10.2. FONKSİYONLAR

10.2.1. Fonksiyon Kavramı ve Gösterimi

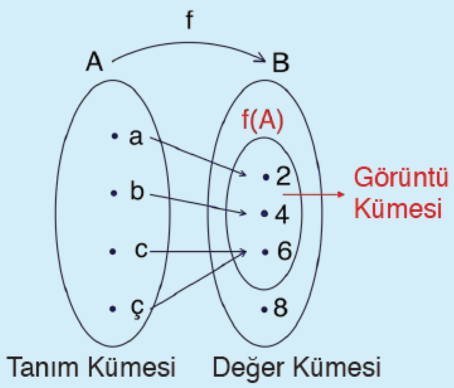
10.2.1.1. Fonksiyonlarla İlgili Problemler

Bilgi

A ve B boş kümeden farklı iki küme olmak üzere A kümesinin her bir elemanını B kümesinin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen ilişkiye **A dan B ye tanımlı fonksiyon** denir. Fonksiyonlar genellikle f, h, g gibi sembollerle gösterilir.

Bir A kümesinden B kümesine tanımlı f fonksiyonu $f: A \to B$ ile gösterilir. A kümesine **tanım kümesi**, B kümesine **değer kümesi** denir. A dan A ya tanımlı bir fonksiyona kısaca **A da tanımlı fonksiyon** da denilebilir. f fonksiyonu A kümesinden alınan bir x elemanını B kümesindeki bir y elemanı ile eşliyor ise **x elemanının f altındaki görüntüsü y elemanıdır** denir. Bu durum $y = f(x)$ biçiminde gösterilir.

$f: A \to B$ olmak üzere tanım kümesindeki elemanların f fonksiyonu altındaki görüntülerinin oluşturduğu kümeye **bu fonksiyonun görüntü kümesi** denir ve $f(A)$ ile gösterilir. Görüntü kümesi ortak özellik yöntemi ile $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ olarak ifade edilir.



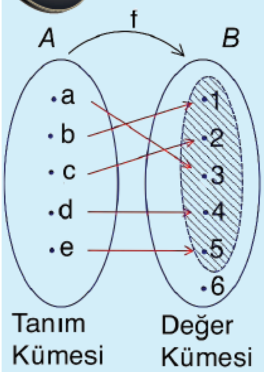
Örneğin yanda verilen şekilde,

- Tanım kümesinde boşta kalan herhangi bir eleman olmadığından ve tanım kümesindeki her eleman değer kümesinde yalnız bir elemanla eşlendiğinden f bir fonksiyondur.
- f fonksiyonunun tanım kümesi $A = \{a, b, c, ç\}$, değer kümesi $B = \{2, 4, 6, 8\}$, görüntü kümesi $f(A) = \{2, 4, 6\}$ ve $f(A) \subseteq B$ olur.
- a elemanının f altındaki görüntüsü 2 olup $f(a) = 2$ olarak ifade edilir. Benzer şekilde $f(b) = 4$, $f(c) = 6$ ve $f(ç) = 6$ olur.
- f fonksiyonu sıralı ikililer kullanılarak $f = \{(a, 2), (b, 4), (c, 6), (ç, 6)\}$ biçiminde de gösterilebilir.

İpucu

A ve B boş kümeden farklı birer küme olmak üzere $s(A) = m$ ve $s(B) = n$ ise A kümesinden B kümesine tanımlı fonksiyon sayısı n^m dir.

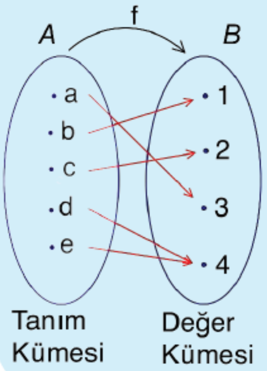
Bilgi



A ve B boş kümeden farklı birer küme olmak üzere $f: A \to B$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için $f(A) \neq B$ olduğuna göre (değer kümesinde en az bir eleman açıkta kalıyorsa) f fonksiyonuna **içine fonksiyon** denir. f içine fonksiyon ise kısaca **f içinedir** denir.

Yanda verilen f fonksiyonu içine fonksiyondur çünkü f nin görüntü kümesi {1, 2, 3, 4, 5} olup f nin değer kümesi olan {1, 2, 3, 4, 5, 6} ne eşit değildir.

