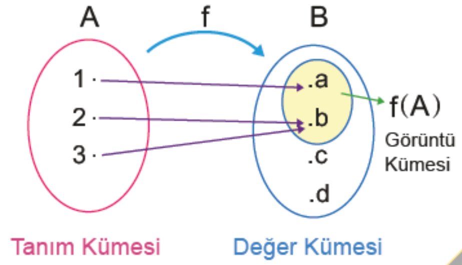
2.1. GERÇEK SAYI DİZİLERİ

2.1.1. Dizi ve Fonksiyon Kavramları Arasındaki İlişki

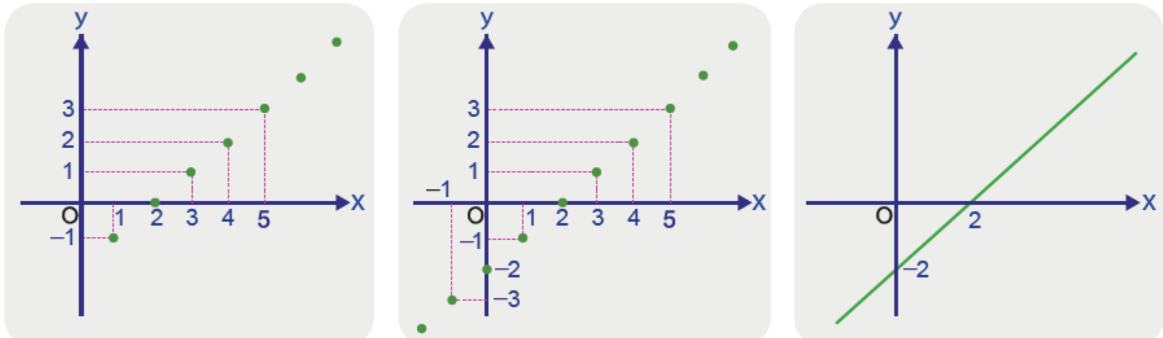
HATIRLATMA

A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere A kümesinin her bir elemanını, B kümesinin bir ve yalnız bir elemanı ile eşleyen ilişkiye A dan B ye tanımlı bir **fonksiyon** denir. f, g, h, ... harflerinden birisi ile $f: A \rightarrow B$ biçiminde gösterilir.



Aşağıda tanım ve değer kümeleri verilen fonksiyonların grafiklerini inceleyiniz.

$f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x - 2$ $\quad g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R},\ g(x) = x - 2$ $\quad h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},\ h(x) = x - 2$



Yukarıda grafikleri verilen f, g ve h fonksiyonları incelendiğinde tanım kümesi pozitif tam sayılar kümesi olan $f(x)$ fonksiyonunda

$$\mathbf{f(1) = -1,\ f(2) = 0,\ f(3) = 1,\ f(4) = 2,\ \ldots,\ f(n) = n - 2, \ldots}$$

gibi değerler almıştır. Pozitif tam sayılar kümesinden gerçek sayılar kümesine tanımlanan her fonksiyona **gerçek sayı dizisi** ya da kısaca **dizi** denir. Diziler genel olarak (a_n) ile gösterilir.

$n \in \mathbb{Z}^+$ için $f(n) = a_n$ ifadesine dizinin **n. terimi** veya **genel terimi** denir. Genel terimi verilmeyen sayı grupları dizi belirtmez.

$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ dizisinde $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ gerçek sayılarına **dizinin terimleri** denir.

Yukarıda verilen $f(x)$ fonksiyonu genel terimi a_n olan bir dizi olarak ifade edilirse $a_n: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R},\ (a_n) = (n - 2)$ biçiminde tanımlanır.

$f(1) = \mathbf{a_1 = -1}$ (a_1 dizinin birinci terimi)
$f(2) = \mathbf{a_2 = 0}$ (a_2 dizinin ikinci terimi)
$f(3) = \mathbf{a_3 = 1}$ (a_3 dizinin üçüncü terimi)
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$
$f(n) = \mathbf{a_n = n - 2}$ (a_n dizinin n inci terimi) olur.

$k \in \mathbb{Z}^+$ ve $A_k = \{1,2,3,...,k\} \subseteq \mathbb{Z}^+$ olmak üzere tanım kümesi A_k olan her fonksiyona **sonlu dizi** denir.

$c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için genel terimi $a_n = c$ olan diziye **sabit dizi** denir ve $\mathbf{a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n = c}$ olur.

