9.3. DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

9.3.1. Sayı Kümeleri

9.3.1.1. Sayı Kümelerininin Birbiriyle İlişkisi

Doğal Sayılar Kümesi ($\mathbb{N}$)

{0, 1, 2, 3, 4, 5, …} kümesine **doğal sayılar kümesi** denir ve " $\mathbb{N}$ " simgesi ile gösterilir.

$\mathbb{N}$ ={0, 1, 2, 3, 4, 5, …} kümesinin her elemanına **doğal sayı** denir.

Tam Sayılar Kümesi ($\mathbb{Z}$)

$x + 1 = 0$ denklemini sağlayan herhangi bir doğal sayı bulunamayacağından negatif sayı kavramı gelişmiştir. $x = -1$ sayısı negatif tam sayıdır. Negatif tam sayılar doğal sayılara eklendiğinde tam sayılar kümesi oluşur.

{…−5, −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, …} kümesine **tam sayılar kümesi** denir ve

" $\mathbb{Z}$ " simgesi ile gösterilir.

$\mathbb{Z}$ = {…−5, −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, …} kümesinin her elemanına **tam sayı** denir.

Tam sayılar kümesinin negatif elemanlarından oluşan kümeye **negatif tam sayılar kümesi** denir ve " $\mathbb{Z}^-$ " simgesi ile gösterilir.

$\mathbb{Z}^-$ = {…−5, −4, −3, −2, −1 } dir.

Tam sayılar kümesinin pozitif elemanlarından oluşan kümeye **pozitif tam sayılar kümesi** denir ve " $\mathbb{Z}^+$ " simgesi ile gösterilir. $\mathbb{Z}^+$ = {1, 2, 3, 4, 5, …} dir.

$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ olarak ifade edilir.

Sıfır sayısının işareti yoktur.

Buna göre her doğal sayı aynı zamanda bir tam sayıdır ve $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ dir.

Rasyonel Sayılar Kümesi ($\mathbb{Q}$)

a ve b tam sayılar ve b sıfırdan farklı ve EBOB (a, b) =1 olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılabilen sayılara **rasyonel sayılar** denir.

Rasyonel sayılar kümesi " $\mathbb{Q}$ " simgesi ile gösterilir. $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{Z} \text{ ve } b \neq 0\right\}$ kümesinin elemanlarına **rasyonel sayı** denir.

Rasyonel sayılar kümesinin negatif elemanlarından oluşan kümeye **negatif rasyonel sayılar kümesi** denir ve " $\mathbb{Q}^-$ "simgesi ile gösterilir.

Rasyonel sayılar kümesinin pozitif elemanlarından oluşan kümeye **pozitif rasyonel sayılar kümesi** denir ve " $\mathbb{Q}^+$ " simgesi ile gösterilir

Rasyonel sayılara örnek olarak $\frac{3}{7}, -\frac{11}{13}, 0, 3, \frac{15}{17}, -8$ sayıları verilebilir.

Buna göre her tam sayı aynı zamanda bir rasyonel sayıdır ve $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ dir.

İrrasyonel Sayılar Kümesi ($\mathbb{Q}'$)

a ve b tam sayılar ve b sıfırdan farklı olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılamayan sayılara **irrasyonel sayılar** denir. İrrasyonel sayılar kümesi " $\mathbb{Q}'$ " simgesi ile gösterilir.

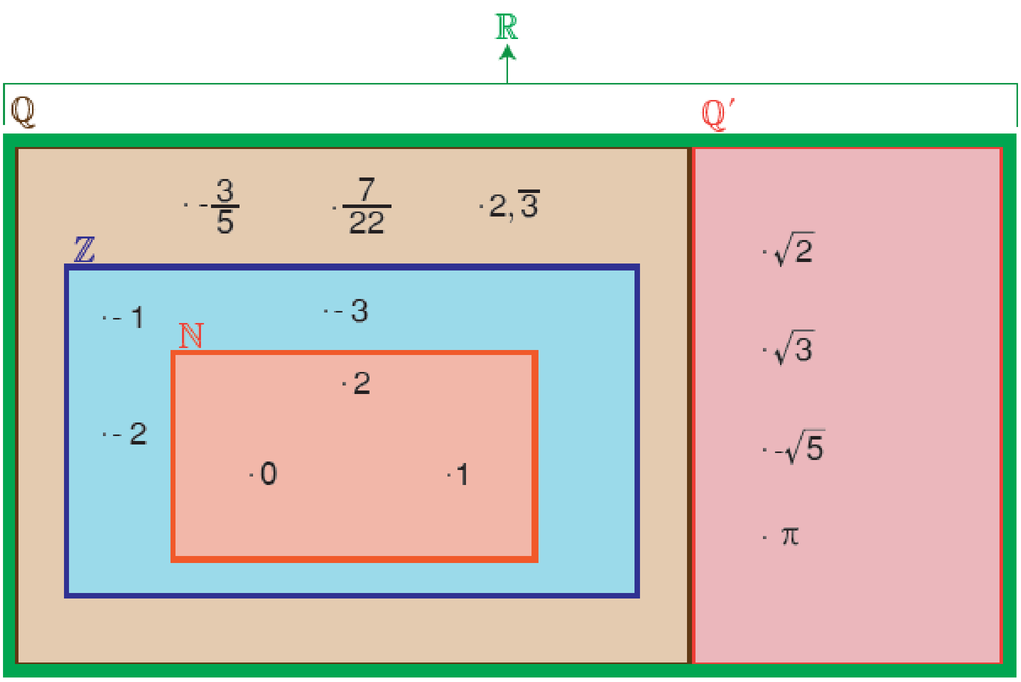
Örnek olarak $\sqrt{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{\frac{1}{5}}$, π sayıları verilebilir.

$\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \varnothing$ dir.

