6y-3=0$ çemberinin, $x-y-6=0$, $x+y-1=0$ ve $x=6$ doğrularının grafiklerini Dinamik Geometri ve Matematik Yazılımı programında çiziniz ve doğrular ile çemberin birbirlerine göre durumlarını inceleyiniz, varsa kesim noktalarını bulunuz.

ÇÖZÜM

Dinamik Geometri ve Matematik Yazılımı programını açınız.

1. Adım: Giriş kısmına alttaki ekran klavyesini kullanarak verilen 4 denklemi de sırasıyla yazınız ve her seferinde enter tuşuna basınız. Grafikler ekrana gelecektir. Program, çembere c harfini, 1. doğruya f harfini, 2. doğruya g harfini ve 3. doğruya da h harfini otomatik olarak atar.

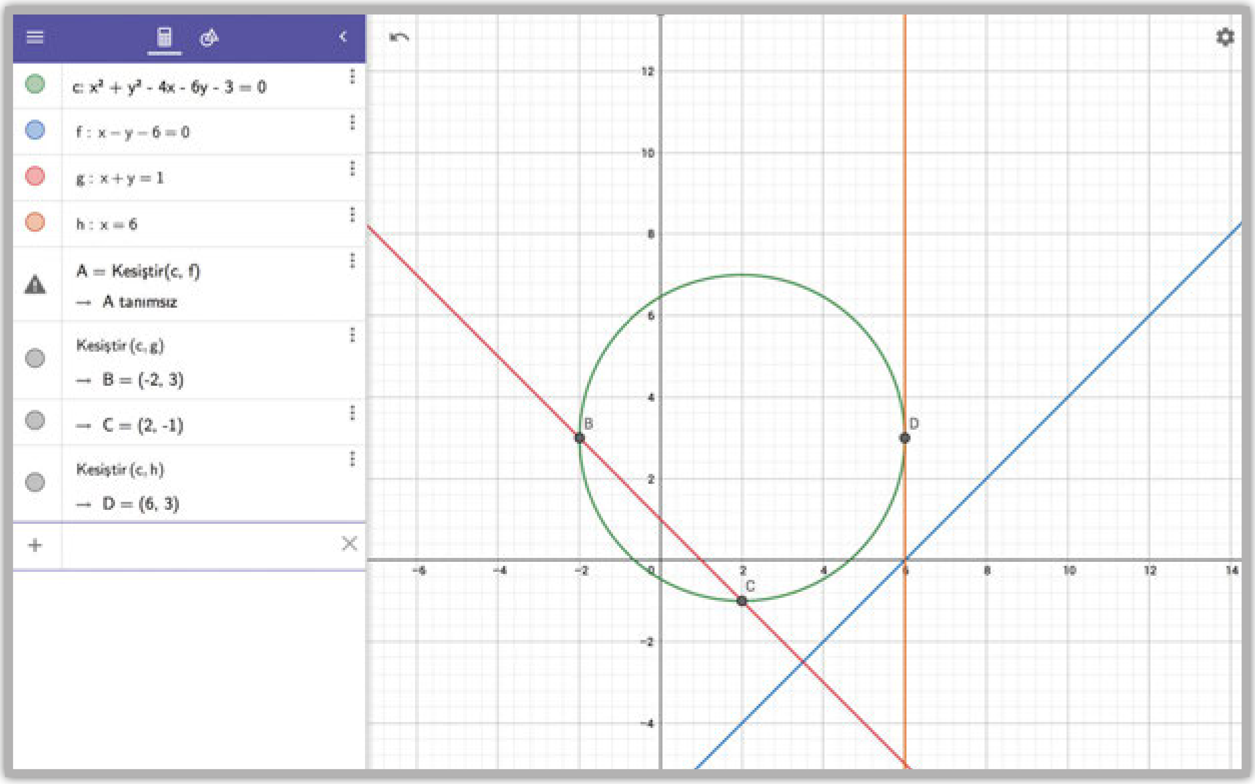
2. Adım: Ekrana gelen grafikler incelendiğinde 1. doğrunun çemberi kesmediği, 2. doğrunun çemberi 2 noktada kestiği ve 3. doğrunun ise çembere teğet olduğu görülür.

3. Adım: Doğrularla çemberin kesim noktalarını bulmak için giriş çubuğuna kesiştir yazıldığında açılan pencerede Kesiştir(< nesne > , < nesne >) seçilir.

Kesiştir(c , f) yazarsanız cebir penceresinde A tanımsız yazacaktır.
Buna göre 1. doğru ile çemberin kesim noktası yoktur.

Kesiştir(c , g) yazarsanız $B(-2,3)$ ve $C(2,-1)$ yazacaktır.
Buna göre 2. doğru çemberi bu noktalarda kesmektedir.

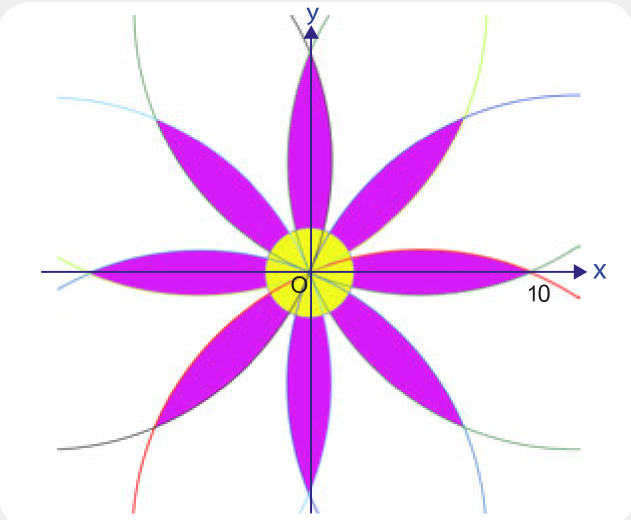
Kesiştir(c , h) yazarsanız $D(6,3)$ yazacaktır.
Buna göre 3. doğru çembere bu noktada teğettir.



ÖRNEK

Matematik öğretmeni Murat Bey, Yaşlılar Haftası'nda öğrencileri için düzenlediği huzurevi gezisinde huzurevi sakinlerinin kendilerine çiçek satın alınması yerine, öğrencilerin el emekleriyle hazırladığı çiçek resimlerini hediye etmelerinin onları daha çok mutlu ettiğini gözlemlemiştir. Bunun üzerine Murat Bey, öğrencilerinde hem manevi değerleri yaşatmak hem de derse olan ilgilerini artırmak adına tekrar bir ziyaret planlayarak okul öncesi öğretmeni Neslihan Hanım'a birlikte bir proje hazırlamayı teklif ediyor. Murat Bey, projesinde öğrencilerine çemberler kullandırarak koordinat sisteminde bir çiçek motifi oluşturacaktır. Öğrenciler oluşturdukları çiçek motifini beyaz kâğıtlara çıktı alıp Neslihan Hanım'a ileteceklerdir. Neslihan Hanım ise motifleri kendi öğrencilerine kestirip boyattıracaktır. Daha sonra Murat Bey ve Neslihan Hanım öğrencileri ile birlikte Yaşlılar Haftası'nda huzurevini ziyaret ederek büyüklerine saygı ve sevgilerini göstermek için kendi emekleriyle hazırladıkları çiçek motiflerini sunacaklardır.

Görsel 7.1



Murat Bey öğrencilerinden yandaki gibi bir motif oluşturmalarını istiyor. Bu motifte

- İç bölgesi sarıya boyanarak gösterilen merkezi orijinde ve yarıçapı 2 cm olan bir çember kullanılacaktır.
- Mor yaprakları oluşturan ve yarıçapları 13 cm olan 8 adet eş çember kullanılacaktır. Bu çemberlerden yayı kırmızı ile gösterilen çember x eksenini $x = 0$ ve $x = 10$ da kesecektir.

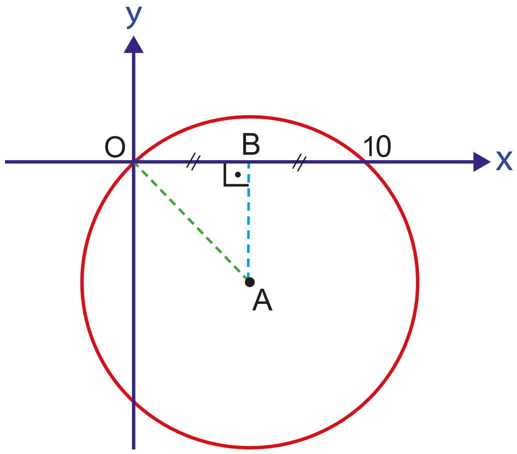
Murat Bey öğrencilerden aşağıdaki adımları sırasıyla uygulamalarını istiyor.

