11.3.1. FONKSİYONLARLA İLGİLİ UYGULAMALAR

Fonksiyonun Grafik, Tablo Gösterimi ve Uygulamaları

Fonksiyon Grafiğinin Eksenleri Kestiği Noktalar

Bir f fonksiyonunun x eksenini kestiği noktaları bulunurken $y=0$ için $f(x)=0$ denkleminin (varsa) kökleri araştırılır.

Bir f fonksiyonunda grafiğin y eksenini kestiği nokta $x=0$ için $y=f(0)$ denklemini sağlayan y değeridir.

Bir f fonksiyonunun grafiği, tanımlı olduğu aralıkta eksenleri kesmeyebilir.

Eğer $y=0$ için $f(x)=0$ denkleminin gerçek kökü varsa fonksiyon, x eksenini denklemin kök sayısına eşit noktada keser.

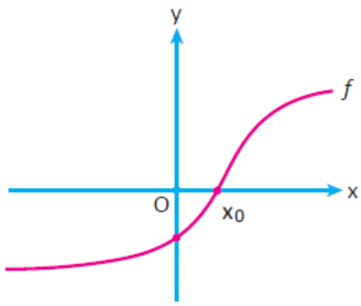
Fonksiyonun Pozitif veya Negatif Değerler Aldığı Aralıklar

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $y=f(x)$ fonksiyonu verilmiş olsun. $A\subseteq\mathbb{R}$ olmak üzere $\forall x\in A$ için $f(x)>0$ oluyorsa f fonksiyonu $A\subseteq\mathbb{R}$ de pozitif değerler alır.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $y=f(x)$ fonksiyonu verilmiş olsun. $B\subseteq\mathbb{R}$ olmak üzere $\forall x\in B$ için $f(x)<0$ oluyorsa f fonksiyonu $B\subseteq\mathbb{R}$ de negatif değerler alır.

$\forall x\in(-\infty,x_0)$ için $f(x)<0$ olduğundan $(-\infty,x_0)$ nda f fonksiyonu negatif değerli fonksiyondur.

$\forall x\in(x_0,\infty)$ için $f(x)>0$ olduğundan (x_0,∞) nda f fonksiyonu pozitif değerli fonksiyondur (Grafik 3.1.2).



Grafik 3.1.2

Artan ve Azalan Fonksiyonlar

$A\subseteq\mathbb{R}$ olmak üzere $f:A\to\mathbb{R}$, $y=f(x)$ ve B, A nın herhangi bir alt aralığı olsun.

$\forall x_1,x_2\in B$ için $x_1<x_2$ olduğunda $f(x_1)<f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonuna B aralığında **artan fonksiyon** denir.

$\forall x_1,x_2\in B$ için $x_1<x_2$ olduğunda $f(x_1)>f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonuna B aralığında **azalan fonksiyon** denir.

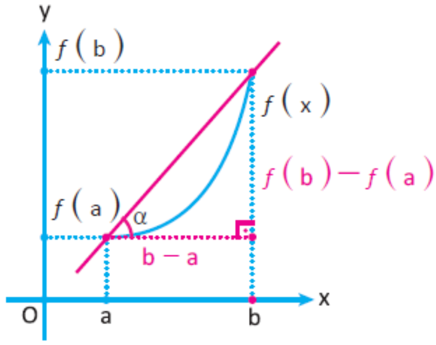
Bir Fonksiyonun Maksimum ve Minimum Değeri

f fonksiyonunda $f(x)$ görüntülerinin en büyüğüne f fonksiyonun maksimum değeri, bu değeri aldığı noktaya ise **maksimum noktası** denir.
f fonksiyonunda $f(x)$ görüntülerinin en küçüğüne f fonksiyonun minimum değeri, bu değeri aldığı noktaya ise **minimum noktası** denir.

Bir Fonksiyonun Ortalama Değişim Hızı

$y = f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ ndaki ortalama değişim hızı, y değerlerindeki değişim miktarının x değerlerindeki değişim miktarına oranıdır.

Bu durumda fonksiyonun ortalama değişim hızı, $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarından geçen doğrunun (kesen doğrusu) eğimi olur (Grafik 3.1.7).



