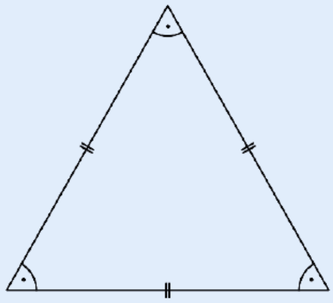
10.5.1. Çokgenler

10.5.1.1. Çokgen ve Çokgende Açı Kavramı

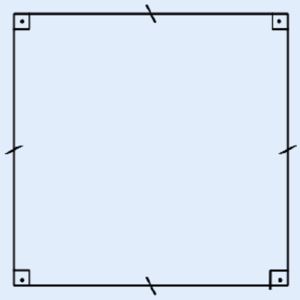
$n \geq 3$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere düzlemde sadece $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ noktalarında kesişen ve bu noktalardan herhangi üçü doğrusal olmayan $[A_1A_2], [A_2A_3], ..., [A_{n-1}A_n], [A_nA_1]$ nın birleşim kümesine **çokgen** denir. Bu doğru parçalarına **çokgenin kenarları**; $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ noktalarına **çokgenin köşeleri** denir. Çokgenin komşu olmayan herhangi iki köşesini birleştiren doğru parçasına **köşegen** denir. Bir çokgenin köşe sayısı ile kenar sayısı eşittir. Çokgenler köşe sayılarına veya kenar sayılarına göre adlandırılır (üçgen, dörtgen, beşgen, altıgen gibi).

$n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere n kenarlı bir çokgenin dış açılarının ölçüleri toplamı $360°$ dir.

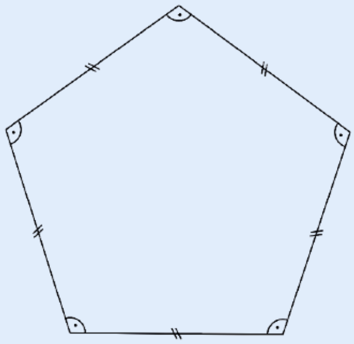
Bütün kenar uzunlukları eşit ve iç veya dış açılarının ölçüleri eşit olan çokgenlere **düzgün çokgen** denir. $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere n kenarlı bir düzgün çokgenin dış açılarının ölçüleri de eşit olduğundan bir dış açının ölçüsü $\frac{360°}{n}$ dir. n kenarlı bir düzgün çokgenin bir iç açısının ölçüsü $180° - \frac{360°}{n} = \frac{180° \cdot n - 360°}{n} = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$ olur. Eşkenar üçgen ve kare dışındaki düzgün çokgenler adlandırılırken başına "düzgün" kelimesi getirilir.



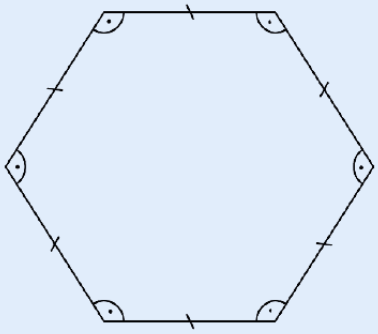
Düzgün üçgen
(Eşkenar üçgen)



Düzgün dörtgen
(Kare)



Düzgün beşgen



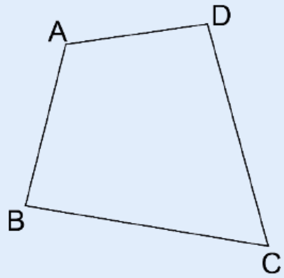
Düzgün altıgen

10.5.2. Dörtgenler ve Özellikleri

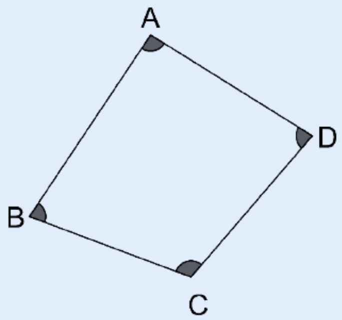
10.5.2.1. Dörtgenin Temel Elemanları ve Özellikleri

Herhangi üçü bir doğru üzerinde bulunmayan dört noktayı ardışık olarak birleştiren doğru parçalarının oluşturduğu kapalı düzlemsel şekillere **dörtgen** denir.

