11.2.1. DOĞRUNUN ANALİTİK İNCELENMESİ

1. Analitik Düzlemde İki Nokta Arasındaki Uzaklık

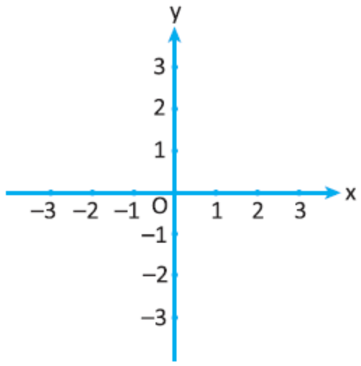
Analitik Düzlem

Aynı düzlemde başlangıç noktaları ortak ve dik kesişen, iki sayı doğrusundan oluşan sisteme **koordinat sistemi**; üzerinde bir koordinat sisteminin bulunduğu düzleme ise **analitik düzlem** denir (Grafik 2.1.1).

Yatay alınan sayı doğrusuna **x ekseni** veya **apsisler ekseni**, düşey alınan sayı doğrusuna **y ekseni** veya **ordinatlar ekseni** denir.

x ve y eksenlerinin kesiştiği noktaya **başlangıç noktası (orijin)** denir.

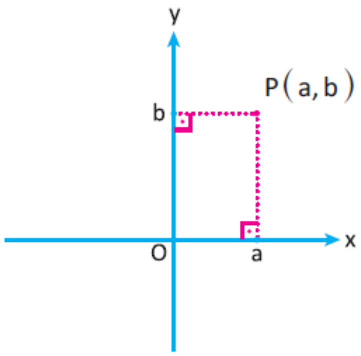
$O(0,0)$ şeklinde gösterilir.



Grafik 2.1.1

Analitik düzlemde noktalar, gerçek sayı ikilileri şeklinde gösterilir. Bir noktanın koordinatları, eksenlere çizilen dikme ayaklarına karşılık gelen sayılardır. $P(a,b)$ noktasından x eksenine çizilen dikmenin x eksenini kestiği noktaya P noktasının **apsisi**, y eksenine çizilen dikmenin y eksenini kestiği noktaya P noktasının **ordinatı** denir (Grafik 2.1.2).

a ve b gerçek sayıları, P noktasının koordinatlarıdır. x ekseni üzerindeki noktaların ordinat değeri, y ekseni üzerindeki noktaların apsis değeri sıfırdır.



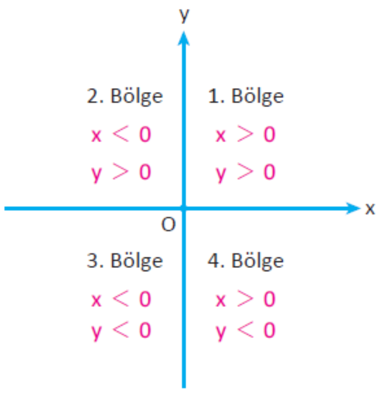
Grafik 2.1.2

Analitik Düzlemde Bölgeler

Dik koordinat sistemi, analitik düzlemi 4 bölgeye ayırır. Bu bölgeler saatin dönme yönünün tersine göre adlandırılır.

$x>0$, $y>0$ olan noktalar 1. bölgede, $x<0$, $y>0$ olan noktalar 2. bölgede, $x<0$, $y<0$ olan noktalar 3. bölgede ve $x>0$, $y<0$ olan noktalar 4. bölgede bulunur (Grafik 2.1.3).

x ve y eksenleri herhangi bir bölgeye ait olmadığından eksenler üzerindeki noktalar da herhangi bir bölgeye ait değildir.



Grafik 2.1.3

İki Nokta Arasındaki Uzaklık

Analitik düzlemde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları verilmiş olsun. Şekildeki ABC dik üçgeninde hipotenüs uzunluğu, A ile B noktaları arasındaki uzaklığı verir.

$|AC| = x_2 - x_1$ ve $|BC| = y_2 - y_1$ olur.

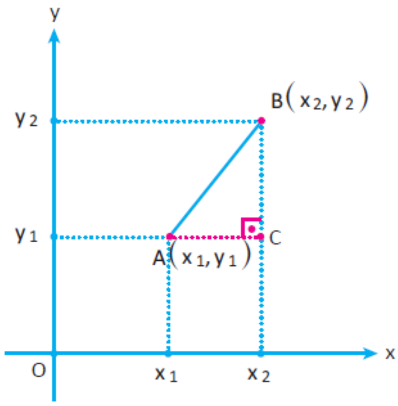
ABC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \text{ bulunur.}$$

Bu durumda A ve B noktaları arasındaki uzaklık

$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ olur (Grafik 2.1.4).