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $a_n = b_n$ oluyorsa (a_n) ve (b_n) dizilerine **eşit diziler** denir ve $\mathbf{(a_n) = (b_n)}$ şeklinde gösterilir.

2.1.2. Genel Terimi veya İndirgeme Bağıntısı Verilen Bir Sayı Dizisinin Terimleri

Bir terimi kendinden önceki bir veya birkaç terim cinsinden tanımlanabilen dizilere **indirgemeli dizi**, tanımlama bağıntısına da **indirgeme bağıntısı** denir.

2.1.3. Aritmetik, Geometrik Diziler ve Özellikleri

Toplam Sembolü $\left(\sum\right)$

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $f(k) = a_k$, $r \leq n$ ve $r, n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\sum_{k=r}^{n} \mathbf{a_k} = \mathbf{a_r + a_{r+1} + a_{r+2} + ... + a_n} \text{ olur.}$$

Bu ifadede k ye **indis** ya da **değişken**, r ye **alt sınır**, n ye ise **üst sınır** denir.

Aritmetik Diziler ve Özellikleri

Ardışık terimleri arasındaki farkın sabit olduğu dizilere **aritmetik dizi** denir.

(a_n) aritmetik dizisinde

$$\mathbf{a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = ... = a_{n+1} - a_n = d}$$

olacak şekilde bir d gerçek sayısı vardır. Bu d sayısına **aritmetik dizinin ortak farkı** denir.

İlk terimi a_1 ve ortak farkı d olan bir (a_n) aritmetik dizisinin genel terimi

$$\mathbf{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d} \text{ olur.}$$

(a_n) aritmetik dizisinin ardışık terimleri arasındaki fark sabit ve d olduğundan

$$\left.\begin{aligned} \cancel{a_2} - a_1 &= d \\ \cancel{a_3} - \cancel{a_2} &= d \\ \cancel{a_4} - \cancel{a_3} &= d \\ &\vdots \\ + \quad a_n - \cancel{a_{n-1}} &= d \end{aligned}\right\} \text{(Elde edilen } n-1 \text{ tane eşitlik taraf tarafa toplanır.)}$$

$$a_n - a_1 = \underbrace{d + d + ... + d}_{n-1 \text{ tane}} \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

ÖZELLİK 1

Bir aritmetik dizide $p \in \mathbb{Z}^+$ ve $p < n$ olmak üzere

$$\mathbf{a_n = a_p + (n - p) \cdot d} \text{ olur.}$$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)\cdot d \\ -\quad a_p &= a_1 + (p-1)\cdot d \end{aligned}\right\} \text{(Eşitlikler taraf tarafa çıkarılır.)}$$

$$a_n - a_p = \cancel{a_1} - \cancel{a_1} + (n-1)\cdot d - (p-1)\cdot d$$
$$a_n - a_p = n\cdot d - \cancel{d} - p\cdot d + \cancel{d}$$
$$a_n - a_p = (n-p)\cdot d$$
$$a_n = a_p + (n-p)\cdot d$$

ÖZELLİK 2

Bir aritmetik dizinin n. terimi a_n, p. terimi a_p olmak üzere bu dizinin ortak farkı

$$\mathbf{d = \frac{a_n - a_p}{n - p}} \text{ olur.}$$

$$a_n = a_p + (n-p)\cdot d \Rightarrow a_n - a_p = (n-p)\cdot d \Rightarrow d = \frac{a_n - a_p}{n-p}$$

ÖZELLİK 3

Sonlu bir aritmetik dizide baştan ve sondan eşit uzaklıkta bulunan terimlerin toplamı birbirine eşittir. $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ dizisinde

$$\mathbf{a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots = a_k + a_{n-k+1}} \text{ olur.}$$

$$a_1 + a_n = a_1 + a_1 + (n-1)\cdot d = 2a_1 + (n-1)\cdot d$$
$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_1 + (n-2)\cdot d = 2a_1 + (n-1)\cdot d$$
$$\vdots$$
$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + (k-1)\cdot d + a_1 + (n-k+1-1)\cdot d = 2a_1 + (n-1)\cdot d$$

SONUÇ

Bir aritmetik dizide k, p, s, $t \in \mathbb{Z}^+$ için $k + p = s + t$ ise $a_k + a_p = a_s + a_t$ olur.