Gerçek (Reel) Sayılar Kümesi ($\mathbb{R}$)

Rasyonel sayılar kümesi ile irrasyonel sayılar kümesinin birleşimi ile oluşan kümeye **gerçek (reel) sayılar kümesi** denir ve " $\mathbb{R}$ " simgesi ile gösterilir. $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$ kümesinin elemanlarına **gerçek (reel) sayı** denir. Pozitif gerçek sayılar " $\mathbb{R}^+$ ", negatif gerçek sayılar ise " $\mathbb{R}^-$ " simgesi ile gösterilir.

$\mathbb{R}=\mathbb{R}^+\cup\mathbb{R}^-\cup\{0\}$ dir.



Gerçek Sayılar Kümesinde Toplama ve Çarpma İşleminin Özellikleri

Toplama İşleminin Özellikleri

Kapalılık Özelliği

Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $a + b \in \mathbb{R}$ dir. Bu özelliğe toplama işleminin **kapalılık özelliği** denir.

Değişme Özelliği

Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $a + b = b + a$ olur. Bu özelliğe toplama işleminin **değişme özelliği** denir.

Birleşme Özelliği

Her $a, b, c \in \mathbb{R}$ için $a + (b + c) = (a + b) + c$ olur. Bu özelliğe toplama işleminin **birleşme özelliği** denir.

Etkisiz (Birim) Eleman Özelliği

Her $a \in \mathbb{R}$ için $a + 0 = 0 + a = a$ olduğundan "0" toplama işleminin **etkisiz (birim)** elemanıdır.

Ters Eleman Özelliği

Her $a \in \mathbb{R}$ için $a + (-a) = (-a) + a = 0$ olduğundan a nın toplama işlemine göre tersi $-a$ olur.

Çarpma İşleminin Özellikleri

Kapalılık Özelliği

Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $a \cdot b \in \mathbb{R}$ olur. Bu özelliğe çarpma işleminin **kapalılık özelliği** denir.

Değişme Özelliği

Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $a \cdot b = b \cdot a$ olur. Bu özelliğe çarpma işleminin **değişme özelliği** denir.

Birleşme Özelliği

Her $a, b, c \in \mathbb{R}$ için $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ olur. Bu özelliğe çarpma işleminin **birleşme özelliği** denir.

Etkisiz (Birim) Eleman Özelliği

Her $a \in \mathbb{R}$ için $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ olduğundan çarpma işleminin **etkisiz (birim) elemanı** "1" olur.

Ters Eleman Özelliği

Her $a \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ için $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ olduğundan a nın çarpma işlemine göre **tersi** $\frac{1}{a}$ olur.

Yutan Eleman Özelliği

Her $a \in \mathbb{R}$ için $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ olduğundan çarpma işleminin **yutan elemanı** "0" olur.

Çarpma İşleminin Toplama İşlemi Üzerine Dağılma Özelliği

Her $a, b, c \in \mathbb{R}$ için $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ve $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ olur. Bu özelliğe çarpma işleminin toplama işlemi üzerine **soldan ve sağdan dağılma özelliği** denir.

Gerçek sayılar kümesinin her elemanına sayı doğrusunda bir nokta karşılık gelir.

Gerçek sayılar kümesinin elemanlarıyla gösterilen her sıralı ikili, kartezyen koordinat sisteminde bir noktaya karşılık gelir. Koordinat sistemi birbirine dik iki gerçek sayı doğrusunun sıfır noktasında kesişmesi ile elde edilmiştir.

Kartezyen koordinat sistemi $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nin geometrik gösterimidir. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ifadesi $\mathbb{R}^2$ ile de gösterilebilir.

9.3.2. Bölünebilme Kuralları

9.3.2.1. Tam Sayılarda Bölünebilme Kuralları

A, B, C, K birer doğal sayı ve $B \neq 0$ olmak üzere

A sayısının B sayısına bölünmesiyle elde edilen bölüm C ve kalan K ise bu ifade

$$\begin{array}{r|l} A & B \\ \cline{2-2} - & C \\ \hline K & \end{array}$$

veya $A = B \cdot C + K$ şeklinde gösterilebilir.

Burada $0 \leq K < B$ olmalıdır. Ayrıca $C > K$ olmak üzere B ve C çarpanları yer değiştirebilir. $K = 0$ ise A sayısı B ile kalansız bölünür.

2 ile Bölünebilme

Bir sayının birler basamağı çift ise bu sayı 2 ile tam bölünür. Sayı tek sayı ise sayının 2 ye bölümünden kalan 1 dir.

3 ile Bölünebilme

Bir doğal sayının rakamları toplamı 3 ün katı ise bu sayı 3 ile tam bölünür.

4 ile Bölünebilme

Bir doğal sayının son iki basamağının oluşturduğu iki basamaklı sayı 4 ün bir katı ise bu sayı, 4 ile tam bölünür.

5 ile Bölünebilme

Her doğal sayının 5 ile çarpımından elde edilen sayının birler basamağı 0 ya da 5 tir. Dolayısıyla birler basamağı 0 ya da 5 olan doğal sayılar 5 ile tam bölünür.

8 ile Bölünebilme

Sayının son üç basamağının oluşturduğu üç basamaklı sayı 8 in katı ise sayı, 8 ile tam bölünür.

9 ile Bölünebilme

Rakamları toplamı 9 un katı olan doğal sayılar, 9 ile tam bölünür. 9 a bölümünden kalan, sayının rakamları toplamının 9 a bölümünden kalana eşittir.

10 ile Bölünebilme

Bir doğal sayının birler basamağındaki rakam, 0 ise bu sayı 10 a tam bölünür. Aynı zamanda bir doğal sayının birler basamağındaki rakam sayının 10 a bölümünden kalana eşittir.