- Merkezdeki çemberin denklemi bulunur.
- Kırmızı yaylı çemberin denklemi bulunur.
- Bulunan son çemberin merkezinin x eksenine göre simetriğini merkez kabul eden ikinci çember denklemi bulunur.
- Bulunan iki çemberin de merkezlerinin y eksenine göre simetriğini merkez kabul eden iki çember denklemi daha elde edilir.
- Elde edilen dört çemberin her birinin merkezinin orijin etrafında pozitif yönde 90° döndürülmesiyle elde edilen 4 noktayı merkez kabul eden dört çember denklemi daha elde edilir.

Murat Bey öğrencilerinden bu adımları uyguladıktan sonra buldukları tüm çember denklemlerini Dinamik Geometri ve Matematik Yazılımı programını kullanarak çizmelerini söylüyor. Buna göre elde edilen çember denklemlerini bulunuz. Dinamik Geometri ve Matematik Yazılımı programındaki görüntüsünü oluşturunuz.

ÇÖZÜM

- Çiçeğin merkezindeki çemberin merkezi orijin ve yarıçapı 2 cm olduğundan denklemi
  $x^2 + y^2 = 4$ olur.

- 

Kırmızı çember yayının üzerinde bulunduğu çemberin merkezi A noktası ise $|OA| = 13$ cm ve $|OB| = 5$ cm olur. ABO dik üçgeninde Pisagor teoreminden $|AB| = 12$ cm bulunur.

O hâlde bu çemberin merkezi $A(5, -12)$ ve yarıçapı 13 cm olacağından çemberin denklemi

$$(x-5)^2 + (y+12)^2 = 169 \text{ olur.}$$

- Bir (x, y) noktasının x eksenine göre simetriği $(x, -y)$ olduğundan $(5, -12)$ noktasının x eksenine göre simetriği $(5, 12)$ olur. O hâlde $(5, 12)$ merkezli ikinci çemberin denklemi

$$(x-5)^2 + (y-12)^2 = 169 \text{ olur.}$$

- Bir (x, y) noktasının y eksenine göre simetriği $(-x, y)$ olduğundan $(5, -12)$ ve $(5, 12)$ noktalarının y eksenine göre simetriği $(-5, -12)$ ve $(-5, 12)$ olur. O hâlde $(-5, -12)$ ve $(-5, 12)$ merkezli çemberlerin denklemi

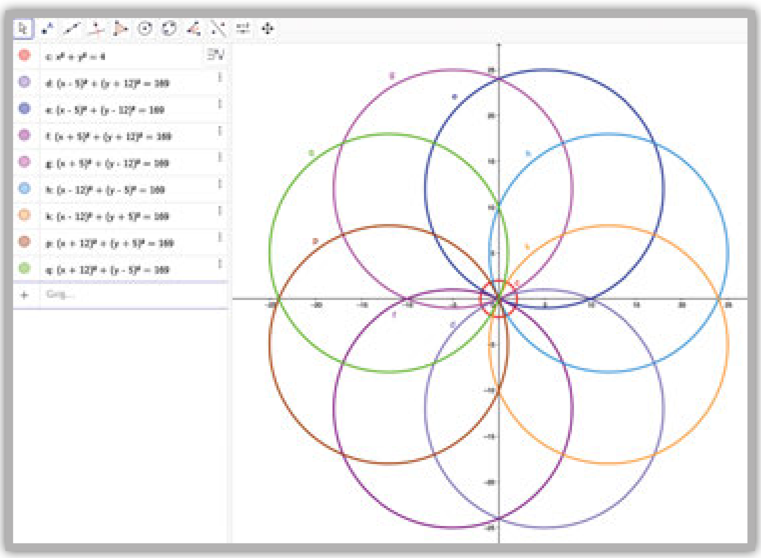
$$(x+5)^2 + (y+12)^2 = 169 \text{ ve } (x+5)^2 + (y-12)^2 = 169 \text{ olur.}$$

- Bir (x, y) noktasının orijin etrafında pozitif yönde 90° döndürülmesiyle elde edilen nokta $(-y, x)$ olduğundan $(5, -12)$, $(5, 12)$, $(-5, -12)$ ve $(-5, 12)$ noktalarının pozitif yönde 90° döndürülmesiyle elde edilen noktalar $(12, 5)$, $(-12, 5)$, $(12, -5)$ ve $(-12, -5)$ olur. O hâlde $(12, 5)$, $(-12, 5)$, $(12, -5)$ ve $(-12, -5)$ merkezli son 4 çemberin denklemi

$$(x-12)^2 + (y-5)^2 = 169 \qquad (x-12)^2 + (y+5)^2 = 169$$
$$(x+12)^2 + (y-5)^2 = 169 \qquad (x+12)^2 + (y+5)^2 = 169 \text{ olur.}$$

Dinamik Geometri ve Matematik Yazılımı programını açınız.

Elde edilen 9 tane çember denklemi giriş bölümüne tek tek yazılarak enter tuşuna basılırsa çemberler çizilir. Böylece yandaki görüntü ekrana gelir.



Alıştırmalar

1 $x=2$ doğrusunun $x^2+y^2-6x-2y=0$ çemberini kestiği noktaların ordinatlarını bulunuz.

2 $x^2+y^2+6x-8y-39=0$ çemberi ile $x-y-1=0$ doğrusunun varsa kesim noktalarını bulunuz.

3 $x^2+y^2+6x-8y+16=0$ çemberi ile $3x-4y+5=0$ doğrusunun varsa kesim noktalarını bulunuz.

4 $4x+3y+k=0$ doğrusu $x^2+y^2+4x-6y+4=0$ çemberine teğet olduğuna göre k pozitif tam sayısını bulunuz.

5 Merkezi $M(3,-2)$ olan ve $5x-12y-13=0$ doğrusuna teğet olan çemberin genel denklemini bulunuz.

6 $x^2+y^2+4x-8y+k=0$ çemberi ile $3x-4y+2=0$ doğrusunun yalnızca bir ortak noktası olduğuna göre k değerini bulunuz.

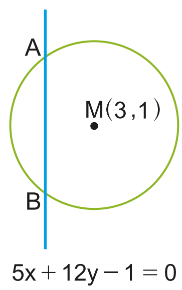
7 $3x+4y-57=0$ doğrusu $(x-1)^2+(y-1)^2=r^2$ çemberini iki noktada kestiğine göre r nin alabileceği <u>en küçük</u> tam sayı değerini bulunuz.

8 $y=x+1$ doğrusu $2x^2+2y^2+8x+7=0$ çemberine teğet olduğuna göre teğetin çembere değme noktasını bulunuz.

9 $x-y-1=0$ doğrusu $x^2+y^2+ax-ay-2=0$ çemberinin merkezinden geçtiğine göre bu çemberin çapının kaç birim olduğunu bulunuz.

10 Analitik düzlemde $y=x+\sqrt{2}\cdot k$ doğrusu $x^2+y^2=9$ çemberine teğet olduğuna göre k nın alabileceği pozitif değeri bulunuz.

11



Yukarıdaki şekilde $5x+12y-1=0$ doğrusu $M(3,1)$ merkezli çemberi A ve B noktalarında kesmektedir. $|AB|=6$ birim olduğuna göre bu çemberin standart denklemini bulunuz.

Ölçme ve Değerlendirme

A) 1-5. sorularda boş bırakılan yerlere uygun ifadeleri yazınız.

1. Analitik düzlemde sabit bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesine ....denir.

2. Analitik düzlemde $A(-6,4)$ ve $B(2,-6)$ noktalarından geçen ve $[AB]$ yi çap kabul eden çemberin merkezi................ olur.

3. $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ denkleminde $D^2+E^2-4\cdot F=0$ ise verilen denklem analitik düzlemde bir .... belirtir.

4. Analitik düzlemin II. bölgesinde eksenlere teğet ve yarıçapı 3 birim olan çemberin standart denklemi .... olur.

5. $x^2+y^2-2x+4ky+4k=0$ denklemi analitik düzlemde bir nokta belirttiğine göre k nin değeri .... olur.

B) 6. soruda numaralar ile verilen ifadeleri, harf ile verilen ifadelerle eşleştiriniz.

6. Aşağıda verilen çember denklemlerinin yarıçaplarını bularak harf ile verilen değerler ile eşleştiriniz.

I. $x^2+y^2-5x+6y+3=0$

II. $x^2+y^2+4x+3y-14=0$

III. $2x^2+2y^2-12x+16y+20=0$

IV. $x^2+y^2+14x-8y-56=0$

V. $3x^2+3y^2-21x-72y=0$

a) $\frac{9}{2}$

b) 11

c) $\frac{7}{2}$

ç) $\sqrt{11}$

d) $\sqrt{15}$

e) 5

f) $\frac{25}{2}$

I.	II.	III.	IV.	V.

C) 7-15. açık uçlu soruları cevaplandırınız.

7. $3x-4y+11=0$ doğrusuna teğet ve merkezi $M(2,-2)$ olan çemberin yarıçapı kaç birimdir?

8. Merkezi $M(4,7)$ ve x eksenine teğet olan çemberin denklemi nedir?

9. $y=x$ doğrusu $(x-1)^2+(y+5)^2=25$ çemberini A ve B noktalarında kestiğine göre A ve B noktalarının apsisleri toplamı kaçtır?