ÖZELLİK 4

Bir aritmetik dizide her terim kendisinden eşit uzaklıktaki terimlerin aritmetik ortalamasına eşittir. $k < p$ için

$$\mathbf{a_p = \frac{a_{p+k} + a_{p-k}}{2}} \text{ olur.}$$

$$a_{p+k} + a_{p-k} = a_1 + (p+k-1)\cdot d + a_1 + (p-k-1)\cdot d$$
$$a_{p+k} + a_{p-k} = 2a_1 + (p + \cancel{k} - 1 + p - \cancel{k} - 1)\cdot d$$
$$a_{p+k} + a_{p-k} = 2a_1 + 2(p-1)\cdot d$$
$$a_{p+k} + a_{p-k} = 2\underbrace{(a_1 + (p-1)\cdot d)}_{a_p}$$
$$a_{p+k} + a_{p-k} = 2a_p$$
$$a_p = \frac{a_{p+k} + a_{p-k}}{2}$$

Bir Aritmetik Dizinin İlk n Teriminin Toplamı

Ortak farkı d olan bir aritmetik dizinin ilk n teriminin toplamı S_n ile gösterilirse

$$\mathbf{S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)\cdot d)}$$
$$= \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{2}}(\mathbf{a_1 + a_n}) \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \\
&= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-1)d) \\
&= \underbrace{(a_1 + a_1 + a_1 + \ldots + a_1)}_{n \text{ tane}} + \underbrace{(d + 2d + \ldots + (n-1)d)}_{(1+2+\ldots+n-1)\cdot d} \\
&= n\cdot a_1 + \frac{(n-1)\cdot n}{2}\cdot d \\
&= \frac{2n\cdot a_1 + (n-1)\cdot n\cdot d}{2} \\
&= \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)\cdot d) \\
&= \frac{n}{2}(a_1 + \overbrace{a_1 + (n-1)\cdot d}^{a_n}) \\
&= \frac{n}{2}(a_1 + a_n)
\end{aligned}$$

Uyarı

S_n bir (a_n) dizisinin ilk n teriminin toplamı olmak üzere

- $\mathbf{S_{n+1} - S_n} = (\cancel{\mathbf{a_1}} + \cancel{\mathbf{a_2}} + \cancel{\mathbf{a_3}} + \ldots + \cancel{\mathbf{a_n}} + \mathbf{a_{n+1}}) - (\cancel{\mathbf{a_1}} + \cancel{\mathbf{a_2}} + \cancel{\mathbf{a_3}} + \ldots + \cancel{\mathbf{a_n}})$

  $= \mathbf{a_{n+1}}$ olur.

- $p \in \mathbb{Z}^+$ ve $p < n$ olmak üzere

  $\mathbf{S_n - S_p} = (\cancel{\mathbf{a_1}} + \cancel{\mathbf{a_2}} + \ldots + \cancel{\mathbf{a_p}} + \mathbf{a_{p+1}} + \mathbf{a_{p+2}} + \ldots + \mathbf{a_n}) - (\cancel{\mathbf{a_1}} + \cancel{\mathbf{a_2}} + \ldots + \cancel{\mathbf{a_p}})$

  $= \mathbf{a_{p+1}} + \mathbf{a_{p+2}} + \ldots + \mathbf{a_n}$ olur.

Geometrik Diziler ve Özellikleri

Ardışık terimleri arasındaki oranı sabit olan dizilere **geometrik dizi** denir.

Bir (a_n) geometrik dizisinde $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$ $(a_n \neq 0)$ ise r gerçek sayısına (a_n) geometrik dizisinin **ortak çarpanı** denir. İlk terimi a_1 ve ortak çarpanı r olan (a_n) geometrik dizisinin genel terimi

$$\mathbf{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}} \text{ olur.}$$

(a_n) geometrik dizisinin ardışık terimleri arasındaki oran sabit ve r olduğundan

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \Rightarrow a_{n+1} = a_n \cdot r$$

$$\left.\begin{aligned} \cancel{a_2} &= a_1 \cdot r \\ \cancel{a_3} &= \cancel{a_2} \cdot r \\ \cancel{a_4} &= \cancel{a_3} \cdot r \\ &\vdots \\ \times \quad a_n &= \cancel{a_{n-1}} \cdot r \end{aligned}\right\} \text{(Elde edilen } n-1 \text{ tane eşitlik taraf tarafa çarpılır.)}$$

$$a_n = a_1 \cdot \underbrace{r \cdot r \cdot \ldots \cdot r}_{n-1 \text{ tane}}$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