11 ile Bölünebilme

Bir doğal sayının 11 ile bölümünden elde edilen kalanı bulmak için dört basamaklı bir ABCD doğal sayısı

$$\begin{aligned} ABCD &= 1000 \cdot A + 100 \cdot B + 10 \cdot C + D \\ &= 1001 \cdot A - A + 99 \cdot B + B + 11 \cdot C - C + D \\ &= 11 \cdot 91 \cdot A + 11 \cdot 9 \cdot B + 11 \cdot C - A + B - C + D \\ &= \underbrace{11 \cdot (91 \cdot A + 9 \cdot B + C)}_{11 \text{ in katı}} - A + B - C + D \quad \text{şeklinde çözümlenir.} \end{aligned}$$

$-A + B - C + D$ sayısının 11 e bölümünden kalan, ABCD sayısının11 e bölümünden kalana eşittir. Kısaca sayının rakamları sağdan sola doğru +, −, +, −, … ile işaretlendirilerek toplanır. Bu toplamın 11 ile bölümünden kalan, o sayının 11 ile bölümünden kalana eşit olur.

Aralarında Asal Sayıların Çarpımı ile Oluşan Sayıya Bölünebilme

Aralarında asal çarpanların her birine bölünebilen bir doğal sayı, bu sayıların çarpımına da tam bölünür. Bu kuralla ilgili aşağıda verilen örnekleri inceleyiniz.

- $6 = 2 \cdot 3$ (2 ile 3 aralarında asaldır.)
  2 ve 3 ile tam bölünen sayılar 6 ile tam bölünür.
- $12 = 3 \cdot 4$ (3 ile 4 aralarında asaldır.)
  3 ve 4 ile tam bölünen sayılar 12 ile tam bölünür.
- $18 = 2 \cdot 9$ (2 ile 9 aralarında asaldır.)
  2 ve 9 ile tam bölünen sayılar 18 ile tam bölünür.
- $30 = 3 \cdot 10$ (3 ile 10 aralarında asaldır.)
  3 ve 10 ile tam bölünen sayılar 30 ile tam bölünür.

9.3.2.2. Tam Sayılarda EBOB ve EKOK

En Büyük Ortak Bölen (EBOB)

En az biri sıfırdan farklı iki veya daha fazla tam sayının pozitif ortak bölenlerinin en büyüğüne bu sayıların **en büyük ortak böleni** denir. Kısaca "EBOB" ile ifade edilir.

En Küçük Ortak Kat (EKOK)

En az biri sıfırdan farklı iki veya daha fazla tam sayının pozitif ortak katlarının en küçüğüne bu sayıların **en küçük ortak katı** denir. Kısaca "EKOK" ile ifade edilir.

EBOB ve EKOK un Bazı Özellikleri

a) a ve b sayma sayılarının çarpımı bu sayıların EBOB u ile EKOK unun çarpımına eşittir.
Bu özellik
$a \cdot b = EBOB(a, b) \cdot EKOK(a, b)$ olarak ifade edilir.

b) a ve b aralarında asal iki pozitif tam sayı olmak üzere

- $EBOB(a, b) = 1$
- $EKOK(a, b) = a \cdot b$ olur.

c) a ve b pozitif tam sayılarından biri diğerinin tam katı ise EBOB bu sayılardan küçük olana, EKOK ise büyük olana eşittir.

9.3.2.3. Gerçek Hayatta Periyodik Olarak Tekrar Eden Durumları İçeren Problemler

DÜŞÜNÜYORUM

Bir ilçede bulunan üç farklı lisenin beden eğitimi öğretmenleri, ilçedeki kapalı spor salonunda öğrencilerini voleybol turnuvasına hazırlamaktadır. Öğretmenler sırasıyla 3, 4 ve 6 günde bir spor salonunda çalışma yapmaktadır. Üçü birlikte ilk kez pazartesi günü öğrencileri çalıştırmaya başladığına göre tekrar üçü birlikte hangi gün öğrencileri çalıştırır? Düşünüp yorumlayınız.

9.3.3. Birinci Dereceden Denklemler ve Eşitsizlikler

9.3.3.1. Gerçek Sayılar Kümesinde Aralık Kavramı

Sayı doğrusu üzerinde birbirinden farklı iki noktanın arasındaki tüm gerçek sayılardan oluşan alt kümeye **aralık** adı verilir. Aralıklar, verilen kümeye uç noktalarının dâhil edilip edilmemesine bağlı olarak adlandırılır.

Aralık gösterimi **[a,b], (a,b), [a,b), (a,b]** ifadeleri kullanılarak yapılır. Bu gösterimlerdeki a ve b gerçek sayıları birer uç noktadır.

Uç noktaların aralığa dâhil edilmediği kümelere **açık aralık** denir.

$A=\{x \mid a < x < b \text{ ve } a, b, x \in \mathbb{R}\}$ kümesi bir açık aralık belirtir ve **(a,b)** ile ifade edilir. Sayı doğrusu üzerindeki gösterimi aşağıdaki gibidir.

Uç noktaların her ikisinin aralığa dâhil edildiği kümelere **kapalı aralık** denir.

