10.4. İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER

10.4.1. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

10.4.1.1. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklem Kavramı

Bilgi

- $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ biçimindeki denklemlere **ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem**; a,b,c gerçek sayılarına ise bu **denklemin katsayıları** denir.
- Denklemi sağlayan x sayılarına **denklemin kökleri**, köklerin oluşturduğu kümeye ise **denklemin çözüm kümesi** denir.

10.4.1.2. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Çözümü

Bilgi

$a \neq 0$, $a, b, c, p, q \in \mathbb{R}$ olmak üzere
$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $ax^2 + bx + c$ üç terimlisi çarpanlarına ayrılıyorsa çözüm kümesi aşağıdaki gibi bulunur.

$a\,x^2 + bx + c = 0$ ifadesinde $px \cdot qx = ax^2$, $m \cdot n = c$ ve $p \cdot n \cdot x + q \cdot m \cdot x = bx$ ise

$$\begin{array}{ccc} px & & m \\ qx & & n \end{array}$$

$ax^2 + bx + c = (px + m) \cdot (qx + n) = 0$ olur. Bu iki çarpanın çarpımları 0 olduğuna göre

$px + m = 0$ veya $qx + n = 0$

$p \cdot x = -m \qquad q \cdot x = -n$

$x = -\dfrac{m}{p} \qquad x = -\dfrac{n}{q}$ olur.

Bulunan x değerlerine $ax^2 + bx + c = 0$ **denkleminin kökleri** denir. Bu kökler x_1 ve x_2 ile gösterilebilir (Bulunan köklerden herhangi birine $x_1 = -\dfrac{m}{p}$, diğerine ise $x_2 = -\dfrac{n}{q}$ denilebilir.). Denklemin çözüm kümesi $ÇK = \left\{-\dfrac{m}{p}, -\dfrac{n}{q}\right\}$ şeklinde gösterilir.

İpucu

$a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $c = 0$ için denklem $ax^2 + bx = 0$ biçiminde yazılır ve ortak çarpan parantezine alma yöntemi kullanılarak çözüm kümesi bulunabilir.

İpucu

$a \neq 0$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax^2+bx+c=0$ denkleminde $b=0$ ise bu denklem $ax^2+c=0$ olur. Buradan $ax^2=-c$ ve $x^2=-\frac{c}{a}$ bulunur.

- $-\frac{c}{a}>0$ ise $ax^2+bx+c=0$ denkleminin kökleri $x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}}$ veya $x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$ olur.
- $-\frac{c}{a}<0$ ise $ax^2+bx+c=0$ denkleminin gerçek kökleri yoktur. Dolayısıyla $ÇK=\varnothing$ olur.

İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemin Köklerini Veren Formül ve Diskriminant Kavramı

İpucu

$a \neq 0$ ve $a,b,c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$ax^2+bx+c=0$ denkleminin köklerini veren bağıntıda b^2-4ac ifadesine **denklemin diskriminantı** denir ve $\triangle$ (delta) ile gösterilir.

$ax^2+bx+c=0$ denkleminde

- $\triangle=b^2-4ac>0$ ise bu denklemin iki farklı gerçek kökü vardır ve bu kökler,
  $x_1=\frac{-b+\sqrt{\triangle}}{2a}$ ve $x_2=\frac{-b-\sqrt{\triangle}}{2a}$ olur.
- $\triangle=b^2-4ac=0$ ise bu denklemin kökleri birbirine eşittir (çakışık iki kök). Bu kökler,
  $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$ olarak ifade edilir.
- $\triangle=b^2-4ac<0$ ise bu denklemin gerçek kökleri yoktur. Denklemin $\mathbb{R}$ deki çözüm kümesi boş kümedir. $ÇK=\varnothing$ olur.

10.4.1.3. Bir Karmaşık Sayının $a+ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ Biçiminde İfade Edilmesi

Bilgi

$a \neq 0$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax^2+bx+c=0$ denkleminde $\triangle=b^2-4ac<0$ ise bu denklemin $\mathbb{R}$ de (gerçek sayılarda) çözüm kümesi yoktur. Örneğin $x^2+9=0$ denkleminin çözüm kümesi, $x^2+9=0 \Rightarrow x^2=-9 \Rightarrow x_1=-\sqrt{-9}$ veya $x_2=\sqrt{-9}$ olur. $\sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$ olduğundan bu denklemin $\mathbb{R}$ de çözüm kümesi boş kümedir.