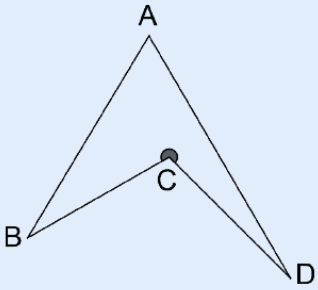
Bir dörtgenin temel elemanları köşeleri, açıları ve kenarlarıdır. Yandaki şekilde ABCD dörtgeni verilmiştir. Bu dörtgen için A, B, C ve D noktaları dörtgenin köşeleri; $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ ve $[DA]$ dörtgenin kenarları; $\widehat{BAD}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$ ve $\widehat{CDA}$ ise dörtgenin açılarıdır.



Her bir iç açısının ölçüsü 180° den küçük olan dörtgene **dışbükey dörtgen**, herhangi bir iç açısının ölçüsü 180° den büyük olan dörtgene **içbükey dörtgen** denir.

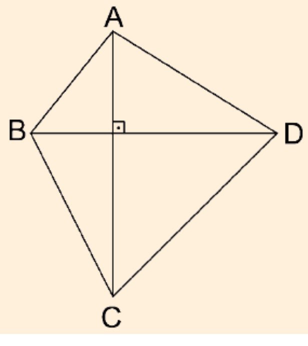


Dışbükey dörtgen



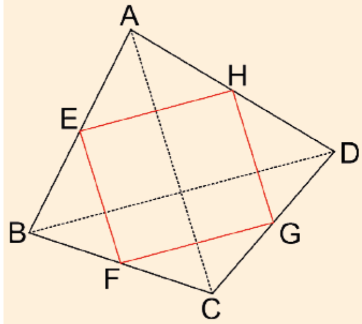
İçbükey dörtgen

Bu bölümde dörtgen denildiğinde aksi belirtilmedikçe dışbükey dörtgen anlaşılacaktır.



Köşegenleri dik kesişen bir ABCD dörtgeninde karşılıklı kenar uzunluklarının kareleri toplamları birbirine eşittir.

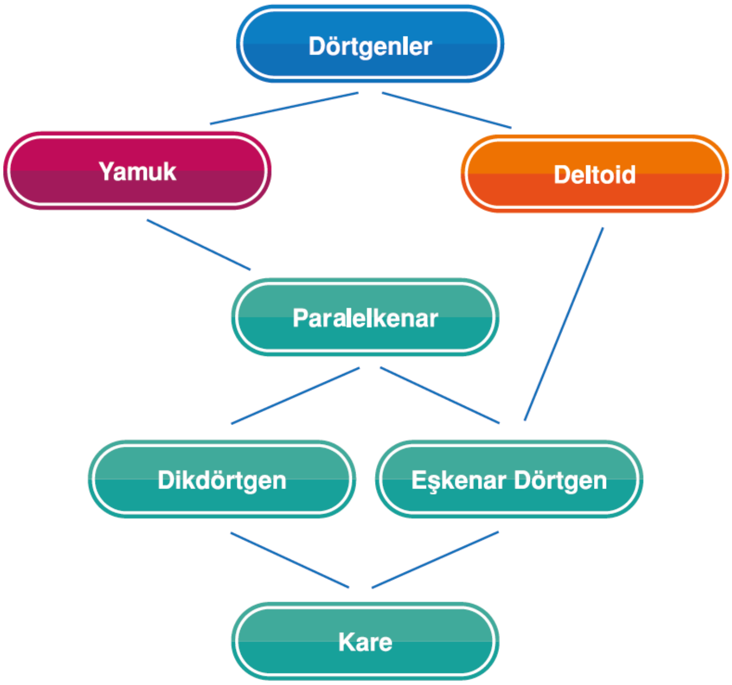
Şekildeki ABCD dörtgeninde $[AC] \perp [BD]$ olduğundan
$|AB|^2 + |DC|^2 = |AD|^2 + |BC|^2$ olur.