10. $x^2+y^2=r^2$ çemberi ile $2x-\sqrt{5}\cdot y-8=0$ doğrusunun ortak noktası olmadığına göre çemberin yarıçapının alabileceği <u>en büyük</u> tam sayı değeri kaç birimdir?

11. Analitik düzlemde $3x-4y+7=0$ doğrusu $(x-1)^2+(y-5)^2=20$ çemberini A ve B noktalarında kestiğine göre $|AB|$ kaç birimdir?

12 Analitik düzlemde denklemi $y = x + 4$ olan doğrunun, $(x-2)^2 + (y-6)^2 = 72$ çemberini kestiği noktalar nedir?

13 $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $4x^2 + (m-2)y^2 + 2mx - 16y = 0$ denklemi bir çember belirttiğine göre bu çemberin çapı kaç birimdir?

14 Merkezi $2x - y + 4 = 0$ doğrusu üzerinde bulunan 2 birim yarıçaplı çember $3x - 4y + 1 = 0$ doğrusuna teğettir. Bu çemberin merkezi analitik düzlemin II. bölgesinde olduğuna göre merkezi nedir?

15 Merkezi $M(-1, 4)$ olan ve $P(7, 5)$ noktasından geçen çemberin standart denklemi nedir?

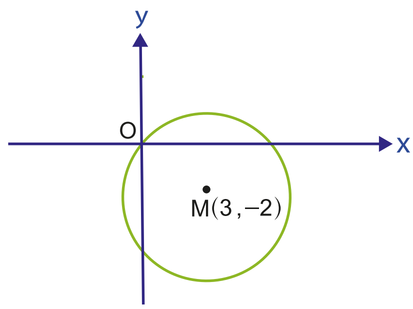
D) 16-29. çoktan seçmeli soruları çözünüz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

16 x eksenine teğet olan bir çemberin merkezi $x - y - 1 = 0$ doğrusu üzerindedir.

Buna göre bu çemberin denklemi aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$
B) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$
C) $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 4$
D) $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$
E) $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 16$

17



Analitik düzlemde verilen $M(3, -2)$ merkezli çember orijinden geçmektedir.

Buna göre çemberin standart denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

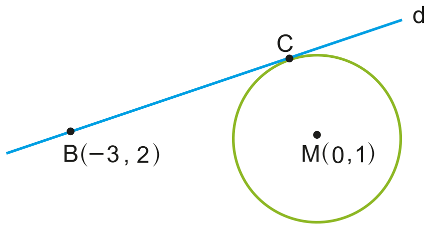
A) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = \sqrt{13}$
B) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 13$
C) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 13$
D) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 5$
E) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 13$

18 $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 25$

çemberinin x eksenini kestiği noktaların apsisleri toplamı kaçtır?

A) −4 B) −2 C) −1 D) 2 E) 3

19



Yukarıdaki şekilde $B(-3,2)$ noktasından geçen ve eğimi $m=1$ olan d doğrusu, C noktasında çembere teğettir.

Merkezi $M(0,1)$ olan çemberin genel denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2+y^2-2y-8=0$
B) $x^2+y^2+2y+7=0$
C) $x^2+y^2+2y-7=0$
D) $x^2+y^2-2y=0$
E) $x^2+y^2-2y-7=0$

20 $x^2+y^2+3ax-5by+9=0$ çemberinin merkezi $M(-3,10)$ dur.

Buna göre bu çemberin yarıçapı kaç birimdir?

A) 5 B) 6 C) 8 D) 9 E) 10

21 $3x+4y-36=0$ doğrusu eksenleri A ve B noktalarında kesmektedir.

[AB] nı çap kabul eden çemberin denklemi $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ olduğuna göre $a+b+r$ toplamı kaçtır?

A) 18 B) 16 C) 15 D) 14 E) 13

22 Merkezi koordinat sisteminin II. bölgesinde ve yarıçapı 4 birim olan çember eksenlere teğettir.

Buna göre bu çemberin standart denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(x+2)^2+(y-4)^2=16$
B) $(x-4)^2+(y+4)^2=16$
C) $(x-4)^2+(y-4)^2=16$
D) $(x+4)^2+(y-4)^2=16$
E) $(x+4)^2+(y+4)^2=16$

23 **$A(-3,4)$ ve $B(5,6)$ olmak üzere [AB] çaplı çemberin standart denklemi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(x-5)^2+(y-1)^2=15$
B) $(x-1)^2+(y-5)^2=17$
C) $(x-1)^2+(y-5)^2=15$
D) $(x+3)^2+(y-4)^2=17$
E) $(x-5)^2+(y-6)^2=17$

24 $3x-4y+3=0$ doğrusu, merkezi $M(2,1)$ olan bir çemberi A ve B noktalarında kesiyor.

$|MA|=\sqrt{5}$ birim olduğuna göre $|AB|$ kaç birimdir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

25 $(x-5)^2+(y-1)^2=9$

çemberi üzerindeki bir noktanın $A(-3,7)$ noktasına olan uzaklığı <u>en fazla</u> kaç birimdir?

A) 5 B) 7 C) 10 D) 13 E) 14

26 $3x^2+3y^2-6x+9y-12m+66=0$

denklemi bir çember belirttiğine göre m nin alabileceği en küçük pozitif tam sayı değeri kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

27 $2x^2+2y^2-mx+12y+(m-4)xy+2=0$

denklemi bir çember belirttiğine göre bu çemberin yarıçapı kaç birimdir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

28 $(m-2)x^2+2y^2+2mx-4y+2m=0$

$(n+3)x^2+4y^2-(n+7)x+8y+4n=0$

denklemleri birer çember belirtmektedir.

Buna göre bu çemberlerin merkezleri arasındaki uzaklık kaç birimdir?

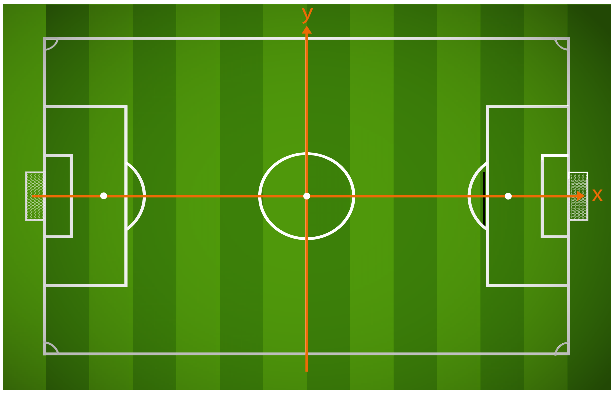
A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{7}$ C) $\sqrt{11}$ D) $2\sqrt{3}$ E) $\sqrt{13}$

29 $x^2+y^2-x+3y-5+n=0$

denklemi analitik düzlemde bir nokta belirttiğine göre n değeri kaçtır?

A) 6 B) $\frac{13}{2}$ C) 7 D) $\frac{15}{2}$ E) $\frac{17}{2}$

E) 30-32. üst düzey beceri sorularını şekle ve metne göre cevaplayınız.



Şekildeki futbol sahasının merkezinde çapı 18 metre olan bir çember bulunmaktadır. Sahanın merkezi 39 metre yatay olarak sağa ve sola ötelenerek ceza sahalarındaki penaltı noktası belirlenmiştir. Futbol sahası, merkezi orijin kabul edilerek analitik düzlemde 1 birim 1 metre olacak şekilde modellenmiştir. Buna göre;

30 Ceza sahasına penaltı noktasını merkez kabul eden 9 metre yarıçaplı çember yayları çizilmiştir. Bu yaylara ait çemberlerin denklemleri nedir?

31 Bir futbolcu $A(-2a,-a)$ noktasında bulunan topu $B\left(0,\frac{5a}{3}\right)$ noktasında bulunan takım arkadaşına atıyor. Top sahanın merkezindeki çembere teğet olacak şekilde doğrusal hareket ederek B noktasına ulaşıyor. Buna göre top hareket etmeden önce sahanın merkezine kaç metre uzaklıktadır?

32 Bir futbolcu topu yerden takım arkadaşına atıyor. Top $y=3x+n$ doğrusu boyunca hareket ediyor. Top eğer sahanın merkezindeki çemberin içinden geçerse çemberin içindeki rakip futbolcu topu kapabilecektir. Atılan pası rakip futbolcu kapamadığına göre n nin alabileceği en küçük pozitif tam sayı değeri kaçtır?