ÖZELLİK 1

Ortak çarpanı r olan (a_n) geometrik dizisinde $1 \le k < n$ ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$\mathbf{a_n = a_k \cdot r^{n-k}} \text{ olur.}$$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= a_1 \cdot r^{n-1} \\ a_k &= a_1 \cdot r^{k-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{a_n}{a_k} = \frac{\cancel{a_1} \cdot r^{n-1}}{\cancel{a_1} \cdot r^{k-1}} = r^{n-k} \quad \text{(Eşitlikler taraf tarafa bölünür.)}$$

$$\Rightarrow a_n = a_k \cdot r^{n-k}$$

ÖZELLİK 2

Sonlu bir geometrik dizide baştan ve sondan eşit uzaklıkta bulunan terimlerin çarpımı birbirine eşittir.

$$\mathbf{a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = \ldots = a_k \cdot a_{n-k+1}}$$

$$a_1 \cdot a_n = a_1 \cdot a_1 \cdot r^{n-1} = a_1^2 \cdot r^{n-1}$$

$$a_2 \cdot a_{n-1} = a_1 \cdot r \cdot a_1 \cdot r^{n-2} = a_1^2 \cdot r^{n-1}$$

$$\vdots$$

$$a_k \cdot a_{n-k+1} = a_1 \cdot r^{k-1} \cdot a_1 \cdot r^{n-k} = a_1^2 \cdot r^{n-1}$$

ÖZELLİK 3

Pozitif terimli bir geometrik dizide $k > p$ için k. terim a_k ve p. terim a_p olmak üzere dizinin ortak çarpanı

$$\mathbf{r} = \sqrt[k-p]{\frac{a_k}{a_p}} \text{ olur.}$$

$$a_k = a_p \cdot r^{k-p} \Rightarrow r^{k-p} = \frac{a_k}{a_p} \quad \text{(Her iki tarafın } (k-p)\text{. dereceden kökü alınır.)}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt[k-p]{\frac{a_k}{a_p}}$$

İlk terimi a_1 ve ortak çarpanı r olan (a_n) geometrik dizisinin ilk n teriminin toplamı

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r} \text{ olur.}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \Rightarrow S_n = a_1 + a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3 + \ldots + a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$\Rightarrow r \cdot S_n = a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3 + a_1 \cdot r^4 + \ldots + a_1 \cdot r^n$$

$$\begin{array}{rl} S_n = & a_1 + \cancel{a_1 \cdot r} + \cancel{a_1 \cdot r^2} + \cancel{a_1 \cdot r^3} + \ldots + \cancel{a_1 \cdot r^{n-1}} \\ - \quad r \cdot S_n = & \cancel{a_1 \cdot r} + \cancel{a_1 \cdot r^2} + \cancel{a_1 \cdot r^3} + \cancel{a_1 \cdot r^4} + \ldots + a_1 \cdot r^n \\ \hline \end{array}$$

$$S_n - r \cdot S_n = a_1 - a_1 \cdot r^n$$

$$(1-r) \cdot S_n = a_1 \cdot (1-r^n)$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$$

Fibonacci Dizisi

İlk iki terimi 1 ve bundan sonraki her terimi kendinden önceki iki teriminin toplamı olan diziye **Fibonacci dizisi** denir.

Fibonacci dizisi $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ olmak üzere $\mathbf{F_n = F_{n-1} + F_{n-2}}$ $(n > 2,\ n \in \mathbb{Z})$ indirgeme bağıntısı ile tanımlanabilir. Buna göre Fibonacci dizisi

$$(\mathbf{F_n}) = (\mathbf{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89}, \ldots)$$

olur.

Fibonacci dizisinin genel terimi ise $\mathbf{F_n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ biçimindedir.

