10.2.1. FONKSİYON KAVRAMI VE GÖSTERİMİ

1. Fonksiyonlar

Fonksiyon Kavramı

- A ve B boş kümeden farklı herhangi iki küme olmak üzere $A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$ kartezyen çarpım kümesinin her bir alt kümesine A dan B ye bir **bağıntı** denir. Bağıntılar genellikle α, β, f, g, h sembolleri ile gösterilir.
- A dan B ye tanımlanan f bağıntısı aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa bir fonksiyon olur.

1. A kümesinde eşleşmemiş eleman kalmamalıdır.
2. A kümesindeki herhangi bir eleman, B kümesinde bir ve yalnız bir eleman ile eşleşmelidir.

Bu tanım, matematik diliyle aşağıdaki gibi ifade edilir.

f, A dan B ye bir bağıntı olsun. Eğer

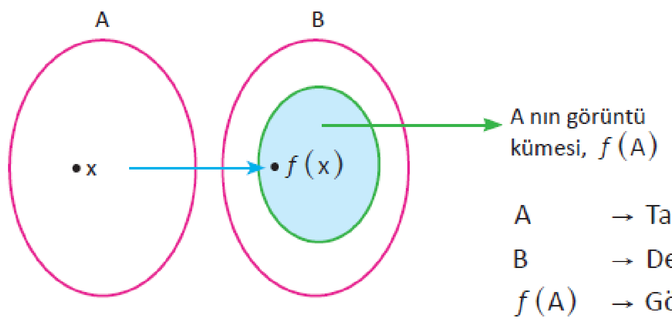
1. Her $x \in A$ için $(x, y) \in f$ olacak şekilde bir $y \in B$ var ve
2. $(x, y_1) \in f$ ve $(x, y_2) \in f$ olduğunda $y_1 = y_2$ oluyorsa f bağıntısına

A dan B ye bir **fonksiyon** denir.

A dan B ye tanımlanan f fonksiyonu $f\colon A \to B$ şeklinde gösterilir. $(x, y) \in f \Rightarrow y = f(x)$ şeklinde yazılır. Bu gösterimde x **bağımsız değişken**, y **bağımlı değişken** olarak adlandırılır.

$f : A \to B$ gösteriminde A kümesine fonksiyonun **tanım kümesi**, B kümesine fonksiyonun **değer kümesi** adı verilir (Şekil 2.1.1).

A kümesinin elemanlarının, f fonksiyonuyla B kümesinde eşleştiği elemanlardan oluşan kümeye fonksiyonun görüntü kümesi denir ve $f(A)$ ile gösterilir. $f(A) \subseteq B$ dir.



Şekil 2.1.1

$$\left.\begin{array}{ll} A & \rightarrow \text{Tanım} \\ B & \rightarrow \text{Değer} \\ f(A) & \rightarrow \text{Görüntü} \end{array}\right\} \text{kümeleridir. } f(A) \subseteq B$$

Sonuçlar

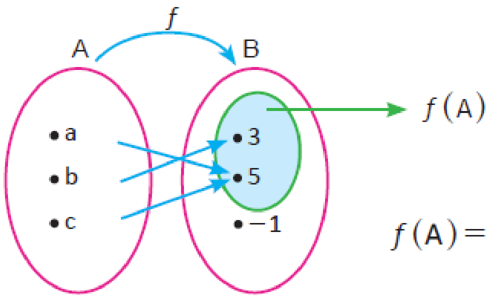
1. Bir bağıntının fonksiyon olabilmesi için

- Tanım kümesinde eşleşmeyen (açıkta) eleman olmamalıdır.
- Tanım kümesindeki her eleman, değer kümesinde bulunan yalnız bir elemanla eşleşmelidir.

2. Her fonksiyon bir bağıntıdır fakat her bağıntı bir fonksiyon olmayabilir. Bağıntılarda kullanılan gösterim biçimleri fonksiyonlarda da kullanılabilir.

Fonksiyon Çeşitleri

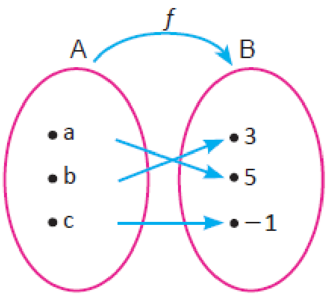
$f: A \rightarrow B$ fonksiyonunun değer kümesinde boşta eleman kalıyorsa (değer kümesinde eşleşmeyen eleman varsa) f fonksiyonuna **içine fonksiyon** denir.
Başka bir ifadeyle fonksiyonun görüntü kümesi, değer kümesine eşit değilse bu fonksiyon içine fonksiyondur (Şekil 2.1.2).



