11.5.1. ÇEMBERİN TEMEL ELEMANLARI

1. Çemberde Kiriş, Kesen, Teğet ve Yay Kavramları

Günlük hayatta çember veya daire şeklinde pek çok araç gereç kullanılır. Tepsi, madenî para, tekerlek gibi yuvarlak nesnelerin ağırlık merkezleri daha kolay bulunabildiğinden dengelemek istenilen birçok nesneye yuvarlak şekil verilmiştir. Tekerleğe (Görsel 5.1.1) yuvarlak şekil verilmesinin sebebi ise tekerleğin etrafındaki diğer nesnelere değen yüzeylerinin çok az olmasıdır. Bu sayede sürtünme azalmış ve nesnelerin kolay hareket ettirilebilmesi sağlanmıştır.

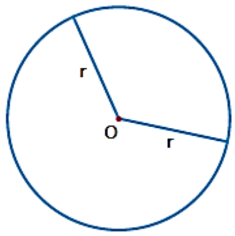
Görsel 5.1.1: Tekerlek

Tanım

Düzlemde sabit bir noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktalar kümesine **çember** denir.

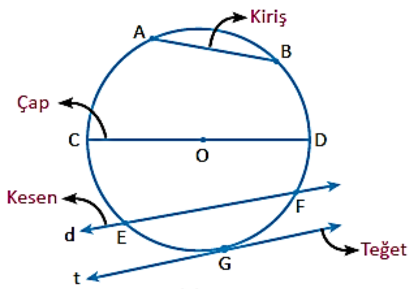
Sabit noktaya **çemberin merkezi** denir ve O ile gösterilebilir.

Eşit uzaklığa ise **çemberin yarıçapı** denir ve **r** ile gösterilir (Şekil 5.1.1).



Şekil 5.1.1

Çemberin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasına **kiriş** denir.
Merkezden geçen kirişe **çap** denir. En uzun kiriş çaptır.
Çap R ile gösterilir (Şekil 5.1.2).



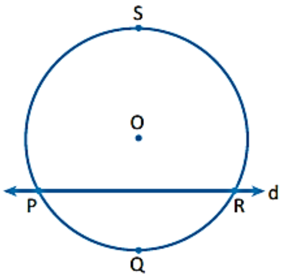
Şekil 5.1.2

Çemberin farklı iki noktasından geçen doğruya **kesen** denir.
Çemberle kesişim kümesi bir nokta olan doğruya **teğet** denir.

Çember üzerinde alınan farklı iki nokta arasındaki çember parçasına **yay** denir.

Çember üzerinde P, Q, R ve S noktaları verilmiş olsun. Bu durumda $\overset{\frown}{PSR}$ büyük yay ve $\overset{\frown}{PQR}$ küçük yay olmak üzere d doğrusu çemberi iki yaya ayırır.

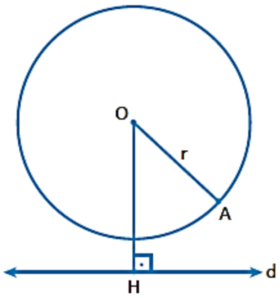
$\overset{\frown}{PR}$ ifadesinden anlaşılması gereken çember üzerindeki küçük yaydır (Şekil 5.1.3).



Şekil 5.1.3

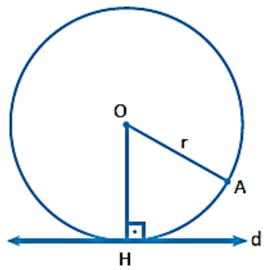
Çember ile Doğrunun Birbirine Göre Durumları

Aynı düzlemde bulunan Ç çemberi ve bir d doğrusu verilsin. $[OH] \perp d$ olmak üzere çemberin merkezinin d doğrusuna olan uzaklığı $|OH| = k$ olsun. d doğrusunun çemberin merkezine olan uzaklığına göre üç farklı durum olabilir.



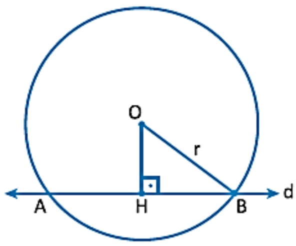
$k > r$

Şekil 5.1.4



$k = r$

Şekil 5.1.5



$k < r$

Şekil 5.1.6

Şekil 5.1.4'te d doğrusunun çemberin merkezine olan uzaklığı, çemberin yarıçapından büyüktür. Bu durumda doğru, çemberi kesmez. $Ç \cap d = \emptyset$ olduğundan $k > r$ olur.