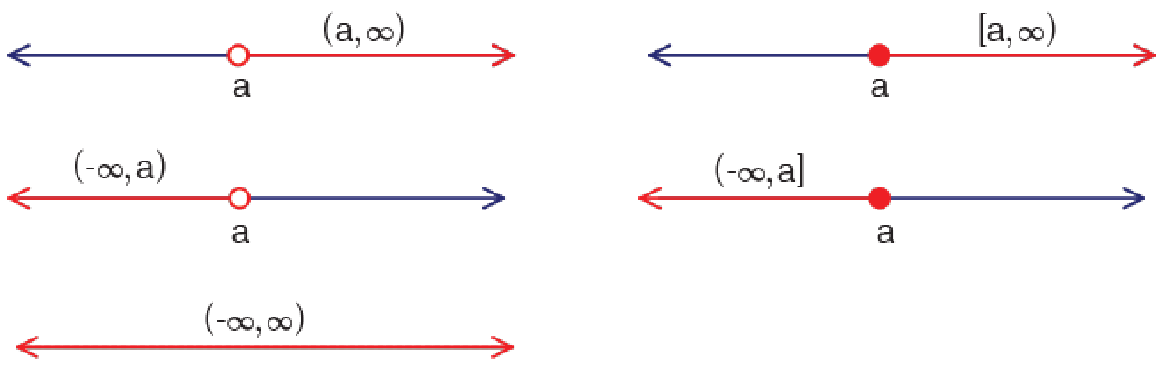
$A=\{x \mid a \leq x \leq b \text{ ve } a, b, x \in \mathbb{R}\}$ kümesi bir kapalı aralık belirtir ve **[a,b]** ile ifade edilir. Sayı doğrusu üzerindeki gösterimi aşağıdaki gibidir.

Uç noktalardan birinin dâhil edilmediği $a < x \leq b$ veya $a \leq x < b$ şeklinde ifade edilen kümelere **yarı açık aralık** denir ve aşağıdaki gibi gösterilir.

(a,b]

[a,b)

Uç noktalarından birinin ya da ikisinin sınırlandırılmadığı aralıklar aşağıdaki gibidir.



9.3.3.2. Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler ve Eşitsizliklerin Çözüm Kümesini Bulma

İçerisinde en az bir tane değişken bulunduran iki niceliğin birbirine eşitliğini ifade eden bağıntılara **denklem** adı verilir.

$a,b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax + b = 0$ genel gösterimi ile ifade edilebilen denklemlere **birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler** denir.

a ve b ye **denklemin katsayıları**, x e **değişken** adı verilir. Denklemin derecesi değişkeninin kuvvetine göre değişir.

a, b gerçek sayılar olmak üzere $a \cdot x + b = 0$ şeklindeki bir denklemde x değerine **denklemin kökü** adı verilir. Kökün kümesine de **çözüm kümesi** denir ve "**ÇK**" ile gösterilir.

1. $a \neq 0$ ise denklemi sağlayan yalnız bir tane x değeri vardır. $ÇK = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$ şeklinde gösterilir.
2. $a = 0$ ve $b = 0$ ise denklem $0 \cdot x + 0 = 0$ durumuna dönüşür. Bu durumda x değişkenine hangi gerçek sayı değeri verilirse verilsin eşitlik sağlanır. Yani çözüm kümesi gerçek sayılardır.
   $ÇK = \mathbb{R}$ şeklinde gösterilir.
3. $a = 0$ ve $b \neq 0$ ise denklem $0 \cdot x + b = 0$ durumuna dönüşür. Bu durumda x değişkenine hangi gerçek sayı değeri verilirse verilsin bu eşitlik doğru olmaz. Çözüm kümesi boş kümedir. $ÇK = \emptyset$ şeklinde gösterilir.

Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

İki niceliğin birbirinden küçük ya da büyük olma durumunu belirten bağıntılara **eşitsizlik** adı verilir. Eşitsizlikler " $<, \leq, >, \geq$ " sembolleri kullanılarak ifade edilir.

$a,b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere

$ax + b < 0$

$ax + b \leq 0$

$ax + b > 0$

$ax + b \geq 0$

şeklindeki eşitsizliklere **birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler** adı verilir.

Bir eşitsizliğin her iki tarafına aynı gerçek sayı eklenir ya da çıkarılırsa eşitsizlik değişmez.
a, b, c birer gerçek sayı olmak üzere $a < b$ ise
$a + c < b + c$ ve $a - c < b - c$ olur.

Eşitsizlikler taraf tarafa toplanabilir.

$$\begin{array}{r} a < x < b \\ + \quad c < y < d \\ \hline a + c < x + y < b + d \end{array}$$

Bir eşitsizliğin her iki tarafı aynı pozitif gerçek sayı ile çarpılır ya da bölünürse eşitsizlik yön değiştirmez.
a, b, c birer gerçek sayı ve $c > 0$ olmak üzere
$a < b$ ise $a \cdot c < b \cdot c$ ve $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ olur.

Bir eşitsizliğin her iki tarafı aynı negatif gerçek sayı ile çarpılır ya da bölünürse eşitsizlik yön değiştirir.
a, b, c birer gerçek sayı ve $c < 0$ olmak üzere
$a < b$ ise $a \cdot c > b \cdot c$ ve $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ olur.

$a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $a < b$, $c < d$ ise $a \cdot c < b \cdot d$ olur.

a ve b aynı işaretli ve sıfırdan farklı iki gerçek sayı olmak üzere
$a < b$ ise $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ olur.

9.3.3.3. Mutlak Değer İçeren Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler ve Eşitsizlikler

Bir gerçek sayının sayı doğrusu üzerindeki yerinin sıfır noktasına olan uzaklığına **bu sayının mutlak değeri** denir. x gerçek sayısının mutlak değeri "$|x|$" ile gösterilir.

Mutlak değer, $|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \text{ ise} \\ -x & , x < 0 \text{ ise} \end{cases}$ şeklinde tanımlanır.

Mutlak Değerin Özellikleri

1. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere çarpım durumundaki iki gerçek sayının mutlak değeri bu sayıların mutlak değerleri çarpımı olarak yazılabilir.
   $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ olur.
2. $x, y \in \mathbb{R}$ ve $y \neq 0$ olmak koşuluyla bölüm durumundaki iki gerçek sayının mutlak değeri bu sayıların mutlak değerlerinin bölümü olarak yazılabilir.
   $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ dir.

3. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|x| = |-x|$ olur.
Doğruluğu $|-x| = |-1 \cdot x| = |-1| \cdot |x| = |x|$ olarak gösterilir.

4. $x \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için $|x^n| = |x|^n$ olur.