Yandaki şekilde verilen ABCD dörtgeninde $[AC]$ ve $[BD]$ dörtgenin köşegenleridir. E, F, G ve H bulundukları kenarların orta noktaları ise $Ç(EFGH) = |AC| + |BD|$ olur.

10.5.3. Özel Dörtgenler

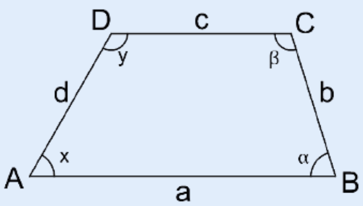
10.5.3.1. Özel Dörtgenlerin Açı, Kenar, Köşegen ve Alan Özellikleri



- Paralelkenar aynı zamanda yamuktur.
- Dikdörtgen aynı zamanda paralelkenardır.
- Eşkenar dörtgen aynı zamanda paralelkenar ve deltoittir.
- Kare aynı zamanda eşkenar dörtgen ve deltoittir.

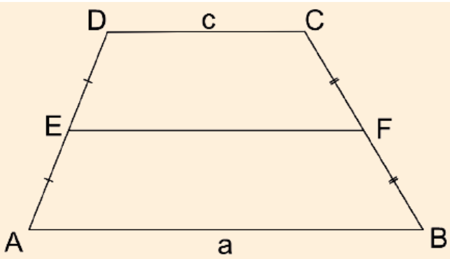
Yamuk ve Özellikleri

En az iki kenarı paralel olan dörtgene **yamuk** denir.



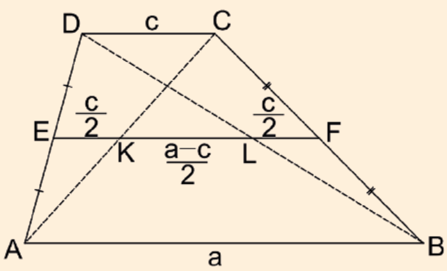
Yandaki ABCD yamuğunda

- $[AB] \parallel [DC]$ olur.
- $[AB]$ **alt taban** ve $[DC]$ **üst taban** olarak isimlendirilir.
- $x + y = 180^\circ$ ve $\alpha + \beta = 180^\circ$ olur.

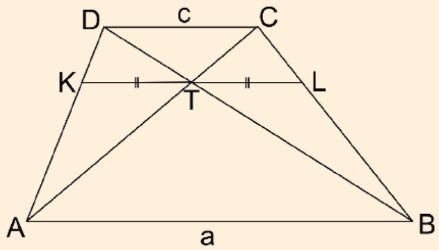


Şekildeki ABCD yamuğunda $[AB] \parallel [DC]$ olsun. $[AD]$ ile $[BC]$ nın orta noktaları olan E ile F noktalarını birleştiren doğru parçasına **orta taban** denir.

$[EF]$ orta taban olmak üzere $[EF] \parallel [AB] \parallel [DC]$ ve $|EF| = \dfrac{|AB| + |DC|}{2} = \dfrac{a + c}{2}$ olur.

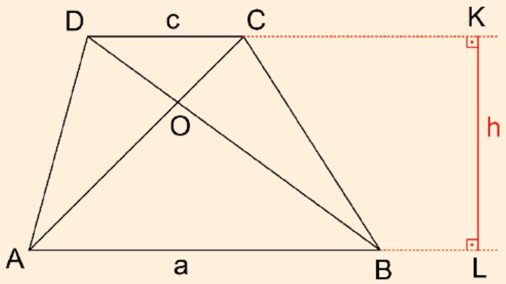


Şekildeki ABCD yamuğunda $[DC] \parallel [AB]$ olmak üzere $[DB]$ ile $[AC]$ na **yamuğun köşegenleri** denir. Köşegenlerin orta taban üzerinde ayırdığı doğru parçaları için $|EK| = |LF| = \dfrac{c}{2}$ ve $|KL| = \dfrac{a - c}{2}$ olur.