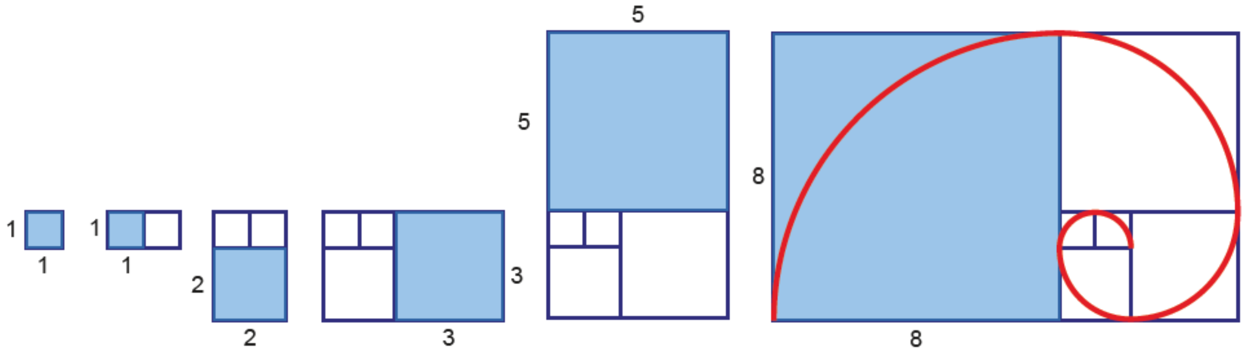
Fibonacci Dizisinin Terimleri ve Altın Oran

Fibonacci dizisinin ardışık iki teriminin oranı olan $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ değerleri incelendiğinde

$\frac{F_2}{F_1}=\frac{1}{1}=1$	$\frac{F_3}{F_2}=\frac{2}{1}=2$	$\frac{F_4}{F_3}=\frac{3}{2}=1,5$	$\frac{F_5}{F_4}=\frac{5}{3}\cong 1,67$	$\frac{F_6}{F_5}=\frac{8}{5}=1,6$
$\frac{F_7}{F_6}=\frac{13}{8}=1,625$	$\frac{F_8}{F_7}=\frac{21}{13}\cong 1,615$	$\frac{F_9}{F_8}=\frac{34}{21}\cong 1,619$	$\frac{F_{10}}{F_9}=\frac{55}{34}\cong 1,617$	$\frac{F_{11}}{F_{10}}=\frac{89}{55}\cong 1,618$

n büyüdükçe $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ oranının 1,618 sayısına yaklaştığı görülür. Bu orana **altın oran** denir ve φ(fi) harfi ile ifade edilir. $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong \mathbf{1,618}$ dir.

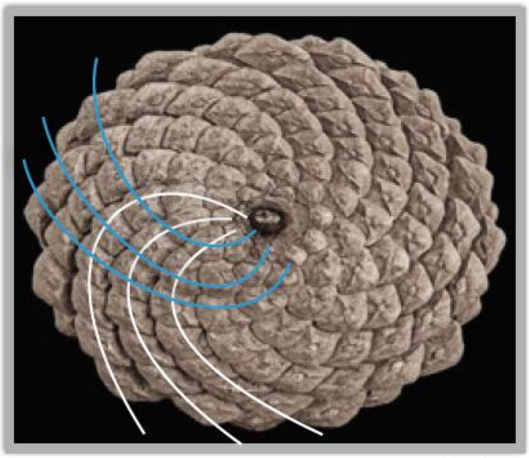
Fibonacci Dizisi ve Altın Oranın Görüldüğü Yerler



Yukarıda kenar uzunluğu 1 birim olan kareye sırasıyla kenar uzunlukları 1, 2, 3, 5 ve 8 birim olan kareler şekildeki gibi birleştiriliyor. Her yeni karenin köşelerini merkez kabul eden çeyrek çemberler çizilerek son şekildeki spiral elde edilmiştir. Tüm karelerin kenar uzunlukları Fibonacci dizisinin terimleridir. Şekilde oluşan spirale de **Fibonacci spirali** denir. Bu işlemlere devam edildiğinde oluşan dikdörtgenlerin uzun kenarının kısa kenarına oranı, altın orana (1,618) yaklaşır.

Görsel 2.3

Ayçiçek taneleri, iki yönde spiral biçiminde dizilmişlerdir. Yukarıdaki ayçiçeğinde mavi yönlü spirallerin sayısı 55 ve beyaz yönlü spirallerin sayısı ise 34 tür. Bu sayılar Fibonacci dizisinin ardışık terimleridir.



Görsel 2.4

Çam kozalağın taneleri, iki yönde spiral biçiminde dizilmişlerdir. Yukarıdaki kozalakta mavi yönlü spirallerin sayısı 21 ve beyaz yönlü spirallerin sayısı ise 13 tür. Bu sayılar Fibonacci dizisinin ardışık terimleridir.

Görsel 2.5

Mimar Sinan’ın birçok eserinde olduğu gibi Süleymaniye ve Selimiye Camilerinin minarelerinde altın oran görülmektedir.

Görsel 2.6

Eski Mısırlıların inşa ettikleri piramitlerde de altın oran olduğu saptanmıştır.