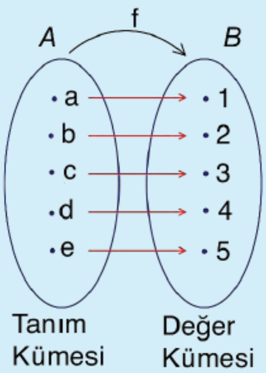
Bilgi



A ve B boş kümeden farklı birer küme olmak üzere $f : A \to B$ tanımlanan f fonksiyonu için $f(A) = B$ olduğuna göre (değer kümesindeki her elemana karşılık tanım kümesinde en az bir eleman varsa) f fonksiyonuna **örten fonksiyon** denir. f örten fonksiyon ise kısaca **f örtendir** denir.

Yandaki f fonksiyonunun görüntü kümesi $f(A) = \{1, 2, 3, 4\}$ ve değer kümesi $B = \{1, 2, 3, 4\}$ olup f fonksiyonunun görüntü kümesi ile değer kümesi aynıdır. Bu yüzden f örten fonksiyondur.

Bilgi



Bir fonksiyonun tanım kümesindeki her bir elemanın görüntüsü tanım kümesindeki diğer elemanların görüntülerinden farklı ise bu fonksiyona **bire bir fonksiyon** denir.

A ve B boş kümeden farklı birer küme olmak üzere $f: A \to B$ tanımlanan f fonksiyonu her $x, y \in A$ ve $x \neq y$ için $f(x) \neq f(y)$ ya da $f(x) = f(y)$ için $x = y$ oluyorsa bu fonksiyon bire bir fonksiyondur.
Bir fonksiyon hem bire bir hem de örten ise bu fonksiyona **bire bir örten fonksiyon** denir. Örneğin yandaki şekilde verilen f fonksiyonu bire bir ve örten bir fonksiyondur.

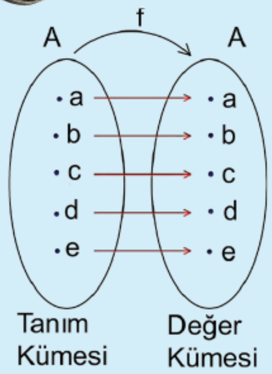
Eşit Fonksiyonlar

Bilgi

A ve B boş kümeden farklı iki küme olmak üzere $f : A \to B$, $g : A \to B$ tanımlanan f ve g fonksiyonları; $\forall x \in A$ için $f(x) = g(x)$ şeklinde yazılabiliyor ise bu fonksiyonlara **eşit fonksiyonlar** denir ve $f = g$ şeklinde gösterilir. Fonksiyonların eşit olması için tanım ve görüntü kümelerinin eşit olması, tanım kümesindeki her bir eleman için bu elemanların görüntülerinin de aynı olması gerekir.

Birim (Özdeşlik) Fonksiyon

Bilgi



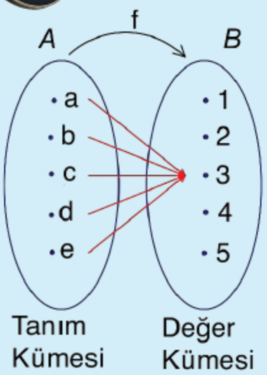
A boş kümeden farklı bir küme ve f, A dan A ya bir fonksiyon olmak üzere $\forall x \in A$ için $f(x) = x$ oluyorsa f fonksiyonuna **birim fonksiyon** denir ve I ile gösterilir.

Örneğin $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f birim fonksiyon olmak üzere

- $f(7) = 7$
- $f(\sqrt[3]{5} + 2) = \sqrt[3]{5} + 2$
- $f(a+4) = a+4$
- $f(x+10) = x+10$ olur.

Sabit Fonksiyon

Bilgi



A ve B boş olmayan kümeler ve $k \in B$ olmak üzere $f : A \to B$ fonksiyonu verilsin. $\forall x \in A$ için $f(x) = k$ oluyorsa bu fonksiyona **sabit fonksiyon** denir.

Yandaki şekilde tanımlanan f fonksiyonu için $f : A \to B$, $\forall x \in A$ olmak üzere $f(x) = 3$ olur.

Örneğin $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2}$ olmak üzere

- $f(7) = \sqrt{2}$
- $f(\sqrt[3]{5} + 2) = \sqrt{2}$
- $f(4) = \sqrt{2}$
- $f(x+10) = \sqrt{2}$ olur.

İpucu

Tanımlı olduğu aralıkta $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ biçiminde verilen $f(x)$ fonksiyonu sabit fonksiyon ise $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$ eşitliği sağlanır.

Doğrusal Fonksiyon

Bilgi

$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ biçimindeki fonksiyonlara **doğrusal fonksiyon** denir. f bir doğrusal fonksiyon ise grafiği bir doğrudur.

Tek Fonksiyon ve Çift Fonksiyon

Bilgi

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall x \in \mathbb{R}$ için

- $f(-x) = f(x)$ olan f fonksiyonuna **çift fonksiyon** denir.
- $f(-x) = -f(x)$ olan f fonksiyonuna **tek fonksiyon** denir.