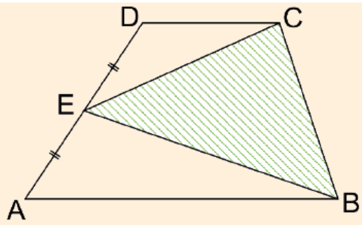
ABCD yamuğunda $[DC] \parallel [AB]$, $[DB] \cap [CA] = \{T\}$ olmak üzere köşegenlerin kesim noktasından geçen ve alt taban ile üst tabana paralel olan $[KL]$ için

$$|KT| = |TL| = \frac{a \cdot c}{a + c} \text{ olur.}$$

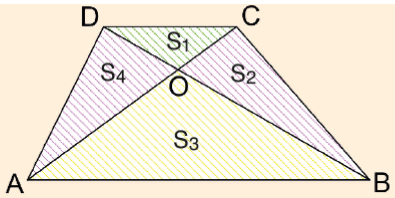


$[DC] \parallel [AB]$ olan ABCD yamuğunda $[KL] \perp AB$ ve $|KL| = h$ olmak üzere aşağıdaki eşitlik sağlanmaktadır.

$$A(ABCD) = \frac{a + c}{2} \cdot h$$



Şekildeki ABCD yamuğunda $[DC] \parallel [AB]$ ve E noktası $[DA]$ nın orta noktası ise $A(ABCD) = 2 \cdot A(\widehat{EBC})$ olur.

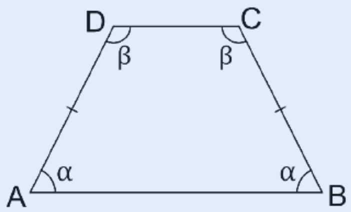


Yandaki şekilde verilen ABCD yamuğunda $[AC]$ ve $[BD]$ köşegenler ve $[DC] \parallel [AB]$ dir. $A(\widehat{DOC}) = S_1$, $A(\widehat{COB}) = S_2$, $A(\widehat{BOA}) = S_3$ ve $A(\widehat{AOD}) = S_4$ olsun.

$S_2 = S_4$

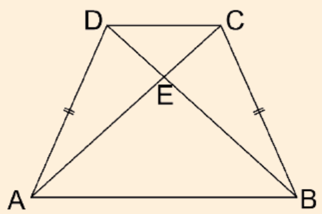
$S_2 \cdot S_4 = S_1 \cdot S_3$ eşitlikleri geçerlidir.

İkizkenar Yamuk



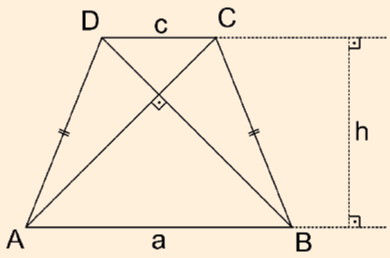
Yandaki ABCD yamuğunda $[AB] \parallel [DC]$ ve $|AD| = |BC|$ ise bu yamuğa **ikizkenar yamuk** denir.

- $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = \alpha$ ve $m(\widehat{D}) = m(\widehat{C}) = \beta$ olur.



Yandaki şekilde verilen ABCD ikizkenar yamuğunda $[AC]$ ve $[BD]$ köşegenler ve $[DC] \parallel [AB]$ dir. $|AD| = |BC|$ ise

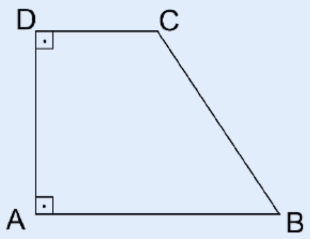
- $|AC| = |DB|$ olur (Yani köşegen uzunlukları eşittir.).
- $|ED| = |EC|$ olur.
- $|EB| = |EA|$ olur.