Şekil 2.1.2

$f(A)=\{3,5\} \neq \{3,5,-1\}$ olup f içine fonksiyondur.

$f: A \rightarrow B$ fonksiyonun tanım kümesinin elemanları, değer kümesinin tüm elemanlarıyla eşleşmişse f fonksiyonuna **örten fonksiyon** denir.
Başka bir ifadeyle bir fonksiyonda görüntü kümesi, değer kümesine eşit ise fonksiyon örten fonksiyondur. Buna göre $f: A \rightarrow B$, $f(x)$ verildiğinde
$\forall y \in B$ için $y=f(x)$ olacak şekilde $\exists x \in A$ ise f fonksiyonu örtendir (Şekil 2.1.3).



Şekil 2.1.3

$f(A)=\{3,5,-1\}=B$ f örtendir.

Sonuç

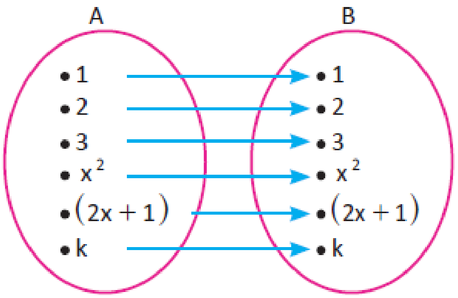
Örten olmayan fonksiyon içine fonksiyondur.

$f: A \rightarrow B$ fonksiyonu verilsin. Tanım kümesindeki elemanların her biri, değer kümesinde bulunan farklı bir eleman ile eşleşiyorsa f fonksiyonuna **bire bir fonksiyon** denir. Buna göre

a) Her $x_1, x_2 \in A$ için $x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ veya

b) Her $x_1, x_2 \in A$ için $f(x_1)=f(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ oluyorsa f fonksiyonu bire bir fonksiyondur.

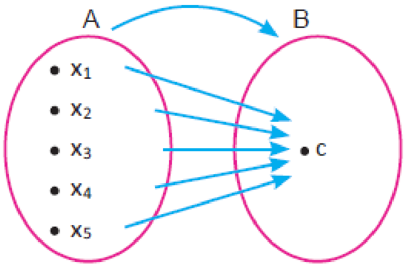
$f: A \rightarrow B$ bir fonksiyon olmak üzere tanım kümesindeki her elemanı kendisine eşleyen fonksiyona **birim (özdeşlik)** fonksiyonu denir. Birim fonksiyon $f(x) = I(x) = x$ biçiminde gösterilir (Şekil 2.1.4).



Şekil 2.1.4

$f: A \rightarrow B$ bir fonksiyon olmak üzere tanım kümesindeki bütün elemanlar değer kümesinde bulunan yalnız bir eleman ile eşleşiyorsa f fonksiyonuna **sabit fonksiyon** denir. $c \in B$ olmak üzere $f(x) = c$ şeklinde gösterilir.

Görüntü kümesinin eleman sayısı 1 olan fonksiyondur. Sabit fonksiyon Şekil 2.1.5'te Venn şeması ile gösterilmiştir.



Şekil 2.1.5

Tanımlı olduğu durumlarda $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ sabit fonksiyon ise $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$ olur.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $a, b \in \mathbb{R}$, olmak üzere
$f(x) = ax + b$ biçimindeki fonksiyonlara **doğrusal fonksiyon** denir.
Bu fonksiyonların görüntü kümeleri analitik düzlemde doğru belirtir.

Tanım kümesinin alt aralıklarında farklı kurallarla tanımlanan fonksiyonlara **parçalı tanımlı fonksiyon** denir.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir f fonksiyonu olmak üzere $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(-x) = f(x)$ ise f fonksiyonuna **çift fonksiyon** denir.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir f fonksiyonu olmak üzere $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(-x) = -f(x)$ ise f fonksiyonuna **tek fonksiyon** denir.

Eşit Fonksiyonlar

$f: A \to B$ ve $g: A \to B$ iki fonksiyon olmak üzere $\forall x \in A$ için $f(x) = g(x)$ oluyorsa f ve g fonksiyonlarına **eşit fonksiyonlar** denir ve $f = g$ biçiminde gösterilir.