5. İki gerçek sayının toplamının mutlak değeri sayıların ayrı ayrı mutlak değerlerinin toplamından küçük veya eşittir. Bu durum
$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|x + y| \leq |x| + |y|$ olarak ifade edilir.

Mutlak Değerli Denklemler

$|x| = 7$ denkleminde x değişkeni 7 ve -7 değerlerini alır.

$|x| = -7$ denkleminde ise x değişkeni herhangi bir gerçek sayı değeri alamaz. Bu durumda çözüm kümesi boş kümedir. Bu durumlar aşağıdaki gibi genellenebilir.

$x, a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

- $a \geq 0$ için $|x| = a$ ise $x = a$ veya $x = -a$ olur.
- $a < 0$ için $|x| = a$ ise denklemin çözüm kümesi boş kümedir ve $ÇK = \varnothing$ olarak yazılır.

a ve b gerçek sayıları arasındaki uzaklık k birim ise bu durum $|a - b| = k$ ile gösterilir.

Mutlak Değerli Eşitsizlikler

$x \in \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$ olur.

$x \in \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $|x| \geq a \iff x \geq a$ veya $x \leq -a$ olur.

$x \in \mathbb{R}$ ve $a, b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$a \leq |x| \leq b \iff (a \leq x \leq b$ veya $-b \leq x \leq -a)$ olur.

9.3.3.4. Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklemler ve Eşitsizlikler

$a \neq 0$, $b \neq 0$ ve a, b, c $\in \mathbb{R}$; x ile y değişkenler olmak üzere $ax+by = c$ şeklindeki denklemlere **birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemler** adı verilir. Bu denklemi sağlayan (doğrulayan) x ve y gerçek sayıları ise (x, y) sıralı ikilisi olarak yazılır ve bu sıralı ikiliye **denklemin çözüm kümesinin bir elemanı** denir.

$ax+by = c$ birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemlerin grafikleri doğru belirtir.

a, b, c, d, m ve n gerçek sayılar olmak üzere
$ax + by = m$
$cx + dy = n$ şeklinde verilen aynı değişkenden oluşan ve birden fazla denklem bulunduran ifadelere **birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi** adı verilir.

Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemlerinin çözüm kümesini bulmak için yok etme, yerine koyma ve grafik çizimi gibi yöntemler kullanılır.

Yok Etme Yöntemi

Denklem sisteminde bilinmeyenlerden herhangi birinin katsayısı diğer denklemdeki aynı bilinmeyenin katsayısıyla mutlak değerce eşit, işaret bakımından ters olacak şekilde düzenlenir. Taraf tarafa toplama yoluyla seçilen değişken yok edilir.

Yerine Koyma Yöntemi

Denklem sistemindeki denklemlerin herhangi birinden herhangi bir değişken eşitliğin bir tarafında yalnız bırakılır ve diğer denklemde yerine yazılır.

Grafik Yorumu

Birinci dereceden iki bilinmeyenli bir denklemin çözüm kümesini oluşturan sıralı ikililer analitik düzlemde bir doğru belirtir.

Denklem sistemini oluşturan denklemlerin belirttiği doğruların kesim noktası ya da noktaları bu denklem sisteminin çözüm kümesini oluşturur.

$$\left.\begin{array}{l} ax + by + m = 0 \\ cx + dy + n = 0 \end{array}\right\}$$ denklem sisteminde her bir denklem bir doğru belirtir.

1. $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{m}{n}$ ise doğrular çakışıktır ve çözüm kümesi sonsuz elemanlıdır.

2. $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \neq \frac{m}{n}$ ise doğrular paraleldir ve çözüm kümesi boş kümedir.

3. $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ ise doğrular tek noktada kesişir ve çözüm kümesi bir elemanlıdır.

a, b, c birer gerçek sayı , a ve b sıfırdan farklı olmak üzere
$ax + by \le c$
$ax + by < c$
$ax + by \ge c$
$ax + by > c$
şeklindeki ifadelere **birinci dereceden iki bilinmeyenli eşitsizlikler** denir.

Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemlerde olduğu gibi bu eşitsizliğin çözüm kümesi de (x, y) şeklindeki sıralı ikililerden oluşur. Eşitsizliği doğru yapan sonsuz sayıda sıralı ikili bulunacağından çözüm kümesi analitik düzlemde boyalı bölgeler çizilerek gösterilir.

Eşitsizlik işaretlerinin "≤" ya da "≥" verildiği durumlarda doğru grafiği kesiksiz çizgi ile çizilir. "<" ya da ">" durumunda ise doğru grafiği kesikli çizilmelidir.

Çizilen doğrunun analitik düzlemi iki bölgeye ayırdığı görülür. Bu bölgelerden hangisinin çözüm kümesinin elemanlarını bulundurduğunu anlamak için ayrılan bölgelerin herhangi birinden herhangi bir nokta seçilir. Bu nokta verilen eşitsizlikte yerine koyulur. Elde edilen ifade doğru ise noktanın bulunduğu bölge, yanlış ise diğer bölge boyanarak çözüm kümesinin elemanları gösterilmiş olur.

9.3.4. Üslü İfadeler ve Denklemler

9.3.4.1. Üslü İfade İçeren Denklemler

Gerçek Sayıların Tam Sayı Kuvvetleri

Bir gerçek sayının kendisi ile birden çok çarpımını göstermek için üslü ifadeler kullanılır.

$a \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere a^n ifadesine **üslü ifade** adı verilir. a^n ifadesinde a sayısına **taban** , n ye ise **üs** veya **kuvvet** denir.

$$a^n = \underbrace{a.a.a.a.a...a}_{n \text{ tane}}$$ olarak hesaplanır.

Bir Gerçek Sayının Negatif Kuvveti

$x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

- $x^{-1} = \frac{1}{x}$ olur.
- $x^{-n} = (x^{-1})^n = \left(\frac{1}{x}\right)^n$ olur.