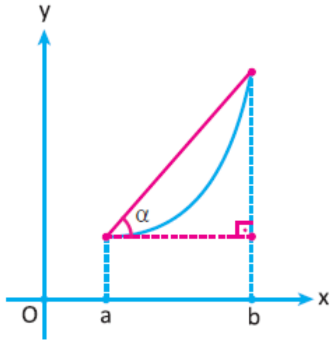
Grafik 3.1.7

Buna göre $y = f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ ndaki ortalama değişim hızı

$\tan \alpha = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ olur. Bu orana fonksiyonun **ortalama değişim hızı** denir.

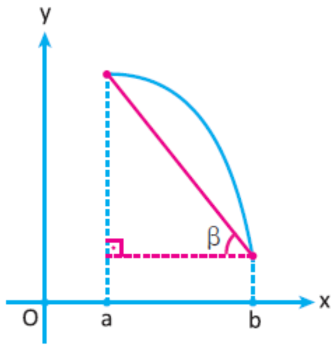
Ortalama değişim hızının işareti, değişimin yönünü gösterir. Ortalama değişim hızı pozitif ise değişim artma yönünde, negatif ise değişim azalma yönünde demektir.

Grafik 3.1.8'de verilen f fonksiyonunda $[a, b]$ nda fonksiyonun ortalama değişim hızı pozitif ($\tan \alpha > 0$)olduğundan fonksiyon bu aralıkta artandır.



Grafik 3.1.8

Grafik 3.1.9'da verilen f fonksiyonunda ise $[a, b]$ nda fonksiyonun ortalama değişim hızı negatif ($\tan(\pi - \beta) < 0$) olduğundan fonksiyon bu aralıkta azalandır.



Grafik 3.1.9

11.3.2. İKİNCİ DERECEDEN FONKSİYONLAR VE GRAFİKLERİ

1. İkinci Dereceden Bir Değişkenli Fonksiyonlar

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere

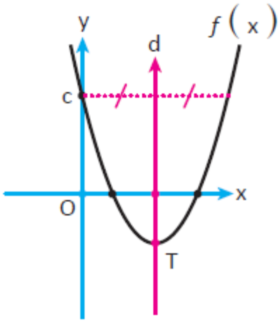
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \ f(x) = ax^2 + bx + c$ şeklinde tanımlanan fonksiyona **ikinci dereceden bir değişkenli fonksiyon** denir.

Bu tür fonksiyonların grafiklerine **parabol** adı verilir.

İkinci Dereceden Bir Değişkenli Fonksiyonlarda Grafik Çizimi

$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunda $a > 0$ ise parabolün kolları yukarı doğru, $a < 0$ ise parabolün kolları aşağı doğru olur.

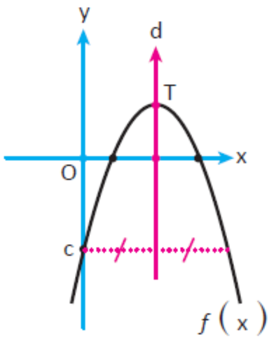
$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun azalan durumdan artan duruma geçip en küçük değerini aldığı noktaya veya artan durumdan azalan duruma geçip en büyük değerini aldığı noktaya parabolün **tepe noktası** denir. Tepe noktası genellikle $T(r, k)$ ile gösterilir (Grafik 3.2.3, 3.2.4).



$T(r, k)$ tepe noktasının apsisinden y eksenine paralel doğru ($x = r$ doğrusu) çizilirse parabol bu doğruya göre simetrik olur.

Bu doğruya **simetri ekseni** denir.

Simetri ekseninin parabolün kollarına olan uzaklığı eşittir (Grafik 3.2.3, 3.2.4).



Grafik 3.2.4

$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiğinin (parabolün) çiziminde aşağıdaki değerlerin bulunması, grafik çiziminde kolaylık sağlar.

1. Parabol kollarının yönünün belirlenmesi
2. Parabolün eksenleri kestiği noktaların bulunması
3. Tepe noktasının bulunması

Grafiği Verilen İkinci Dereceden Fonksiyonu Yazma

1. Biri Tepe Noktası Olmak Üzere İki Noktası Bilinen İkinci Dereceden Fonksiyonu Yazma

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere tepe noktası $T(r, k)$ olan ve $A(x_0, y_0)$ noktasından geçen parabolün denklemi $f(x) = a \cdot (x - r)^2 + k$ elde edilir.

$A(x_0, y_0)$ noktası, parabolün denkleminde yerine yazılarak a değeri bulunur.