CEVAP ANAHTARI

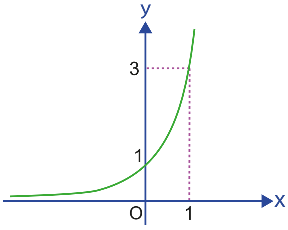
1. ÜSTEL VE LOGARİTMİK FONKSİYONLAR

Alıştırmalar (s. 20)

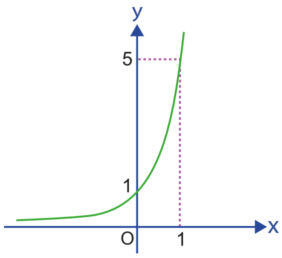
1. 9 2. 576 3. $\frac{3}{2}$

4. $f(1)=26$ ve $f(-3)=-\frac{2}{3}$

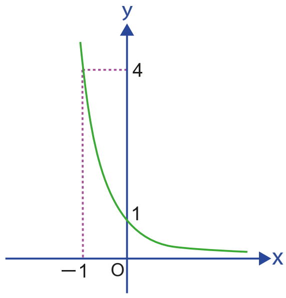
5. a)



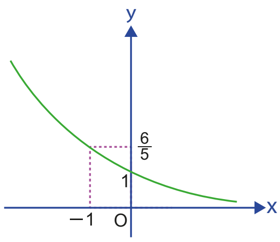
b)



c)



ç)



6. $c<b<a$

7. $Ç=(3,\infty)-\left\{\frac{13}{4}\right\}$

8. a) Üstel fonksiyon olmaz.
b) Üstel fonksiyon.
c) Üstel fonksiyon olmaz.
ç) Üstel fonksiyon olmaz.
d) Üstel fonksiyon.
e) Üstel fonksiyon.

Alıştırmalar (s. 39-40)

1. 0 2. $\frac{1}{3}$ 3. $x=\frac{y}{y-1}$

4. $\frac{3x+1}{x}$ 5. $3-2x$ 6. 13

7. 2 8. $a<c<b$ 9. 5^x+7

10. $(-\infty,2)\cup(7,\infty)$ veya $\mathbb{R}-[2,7]$

11. 6 12. 3 13. a 14. $x-2$

15. $\frac{2a-1}{a}$ 16. $\{0,1,2,3,4,5\}$

17. 3 18. $\frac{1}{2}$ 19. $\frac{2}{x}$ 20. e^2

21. $a=e^4+3$ 22. 28 23. 12

Alıştırmalar (s. 60-61)

1. a) $\{\log_2 6+7\}$ b) 2
c) $\{\log_{\frac{3}{2}} 12\}$ ç) $\{\log_4 3,\ \log_4 5\}$
d) $\{\ln\sqrt{3}\}$

2. a) $\left\{\frac{27}{4}\right\}$ b) 5 c) $\{1,\ 5\}$
ç) $\{4\}$ d) $\left\{-\frac{15}{32}\right\}$ e) $\left\{\frac{1}{25}\right\}$

3. $\{0,\log 2\}$ 4. 32 5. 4 6. 1

7. $\{1,10\,000\}$ 8. 2 9. 1 10. 16

11. a) $\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right)$ b) $[4,\infty)$
c) $[1,\infty)$ ç) $\left(\frac{1}{2},2\right)$
d) $[9,\infty)$ e) $\left[-\frac{1}{3},\infty\right)$
f) $\mathbb{R}-[2,3]$ g) $[6,11)$

12. 22 13. 6 14. 5 15. $(2,\infty)$

16. 8 17. $I=10^{-5}$ watt/m^2

18. $[H^+]=10^{-3}$ 19. $R=4,9$

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 1

A. Boşluk Doldurma

1. doğal 2. $(3,\infty)-\{4\}$
3. 82 4. 108 5. 1

B. Eşleştirme

6.

I. c	II. e	III. a	IV. g	V. b	VI. ç

C. Açık Uçlu

7. $-\frac{1}{6}$ 8. 30 9. e^2

10. $-\frac{2+x}{2+2x}$ 11. -1 12. $\sqrt{6}$

D. Çoktan Seçmeli

13. C 14. E 15. C 16. D 17. D
18. B 19. C 20. B 21. E 22. C
23. D 24. B 25. A 26. B 27. D
28. A 29. D 30. E 31. B 32. E

E. Üst Düzey Beceri Soruları

33. 810 34. $10\cdot 3^{4n}$ 35. 59 130

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 2

A. Boşluk Doldurma

1. 9 2. 2 3. 18 4. 10 100 5. 3

B. Eşleştirme

6.

I. d	II. c	III. f	IV. a	V. h	VI.b	VII.ç

C. Açık Uçlu

7. $\frac{3a}{6a-1}$ 8. 4 9. $(3,5)$

10. $\left(\frac{7}{2},\infty\right)$ 11. 3 12. $e^{\frac{1}{3}}$

D. Çoktan Seçmeli

13. B 14. A 15. D 16. B 17. A
18. E 19. E 20. D 21. E 22. D
23. A 24. C 25. C 26. E

E. Üst Düzey Beceri Soruları

27. 30 28. 15 29. 18

2. DİZİLER

Alıştırmalar (s. 78)

1. a) değil b) genel terim c) değil ç) genel terim d) değil
2. 22 3. $\frac{4}{3}$ 4. 156
5. $3n^2 - 3n + 4$ 6. 20 7. 3
8. 76 9. 24 10. 7

Alıştırmalar (s. 85)

1. $\sum_{k=1}^{40} (3k+2)$ 2. 10 3. 75
4. $\frac{8}{3}$ 5. 10 6. 13 7. 20
8. $\frac{5}{2}$ 9. 175 10. 33

Alıştırmalar (s. 91)

1. 5^{-2n+3} 2. 2^{13}
3. a) geometrik b) geometrik değil c) geometrik ç) geometrik değil d) geometrik değil
4. 2048 5. 3069 6. 11
7. 12 8. 63 9. 351

Alıştırmalar (s. 99)

1. 91 524 2. 30 000 3. 1240
4. 60 5. $10 \cdot 3^{60}$ 6. a) 102 b) 46 7. a) 100 b) 510

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A. Boşluk Doldurma

1. -1 2. $\frac{3}{2}$ 3. geometrik
4. sabit 5. 121

B. Eşleştirme

6.

I. d	II. ç	III. a	IV. f	V. c

C. Açık Uçlu

7. 49 8. 33 9. $\frac{17}{25}$ 10. 702
11. 25 12. 12 13. 74

D. Çoktan Seçmeli

14. B 15. E 16. B 17. C 18. B
19. A 20. B 21. E 22. A 23. B
24. A 25. B 26. B 27. A 28. D
29. D 30. B 31. D 32. B 33. A
34. D 35. A 36. D 37. B 38. A
39. B 40. E 41. B 42. A 43. E

E. Üst Düzey Beceri Soruları

44. Burak-9 45. 90 46. 95-3072
47. Ece-64 48. 510 49. 9210
50. 32 51. 1536

3. TRİGONOMETRİ

Alıştırmalar (s. 115-116)

1. $\frac{63}{65}$ 2. $-\frac{3\sqrt{58}}{58}$ 3. $\frac{7}{3}$
4. $\frac{2}{9}$ 5. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ 6. $\frac{1}{2}$
7. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ 8. $\frac{2\sqrt{15}+\sqrt{5}}{10}$ 9. 0
10. $2-\sqrt{3}$ 11. $\sqrt{3}$ 12. 3
13. 3 14. $-\frac{1}{3}$ 15. $\frac{3\pi}{4}$
16. -3 17. $\sqrt{2}$ 18. $\frac{16}{65}$ 19. $\frac{5}{13}$

Alıştırmalar (s. 125-126)

1. $\frac{24}{25}$ 2. $\frac{4}{5}$ 3. $\frac{1}{4}$
4. $-\cos 2x$ 5. $\sin x$ 6. 1
7. $-\frac{15}{16}$ 8. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 9. $-\frac{3}{5}$
10. $\sqrt{\frac{1-m}{2}}$ 11. $4\cos 16$ 12. -3
13. $2m^2-1$ 14. $\frac{2a}{1-a^2}$ 15. $\frac{4}{3}$
16. $\sqrt{2}$ 17. $\frac{3\sqrt{7}}{7}$ 18. $\tan^2 20$
19. $\frac{1}{5}$ 20. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 21. $-\frac{15}{8}$
22. $\frac{1}{2}$ 23. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ 24. 1200

Alıştırmalar (s. 137)

1. a) $Ç = \left\{x \mid x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \lor x = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
   b) $Ç = \left\{x \mid x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \lor x = -\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
   c) $Ç = \left\{x \mid x = \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi \lor x = -\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
   ç) $Ç = \left\{x \mid x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \lor x = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
   d) $Ç = \left\{x \mid x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
   e) $Ç = \left\{x \mid x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
2. a) $Ç = \left\{x \mid x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \pi \lor x = -\frac{\pi}{16} + \frac{k \cdot \pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
   b) $Ç = \left\{x \mid x = \frac{11\pi}{24} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
   c) $Ç = \left\{x \mid x = \frac{\pi}{18} + \frac{k \cdot 2\pi}{3} \lor x = -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
   ç) $Ç = \left\{x \mid x = \frac{k \cdot \pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
3. $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$
4. $\left\{\frac{\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{23\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}, \frac{35\pi}{18}\right\}$
5. 13.00 veya 21.00
6. $\left\{\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}\right\}$
7. $\left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right\}$
8. $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$
9. $\left\{x \mid x = \frac{\pi}{6} + \frac{k \cdot \pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
10. $\{90^\circ, 270^\circ\}$
11. $\left\{\frac{73\pi}{72}, \frac{97\pi}{72}\right\}$
12. $\left\{x \mid x = \frac{\pi}{12} + \frac{k \cdot \pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
13. $\{210^\circ, 330^\circ\}$
14. $\{31^\circ, 59^\circ\}$
15. $\varnothing$
16. $\{210^\circ, 270^\circ, 330^\circ\}$
17. $\left\{x \mid x = \frac{\pi}{4} + \frac{k \cdot \pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
18. $\left\{x \mid x = \frac{\pi}{20} + \frac{k \cdot \pi}{5} \lor x = \frac{\pi}{8} + \frac{k \cdot \pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 1

A. Boşluk Doldurma

1. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2. 240 3. $\frac{\sin 20}{2}$

4. 1 5. $\varnothing$ 6. $\cos 10°$

B. Eşleştirme

7.