Parçalı Fonksiyon

Bilgi

Tanım kümesinin ayrık alt kümelerinde farklı kurallarla belirlenen fonksiyonlara **parçalı tanımlı fonksiyonlar** ya da **parçalı fonksiyonlar** denir. Örneğin $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & a \le x < b \text{ ise} \\ h(x), & b \le x \le c \text{ ise} \\ r(x), & c < x \le d \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde olan ve $g(x), h(x), r(x)$ fonksiyonlarından oluşan f fonksiyonuna **parçalı fonksiyon** denir. a, b, c ve d fonksiyonun kritik noktalarıdır.

Bilgi

$A \subseteq \mathbb{R}$ ve $B \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{R}$ ve $g : B \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için

$f+g : A \cap B \to \mathbb{R}$, $f-g : A \cap B \to \mathbb{R}$ $f+g$ ve $f-g$ fonksiyonları $\forall x \in A \cap B$ için

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ ve $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ şeklinde tanımlanır.

Bilgi

$A \subseteq \mathbb{R}$ ve $B \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $f:A \to \mathbb{R}$ ve $g:B \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için

$f \cdot g : A \cap B \to \mathbb{R}$, $\frac{f}{g} : A \cap B \to \mathbb{R}$ $f \cdot g$ ve $\frac{f}{g}$ fonksiyonları $\forall x \in A \cap B$ için

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ ve $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $(g(x) \neq 0)$ şeklinde tanımlanır.

Ayrıca $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall x \in A$ için $(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$ olarak tanımlanır.

10.2.1.2. Fonksiyonların Grafikleri

Doğrusal Fonksiyonların Grafikleri

Bilgi

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = ax + b$ fonksiyonunun grafiği dik koordinat sisteminde $y = ax + b$ doğrusunun grafiğini belirtir. Bir doğrunun grafiğini dik koordinat sisteminde çizmek için bu doğrunun geçtiği en az 2 noktaya ihtiyaç vardır. Dolayısıyla $y = ax + b$ denklemini sağlayan en az 2 tane (x, y) sıralı ikilisi seçilip bu sıralı ikililer dik koordinat sisteminde işaretlenir ve işaretlenen noktalar bir doğru parçası oluşturacak şekilde birleştirilip doğru çizilir.

10.2.1.3. Grafiği Verilen Fonksiyonlar ile İlgili Problemler

Bilgi

Bir fonksiyon grafiğinde düşey/dikey doğru testi kullanılarak fonksiyonun x ekseni üzerinde tanımlı olduğu her bir noktadan y eksenine paralel çizilen doğrular, grafiği yalnızca bir noktada keser. Bu doğrular, grafiği birden fazla noktada kesiyorsa grafik bir fonksiyonun grafiği değildir.

Bilgi

$f(x) = 0$ denkleminin çözüm kümesinin elemanlarından biri x_1 ise bu fonksiyonun grafiği $(x_1,\ 0)$ noktasından geçer ve x eksenini $(x_1,\ 0)$ noktasında keser.

Bir fonksiyonun grafiğinde $f(x) = 0$ denkleminin çözüm kümesinin elemanlarına **f in sıfırları** denir. Grafik x eksenini kesmiyorsa $f(x) = 0$ denkleminin gerçek sayılar kümesinde çözümü yoktur.

10.2.2. İki Fonksiyonun Bileşkesi ve Bir Fonksiyonun Tersi

10.2.2.1. Bire Bir ve Örten Fonksiyonlarla İlgili Uygulamalar

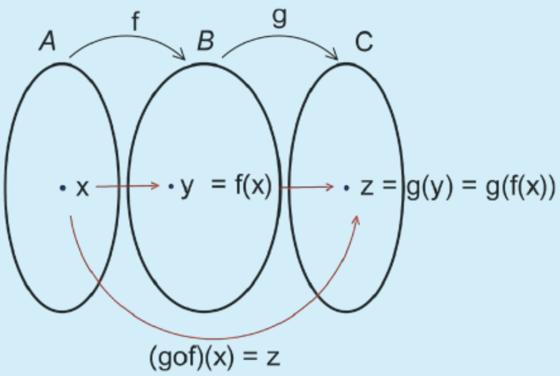
Bilgi

Verilen fonksiyonun grafiğini kesecek şekilde x eksenine paralel doğrular çizilir. Çizilen bu paralel doğrular grafiği bir noktada kesiyorsa fonksiyon **bire bir fonksiyondur** denir. Yapılan bu işleme **yatay doğru testi** denir.
Yatay doğru testinde,değer kümesindeki her elemana tanım kümesinde bir eleman karşılık geliyorsa fonksiyon örten fonksiyon, karşılık gelmiyorsa içine fonksiyondur.