2. Biri y Ekseni Üzerinde Olmak Üzere Üç Noktası Verilen Parabolün Denklemini Yazma

a) Parabolün geçtiği üç nokta $A(0, y_0), B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$ şeklinde verildiğinde bu noktalar parabolün denkleminde yerine yazılır.

Öncelikle $A(0, y_0)$ noktası, $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabol denkleminde yazılırsa $c = y_0$ bulunur.

$c = y_0$ değeri ve $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$ noktaları $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabol denkleminde yazılırsa

$$\left.\begin{array}{l} ax_1^2 + bx_1 + y_0 = y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + y_0 = y_2 \end{array}\right\}$$ denklem sistemi elde edilir. Denklem sistemi çözülerek a ve b değerleri bulunur. Bulunan a, b ve c değerleri yerine yazılarak parabol denklemi elde edilir.

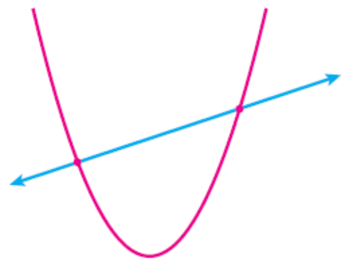
b) Parabolün geçtiği üç nokta $A(0, y_0), B(x_1, 0), C(x_2, 0)$ şeklinde verilirse aşağıdaki işlemler yapılır.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolü, x eksenini $B(x_1, 0), C(x_2, 0)$ noktalarında kestiğinden $\Delta > 0$ olur.
Bu durumda parabolün denklemi
$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ şeklinde yazılabilir.
$A(0, y_0)$ noktası, $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ denkleminde yazılırsa a değeri bulunur.
Bulunan a değeri yerine yazılırak parabol denklemi elde edilir.

Bir Doğru ile Bir Parabolün Birbirine Göre Durumu

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $f(x) = ax^2 + bx + c$ parabolü ve $m, n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $y = mx + n$ doğrusu verilmiş olsun.
Bu durumda doğru ile parabolün birbirine göre konumlarını belirlemek için

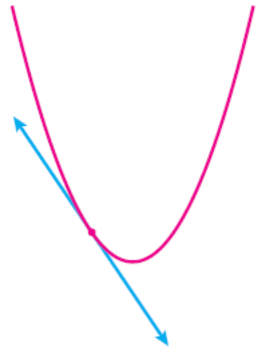
$$\left.\begin{array}{l} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + n \end{array}\right\} \text{denklemlerinin ortak çözümü yapılmalıdır.}$$


Grafik 3.2.8

Her iki denklem y ye eşit olduğundan birbirlerine eşitlenirse
$mx + n = ax^2 + bx + c \Rightarrow ax^2 + (b - m)x + (c - n) = 0$ denklemi elde edilir.

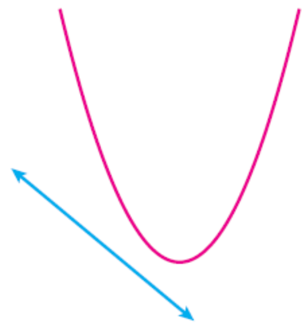
Bu denklemin diskriminantı $\Delta = (b - m)^2 - 4 \cdot a \cdot (c - n)$ olmak üzere

a) $\Delta > 0$ ise denklemin farklı iki kökü vardır. Başka bir ifadeyle doğru, parabolü iki farklı noktada keser. Bu kökler parabol ile doğrunun kesişme noktalarının apsisleridir.
Apsisler denklemlerden birinde yerine yazılarak ordinat değerleri dolayısıyla kesişme noktaları bulunur (Grafik 3.2.8).


Grafik 3.2.9

b) $\Delta = 0$ ise denklemin eşit (çakışık) iki kökü vardır. Başka bir ifadeyle doğru ile parabolün ortak bir noktası vardır. Bu durumda doğru parabole teğet olur. Denklemin kökü, teğet noktasının apsisini verir. Apsis, denklemlerden birinde yerine yazılarak ordinat değeri dolayısıyla kesişme noktası bulunur (Grafik 3.2.9).

c) $\Delta < 0$ ise denklemin gerçek kökü yoktur. Başka bir ifadeyle doğru ile parabol kesişmez (Grafik 3.2.10).