Üslü Sayılarda Toplama ve Çıkarma İşlemi

Hem tabanı hem de üssü aynı olan üslü sayılar, ortak paranteze alınarak toplanabilir veya çıkartılabilir.

$a, b, c, x \in \mathbb{R}$ ve $m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$a \cdot x^m + b \cdot x^m - c \cdot x^m = (a + b - c) \cdot x^m$ olur.

Üslü Sayılarda Çarpma ve Bölme İşlemi

Tabanları aynı olan üslü sayılar çarpılabilir.

$x \in \mathbb{R}$, ve $a, b \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$ olur.

$x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ ve $a, b \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ olur.

Üslü İfadelerle İlgili Bazı Özellikler

1. $x \in \mathbb{R}$ ve $x \neq 0$ olmak üzere $x^0 = 1$ olur.

2. $x, a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x^1 = x$ ve $1^a = 1$ olur.

3. $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $a, b \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $(x^a)^b = (x^b)^a = x^{a \cdot b}$ olur.

4. $x, y \in \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $x^a \cdot y^a = (x \cdot y)^a$ olur.

5. $x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$ ve $a \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\dfrac{x^a}{y^a} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^a$ olur.

Üslü Denklemler

1. $x \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ ve $m, n \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere $x^m = x^n$ ise $m = n$ olur.
Yani tabandaki sayının −1, 0 ya da 1 olmadığı üslü denklemlerde eşitliğin her iki tarafındaki tabanlar eşit ise üsler de eşittir.

2. $x, y \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ ve $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ olmak üzere
$x^n = y^n$ denkleminde
a) n tek ise $x = y$
b) n çift ise $|x| = |y|$ olur.

9.3.4.2. Köklü İfadeleri İçeren Denklemler

Köklü Sayılar

$n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$ ve $a, x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x^n = a$ eşitliğini sağlayan x değerlerine **a nın n. kuvvetten kökü** denir ve" $x = \sqrt[n]{a}$ " ile gösterilir.

$n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$\sqrt[2n+1]{a}$ ifadesinin tanımlı olması için $a \in \mathbb{R}$ olmalıdır.

$\sqrt[2n]{a}$ ifadesinin tanımlı olması için $a \geq 0$ olmalıdır.

$x \in \mathbb{R}^+$ ve $n, m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ olur.

Yani her köklü sayı aynı zamanda bir üslü sayı olarak yazılabilir.

$n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq 2$ olmak üzere $x \in \mathbb{R}$ için

- n tek ise $\sqrt[n]{x^n} = x$
- n çift ise $\sqrt[n]{x^n} = |x|$

olarak kök dışına çıkarılır.

Köklü Sayılarda Toplama ve Çıkarma İşlemleri

$n \geq 2$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun. $x \in \mathbb{R}^+$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$a \cdot \sqrt[n]{x} + b \cdot \sqrt[n]{x} = (a+b) \cdot \sqrt[n]{x}$ olur.

Kök dereceleri ve kök içleri aynı olan iki köklü ifadenin katsayıları toplanabilir ya da çıkarılabilir.

Köklü İfadelerde Çarpma ve Bölme İşlemleri

Kök dereceleri aynı olan köklü ifadeler birbiriyle çarpılabilir veya bölünebilir.

$a, b \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq 2$ olmak üzere

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

$b \neq 0$ olmak koşuluyla $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ olur.

Kök Derecesini Genişletme veya Sadeleştirme

$x \in \mathbb{R}^+$, $m \in \mathbb{Z}$; $n, k \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq 2$ olmak üzere $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n \cdot k]{x^{m \cdot k}} = \sqrt[\frac{n}{k}]{x^{\frac{m}{k}}}$ tir.

Bir köklü ifadenin hem kök derecesi hem de kök içindeki ifadenin üssü aynı pozitif tam sayı ile çarpılır ya da bölünürse değeri değişmez.

Köklü İfadelerle İlgili Bazı Özellikler

1. $x \in \mathbb{R}^+$, $m, n \in \mathbb{Z}$ ve $n \geq 2$ olmak üzere $\left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$ olur.

2. $x, y \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq 2$ olmak üzere

- $\sqrt[n]{x^n \cdot y} = x \cdot \sqrt[n]{y}$ olur.
- $x \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x^n \cdot y}$ olur.

3. $x \in \mathbb{R}^+, m, n \in \mathbb{Z}^+, m \geq 2$ ve $n \geq 2$ olmak üzere $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$ olur.

4. $x \in \mathbb{R}^+, m, n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq 2$ olmak üzere $\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$ ifadesinin paydasını bir rasyonel sayı yapmak için hem pay hem de payda $\sqrt[n]{x^{n-m}}$ ile çarpılır.

5. $x, y \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = x - y$ olduğundan $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ ile $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ nin çarpımı bir rasyonel sayıdır. $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$ olduğundan $\sqrt{x}$ ile $\sqrt{x}$ in çarpımı bir rasyonel sayıdır.

$\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}}$ durumundaki köklü ifadelerde $a = m + n$ ve $b = m \cdot n$ olmak üzere $\sqrt{a + 2\sqrt{b}} = \sqrt{m} + \sqrt{n}$ ve $\sqrt{a - 2\sqrt{b}} = \sqrt{m} - \sqrt{n}$ $(m > n)$ şeklinde yazılır.

9.3.5. Denklemler ve Eşitsizliklerle İlgili Uygulamalar

9.3.5.1. Oran ve Orantı

Aynı türden iki çokluğun bölme yoluyla karşılaştırılmasına **oran** denir. En az biri sıfırdan farklı a ve b gerçek sayıları için a nın b ye oranı, $\frac{a}{b}$ veya a : b şeklinde gösterilir.