I. ç	II. e	III. c	IV. b

C. Açık Uçlu

8. 7 9. $\frac{1}{8}$ 10. $\sqrt{1+m}$ 11. $\frac{\pi}{16}$

D. Çoktan Seçmeli

12. C 13. B 14. D 15. B 16. D
17. E 18. A 19. C 20. C 21. E

E. Üst Düzey Beceri Soruları

22. 20 23. $\frac{24}{7}$ 24. 36

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 2

A. Boşluk Doldurma

1. homojen 2. 10 3. 6 4. $\frac{3\pi}{4}$

B. Eşleştirme

5.

I. a	II. b	III. ç	IV. d

C. Açık Uçlu

6. 4 7. 2 8. $\frac{2ab}{a^2-b^2}$

9. $45°$ 10. $\frac{\pi}{24}$

D. Çoktan Seçmeli

11. C 12. B 13. A 14. A 15. B
16. C 17. D 18. B 19. E 20. A
21. E 22. B 23. B 24. D 25. E
26. C 27. B 28. D 29. D 30. B
31. A

E. Üst Düzey Beceri Soruları

32. $\frac{3}{2}$ 33. $\frac{1}{4}$ 34. $\frac{11}{9}$

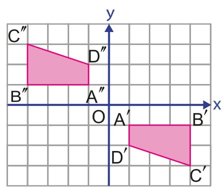
4. DÖNÜŞÜMLER

Alıştırmalar (s. 154)

1. $A'(-2,-1)$
2. -63
3. $A'(3,5)$, $B'(6,5)$, $C'(6,7)$
4. $A'(5,2)$, $B'(3,-2)$, $C'(7,0)$
5. $A'(1,1)$, $B'(-2,1)$, $C'(-3,-2)$
$D'(-1,-1)$, $E'(2,-2)$
6. $A'(-1,3)$
7. $B'(2,6)$
8. $C'(-6,-4)$
9. -1
10. $E'(0,2)$
11. $A'(-5,7)$, $B'(-5,4)$, $C'(-3,4)$
12. $A'(-\sqrt{3},-1)$
13. $B'\left(\frac{11}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Alıştırmalar (s. 170)

1. $A'(-4,5)$
2. 6
3. 2
4. $4x-3y-28=0$
5. 68
6. $A'\left(-\frac{14}{5},\frac{7}{5}\right)$
7. $5x-4y+42=0$
8.



9. $A''(2,-3)$
10. $(-5,3)$
11. $A''(6,-9)$, $B''(3,-4)$, $C''(1,-4)$
12. $(0,-4)$

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A. Boşluk Doldurma

1. $(-6,-2)$ 2. $(0,4)$ 3. $(3,0)$
4. $(-4,-1)$ 5. $(-2,-4)$

B. Eşleştirme

6.

I. e	II. b	III. g	IV. a	V. ç

C. Açık uçlu

7. $-15\sqrt{3}$
8. $(8,\sqrt{3})$, $(-2,-3\sqrt{3})$
9. $(-3,-5)$
10. $(5,7)$
11. $(5,-2)$

D. Çoktan Seçmeli Sorular

12. A 13. B 14. C 15. D 16. C
17. B 18. C 19. D 20. B 21. E
22. C 23. E

E. Üst Düzey Beceri Soruları

24. D 25. C 26. 23 27. 2 28. 5

5. TÜREV

Alıştırmalar (s. 184)

1. $x \to 5^+$ 2. $x \to -3^-$
3. $x \to 4^+$ 4. 2
5. Yoktur 6. 4
7. $\lim_{x\to 1} f(x) = -1$ $\lim_{x\to -1} f(x) = -2$
8. a) -1 b) 1 c) Yoktur
ç) 2 d) 2 e) 2
f) 3 g) 4 h) Yoktur
i) 0 j) 0 k) 0

Alıştırmalar (s. 201-202)

1. 13 2. 0 3. -3 4. $b-5$ 5. 1

6. a) 0 b) 0 c) 2 ç) 6 d) 24 e) 120

7. 0 8. $\frac{1}{8}$ 9. 12

10. $-\sqrt{2}-1$ 11. 2e 12. $-\frac{1}{7}$

13. $-6t^5$ 14. a) 3 b) 1 c) 4

15. a) 4 b) 39 c) 197 ç) 0

16. a) 3 b) -2 c) 5 ç) 3

Alıştırmalar (s. 212)

1. a) $-2, -1, 1, 2$ b) 1 , 2

2. $-1, 1, 4$ 3. 2 4. 2

5. -1 6. $\frac{8}{3}$ 7. 9

Alıştırmalar (s. 226)

1. a) 6m/sn. b) 7m/sn.

2. 1 3. 7 km/sa. 4. -3

5. 3 6. 24 7. $\frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4}$

8. $-\frac{3}{x^3}$ 9. $5x^4$ 10. 189

11. $(-3,162)$ 12. -2 13. 2

Alıştırmalar (s. 242-243)

1. a) $-1, 1, 2, 3, 4$ b) 2, 4 c) 2, 3, 4

2. $-\frac{1}{3}$ 3. 1 4. $\frac{9}{2}$ 5. $\frac{2}{9}$ 6. 6

7. a) $2x-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$ b) $\frac{3\sqrt{x}}{2}$ c) $\frac{5\sqrt{x^3}}{2}$ ç) $-\frac{1}{x^2}$

8.43 9. $3x^2+12x+11$ 10. -1

11. $6x(x^2-3)^2$ 12. $\frac{41}{18}$

13. -23 14. 12 15. $2u-2$

16. a) 16 b) 3 c) 0 ç) 1 d) -33 e) 540

17. $2a=17b$ 18. 3 19. 4

Alıştırmalar (s. 252)

1. a) $+$ b) $+$ c) $-$ ç) $-$ d) $-$ e) $-$

2. $[2,\infty)$ 3. $\left[-\frac{2}{3},1\right]$

4. $\left[0,\frac{3}{4}\right]$ 5. $[-4,-1]$

6. a) artan b) azalan c) artan

Alıştırmalar (s. 263)

1. a) $-2, 1, 4$ b) $-4, -1, 3$ c) -3 ç) 4

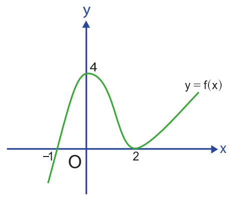
2. $\left(\frac{1}{3},-\frac{46}{27}\right)$ ve $(1,-2)$

3. 2 4. $(1,-6)$

5. -22 6. a) -4, 3 b) 1

Alıştırmalar (s. 272)

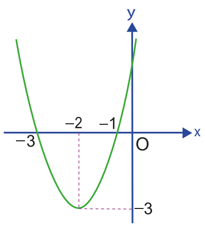
1.



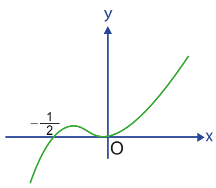
2. -4

3. 1

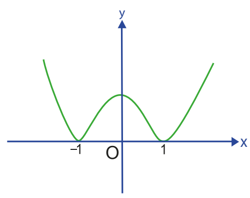
4.



5.



6.



7. 8

8. 11

Alıştırmalar (s. 282)

1. 9 2. $\frac{49}{2}$ 3. 1 4. $\frac{147}{2}$

5. $\frac{7}{8}$ 6. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 7. 11

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 1

A. Boşluk Doldurma

1. yoktur 2. 2 3. süreklidir

4. artan 5. 0

B. Eşleştirme

6.

I. ç	II. f	III. a	IV. e	V. g	VI. b

C. Açık Uçlu

7. 5 8. 10 9. 7

10. 21 11. 0 12. $\frac{259}{2}$

13. -2 14. $\frac{8}{3}$ 15. 7

D. Çoktan Seçmeli

16. C 17. E 18. E 19. E

20. D 21. D 22. C 23. C

24. A 25. C 26. D 27. A

28. C 29. A 30. B 31. A

E. Üst Düzey Beceri Soruları

32. 1 ve 3 33. 5 ve $\frac{19}{3}$ 34. $\frac{20}{21}$

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 2

A. Boşluk Doldurma

1. sürekli 2. türevi 3. kırılma

4. yerel minimum 5. türevinin

B. Eşleştirme

6.