Yandaki şekilde verilen ABCD ikizkenar yamuğunda $[AB] \parallel [DC]$, $|AD| = |BC|$, $[AC]$ ve $[BD]$ köşegenleri dik kesişmekte ve h yamuğun yüksekliğidir. Buna göre

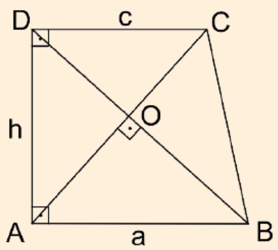
- $h = \dfrac{a+c}{2}$
- $A(ABCD) = h^2$ olur.

Dik Yamuk



Herhangi bir köşesindeki açısının ölçüsü 90° olan yamuğa **dik yamuk** denir.

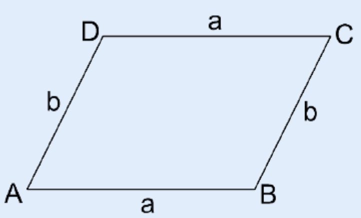
Yandaki ABCD yamuğunda $[AD]$ aynı zamanda bu yamuğun yüksekliğidir.



Yandaki şekilde verilen ABCD dik yamuğunda $[DC] \parallel [AB]$, $[DA] \perp [AB]$, $[AD] = h$ ve köşegenler birbirine dik ise $h^2 = a \cdot c$ olur.

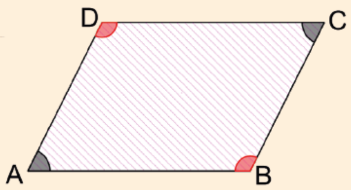
Paralelkenar ve Özellikleri

Karşılıklı kenarları birbirine paralel olan dörtgene **paralelkenar** denir.



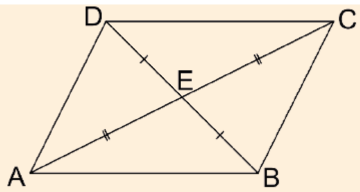
Yandaki ABCD paralelkenarında

- $[AB] \parallel [DC]$ ve $|AB| = |DC| = a$ olur.
- $[AD] \parallel [BC]$ ve $|AD| = |BC| = b$ olur.

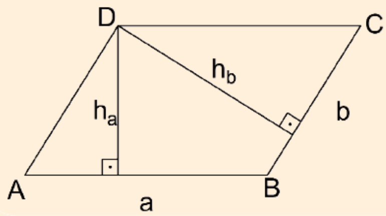


ABCD paralelkenar olmak üzere ardışık köşelerdeki iç açılar birbiriyle bütünler açı olup bu ardışık köşelerdeki iç açıların toplamı 180° dir.

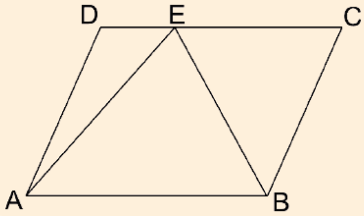
ABCD paralelkenarında $m(\widehat{A}) = m(\widehat{C})$ ve $m(\widehat{B}) = m(\widehat{D})$ olur.



Paralelkenarın köşegenleri birbirini ortalar. Şekildeki ABCD paralelkenarında $|DE| = |EB|$ ve $|AE| = |EC|$ olur.

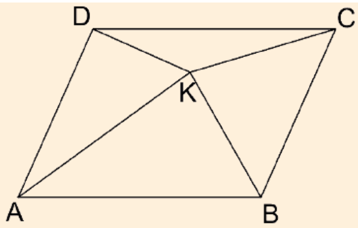


Bir kenar uzunluğu ile bu kenara ait yüksekliğin çarpımı paralelkenarın alanını verir.
Şekildeki ABCD paralelkenarının alanı $A(ABCD) = a \cdot h_a = b \cdot h_b$ olur.