İki ya da daha fazla oranın birbirine eşitlenmesine **orantı** denir.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ eşitliği bir orantı belirtir ve " a değerinin b değerine oranı, c değerinin d değerine oranına eşittir." şeklinde okunur.

Sabit bir k değeri için $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ eşitliğindeki k değerine **orantı sabiti** denir.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ eşitliği $a : b = c : d$ şeklinde de yazılabilir. Bu eşitlikte b ve c değerleri **içler**, a ve d değerleri **dışlar** olarak adlandırılır.

Orantının Özellikleri

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ orantısında

1. İçler çarpımı ile dışlar çarpımı birbirine eşittir. Yani $a \cdot d = b \cdot c$ olur.

2. İçteki veya dıştaki terimler yer değiştirebilir.

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ $\qquad$ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

3. Oranların paylarının toplamı, paydalarının toplamına bölünürse orantı sabiti değişmez.

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \Rightarrow \frac{a+c}{b+d}=k$

4. $m \neq 0$ ve $n \neq 0$ olmak üzere oranların biri m sabit sayısıyla diğeri n sabit sayısıyla genişletilip pay ve paydalar kendi aralarında toplanırsa orantı sabiti değişmez.

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \Rightarrow \frac{m \cdot a}{m \cdot b}=\frac{n \cdot c}{n \cdot d}=k \Rightarrow \frac{m \cdot a+n \cdot c}{m \cdot b+n \cdot d}=k$

5. Oranlar çarpılırsa orantı sabitinin karesi elde edilir.

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \Rightarrow \frac{a \cdot c}{b \cdot d}=k^2$

Doğru Orantı

İki çokluktan biri artarken diğeri de aynı oranda artıyorsa ya da biri azalırken diğeride aynı oranda azalıyorsa bu çokluklara **doğru orantılıdır** denir.

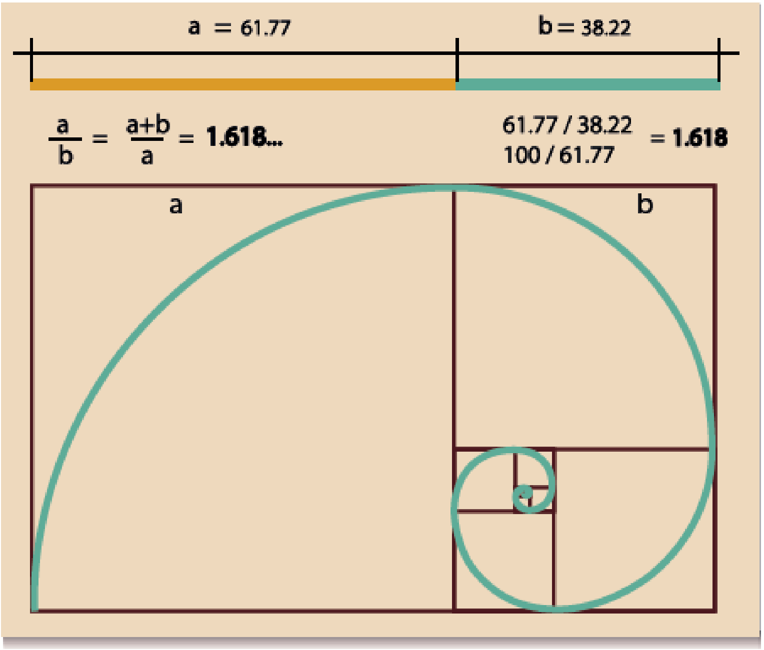
a ve b doğru orantılı ise $\frac{a}{b}=k$ şeklinde gösterilir(k orantı sabitidir.).

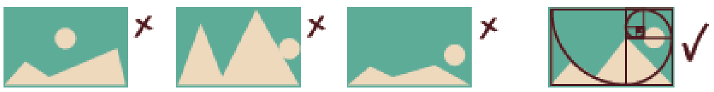
Ters Orantı

İki çokluktan biri artarken diğeri aynı oranda azalıyor ya da biri azalırken diğeri aynı oranda artıyor ise bu çokluklara **ters orantılıdır** denir.

a ve b ters orantılı ise $a \cdot b = k$ (k orantı sabiti) şeklinde gösterilir.

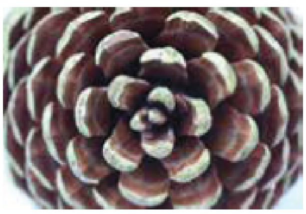
Altın Oran Nedir?





Uzunluğu ℓ kadar olan bir AB doğru parçası alalım ve bunu bir C noktası yardımıyla uzunlukları a ve b kadar olan AC ve BC gibi iki doğru parçasına ayıralım. $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$ eşitliğini sağlayan $\frac{a}{b}$ oranının pozitif değerine **altın oran** adı verilir. Bu oran $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ irrasyonel sayısına eşit olup yaklaşık değeri 1,618 dir.

Altın oranı bu kadar ilginç yapan şey doğada canlı cansız bir çok varlıkta rastlanmasıdır.



İdeal ölçülere sahip bir insan vücudunda sayısız altın oran örneği bulunmaktadır.
Omuzdan parmak ucuna olan mesafe ile dirsekten parmak ucuna olan mesafe arasındaki oran, 1,618 dir.
Çam kozalaklarında, sağ el ve sol el yönlerinde gelişen spiraller üzerindeki taneciklerin birbirlerine oranı, 1,618 dir.
Ağız boyunun burun genişliğine oranı, 1,618dir.
Orta parmağın serçe parmağına oranı, 1,618 dir.
Arı kovanındaki dişi arı ile erkek arı sayıları arasındaki oran, 1,618 dir.
Ayçiçeğinde sol el yönünde yer alan 55 çekirdek ile sağ el yönünde yeralan 89 çekirdek vardır. Bunların birbirine oranı 1,618 olur. Bu sayı altın orana oldukça yakındır.