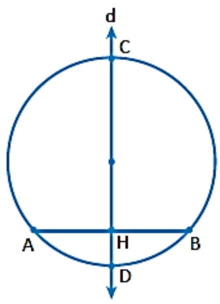
Şekil 5.1.5'te d doğrusunun çemberin merkezine olan uzaklığı, çemberin yarıçapına eşittir.
Bu durumda doğru, çembere teğet olur. $Ç \cap d = \{H\}$ olduğundan $k = r$ olur.

Şekil 5.1.6'da d doğrusunun çemberin merkezine olan uzaklığı, çemberin yarıçapından küçüktür. Bu durumda doğru, çemberi iki noktada keser. $Ç \cap d = \{A, B\}$ olduğundan $k < r$ olur.

2. Çemberde Kirişin Özellikleri

Özellik

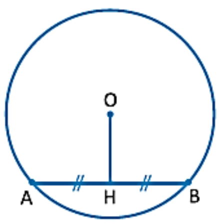
1. Bir çemberde kirişin orta dikmesi merkezden geçer (Şekil 5.1.7).



Şekil 5.1.7

Özellik

2. Bir çemberde kirişin orta noktasını çemberin merkezine birleştiren doğru, kirişe diktir.
O merkezli çemberde çizilen $[AB]$ kirişinin orta noktası H ise $[OH] \perp [AB]$ olur (Şekil 5.1.9).



Şekil 5.1.9

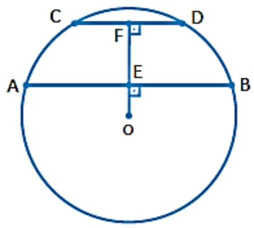
Özellik

3. Bir çemberde eşit uzunluktaki kirişlerin çemberin merkezine olan uzaklıkları eşittir.

Özellik

4. Bir çemberdeki farklı iki kirişten merkeze yakın olan daha uzundur (Şekil 5.1.12).

$|OE| < |OF| \Leftrightarrow |AB| > |DC|$ olur.



Şekil 5.1.12

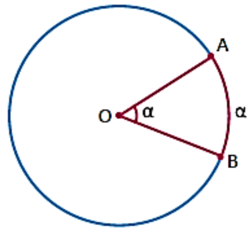
11.5.2. ÇEMBERDE AÇILAR

Çemberde Açı Çeşitleri

Çember üzerinde tanımlanan açı çeşitleri merkez açı, çevre açı, teğet-kiriş açı, iç ve dış açıdır. Bu açıların tanımları, açılar ile gördükleri yayların ölçüleri bakımından ilişkisi aşağıda incelenmiştir.

Tanım

Köşesi çemberin merkezinde olan açıya bu çemberin bir **merkez açısı** denir.
Merkez açının ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsüne eşittir (Şekil 5.2.1).

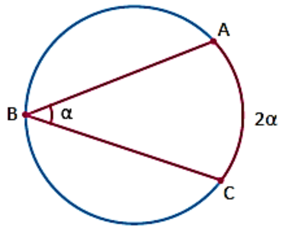


$m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AB}) = \alpha$

Şekil 5.2.1

Köşesi çember üzerinde bulunan ve kolları çemberi iki farklı noktada kesen açıya bu çemberin bir **çevre açısı** denir.

Çevre açının ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşittir (Şekil 5.2.2).

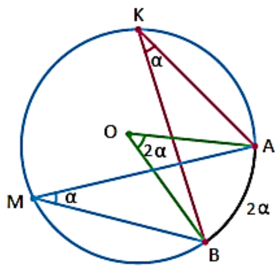


$m(\widehat{ABC}) = \alpha \Leftrightarrow m(\widehat{AC}) = 2\alpha$

Şekil 5.2.2

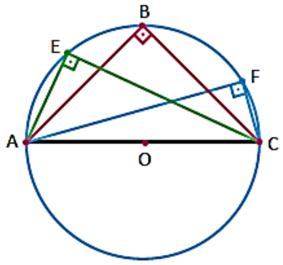
Sonuç

1. Aynı yayı gören çevre açıların ölçüleri eşittir ve aynı yayı gören merkez açının ölçüsü çevre açısının ölçüsünün iki katına eşittir (Şekil 5.2.3).



Şekil 5.2.3

2. Çapı gören çevre açının ölçüsü 90° dir (Şekil 5.2.4).

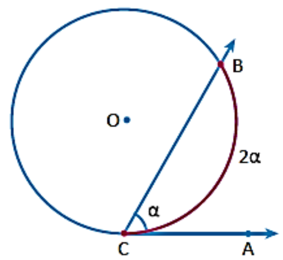


Şekil 5.2.4

Tanım

Köşesi çember üzerinde bulunan ve bir teğet ile bir kirişin oluşturduğu açıya **teğet-kiriş açı** denir.