Bu ifade $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ şeklinde de yazılabilir.



Grafik 2.1.4

2. Bir Doğru Parçasını Belli Bir Oranda (İçten veya Dıştan) Bölen Noktanın Koordinatları

Bir Doğru Parçasının Orta Noktasının Koordinatları

Analitik düzlemde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ olmak üzere AB doğru parçasının orta noktası $C(x_0, y_0)$ olsun.

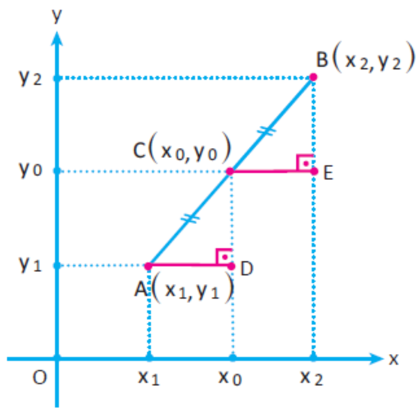
$D(x_0, y_1)$ ve $E(x_2, y_0)$ olmak üzere $\widehat{ADC} \cong \widehat{CEB}$ olur. Bu durumda $|AC| = |CB|$, $|AD| = |CE|$ ve $|DC| = |EB|$ olur.

$$|AD| = |CE| \Rightarrow x_0 - x_1 = x_2 - x_0$$
$$2x_0 = x_1 + x_2$$
$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ ve}$$

$$|DC| = |EB| \Rightarrow y_0 - y_1 = y_2 - y_0$$
$$2y_0 = y_1 + y_2$$
$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} \text{ bulunur.}$$

Buna göre AB doğru parçasının orta noktasının koordinatları

$C(x_0, y_0) = C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ olur (Grafik 2.1.5).



Grafik 2.1.5

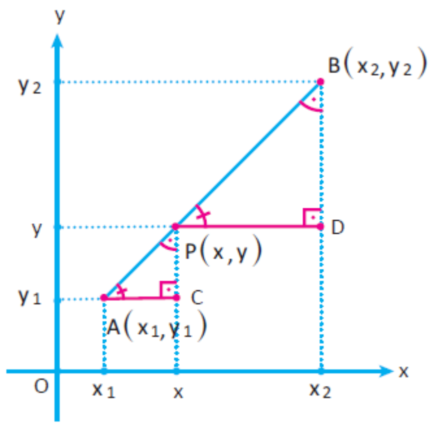
Bir Doğru Parçasını Belli Bir Oranda İçten Bölen Noktanın Koordinatları

Grafik 2.1.6'da $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ olsun. $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere AB doğru parçasını k oranında içten bölen nokta $P(x, y)$ olarak seçilirse

$\widehat{ACP} \sim \widehat{PDB}$ (A.A.) olduğundan $\frac{|AC|}{|PD|} = \frac{|CP|}{|DB|} = \frac{|AP|}{|PB|} = k$ yazılır.

Bu durumda

$$\frac{|AC|}{|PD|} = \frac{|AP|}{|PB|} = k \Rightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x} = k \Rightarrow x - x_1 = k \cdot x_2 - k \cdot x$$
$$x + k \cdot x = x_1 + k \cdot x_2$$
$$x \cdot (1 + k) = x_1 + k \cdot x_2$$
$$x = \frac{x_1 + k \cdot x_2}{1 + k} \text{ ve}$$



Grafik 2.1.6

$$\frac{|CP|}{|DB|} = \frac{|AP|}{|PB|} = k \Rightarrow \frac{y-y_1}{y_2-y} = k \Rightarrow y - y_1 = k \cdot y_2 - k \cdot y$$

$$y + k \cdot y = y_1 + k \cdot y_2$$

$$y \cdot (1+k) = y_1 + k \cdot y_2$$

$$y = \frac{y_1 + k \cdot y_2}{1+k} \text{ olarak bulunur.}$$

$$\text{Buradan } P(x,y) = P\left(\frac{x_1 + k \cdot x_2}{1+k}, \frac{y_1 + k \cdot y_2}{1+k}\right) \text{ olur.}$$

Bir Doğru Parçasını Belli Bir Oranda Dıştan Bölen Noktanın Koordinatları

Grafik 2.1.7'de $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ olsun. $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere AB doğru parçasını k oranında dıştan bölen nokta $C(x, y)$ olarak seçilirse

$\widehat{CAE} \sim \widehat{CBD}$ (A.A.) olduğundan $\frac{|CA|}{|CB|} = \frac{|AE|}{|BD|} = \frac{|CE|}{|CD|} = k$ yazılır.