I. c	II. a	III. a	IV. e	V. h	VI. f	VII. b

C. Açık Uçlu

7. -3 8. 63 9. $\frac{1}{3}$
10. 5 11. -2 12. -6
13. 12 14. -4 15. 3
16. 2 17. 1

D. Çoktan Seçmeli

18. D 19. D 20. A 21. A
22. C 23. B 24. B 25. D
26. D 27. D 28. E 29. B
30. C 31. A 32. D

E. Üst Düzey Beceri Soruları

33. $\frac{35}{3}$ 34. $\frac{25}{3}$

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 3

A. Boşluk Doldurma

1. limiti 2. türevi
3. sürekli 4. türevi
5. yerel maksimum 6. azalan

B. Eşleştirme

7.

I. ç	II. a	III. e	IV. f	V. b

C. Açık Uçlu

8. $-\frac{3}{5}$ 9. $-\frac{1}{2}$ 10. 1
11. $\mathbb{R}-\{-2,-1,2\}$ 12. 27
13. 1 14. -9 15. $-\frac{5}{3}$
16. 27 17. 14

D. Çoktan Seçmeli

18. E 19. B 20. E 21. D
22. D 23. D 24. D 25. C
26. E 27. D 28. E 29. C

E. Üst Düzey Beceri Soruları

30. 20 31. 32 000 32. 12 000

6. İNTEGRAL

Alıştırmalar (s. 304)

1. 6
2. 16
3. $-\frac{9}{8}$
4. $\frac{3\sqrt[3]{x^7}}{7}-2\sqrt{x}+c$
5. $\frac{2\sqrt{t^5}}{5}-\frac{2\sqrt{t^3}}{3}+c$
6. 5
7. $3x^4+4x^3+6x^2+12x+c$
8. $-\frac{5}{3}$
9. 6
10. 9

Alıştırmalar (s. 311)

1. $\frac{3x^2-1}{2\sqrt{x^3-x}}dx$
2. $\frac{(x+2)^5}{5}+c$
3. $\frac{(x^2-1)^6}{12}+c$
4. $\frac{(x^3-27)^2}{6}+c$
5. $\frac{2\sqrt{(3x+2)^3}}{9}+c$
6. $\frac{(3x+2)^4}{12}+c$
7. $-\frac{1}{10(5x-1)^2}+c$
8. $\frac{1}{2-x}+c$
9. $\sqrt{2x+1}+c$
10. $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+2x+2)^3}+c$
11. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+c$
12. $-f\left(\frac{1}{x}\right)+c$

Alıştırmalar (s. 335-336)

1. 96 2. 13 3. $\frac{65}{12}$
4. $\frac{14}{3}$ 5. $-\frac{1}{2}$ 6. 1
7. a) 192 b) 368 c) 272
8. 5 9. 724 10. -175
11. 999 12. 26 13. $\frac{5}{2}$
14. 12 15. 3 16. $-\frac{32}{3}$

Alıştırmalar (s. 350-351)

1. $\frac{13}{4}$ 2. 18 3. 12 4. $\frac{16}{3}$
5. $\frac{8}{3}$ 6. $\frac{8}{9}$ 7. -5 8. $\frac{5}{9}$
9. 20 10. a) $\frac{15}{4}$ b) $\frac{19}{4}$ c) $-\frac{1}{2}$
11. A_2-A_1
12. $\int_a^b f(x)\,dx-\int_b^c f(x)\,dx$

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 1

A. Boşluk Doldurma

1. diferansiyeli
2. değişken değiştirme
3. x^2+2
4. belirli

B. Eşleştirme

5.

I. ç	II. a	III. e	IV. b	V. d	VI. g

C. Açık Uçlu

6. $\frac{(x^2+2x-1)^4}{8}+c$
7. $\frac{343}{9}$
8. $\frac{f(x)}{x}+c$
9. $-\frac{f(1-x^2)}{2}+c$
10. $\frac{1}{x-x^3}+c$
11. 9

D. Çoktan Seçmeli

12. D 13. A 14. E 15. B 16. D
17. B 18. C 19. A 20. B 21. D
22. D 23. C 24. C 25. B 26. C
27. C 28. A 29. D 30. C 31. B
32. C 33. D 34. C 35. E 36. A
37. D 38. A 39. C 40. E 41. C
42. C 43. A 44. C 45. E

E. Üst Düzey Beceri Soruları

46. 608 47. 672 48. 4864-5376
49. 880 TL 50. 52 800 TL

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME 2

A. Boşluk Doldurma

1. Riemann
2. $\int_a^b |f(x)|dx$
3. integrallerinin
4. $\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$

B. Eşleştirme

5.

I. f	II. a	III. ç	IV. b	V. g

C. Açık Uçlu

6. $\frac{f^2(x^2)}{4}+c$
7. $\frac{-1}{2(x^2-3x)^2}+c$
8. $2f(\sqrt{x})+c$
9. $\frac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)}+c$
10. $\int_0^a f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$
11. 34

D. Çoktan Seçmeli

12. D 13. A 14. A 15. A 16. D
17. C 18. A 19. A 20. C 21. E
22. D 23. E 24. B 25. E 26. B
27. D 28. B 29. B 30. A 31. B
32. B 33. D 34. D 35. E 36. C

E. Üst Düzey Beceri Soruları

37. 41 38. 164

7. ANALİTİK GEOMETRİ

Alıştırmalar (s. 377)

1. $(x-3)^2+(y+7)^2=36$
2. 2
3. $(0,-1),(0,-7)$
4. $(x-3)^2+(y+2)^2=16$
5. $(x-2)^2+(y-4)^2=26$
6. $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{17}{2}$
7. $(x-2)^2+y^2=16$
8. $(x+4)^2+(y+4)^2=16$
9. $(x+1)^2+(y-2)^2=9$
10. $M(5,6),\ r=7$
11. Nokta Belirtir.
12. 5
13. $M(2,-1),\ r=\sqrt{2}$

Alıştırmalar (s. 386)

1. $y=-2, y=4$
2. $(-3,-4),(5,4)$
3. kesim noktası yok
4. 14
5. $x^2+y^2-6x+4y+9=0$
6. 4
7. 11
8. $\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$
9. $\sqrt{10}$
10. 3
11. $(x-3)^2+(y-1)^2=13$

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A. Boşluk Doldurma

1. Çember
2. $(-2,-1)$
3. Nokta
4. $(x+3)^2+(y-3)^2=9$
5. $\frac{1}{2}$

B. Eşleştirme

6.

I. c	II. a	III. d	IV. b	V. f

C. Açık Uçlu

7. 5 8. $(x-4)^2+(y-7)^2=49$
9. -4 10. 2 11. 8
12. $(8,12)$ ve $(-4,0)$ 13. 5
14. $(-1,2)$
15. $(x+1)^2+(y-4)^2=65$

D. Çoktan Seçmeli

16. E 17. C 18. A 19. E 20. E
21. A 22. D 23. B 24. B 25. D
26. C 27. A 28. E 29. D

E. Üst Düzey Beceri Soruları

30. $(x+39)^2+y^2=81$
$(x-39)^2+y^2=81$
31. $9\sqrt{5}$ 32. 29

SÖZLÜK

A

analitik düzlem : Dik kesişen iki doğru üzerine koordinat sistemi yerleştirilmiş düzlem.
anlık hız : Bir hareketlinin hareket süresinin belirli bir anındaki hızı.
aralık : Verilen iki gerçek sayı arasındaki bütün gerçek sayıları kapsayan küme.
aritmetik dizi : Ardışık terimleri arasındaki farkın sabit olduğu dizi.
aritmetik ortalama : Verilen sayı dizisindeki terimlerin toplamının, terim sayısına bölünmesiyle elde edilen değer.
artan fonksiyon : Gerçek değişkenli bir fonksiyonda bağımsız değişken artarken bunların görüntülerini de arttıran fonksiyon.
azalan fonksiyon : Gerçek değişkenli bir fonksiyonda bağımsız değişken artarken bunların görüntülerini azaltan fonksiyon.

B

belirli integral : Alt ve üst sınırları olan integral.
belirsiz integral : Türevi bilinen bir fonksiyonun aslını bulma işlemi.
bire bir fonksiyon : Tanım kümesindeki her bir elemanı, değer kümesinin farklı elemanlarına eşleyen fonksiyon.
birim : Bir niceliği ölçmek için kendi cinsinden örnek seçilen değişmez parça.
birim çember : Düzlemde sabit bir noktadan 1 birim uzaklıkta olan noktaların kümesi.
birimkare : Alanının hesaplanmasında kullanılan uzunlukların birimi cm, m vb. birimlerle ifade edilmiş bölgelerin alan ölçü birimi.

Ç

çap : Uç noktaları çemberin çevresi üzerinde bulunan ve çemberin merkezinden geçen doğru parçası.
çember : Düzlemde sabit bir noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesi.
çözüm kümesi : Denklemi ya da eşitsizliği sağlayan değerlerin kümesi.