Fonksiyonlarda Cebirsel işlemler

$f: A \to \mathbb{R}, g: B \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon ve $A \cap B \neq \varnothing$ olsun.

$f + g: (A \cap B) \to \mathbb{R}, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$f - g: (A \cap B) \to \mathbb{R}, (f - g)(x) = f(x) - g(x)$

$f \cdot g: (A \cap B) \to \mathbb{R}, (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$\dfrac{f}{g}: (A \cap B) \to \mathbb{R}, \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, \ (g(x) \neq 0)$

$k \cdot f: A \to \mathbb{R}, (k \cdot f)(x) = k \cdot f(x), (k \in \mathbb{R})$ biçiminde tanımlanır.

2. Fonksiyonlarda Grafik Çizimi

$f: A \to B, y = f(x)$ fonksiyonuna ait bütün noktaların koordinat sisteminde gösterilmesiyle oluşan noktalar kümesine f **fonksiyonunun grafiği** denir.

Bu grafik çizilirken tanım kümesinin elemanları yatay eksende, değer kümesinin elemanları ise düşey eksende gösterilir.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ biçimindeki doğrusal fonksiyonların grafikleri çizilirken en az iki x değeri için $f(x)$ değerleri bulunur. Bulunan $(x, f(x))$ noktaları, koordinat sisteminde işaretlenir. Bu noktaların birleştirilmesiyle oluşan doğru f fonksiyonunun grafiğidir.

3. Fonksiyon Grafiklerini Yorumlama

Fonksiyonun grafiği üzerindeki her noktadan y eksenine çizilen paralel doğruların x ekseninde kestiği noktalar fonksiyonun tanım kümesini, x eksenine çizilen paralel doğruların y ekseninde kestiği noktalar ise fonksiyonun görüntü kümesini verir.

$f: A \to B, y = f(x)$ fonksiyonunda olmak üzere x in f altındaki görüntüsü y,
y nin **ters görüntüsü** x tir.

Düşey Doğru Testi

Grafiği verilen bir bağıntının fonksiyon olup olmadığını belirlemek için tanım aralığının her noktasından y eksenine paralel doğrular çizilir. Çizilen bu doğrular, grafiği yalnız bir noktada kesiyorsa bu bağıntı bir fonksiyondur. Diğer durumlarda bu bağıntı fonksiyon değildir.

Grafiği verilen bir bağıntının fonksiyon olup olmadığını tespit etmek için uygulanan bu teste **düşey (dikey) doğru testi** denir.

Grafiği verilen bir f fonksiyonunun x eksenini kestiği noktalar $y = f(x) = 0$ **denkleminin kökleridir.** Tanım kümesinin bir alt aralığının görüntüsü x ekseninin üzerinde kalıyorsa bu aralık $f(x) > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesidir. Tanım kümesinin bir alt aralığının görüntüsü x ekseninin altında kalıyorsa bu aralık $f(x) < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesidir.

4. Doğrusal Fonksiyonlarda Güncel Uygulamalar

10.2.2. İKİ FONKSİYONUN BİLEŞKESİ VE BİR FONKSİYONUN TERSİ

1. Fonksiyonların Bire Birliğinin ve Örtenliğinin İncelenmesi

Yatay Doğru Testi

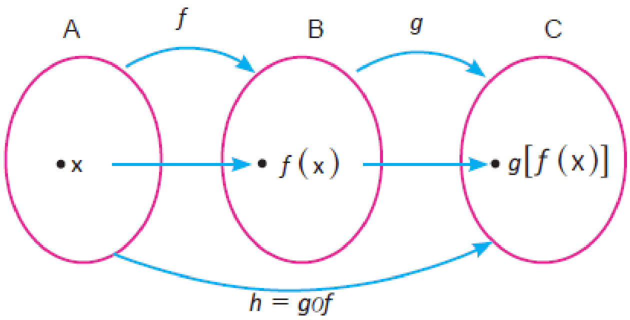
Grafiği verilen bir $f(x)$ fonksiyonunun bire bir veya örten olup olmadığını belirlemek için değer aralığının her noktasından x eksenine paralel doğrular çizilir. Çizilen paralel doğrular, fonksiyonun grafiğini en az bir noktada kesiyorsa bu fonksiyon örtendir. Çizilen paralel doğrular, fonksiyonun grafiğini yalnız bir noktada kesiyorsa bu fonksiyon bire birdir. x eksenine paralel doğrular çizilerek yapılan bu işleme **yatay doğru testi** denir.