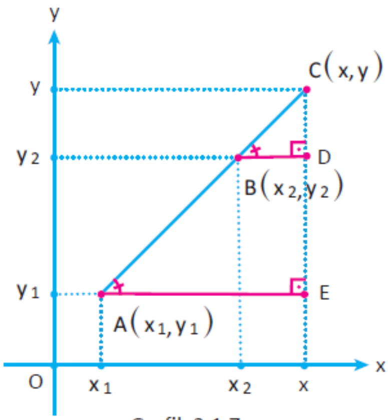
Bu durumda

$$\frac{|AE|}{|BD|} = \frac{|CA|}{|CB|} = k \Rightarrow \frac{x-x_1}{x-x_2} = k \Rightarrow x - x_1 = k \cdot x - k \cdot x_2$$

$$x - k \cdot x = x_1 - k \cdot x_2$$

$$x \cdot (1-k) = x_1 - k \cdot x_2$$

$$x = \frac{x_1 - k \cdot x_2}{1-k} \text{ ve}$$



Grafik 2.1.7

$$\frac{|CE|}{|CD|} = \frac{|CA|}{|CB|} = k \Rightarrow \frac{y-y_1}{y-y_2} = k \Rightarrow y - y_1 = k \cdot y - k \cdot y_2$$

$$y - k \cdot y = y_1 - k \cdot y_2$$

$$y \cdot (1-k) = y_1 - k \cdot y_2$$

$$y = \frac{y_1 - k \cdot y_2}{1-k} \text{ olarak bulunur.}$$

$$\text{Buradan } C(x,y) = C\left(\frac{x_1 - k \cdot x_2}{1-k}, \frac{y_1 - k \cdot y_2}{1-k}\right) \text{ olur.}$$

Bir Üçgenin Ağırlık Merkezinin Koordinatları

Analitik düzlemde köşelerinin koordinatları $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ve $C(x_3, y_3)$ olan ABC üçgeninin ağırlık merkezinin koordinatları

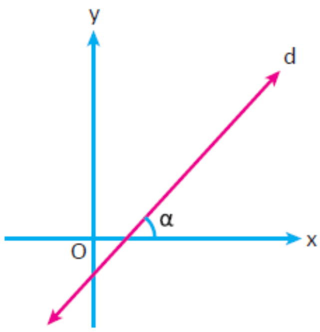
$$G(x,y) = G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right) \text{ olur.}$$

3. Analitik Düzlemde Doğrular

Bir Doğrunun Eğim Açısı ve Eğimi

Bir d doğrusunun x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açıya doğrunun **eğim açısı**, bu açının tanjantına da **doğrunun eğimi** denir.

Eğim genellikle m ile gösterilir. Bu durumda bir d doğrusunun x ekseninin pozitif yönüyle yaptığı açı α ise $m = \tan\alpha$ şeklinde yazılır (Grafik 2.1.8).



Grafik 2.1.8

İki Noktası Verilen Doğrunun Eğimi

Analitik düzlemde d doğrusu üzerindeki noktalardan herhangi ikisi seçilerek elde edilen eğim değişmez. Doğru üzerinde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları verilmiş olsun.

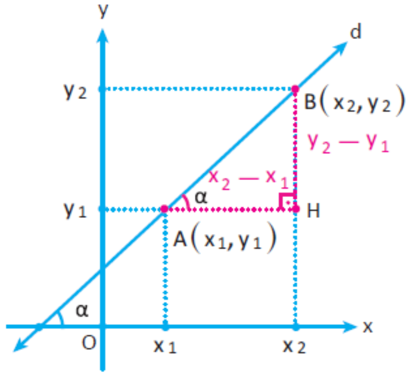
$|AH| = x_2 - x_1$ ve $|BH| = y_2 - y_1$ olur.