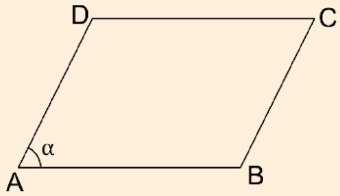
ABCD paralelkenarında $E \in [DC]$ ise

$$A(\widehat{ADE}) + A(\widehat{BCE}) = A(\widehat{ABE}) = \frac{A(ABCD)}{2} \text{ olur.}$$

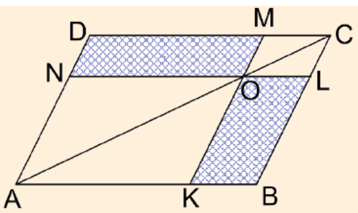


Yandaki şekilde verilen K noktası ABCD paralelkenarının iç bölgesinde bir nokta olmak üzere

$$A(\widehat{ADK}) + A(\widehat{BCK}) = A(\widehat{AKB}) + A(\widehat{DKC}) = \frac{A(ABCD)}{2} \text{ olur.}$$

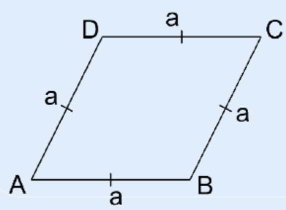


Yandaki şekilde verilen ABCD paralelkenar ve $m(\widehat{DAB}) = \alpha$ ise $A(ABCD) = |AB| \cdot |AD| \cdot \sin\alpha$ olur.

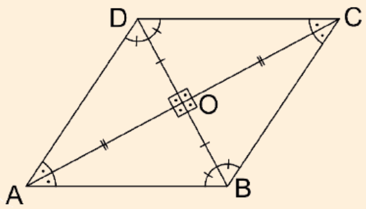


ABCD paralelkenarında [AC] köşegen ve $[NL] \cap [MK] \cap [AC] = \{O\}$ olmak üzere $[NL] \parallel [DC]$ ve $[MK] \parallel [DA]$ ise $A(DNOM) = A(KBLO)$ olur.

Eşkenar Dörtgen ve Özellikleri

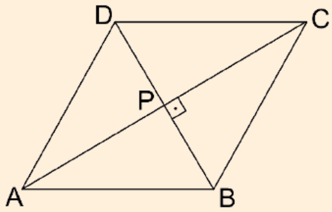


Kenar uzunlukları eşit olan paralelkenara **eşkenar dörtgen** denir. Eşkenar dörtgen aynı zamanda bir paralelkenardır ve paralelkenarın özelliklerini taşır. Yandaki şekilde ABCD eşkenar dörtgeninde $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = a$ olur.



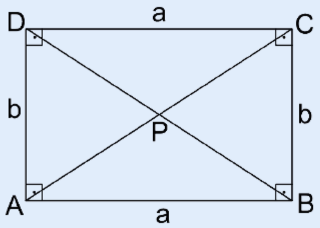
Yandaki şekilde ABCD eşkenar dörtgen olmak üzere

- [AC] ve [BD] köşegenleri birbirini dik keser.
- [AC] ve [BD] köşegenleri birbirini ortalar.
- [AC] ve [BD] köşegenleri aynı zamanda açıortaydır.



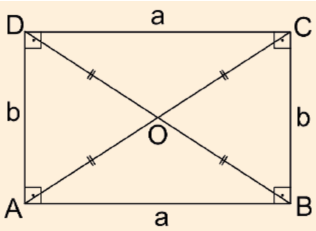
ABCD eşkenar dörtgeninde $[AC]$ ve $[BD]$ köşegen olmak üzere $A(ABCD)=\dfrac{|AC|\cdot|BD|}{2}$ olur.

Dikdörtgen ve Özellikleri



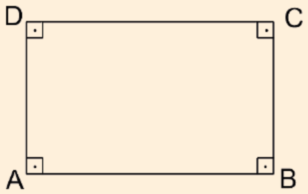
Açılarından biri 90° olan paralelkenara **dikdörtgen** denir. Dikdörtgen aynı zamanda bir paralelkenardır ve paralelkenarın özelliklerini taşır. Buna göre

- $|AB|=|DC|$ ve $|AD|=|BC|$
- $Ç(ABCD)=2\cdot(a+b)$ olur.