Teğet-kiriş açının ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşittir (Şekil 5.2.5).



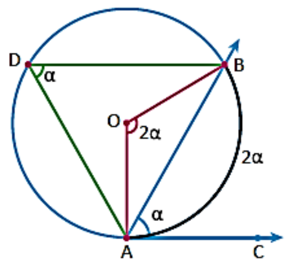
$m(\widehat{ACB}) = \alpha \Leftrightarrow m(\widehat{BC}) = 2\alpha$

Şekil 5.2.5

Sonuç

1. Aynı yayı gören çevre açının ölçüsü, teğet-kiriş açının ölçüsüne eşittir (Şekil 5.2.6).

2. Aynı yayı gören teğet-kiriş açının ölçüsü, merkez açının ölçüsünün yarısına eşittir (Şekil 5.2.6).

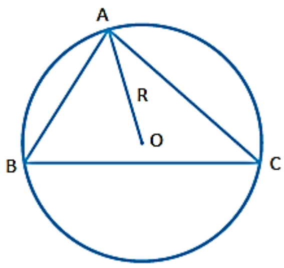


Şekil 5.2.6

Sinüs Teoremi

Bir üçgende her kenarın uzunluğu karşısındaki açının sinüs değeri ile doğru orantılıdır. Bu oranın değeri, o üçgenin çevrel çemberinin çapına eşittir. Şekil 5.2.7'de R çevrel çemberin yarıçapı ve ABC üçgeninin kenar uzunlukları a, b, c olmak üzere

$\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R$ olur.



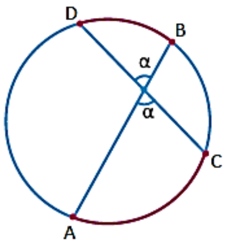
Şekil 5.2.7

Tanım

Köşe noktası çemberin iç bölgesinde bulunan kesişen iki kirişin oluşturduğu açılardan her birine **iç açı** denir.

Çemberde bir iç açının ölçüsü, gördüğü yayların ölçüleri toplamının yarısıdır (Şekil 5.2.9).

$$\alpha = \frac{m(\widehat{AC}) + m(\widehat{BD})}{2}$$

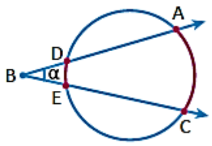


Şekil 5.2.9

Tanım

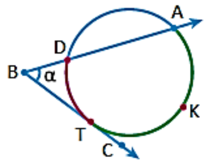
Köşesi çemberin dış bölgesinde bulunan ve kolları çemberi en az bir noktada kesen açıya **dış açı** denir.

Bir dış açının ölçüsü, gördüğü yayların ölçüleri farkının mutlak değerinin yarısıdır. Şekil 5.2.10, 5.2.11 ve 5.2.12'yi inceleyiniz.



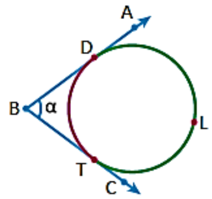
$$\alpha = \frac{\left| m(\widehat{AC}) - m(\widehat{DE}) \right|}{2}$$

Şekil 5.2.10



$$\alpha = \frac{\left| m(\widehat{DT}) - m(\widehat{AKT}) \right|}{2}$$

Şekil 5.2.11



$$\alpha = \frac{\left| m(\widehat{DT}) - m(\widehat{DLT}) \right|}{2}$$

Şekil 5.2.12

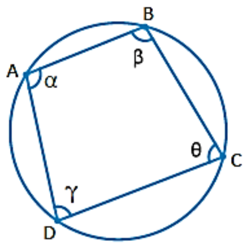
Kirişler Dörtgeni

Tanım

Köşeleri aynı çember üzerinde olan dörtgene **kirişler dörtgeni** denir.

Kirişler dörtgeninde karşılıklı açılar bütünlerdir (Şekil 5.2.13).

$\alpha + \theta = \beta + \gamma = 180^\circ$



Şekil 5.2.13

11.5.3. ÇEMBERDE TEĞET

Çemberde Teğetin Özellikleri

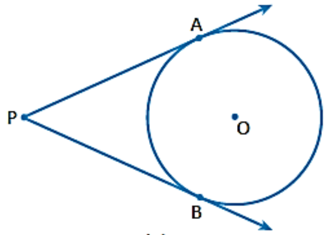
Özellik

1. Bir çembere herhangi bir noktasından çizilen teğet, değme noktasında yarıçapa diktir.

Tanım

Çembere, dışındaki bir noktadan iki teğet çizilebilir (Şekil 5.3.2).