D

değişken : Değişik sayı değerleri alabilen nicelik.
denklem : İçinde yer alan bazı niceliklere ancak uygun bir değer verildiği zaman sağlanabilen eşitlik.
denklemin çözüm kümesi : Bir denklemi sağlayan sayıların oluşturduğu küme.
diskriminant : $ax^2 + bx + c = 0$ ikinci derece denkleminde $\Delta = b^2 - 4ac$ ifadesi.
doğrusal : Aynı doğruya ait olan.
dönme açısı : Bir şeklin dönme merkezi etrafında döndürüldüğü açı.
dönüşüm : Dönme, öteleme ve yansıma gibi işlemler.

E

eğim : Analitik düzlemde bir doğrunun x ekseni ile yapmış olduğu pozitif yönlü açının tanjantı.
eğim açısı : Düzlemde bir doğrunun x ekseni ile yaptığı pozitif yönlü açı.
eksen : Koordinat sisteminde yatay ve dikey olan doğrulardan her biri.
ekstremum nokta : Fonksiyonun en büyük ve en küçük değerlerini aldığı noktaların her biri.
esas ölçü : Bir açının ölçüsüne, derece cinsinden $[0^\circ, 360^\circ)$ nda ya da radyan cinsinden $[0, 2\pi)$ nda karşılık gelen değer.
eşitsizlik sistemi : En az iki eşitsizliğin meydana getirdiği sistem.

F

fonksiyonun değer kümesi : $f: A \to B$ ifadesinde, B kümesi.
fonksiyonun görüntü kümesi : $f: A \to B$ ifadesinde, A kümesinin elemanları ile eşleşmiş olan elemanların oluşturduğu küme, f(A) kümesi.
fonksiyonun tanım kümesi : $f: A \to B$ ifadesinde, A kümesi.

G

geometrik dizi : Ardışık terimleri arasındaki oranı sabit olan dizi.
grafik : Değişkenler arasındaki ilişkiyi göstermeye yarayan çizgisel anlatım şekli.

İ

integral : Türevi bilinen bir fonksiyonu bulma işlemi.
integral sabiti : İntegral bulunduktan sonra fonksiyona eklenen c sabit sayısı.

L

limit : Değişken bir niceliğin istenilene çok yakın olarak yaklaştığı bir başka nicelik.
logaritmik denklem : Bilinmeyen içeren logaritmalı eşitlik.

M

maksimum değer : Sürekli bir fonksiyonun bir aralıkta aldığı en büyük değer.
maksimum nokta : Sürekli bir fonksiyonun bir aralıkta en büyük değerini aldığı nokta.
minimum değer : Sürekli bir fonksiyonun bir aralıkta aldığı en küçük değer.
minimum nokta : Sürekli bir fonksiyonun bir aralıkta en küçük değerini aldığı nokta.
mutlak maksimum değer : Sürekli bir fonksiyonun en büyük değeri.
mutlak maksimum nokta : Sürekli bir fonksiyonun en büyük değerini aldığı nokta.
mutlak minimum değer : Sürekli bir fonksiyonun en küçük değeri.
mutlak maksimum nokta : Sürekli bir fonksiyonun en küçük değerini aldığı nokta.

N

negatif yön : Saatin dönme yönü.

O

orijin : Koordinat eksenlerinin kesiştikleri nokta, başlangıç noktası.

Ö

öteleme dönüşümü : Analitik düzlemde verilen bir noktanın belli bir doğrultuda ve belli bir yönde yer değiştirmesi.

P

parabol : İkinci dereceden bir fonksiyonun grafiği.
pozitif yön : Saatin dönme yönünün tersi.

S

sabit dizi : Bütün terimleri birbirine eşit olan dizi.
simetri ekseni : Simetri dönüşümünün tanımlandığı parametre olarak alınan doğru.
süreklilik : Bir fonksiyonun x_o noktasındaki limiti ile o noktadaki görüntüsünün eşit olması.

T

teğet : Bir eğrinin yanından geçen ve ona ancak bir noktada değen doğru.
teorem : Kanıtlanabilen bilimsel önerme.
trigonometrik denklem : Trigonometrik fonksiyon içeren denklem.
türevlenebilir fonksiyon : Tanım kümesindeki her (a, b) nın her noktasında türevi tanımlı olan bir fonksiyon.

Ü

üstel denklem : Bilinmeyenin üs olarak bulunduğu denklem.

Y

yarıçap : Çemberin herhangi bir noktasıyla merkezini birleştiren doğru parçası.
yay : Çember parçası.
yerel ekstremum : Bir fonksiyonun sürekli olduğu belli aralıktaki en büyük veya en küçük değeri.
yönlü açı : Yönü pozitif ya da negatif olan açı.

KAYNAKÇA

- Argün, Z., Arıkan, A., Bulut, S., & Halıcıoğlu, S. (2014). Temel Matematik Kavramların Künyesi. Gazi Kitabevi.
- Eliot, J. O., & Young, F. C. (1959). Half Lives of N16, Mg27, Al28, S37, and Rh104m2. Nuclear Science and Engineering, 55-56.
- Gölcük, Ş., & Yurdagür, M. (1996). İslam Ansiklopedisi. Gelenbevi İsmail Efendi (s. 552-555).
- Kılıçkaya, S. (1996). Temel Fizik. (A. CEMALCILAR, Dü.) Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Açıköğretim Fakültesi Yayınları.
- MEB. (2018). Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı. Ankara.
- Meydan Larousse Büyük Lûgat ve Ansiklopedisi. (1992). Jonh Napier (Cilt 9, s. 220).
- Oral, H. (2003-I). Salih Zeki. Matematik Dünyası, 46-49.
- Sertöz, S. (2017). Matematiğin Aydınlık Dünyası. TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları.
- TDK Türkçe Sözlük. (2011). Ankara : TDK Yayınları.
- TDK Yazım Kılavuzu. (2012). Ankara: TDK Yayınları.
- Zill, D., & Warren, W. (2013). Matematik Cilt 1 (Calculus) Dördüncü Basımdan Çeviri. (İ. N. Cangül, & M. Demirci, Dü)

GENEL AĞ KAYNAKÇASI

- http://www.bilimgenc.tubitak.gov.tr/makale/richter-olcegi-nedir (Erişim Tarihi: 17.08.2017 Erişim saati: 09.20)
- http://www.eba.gov.tr/video/izle/939959072782c4df04544bc5c7dbab4c009792d09c001 (Erişim Tarihi: 03.10.2017 Erişim saati: 11.09)
- http://www.ekmekisrafetme.com/Pages/GenelBilgiler/ArastirmaSonuclari2013.aspx (Erişim Tarihi: 05.10.2017 Erişim saati: 10.26)
- http://www.eba.gov.tr/video/izle/92419182d55fe4c7d4f89a8b3aa1e1f5c6150295c2005 (Erişim Tarihi: 19.10.2017 Erişim saati: 15.04)
- http://matematik.dpu.edu.tr/index/sayfa/3128/augustin-louis-cauchy (Erişim Tarihi: 15.12.2017 Erişim saati: 10.48)