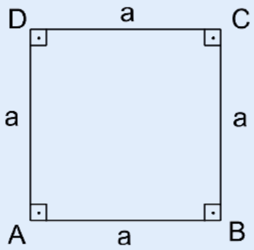
Dikdörtgene ait köşegen uzunlukları eşittir. Şekildeki ABCD dikdörtgeninde,

- $|AC|=|BD|$
- $|AO|=|BO|=|CO|=|DO|$ olur.



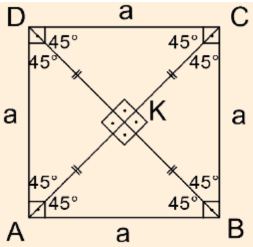
ABCD dikdörtgeninin alanı $A(ABCD)=|AB|\cdot|BC|$ olur.

Kare ve Özellikleri



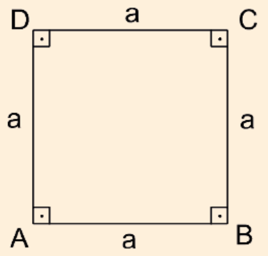
Dört kenar uzunluğu eşit olan dikdörtgene **kare** denir.
Kare aynı zamanda paralelkenar, dikdörtgen ve eşkenar dörtgendir.
Yandaki ABCD karesinde,

- $|AB|=|BC|=|CD|=|DA|=a$ cm,
- $m(\widehat{A})=m(\widehat{B})=m(\widehat{C})=m(\widehat{D})=90^\circ$ olmaktadır.



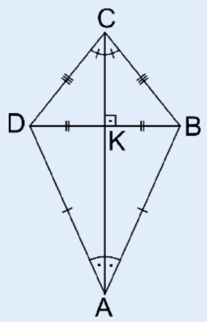
Yandaki şekilde verilen ABCD karesinde,

- Köşegenler aynı zamanda açıortaylardır.
- Köşegen uzunlukları eşit olup birbirlerini dik ortalar.



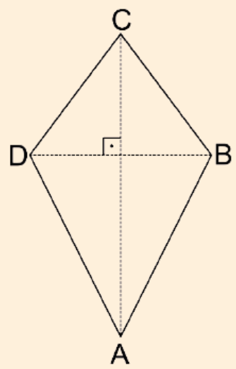
Yandaki şekilde verilen bir kenarı a birim olan ABCD karesinin alanı $A(ABCD) = a^2$ birimkaredir.

Deltoid ve Özellikleri

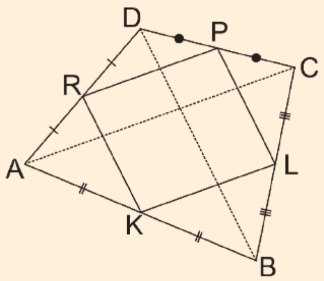


Bir ABCD dörtgeninde $|DC| = |BC|$ ve $|DA| = |BA|$ ise bu dörtgene **deltoid** denir. Şekildeki ABCD dörtgeni deltoid olmak üzere

- $[AC] \perp [DB]$
- $|DK| = |KB|$ olur.
- $[AC]$ köşegeni aynı zamanda açıortaydır.
- $m(\widehat{CDA}) = m(\widehat{CBA})$ olur.



$[AC]$ ve $[BD]$ ABCD deltoidinin köşegenleri olmak üzere deltoidin alanı, $A(ABCD) = \dfrac{|AC| \cdot |BD|}{2}$ olur.



Bir dörtgenin kenarlarının orta noktaları birleştirilerek elde edilen dörtgen **paralelkenar** olur. Yandaki ABCD dörtgeni için

- KLPR dörtgeni paralelkenardır.
- $|AC| = |BD|$ ise KLPR dörtgeni eşkenar dörtgendir.
- $[AC] \perp [BD]$ ise KLPR dörtgeni dikdörtgendir.
- $[AC] \perp [BD]$ ve $|AC| = |BD|$ ise KLPR dörtgeni karedir.