Bu teğetlerin çembere değme noktaları A ve B ise $[PA]$ ve $[PB]$ na **teğet parçası** denir.



Şekil 5.3.2

Özellik

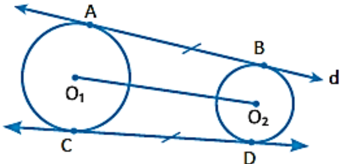
2. Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları birbirine eşittir.

Tanım

Aynı düzlemde iki çembere de teğet olan doğruya **çemberlerin ortak teğeti** denir.

İki çemberin merkezlerini birleştiren doğru parçasını kesmeyen ortak teğetlere ortak dış teğet denir (Şekil 5.3.4).

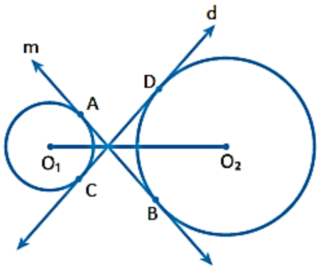
$|AB| = |CD|$ olur.



Şekil 5.3.4

İki çemberin merkezlerini birleştiren doğru parçasını kesen ortak teğetlere **ortak iç teğet** denir (Şekil 5.3.5).

$|AB| = |CD|$ olur.



Şekil 5.3.5

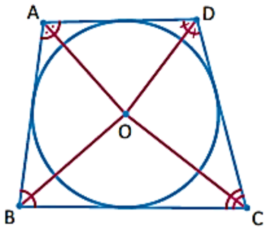
Teğetler Dörtgeni ve İç Teğet Çember

Tanım

Kenarları bir çembere teğet olan dörtgene **teğetler dörtgeni** denir.

Bir çokgenin tüm kenarlarına içten teğet olan çembere çokgenin **iç teğet çemberi** denir.

Teğetler dörtgeninin iç açıortaylarının kesişme noktası iç teğet çemberinin merkezidir (Şekil 5.3.6).

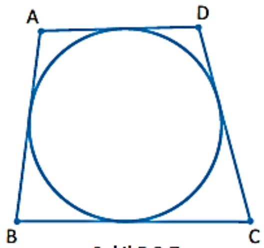


Şekil 5.3.6

Özellik

1. Teğetler dörtgeninin karşılıklı kenarlarının uzunlukları toplamı eşittir (Şekil 5.3.7).

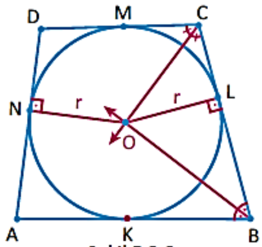
$|AB| + |DC| = |BC| + |AD|$



Şekil 5.3.7

2. Teğetler dörtgeninin alanı, çevresinin uzunluğu ile iç teğet çemberinin yarıçapının çarpımının yarısına eşittir (Şekil 5.3.8).

$$A(ABCD) = \frac{Ç(ABCD) \cdot r}{2}$$



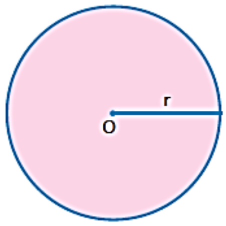
Şekil 5.3.8

11.5.4. DAİRENİN ÇEVRESİ VE ALANI

Dairede Çevre ve Alan

Tanım

Bir çember ve iç bölgesinin birleşim kümesine **daire** denir (Şekil 5.4.1).



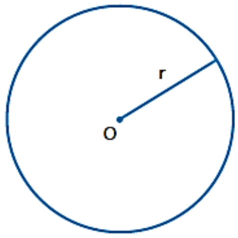
Şekil 5.4.1

Dairenin Çevresi

Bütün çemberlerde $\dfrac{\text{Çevre uzunluğu}}{\text{Çap}} = 3,141592...$ oranı sabit bir sayıdır. Bu sabit sayı π ile gösterilir. π sayısı irrasyonel bir sayıdır.

Buna göre r yarıçaplı bir çemberin çevre uzunluğu Ç ise

$\dfrac{Ç}{2r} = \pi \Rightarrow Ç = 2\pi r$ bulunur (Şekil 5.4.2).