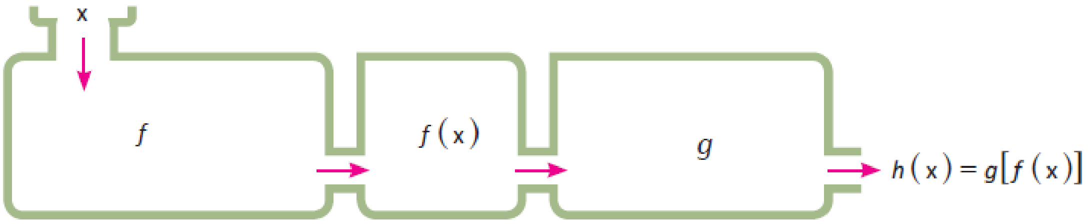
2. Bileşke Fonksiyon

$f: A \to B$ örten ve $g: B \to C$ fonksiyonları verilsin. A nın elemanlarını, f ve g fonksiyonlarıyla C nin elemanları ile eşleyen fonksiyona **bileşke fonksiyonu** denir.

Başka bir ifadeyle $f: A \to B$ örten ve $g: B \to C$ fonksiyonları verilsin.
$\forall x \in A$ için $h(x) = g[f(x)]$ şeklinde tanımlanan $h: A \to C$ fonksiyonuna f ve g fonksiyonlarının bileşke fonksiyonu denir ve $h = gof$ ile gösterilir (Şekil 2.2.1).

$gof: A \to C, (gof)(x) = g[f(x)]$ şeklinde gösterilir ve "g bileşke f" diye okunur.





Şekil 2.2.1

Özellikler

1. Fonksiyonlarda bileşke işleminin değişme özelliği yoktur, $fog \neq gof$ dir.

2. Bir f fonksiyonunun birim fonksiyon $(I(x)=x)$ ile bileşkesi kendisine eşittir.
$foI = Iof = f$ olur.

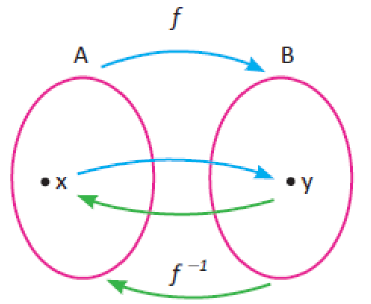
3. Fonksiyonlarda bileşke işleminin birleşme özelliği vardır.
$fogoh = (fog)oh = fo(goh)$ olur.

3. Bir Fonksiyonun Tersi

$f: A \to B$ fonksiyonu bire bir ve örten fonksiyon olmak üzere her $x \in A$ ve $y \in B$ için $(gof)(x) = x$ ve $(fog)(y) = y$ eşitliklerini sağlayan $g: B \to A$ fonksiyonuna f nin **ters fonksiyonu** denir, $g = f^{-1}$ şeklinde gösterilir (Şekil 2.2.3).

$f: A \to B$ ise $f^{-1}: B \to A$
$x \to y$ $\qquad y \to x$

Başka bir ifadeyle
$y = f(x)$ ise $x = f^{-1}(y)$ olur.
$(x, y) \in f$ ise $(y, x) \in f^{-1}$ olur.



Şekil 2.2.3

Özellikler

1. Bir fonksiyonun tersi ile bileşkesi birim fonksiyonu verir. Buna göre
$fof^{-1} = I$ veya $f^{-1}of = I$ olur.

2. $(fog)^{-1}(x) = (g^{-1}of^{-1})(x)$ olur.

3. $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$ olur.

Sonuç

$a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ ise $f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a}$ olur.

Sonuç

Bire bir ve örten bir $f(x)$ fonksiyonun tersi $f^{-1}(x)$ bulunurken x, y cinsinden yazılır.
$y = f(x)$ ise $x = f^{-1}(y)$ olduğundan $f^{-1}(y)$ elde edilir.
Değişken olarak y yerine x yazıldığında $f^{-1}(x)$ bulunmuş olur.

Sonuç

$f: \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\} \longrightarrow \mathbb{R} - \left\{\dfrac{a}{c}\right\}$ olmak üzere $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ fonksiyonunun tersi

$$f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a} \text{ olur.}$$

Not

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği ile $y = f^{-1}(x)$ fonksiyonunun grafiği analitik düzlemde $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.