AHB dik üçgeninde

$\tan\alpha = \dfrac{|BH|}{|AH|} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ olur (Grafik 2.1.10).

d doğrusunun x ekseninin pozitif yönüyle yaptığı açı α olduğundan

d doğrusunun eğimi $m_d = \tan\alpha = \dfrac{|BH|}{|AH|} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ olarak bulunur.



Grafik 2.1.10

Doğru Denkleminin Yazılması

Eğimi ve Bir Noktası Verilen Doğrunun Denklemi

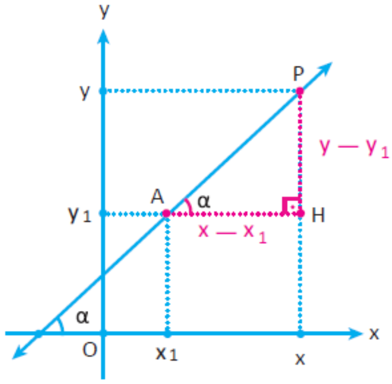
Analitik düzlemde $A(x_1, y_1)$ noktasından geçen doğrunun eğimi m olarak verilmiş olsun. $(m \in \mathbb{R})$

Doğru üzerinde değişken $P(x, y)$ noktası alınırsa

$A(x_1, y_1)$ ve $P(x, y)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi

$m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$ olduğundan ifade düzenlenirse

$y = m \cdot (x - x_1) + y_1$ (Grafik 2.1.11) bulunur.



Grafik 2.1.11

Bu ifade, $A(x_1, y_1)$ noktasından geçen ve eğimi m olan doğrunun denklemi olur.

Bulunan denklem

$$\begin{aligned} y &= m \cdot (x - x_1) + y_1 \\ &= mx + \underbrace{(-mx_1 + y_1)}_{n} \Rightarrow y = mx + n \end{aligned}$$ şeklinde de yazılabilir.

İki Noktası Verilen Doğrunun Denklemi

Analitik düzlemde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun üzerindeki değişken bir nokta $P(x, y)$ olsun.

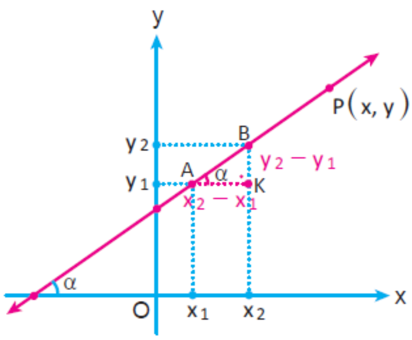
A, B ve P noktalarından geçen doğru için

$m_{AB} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ve $m_{AP} = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$ ve eğimleri birbirine eşittir.

Bu durumda $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$ yazılır. Denklem düzenlenirse

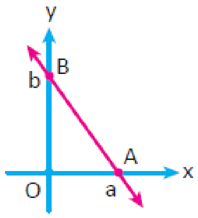
$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi

$\dfrac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \dfrac{x - x_1}{x_1 - x_2}$ olarak bulunur (Grafik 2.1.12).



Grafik 2.1.12

Grafik 2.1.13'te $A(a,0)$ ve $B(0,b)$ noktasından geçen doğrunun denklemi $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ olur.



Grafik 2.1.13

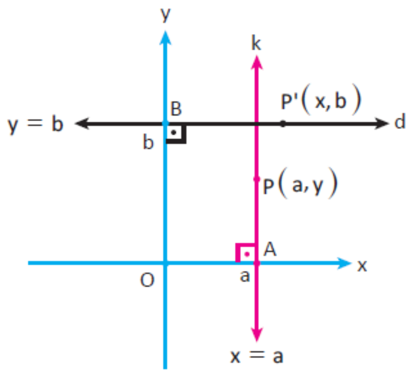
Eksenlere Paralel Doğruların Denklemi

k doğrusu, y eksenine paralel ve x eksenine $A(a,0)$ noktasında dik olsun. k doğrusu üzerindeki tüm noktaların apsisi a olduğundan denklemi $x=a$ olur.

Özel olarak $a=0$ alınırsa $x=0$ doğrusu y ekseni olur.
y eksenine paralel doğruların eğim açısı 90° olduğundan eğimleri tanımsızdır.

d doğrusu, x eksenine paralel ve y eksenine $B(0,b)$ noktasında dik olsun. d doğrusu üzerindeki tüm noktaların ordinatı b olduğundan denklemi $y=b$ olur.