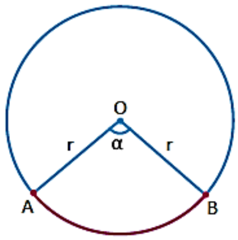


Şekil 5.4.2

Yay Uzunluğu

Yarıçapı r olan O merkezli bir çemberde $\overset{\frown}{AB}$ yayının uzunluğu $|\overset{\frown}{AB}|$ şeklinde gösterilir. AB yayını gören merkez açı α olarak seçilirse yay uzunluğu, bu yayı gören merkez açı ile orantılı olduğundan

$|\overset{\frown}{AB}| = 2\pi r \cdot \dfrac{\alpha}{360^\circ}$ olur (Şekil 5.4.3).

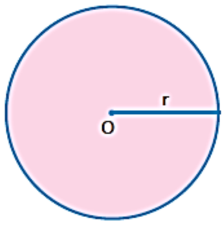


Şekil 5.4.3

Dairenin Alanı

r yarıçaplı dairenin alanı

$A = \pi r^2$ ile hesaplanır (Şekil 5.4.4).

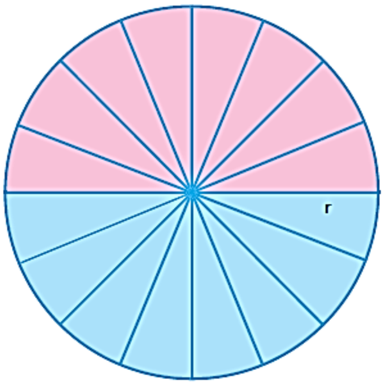


Şekil 5.4.4

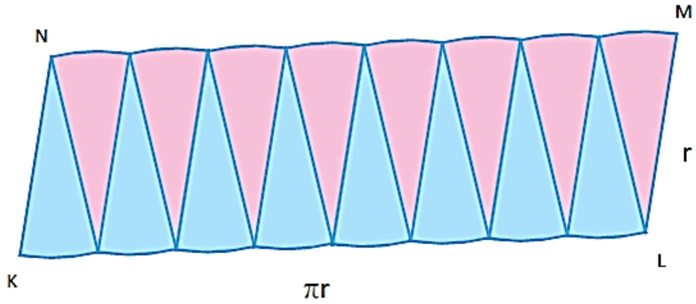
Şekil 5.4.5'te daire yeteri kadar eş daire dilimlerine ayrılarak kesilsin. Kesilen dilimler şekildeki gibi birleştirilirse dikdörtgene benzer bir şekil oluşur. Buradan dikdörtgenin alanından dairenin alanı aşağıdaki gibi elde edilir (Şekil 5.4.6).

$A(KLMN) = |KL| \cdot |LM| = \left(\dfrac{\text{Dairenin Çevresi}}{2}\right) \cdot r = \pi r \cdot r = \pi r^2$ olur.

Buna göre O merkezli r yarıçaplı dairenin alanı $A = \pi r^2$ bulunur.



Şekil 5.4.5



Şekil 5.4.6

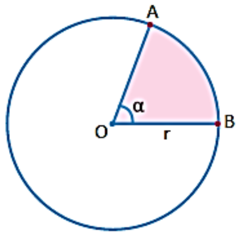
Daire Dilimi ve Alanı

Tanım

Bir dairede α merkez açısının kolları ve bu açının gördüğü yay ile sınırlanan bölgeye **daire dilimi** denir (Şekil 5.4.7).

Yarıçapı r ve merkez açısının ölçüsü α olan daire diliminin alanı merkez açının ölçüsü ile orantılı olduğundan

$A = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{|\widehat{AB}|}{2} \cdot r$ ile hesaplanır.



Şekil 5.4.7

Tarih Köşesi

Archimedes (Arşimet),(Görsel 5.4.1) MÖ 290-280 ile MÖ 212-211 yıllarında Syrakusa'da (Siraküza) yaşamış eski Yunan matematikçisi ve mucididir.

Arşimet'in bugüne ulaşan ve dokuz eserinden biri olan "Dairenin Ölçümü"nde bir çemberin içine ve çevresine çizdiği düzgün çokgenler yardımıyla pi (π) sayısının değerinin 3+1/7 ile 3+10/7 arasında olduğunu belirtmiştir.

Bu değerler, ondalık gösterimleriyle yazılırsa π sayısının 3,14285 ile 3,14084 sayıları arasında olduğu görülür. Bu iki değerin ortalaması alınırsa π sayısının yaklaşık değeri 3,14185 değeri çıkar ki Arşimet'in bulduğu bu değer, π sayısının gerçek değerinin ilk dört basamağı ile aynıdır.

Kaynak: Ana Britannica C 2, s. 307

Görsel 5.4.1: Archimedes