Oran Orantı Problemleri

a, b, c ve x gerçek sayılar olmak üzere

$\left.\begin{matrix} a & \nearrow\!\!\!\!\swarrow\ \ b \\ c & \nwarrow\!\!\!\!\searrow\ \ x \end{matrix}\right\}$ ifadesinde a ile b ve c ile x arasında doğru orantı varsa $a \cdot x = b \cdot c$ olur.

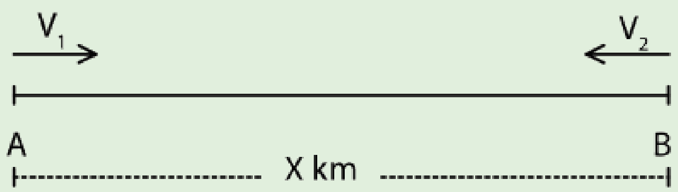
$\left.\begin{matrix} a \longleftrightarrow b \\ c \longleftrightarrow x \end{matrix}\right\}$ ifadesinde a ile b ve c ile x arasında ters orantı varsa $a \cdot b = c \cdot x$ olur.

9.3.5.2. Denklemler ve Eşitsizlikler ile İlgili Problemler

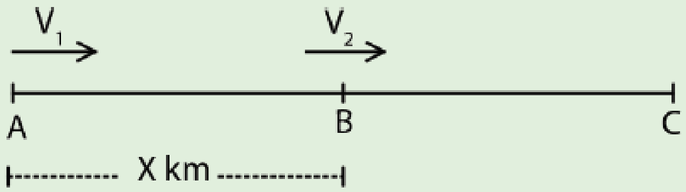
Sözel İfade	Cebirsel İfade
Bir sayının 5 fazlası	$x + 5$
Ali'nin yaşının 2 katı	$2x$
Veysel'in cebindeki parasının 3 katının 10 eksiği	$3x - 10$
Bir sayının 3 fazlasının $\frac{2}{5}$ inin 4 fazlası	$\frac{2}{5} \cdot (x+3) + 4$
Gökhan ile Cenk'in yaşları toplamı 20 dir.	$x + y = 20$
Kasadaki meyvelerin yarısının 6 fazlası	$\frac{x}{2} + 6$
2 katının 4 eksiği 5 ten küçük sayılar	$2x - 4 < 5$
Karesi ile kendisinin toplamı 20 olan sayılar	$x^2 + x = 20$
Bir sayının 2 katının 3 fazlasının üçte biri 7 den büyük veya eşit olan sayılar	$\frac{2x+3}{3} \geq 7$

Hareket Problemleri

X yol, V hız, t zaman olmak üzere sabit V hızıyla t saatte hareket eden bir aracın alacağı yol $\mathbf{X = V \cdot t}$ formülü ile bulunur.



Yukarıdaki şekilde A ve B noktalarından aynı anda birbirine doğru V_1 ve V_2 hızlarıyla hareket eden araçlar, t saat sonunda karşılaşırlarsa X yolu, $\mathbf{X = (V_1 + V_2) \cdot t}$ formülü ile bulunur.

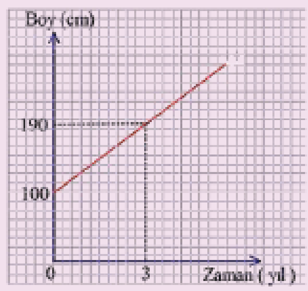
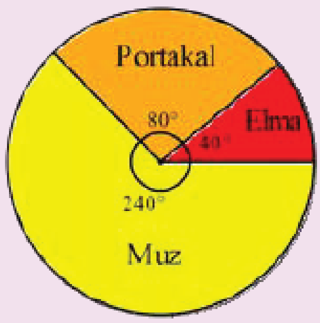
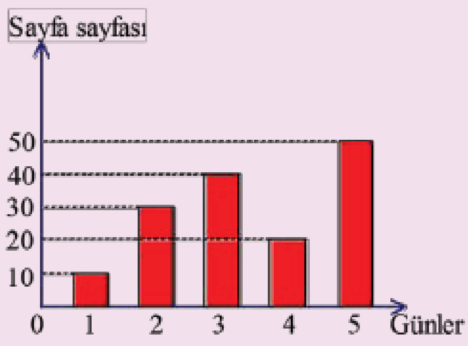


Yukarıdaki şekilde A ve B noktalarından aynı anda aynı yöne V_1 ve V_2 ($V_1 > V_2$) hızlarıyla hareket eden araçlar, t saat sonunda C noktasında yan yana gelirse X yolu, $\mathbf{X = (V_1 - V_2) \cdot t}$ formülü ile bulunur.

Bir aracın belirli bir yol boyunca ortalama hızı V_{ort} olmak üzere

$$V_{ort} = \frac{\text{Toplam Yol}}{\text{Toplam Zaman}}$$ formülü ile hesaplanır.

Aşağıdaki tabloda sözel ifadelerin grafiksel gösterimi ile ilgili örnekler verilmiştir.

<table>
<tr><th>Sözel İfade</th><th>Grafiksel Gösterim</th></tr>
<tr><td>“Boyu 100 cm iken dikilen bir fidanın 3 yıl sonundaki boyu 190 cm dir.” ifadesine uygun grafik gösterimi yandaki gibidir.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Bir manavda 10 kg elma, 20 kg portakal ve 60 kg muz vardır. Her bir meyve türünün miktarının tüm meyve miktarına oranını gösteren dairesel grafik gösterimi yandaki gibidir.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Serkan’ın 5 gün boyunca okuduğu bir kitabın sayfa sayıları sırasıyla 10, 30, 40, 20 ve 50 dir. Bu ifadenin sütun grafiği ile gösterimi yandaki gibidir.</td><td>
</td></tr>
</table>