Özel olarak $b=0$ alınırsa $y=0$ doğrusu x ekseni olur.
x eksenine paralel doğruların eğim açısı 0° olduğundan eğimleri sıfırdır (Grafik 2.1.14).



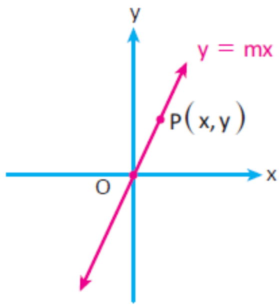
Grafik 2.1.14

Orijinden Geçen Doğruların Denklemi

$O(0,0)$ noktasından (orijinden) geçen doğrunun eğimi m olsun.
$P(x,y)$ noktası, doğru üzerindeki değişken nokta olarak seçilirse $m_{OP}=m$ olur.

$\frac{y-0}{x-0}=m$ olduğundan $\frac{y}{x}=m$ ise $y=mx$ elde edilir.

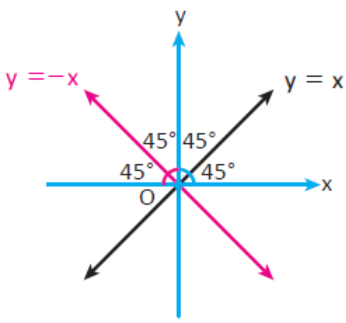
O hâlde eğimi m olan ve orijinden geçen doğruların denklemi $y=mx$ olur (Grafik 2.1.15).



Grafik 2.1.15

Özel olarak $m=1$ alınırsa $y=x$ doğrusu elde edilir.
Bu doğru 1. açıortay doğrusu olarak adlandırılır.

$m=-1$ alınırsa $y=-x$ doğrusu elde edilir.
Bu doğru 2. açıortay doğrusu olarak adlandırılır (Grafik 2.1.16).



Grafik 2.1.16

Denklemi Bilinen Doğruların Eğimi

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $b \neq 0$ olmak üzere $ax + by + c = 0$ denklemine **doğrunun kapalı denklemi** denir.

$ax + by + c = 0 \Rightarrow by = -ax - c$

$$y = -\frac{a}{b}x + \left(-\frac{c}{b}\right) \text{ olur.}$$

$-\frac{a}{b} = m$ ve $-\frac{c}{b} = n$ alınırsa $y = mx + n$ elde edilir.

Bu denkleme doğrunun **açık denklemi** denir. Bu durumda doğrunun eğimi m olur.

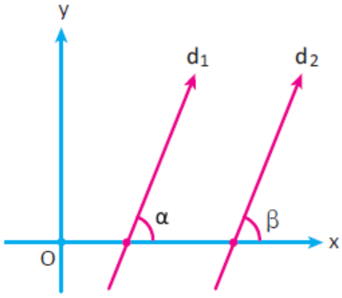
Birbirine Paralel ya da Dik Olan Doğruların Eğimleri Arasındaki Bağıntılar

d_1 ve d_2 doğruları birbirine paralel ise doğruların eğim açıları ve dolayısıyla eğimleri de eşit olur (Grafik 2.1.17).

Buna göre $d_1 \mathbin{/\!/} d_2 \Rightarrow \alpha = \beta$ olur. Buradan

$\tan\alpha = \tan\beta$ ise $m_1 = m_2$ elde edilir.

Sonuç olarak $d_1 \mathbin{/\!/} d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$ olur.



Grafik 2.1.17

d_1 ve d_2 doğruları birbirine dik ve eğimleri sırasıyla m_1 ve m_2 olsun.

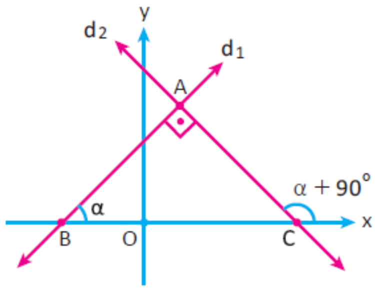
d_1 doğrusunun eğimi $m_1 = \tan\alpha$ olur (Grafik 2.1.18).

$d_1 \perp d_2$ olduğundan ABC üçgeninde C köşesindeki dış açının ölçüsü $\alpha + 90^\circ$ olur.

Bu açı d_2 doğrusunun eğim açısı olduğundan d_2 doğrusunun eğimi $m_2 = \tan(\alpha + 90^\circ) = -\cot\alpha = -\frac{1}{\tan\alpha}$ olur.