10.2.2.2. Fonksiyonlarda Bileşke İşlemi

Bilgi

A, B, C boş kümeden farklı birer küme olmak üzere $f : A \to B,\ g : B \to C$ fonksiyonları verilsin. A kümesinin elemanlarını f ve g fonksiyonları yardımıyla C kümesinin elemanları ile eşleştiren fonksiyona **f ile g fonksiyonlarının bileşke fonksiyonu** denir ve $(gof)(x)$ şeklinde gösterilir. Burada f fonksiyonunun değer kümesi ile g fonksiyonunun tanım kümesi eşittir.



gof fonksiyonu f nin tanım kümesindeki herhangi bir x değerini, g nin değer kümesindeki g(f(x)) biçimindeki bir z ile eşler. Bu ifade sembollerle
$f : A \to B,\ g : B \to C$ olmak üzere
$gof = \{(x,\ z) \mid x \in A \text{ ve } z = g(f(x)) \in C\}$
biçiminde gösterilebilir.

İpucu

- Fonksiyonlarda bileşke işleminin değişme özelliği yoktur. Yani herhangi iki f ve g fonksiyonu için $fog = gof$ olmak zorunda değildir.
- Bir f fonksiyonunun birim fonksiyon ile bileşkesi yine f fonksiyonudur.
  $f o I = I o f = f$ olur.

İpucu

Fonksiyonlarda bileşke işleminin birleşme özelliği vardır. Bu özellik $fo(goh) = (fog)oh$ olarak ifade edilir.

Bilgi

$f : A \rightarrow B$ ve $g : B \rightarrow C$ fonksiyonları bire bir ise $gof : A \rightarrow C$ fonksiyonu da bire birdir.

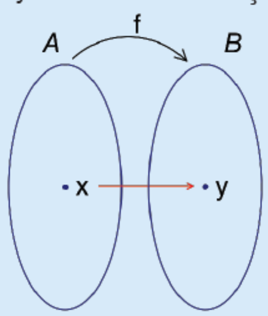
Bilgi

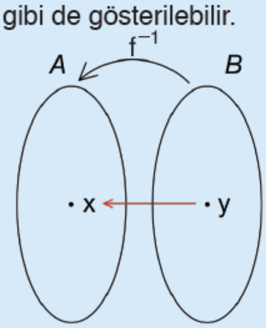
$f : A \rightarrow B$ ve $g : B \rightarrow C$ fonksiyonları örten ise $gof : A \rightarrow C$ fonksiyonu da örtendir.

10.2.2.3. Fonksiyonun Tersi

Bilgi

$f : A \rightarrow B$, $y = f(x)$ bire bir ve örten fonksiyonu verilsin. $x \in A$ için $f(x) = y$ iken $f^{-1}(y) = x$ oluyorsa f^{-1} fonksiyonuna **f fonksiyonunun tersi** denir. f^{-1}, B kümesinden A kümesine tanımlı bir fonksiyondur. Bu durum aşağıdaki gibi de gösterilebilir.





İpucu

$f : A \rightarrow B$ ye olmak üzere $y = f(x)$ bire bir ve örten ise $f(x)$ fonksiyonunun tersi de fonksiyon olur.

$f : A \rightarrow B$ ise $f^{-1} : B \rightarrow A$ olur.

İpucu

Bir fonksiyonun tersinin kuralını bulmak için aşağıdaki adımlar izlenebilir.

I. $y = f(x)$ kuralında x yerine y, y yerine x yazılır.

II. Elde edilen eşitlikte y yalnız bırakılır.

III. Son eşitlikte y yerine $f^{-1}(x)$ yazılır.

İpucu

Uygun tanım aralıklarında verilen aşağıdaki fonksiyonlar için

- $f(x)=ax+b$ ise $f^{-1}(x)=\dfrac{x-b}{a}$ olur.
- $f(x)=ax$ ise $f^{-1}(x)=\dfrac{x}{a}$ olur.
- $f(x)=\dfrac{ax+b}{c}$ ise $f^{-1}(x)=\dfrac{cx-b}{a}$ olur.
- $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ise $f^{-1}(x)=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$ olur.

İpucu

Uygun koşullarda tanımlı f, g ve h fonksiyonları için

a) $(f^{-1})^{-1}=f$ olur.

b) $(fof^{-1})=(f^{-1}of)=I$ olur $(I$:birim fonksiyondur$)$.

c) $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$ olur.

ç) $f=g\Rightarrow foh=goh$ veya $hof=hog$ olur.