Bu denklemde $a=1$, $b=0$ ve $c=9$ olduğundan $\triangle=b^2-4ac=0^2-4\cdot1\cdot9=-36<0$ olur. Bu durumda verilen denklemde $\triangle<0$ ise bu denklemin gerçek sayılar kümesini de kapsayan yeni bir sayı kümesine ihtiyaç vardır. Bu yeni sayı kümesine **karmaşık sayılar kümesi** denir ve karmaşık sayıların kümesi $\mathbb{C}$ ile gösterilir. $\sqrt{-9}$ sayısı karmaşık sayılar kümesinin bir elemanıdır.

$\sqrt{-9}=\sqrt{9\cdot(-1)}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{-1}=3\cdot\sqrt{-1}$ olur.
i sanal sayı birimi $(\sqrt{-1}=i)$ olmak üzere $\sqrt{-9}=3\cdot\sqrt{-1}=3i$ bulunur.
Buradan verilen denklemin çözüm kümesi, $x_1=-\sqrt{-9} \Rightarrow x_1=-3i$ veya $x_2=\sqrt{-9} \Rightarrow x_2=3i$ ve $ÇK=\{-3i, 3i\}$ olur.

Bilgi

$a, b \in \mathbb{R}$ ve i sanal sayı birimi $(i^2 = -1)$ olmak üzere $z = a + bi$ şeklindeki sayılara **karmaşık sayılar**, bu sayıların oluşturduğu kümeye ise **karmaşık sayılar kümesi** denir ve $\mathbb{C}$ sembolü ile gösterilir. Karmaşık sayılar kümesi $\mathbb{C} = \{z \mid z = a + bi \text{ ve } a, b \in \mathbb{R},\ i = \sqrt{-1}\}$ şeklindedir.

$z = a + bi$

- bi → imajiner kısım (İm(z))
- a → gerçek kısım (Re(z))

a sayısına **z karmaşık sayısının gerçek kısmı** denir ve $\mathrm{Re}(z) = a$ ile gösterilir.
b sayısına **z karmaşık sayısının imajiner (sanal) kısmı** denir ve $\mathrm{İm}(z) = b$ ile gösterilir.
Her gerçek sayı aynı zamanda bir karmaşık sayıdır, $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ olur.

İpucu

$\sqrt{-1} = i$ sayısına **sanal sayı birimi** denir. i sanal sayı biriminin kuvvetleri,

$i^0 = 1$

$i^1 = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$

$i^5 = i^4 \cdot i = (1) \cdot i = i$

$i^6 = i^5 \cdot i = (i) \cdot i = i^2 = -1$

$i^7 = i^6 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$

$i^8 = i^7 \cdot i = (-i) \cdot i = -i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$

şeklinde olur.

$i^0 = i^4 = i^8 = 1$

$i^1 = i^5 = i$

$i^2 = i^6 = -1$

$i^3 = i^7 = -i$ olur.

Bilgi

$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $z = a + bi$ karmaşık sayısının sanal kısmının işareti değiştirilerek oluşturulan $a - bi$ karmaşık sayısına $a + bi$ **karmaşık sayısının eşleniği** denir ve $\overline{z} = a - bi$ ile gösterilir.

Bilgi

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ ikinci dereceden bir bilinmeyenli denkleminde $\Delta < 0$ ise denklemin sanal kökleri vardır.

Kökler $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ve $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ olur ve bu kökler birbirinin eşleniğidir. Bir başka ifadeyle $m, n \in \mathbb{R}$ olmak üzere sanal köklerden biri $m + ni$ ise diğeri $m - ni$ olur.

10.4.1.4. İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemin Kökleri ile Katsayıları Arasındaki İlişki

İpucu

$a \neq 0$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ve $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ olur.

Kökleri Verilen İkinci Dereceden Denklemi Elde Etme

Buluyorum

$a \neq 0$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde eşitliğin her iki tarafı a ile bölünürse $\frac{\cancel{a}x^2}{\cancel{a}} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a} \Rightarrow x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$ olur.

$\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2)$ ve $\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2$ değerleri bu denklemde yerine yazılırsa

$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0$ bulunur. Buradan

kökleri x_1 ve x_2 olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem $x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0$

biçiminde oluşturulur.

Bir başka ifadeyle kökleri x_1 ve x_2 olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem yazılırken sırasıyla

- $T = x_1 + x_2$ değeri bulunur.
- $Ç = x_1 \cdot x_2$ değeri bulunur.
- Bulunan T ve Ç değeri $x^2 - Tx + Ç = 0$ denkleminde yerine yazılır.

Böylece ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem oluşturulmuş olur.

İpucu

$a \neq 0$ ve $a, b, c \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin $m, n \in \mathbb{R}$ için bir kökü $m + \sqrt{n}$ ise diğer kökü $m - \sqrt{n}$ dir.