Bu durumda $m_1 \cdot m_2 = \tan\alpha \cdot \left(-\frac{1}{\tan\alpha}\right) = -1$ olur.

Sonuç olarak $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$ olur.

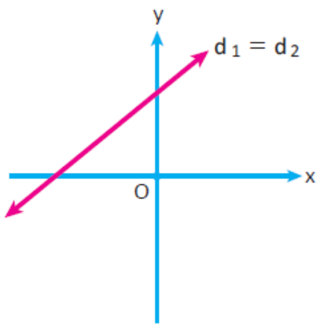


Şekil 2.1.18

İki Doğrunun Birbirine Göre Durumları

$d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ve $d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ doğruları verilmiş olsun. Bu durumda

1. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ise doğrular çakışıktır (Grafik 2.1.19).
   Bu durumda $d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ denklemi, $d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ denkleminin belli bir katı olduğundan doğruların bütün noktaları ortaktır. Dolayısıyla d_1 ve d_2 doğru denklemlerinin oluşturduğu denklem sisteminin sonsuz çözümü vardır.



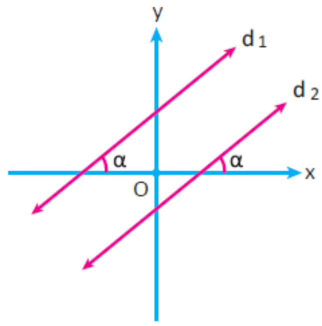
2. $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ ise doğrular paraleldir (Grafik 2.1.20).

Bu durumda $d_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ve $d_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ doğrularının eğimleri birbirine eşittir.

Doğrular paralel olduğundan ortak noktaları yoktur.

Bu durumda d_1 ve d_2 doğru denklemlerinin oluşturduğu denklem sisteminin

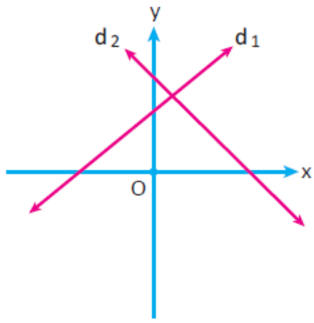
$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$ çözüm kümesi boş küme olur.



Grafik 2.1.20

3. $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$ ise doğrular bir noktada kesişir (Grafik 2.1.21).

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$ sisteminin çözüm kümesi, d_1 ve d_2 doğrularının kesişme noktasıdır.



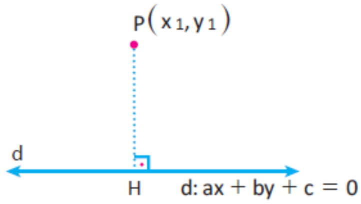
Grafik 2.1.21

4. Bir Noktanın Bir Doğruya Olan Uzaklığı

Bir $P(x_1, y_1)$ noktasının; denklemi $d: ax + by + c = 0$ doğrusuna olan uzaklığı, $P(x_1, y_1)$ noktasından doğruya indirilen $[PH]$ dikmesinin uzunluğuna eşittir (Grafik 2.1.22).

P ve H noktaları arasındaki uzaklık

$\ell = |PH| = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ olur.



Grafik 2.1.22

H noktası, $d: ax + by + c = 0$ ve $y - y_1 = \dfrac{b}{a}(x - x_1)$ doğrularının kesişme noktasıdır. Bu nokta

$$\left.\begin{aligned} ax + by + c = 0 \\ y - y_1 = \frac{b}{a}(x - x_1) \end{aligned}\right\}$$ sisteminin çözümü ile bulunur.

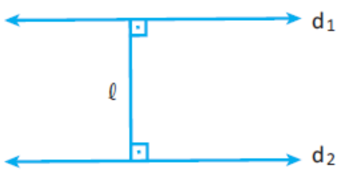
Sonuç olarak P ve H noktaları arasındaki uzaklık

$\ell = |PH| = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ olarak bulunur.

Paralel İki Doğru Arasındaki Uzaklık

$d_1 \mathbin{/\!/} d_2$ olmak üzere $d_1: ax + by + c_1 = 0$ ve $d_2: ax + by + c_2 = 0$ doğruları verilmiş olsun. Bu iki doğru arasındaki uzaklık

$\ell = \dfrac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ olur (Grafik 2.1.23).



Grafik 2.1.23