Grafik 3.2.10

11.3.3. FONKSİYONLARIN DÖNÜŞÜMLERİ

Fonksiyon Grafikleri ve Simetri Dönüşümleri

Tek ve Çift Fonksiyonların Grafikleri

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu verilmiş olsun.

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(-x) = f(x)$ ise f çift fonksiyondur. Çift fonksiyonların grafiği, y eksenine göre simetriktir.

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(-x) = -f(x)$ ise f fonksiyonu tek fonksiyondur. Tek fonksiyonların grafiği orijine göre simetriktir.

Öteleme Dönüşümleri

a) $y = f(x)+b$ Dönüşümü

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilsin.

- $b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $y = f(x)+b$ fonksiyonunun grafiği, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin y ekseni boyunca pozitif yönde b birim ötelenmesiyle elde edilen grafiktir.
- $b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $y = f(x)-b$ fonksiyonunun grafiği, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin y ekseni boyunca negatif yönde b birim ötelenmesiyle elde edilen grafiktir.

b) $y = f(x-a)$ Dönüşümü

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilsin.

- $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $y = f(x-a)$ fonksiyonunun grafiği, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin x ekseni boyunca pozitif yönde a birim ötelenmesiyle elde edilen grafiktir.
- $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $y = f(x+a)$ fonksiyonunun grafiği, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin x ekseni boyunca negatif yönde a birim ötelenmesiyle elde edilen grafiktir.

c) $y = k \cdot f(x)$ ve $y = f(kx)$ Dönüşümü

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilsin. $k \in \mathbb{R}-\{0\}$ ve $|k| > 1$ olmak üzere

- $y = k \cdot f(x)$ fonksiyonunun grafiği, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin k katı kadar dikey yönde (y ekseni boyunca) genişlemesiyle oluşan grafiktir.
- $y = \frac{1}{k} \cdot f(x)$ fonksiyonunun grafiği, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin k katı kadar dikey yönde (y ekseni boyunca) daralmasıyla oluşan grafiktir.
- $y = f(k \cdot x)$ fonksiyonunun grafiği, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin k katı kadar yatay yönde (x ekseni boyunca) daralmasıyla oluşan grafiktir.
- $y = f\left(\frac{1}{k} \cdot x\right)$ fonksiyonunun grafiği, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin k katı kadar yatay yönde (x ekseni boyunca) genişlemesiyle oluşan grafiktir.

ç) $y = -f(x)$ ve $y = f(-x)$ Dönüşümü

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilsin.

- Analitik düzlemde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin y eksenine göre simetriği alınarak $y = f(-x)$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.
- Analitik düzlemde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin x eksenine göre simetriği alınarak $y = -f(x)$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.

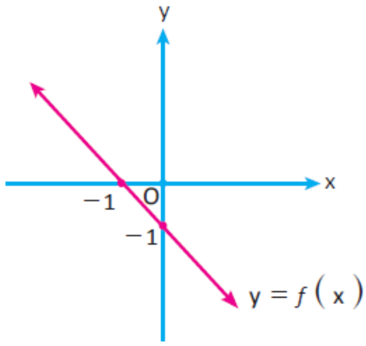
d) $y = |f(x)|$ Fonksiyonlarının Grafiği

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $y = f(x)$ fonksiyonu verilsin.

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$$

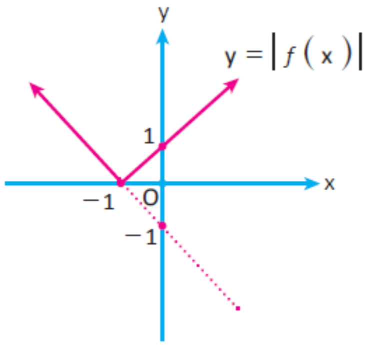
şeklinde tanımlanan fonksiyona f fonksiyonunun **mutlak değer fonksiyonu** denir.

$y = f(x)$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere $y = |f(x)|$ fonksiyonun grafikleri yanda verilmiştir ($y = f(x)$ in grafiği Grafik 3.3.6).



Grafik 3.3.6

$y = f(x)$ fonksiyonunun x ekseninin altında kalan kısımlarının x eksenine göre yansıması alınarak $y = |f(x)|$ fonksiyonunun grafiği elde edilmiştir ($y = |f(x)|$ Grafik 3.3.7).



Grafik 3.3.7