GÖRSEL KAYNAKÇA

- Görsel 1.1: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
- Görsel 1.2: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
- Görsel 1.3: www.dreamstime.com/id:23117622 (Erişim Tarihi: 15.10.2017 Erişim saati: 14.10)
- Görsel 1.4: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
- Görsel 1.5: www.dreamstime.com/id:22180196 (Erişim Tarihi: 16.10.2017 Erişim saati: 15.18)
- Görsel 1.6: Görsel tasarım uzmanı tarafından tasarlanmıştır.
- Görsel 1.7: www.dreamstime.com/id: 23831336 (Erişim Tarihi: 16.10.2017 Erişim saati: 14.02)
- Görsel 1.8: www.dreamstime.com/id: 45282683 (Erişim Tarihi: 18.10.2017 Erişim saati: 10.30)
- Görsel 1.9: www.shutterstock.com/id: 342546543 (Erişim Tarihi: 16.01.2018 Erişim saati: 12.08)
- Görsel 1.10: www.shutterstock.com/id: 34733578 (Erişim Tarihi: 23.10.2017 Erişim saati: 14.48)
- Görsel 1.11: www.shutterstock.com/id: 665162773 (Erişim Tarihi: 16.01.2018 Erişim saati: 12.46)
- Görsel 1.12: www.ekmekisrafetme.com/Pages/Afisler.aspx (Erişim Tarihi: 05.10.2017 Erişim saati: 10.26)
- Görsel 2.1: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
- Görsel 2.2: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
- Görsel 2.3: www.shutterstock.com/id: 572417176 (Erişim Tarihi: 11.12.2017 Erişim saati: 23.27)
- Görsel 2.4: www.shutterstock.com/id: 162235565 (Erişim Tarihi: 11.12.2017 Erişim saati: 23.19)
- Görsel 2.5: www.dreamstime.com/id:48417592 (Erişim Tarihi: 13.10.2017 Erişim saati: 12.24)
- Görsel 2.6: www.shutterstock.com/id: 96622405 (Erişim Tarihi: 11.12.2017 Erişim saati: 23.27)
- Görsel 2.7: www.shutterstock.com/id: 178560245 (Erişim Tarihi: 11.12.2017 Erişim saati: 23.17)
- Görsel 2.8: www.shutterstock.com/id: 10200314 (Erişim Tarihi: 11.12.2017 Erişim saati: 23.34)
- Görsel 3.1: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
- Görsel 4.1: Komisyon tarafından çekilmiştir.
- Görsel 4.2: www.shutterstock.com/id: 572417176 (Erişim Tarihi: 11.12.2017 Erişim saati: 23.27)
- Görsel 4.2: www.shutterstock.com/id: 586088327 (Erişim Tarihi: 30.01.2018 Erişim saati: 14.00)
- Görsel 4.2: www.shutterstock.com/id: 715570216 (Erişim Tarihi: 30.01.2018 Erişim saati: 14.00)
- Görsel 4.2: www.shutterstock.com/id: 768704323 (Erişim Tarihi: 11.12.2017 Erişim saati: 06.50)
- Görsel 4.2: www.shutterstock.com/id: 593539979 (Erişim Tarihi: 11.12.2017 Erişim saati: 06.46)
- Görsel 4.2: www.shutterstock.com/id: 577733086 (Erişim Tarihi: 30.01.2018 Erişim saati: 14.07)
- Görsel 5.1: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
- Görsel 5.2: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
- Görsel 5.3: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
- Görsel 5.4: www.shutterstock.com/id: 100721623 (Erişim Tarihi: 18.01.2018 Erişim saati: 16.38)
- Görsel 5.5: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
- Görsel 5.6: www.shutterstock.com/id: 2701861 (Erişim Tarihi: 19.01.2018 Erişim saati: 15.42)
- Görsel 5.7: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
- Görsel 5.8: Görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.
- Görsel 5.9: www.shutterstock.com/id: 591103229 (Erişim Tarihi: 25.12.2017 Erişim saati: 15.29)
- Görsel 7.1: Görsel tasarım uzmanı tarafından tasarlanmıştır.

GRAFİK TASARIM UZMANI TARAFINDAN ÇİZİLEN ŞEKİLLERİN SAYFA NUMARALARI VE SAYILARI

17 (2 Şekil)	18 (1 Şekil)	20 (1 Şekil)	23 (1 Şekil)	24 (1 Şekil)	25 (2 Şekil)
26 (2 Şekil)	27 (2 Şekil)	31 (2 Şekil)	39 (1 Şekil)	40 (1 Şekil)	49 (1 Şekil)
50 (1 Şekil)	51 (1 Şekil)	63 (1 Şekil)	64 (1 Şekil)	70 (4 Şekil)	77 (2 Şekil)
98 (6 Şekil)	106 (3 Şekil)	110 (4 Şekil)	111 (5 Şekil)	112 (4 Şekil)	113 (2 Şekil)
115 (4 Şekil)	116 (3 Şekil)	118 (1 Şekil)	121 (2 Şekil)	122 (2 Şekil)	126 (3 Şekil)
127 (1 Şekil)	128 (1 Şekil)	129 (1 Şekil)	130 (1 Şekil)	138 (1 Şekil)	139 (3 Şekil)
141 (1 Şekil)	143 (2 Şekil)	144 (1 Şekil)	146 (4 Şekil)	147 (3 Şekil)	148 (3 Şekil)
149 (1 Şekil)	150 (4 Şekil)	151(1 Şekil)	152 (2 Şekil)	153 (1 Şekil)	154 (3 Şekil)
155 (1 Şekil)	156 (2 Şekil)	157 (3 Şekil)	158 (2 Şekil)	159 (1 Şekil)	160 (2 Şekil)
161 (2 Şekil)	163 (2 Şekil)	164 (3 Şekil)	165 (2 Şekil)	166 (1 Şekil)	170 (2 Şekil)
172 (1 Şekil)	173 (19 Şekil)	174 (8 Şekil)	176 (2 Şekil)	177 (2 Şekil)	178 (3 Şekil)
179 (1 Şekil)	180 (1 Şekil)	181 (1 Şekil)	182 (1 Şekil)	184 (1 Şekil)	185 (1 Şekil)
186 (1 Şekil)	194 (1 Şekil)	197 (1 Şekil)	198 (2 Şekil)	200 (2 Şekil)	202 (2 Şekil)
206 (4 Şekil)	207 (2 Şekil)	210 (1 Şekil)	212 (1 Şekil)	213 (1 Şekil)	214 (3 Şekil)
215 (2 Şekil)	216 (2 Şekil)	219 (1 Şekil)	226 (1 Şekil)	227 (2 Şekil)	228 (2 Şekil)
242 (1 Şekil)	244 (1 Şekil)	245 (6 Şekil)	246 (3 Şekil)	247 (2 Şekil)	248 (2 Şekil)
250 (2 Şekil)	251 (1 Şekil)	252 (2 Şekil)	253 (12 Şekil)	254 (4 Şekil)	255 (3 Şekil)
256 (2 Şekil)	257 (1 Şekil)	258 (2 Şekil)	259 (1 Şekil)	260 (2 Şekil)	261 (2 Şekil)
263 (2 Şekil)	264 (2 Şekil)	265 (2 Şekil)	266 (2 Şekil)	268 (1 Şekil)	270 (1 Şekil)
271 (1 Şekil)	272 (5 Şekil)	273 (1 Şekil)	274 (2 Şekil)	275 (3 Şekil)	276 (1 Şekil)
277 (1 Şekil)	278 (2 Şekil)	279 (3 Şekil)	280 (1 Şekil)	282 (4 Şekil)	283 (1 Şekil)
284 (2 Şekil)	285 (2 Şekil)	286 (2 Şekil)	287 (1 Şekil)	288 (1 Şekil)	289 (1 Şekil)
290 (1 Şekil)	291 (1 Şekil)	292 (2 Şekil)	293 (2 Şekil)	294 (2 Şekil)	296 (1 Şekil)
297 (1 Şekil)	312 (4 Şekil)	313 (2 Şekil)	314 (6 Şekil)	315 (4 Şekil)	316 (3 Şekil)
317 (2 Şekil)	322 (1 Şekil)	323 (2 Şekil)	324 (1 Şekil)	326 (2 Şekil)	327 (2 Şekil)
335 (3 Şekil)	337 (3 Şekil)	338 (2 Şekil)	339 (2 Şekil)	340 (3 Şekil)	341 (2 Şekil)
342 (2 Şekil)	343 (1 Şekil)	344 (2 Şekil)	346 (2 Şekil)	347 (2 Şekil)	348 (2 Şekil)
350 (4 Şekil)	351 (5 Şekil)	352 (1 Şekil)	355 (2 Şekil)	356 (2 Şekil)	357 (1 Şekil)
358 (3 Şekil)	360 (2 Şekil)	361 (2 Şekil)	362 (1 Şekil)	364 (3 Şekil)	365 (1 Şekil)
366 (2 Şekil)	367 (4 Şekil)	368 (3 Şekil)	369 (2 Şekil)	370 (4 Şekil)	377 (1 Şekil)
378 (3 Şekil)	382 (1 Şekil)	384 (1 Şekil)	385 (1 Şekil)	386 (1 Şekil)	388 (1 Şekil)
389 (1 Şekil)	391 (4 Şekil)	393 (1 Şekil)	394 (4 Şekil)		

GÖRSEL TASARIM UZMANI TARAFINDAN ÇİZİLEN ŞEKİLLERİN SAYFA NUMARALARI VE SAYILARI

65 (1 Şekil)	113 (1 Şekil)	114 (2 Şekil)	123 (2 Şekil)	124 (3 Şekil)	126 (1 Şekil)
140 (2 Şekil)	144 (1 Şekil)	207 (2 Şekil)	276 (2 Şekil)	278 (1 Şekil)	280 (2 Şekil)
290 (3 Şekil)	294 (1 Şekil)	318 (6 Şekil)	319 (4 Şekil)	348 (1 Şekil)	349 (2 Şekil)
357 (3 Şekil)	362 (2 Şekil)	390 (1 Şekil)			

DİNAMİK GEOMETRİ VE MATEMATİK YAZILIMI PROGRAMI İLE ÇİZİLEN ŞEKİLLERİN SAYFA NUMARALARI VE SAYILARI

19 (4 Şekil)	28 (4 Şekil)	59 (1 Şekil)	162 (1 Şekil)	183 (1 Şekil)	211 (1 Şekil)
262 (1 Şekil)	267 (1 Şekil)	321 (6 Şekil)	345 (1 Şekil)	376 (1 Şekil)	383 (1 Şekil)
385 (1 Şekil)					

www.shutterstock.com SİTESİNDEN SATIN ALINAN ŞEKİLLERİN SAYFA VE ID NUMARALARI

168 (id: 386573653)   174 (id: 768173980)   277 (id: 2701861)