9.2. KÜMELER

9.2.1. Kümelerde Temel Kavramlar

9.2.1.1. Kümeler ile İlgili Temel Kavramlar

Küme, iyi tanımlanmış birbirinden farklı nesneler topluluğudur.

Kümelerin Farklı Gösterimleri

Liste Yöntemi

Kümeye ait tüm elemanlar, küme parantezi olan "{ }" şekli içerisine aralarına virgül konularak yazılır. Her eleman yalnız bir kez yazılır ve elemanların birbirleriyle yer değiştirmesi yeni bir küme oluşturmaz.

Ortak Özellik Yöntemi

Ortak özellik yöntemi, kümeye ait her elemanın özelliği yazılarak yapılan gösterim biçimidir.

$A = \{x \mid x$ çift rakam$\}$ ifadesi ortak özellik yöntemi ile yapılan bir gösterimdir.

Kullanılan "|" sembolü "öyle ki" anlamına gelir. Küme içerisinde kullanılan değişkenin hemen ardından yazılır.

"|" sembolü yerine " : " sembolü de kullanılabilir.

Venn Şeması Yöntemi

Kümenin elemanlarının kapalı bir eğri veya bir çokgen içerisine yanlarına birer nokta konularak yazılmasıyla yapılan gösterimdir.

Sonlu ve Sonsuz Kümeler

Bir kümenin elemanları sayılabilir çoklukta ise bu kümeye **sonlu küme** adı verilir.

Sonlu olmayan kümelere ise **sonsuz küme** adı verilir.

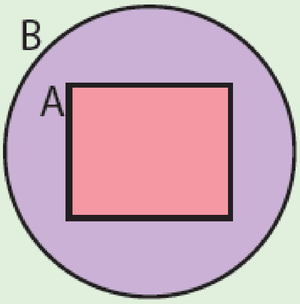
Boş Küme

Elemanı olmayan kümeye **boş küme** adı verilir. Boş küme $\emptyset$ veya { } ile gösterilir.

Evrensel Küme

Üzerinde işlem yapılan, tüm kümeleri içinde bulunduracak şekilde seçilen kümeye **evrensel küme** adı verilir. Evrensel küme E ile gösterilir.

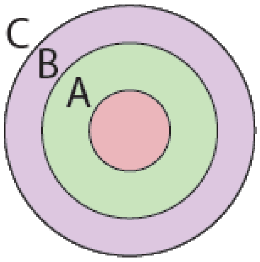
9.2.1.2. Alt Küme



A kümesinin her elemanı aynı zamanda B kümesinin de elemanı ise **A kümesi B kümesinin alt kümesidir**, denir ve $A \subset B$ ile gösterilir. A kümesi B kümesinin alt kümesi iken A nın elemanları ile B nin elemanlarının aynı olma durumu varsa $A \subseteq B$ ile gösterilir. B kümesi A kümesini kapsar. Bu ifade ise $B \supset A$ ile gösterilir. Venn şeması ile yandaki gibi çizim yapılarak gösterilir.

A kümesinin B kümesinden farklı en az bir tane elemanı varsa **A kümesi B kümesinin alt kümesi değildir** denir. Bu ifade $A \not\subseteq B$ ile gösterilir.

Alt Kümenin Özellikleri



- Boş küme her kümenin alt kümesidir. $\varnothing \subseteq A$ dir.
- Her küme kendisinin alt kümesidir. $A \subseteq A$ dir.
- A, B ve C kümeleri için $A \subseteq B$ ve $B \subseteq C$ ise $A \subseteq C$ dir. Bu özellik Venn şeması ile şekildeki gibi gösterilebilir.

n elemanlı bir kümenin alt kümelerinin sayısı 2^n formülü ile hesaplanır.

n elemanlı bir kümenin kendisi hariç tüm alt kümeleri **öz alt küme** olarak isimlendirilir ve öz alt kümelerinin sayısı $2^n - 1$ ile hesaplanır.

9.2.1.3. İki Kümenin Eşitliği

Elemanları aynı olan kümelere **eşit küme** denir. A ve B kümelerinin eşitliği $A = B$ ile gösterilir.

A ve B kümelerinin birbirinden farklı en az bir elemanı varsa **A ile B eşit olmayan kümelerdir** denir ve bu durum $A \neq B$ ile gösterilir.

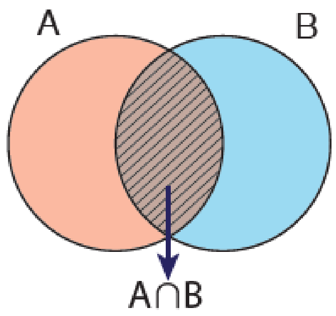
9.2.2. Kümelerde İşlemler

9.2.2.1. Kümelerde Birleşim, Kesişim, Fark ve Tümleme İşlemleri

Kümelerde Kesişim ve Birleşim İşlemleri

A ve B gibi iki kümenin tüm ortak elemanlarından oluşan kümeye A ve B kümelerinin **kesişim kümesi** adı verilir. Kesişim işlemi " $\cap$ " sembolü ile gösterilir.

A ve B kümelerinin kesişim kümesi, ortak özellik yöntemi ile
$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in B\}$ şeklinde ifade edilir.
A ve B kümelerinin kesişim kümesi, Venn şeması ile aşağıdaki gibi gösterilir.

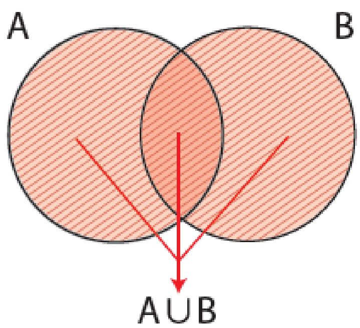


A ve B gibi iki kümenin bütün elemanlarından oluşan kümeye, A ve B kümelerinin **birleşim kümesi** adı verilir. Birleşim işlemi " $\cup$ " sembolü ile gösterilir.

Birleşim kümesi ortak özellik yöntemi ile

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in B\}$ şeklinde ifade edilir.

Venn şeması gösterimi yandaki gibidir.



Kümelerde Kesişim ve Birleşim İşlemlerinin Özellikleri

1. $A \cap A = A$ olur. Bir kümenin kendisi ile kesişimi yine kendisidir. Bu özelliğe **kesişim işleminin tek kuvvet özelliği** denir.
   Doğruluğu $A \cap A = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in A\} = \{x \mid x \in A\} = A$ olarak gösterilir.
   $A \cap A = A$ dır.
   Bir kümenin kendisi ile birleşimi yine kendisidir. Bu özelliğe **birleşimin tek kuvvet özelliği** adı verilir.
   Doğruluğu $A \cup A = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in A\} = A$ olarak gösterilir.

2. $A \cap B = B \cap A$ olur. Bu özelliğe **kesişim işleminin değişme özelliği** denir.
Doğruluğu $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in B\} = \{x \mid x \in B \text{ ve } x \in A\} = B \cap A$ olarak gösterilir.
$A \cup B = B \cup A$ olur. Bu özelliğe **birleşim işleminin değişme özelliği** denir.
Doğruluğu
$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in B\} = \{x \mid x \in B \text{ veya } x \in A\} = B \cup A$
olarak gösterilir.

3. $A \cap \varnothing = \varnothing$ olur. Boş küme eleman bulundurmadığı için herhangi bir A kümesinin boş küme ile kesişimi yine boş kümedir.

$A \cup \varnothing = A$ olur. Boş kümenin bir başka kümeye eklenecek elemanı olmadığı için A kümesinin boş küme ile birleşimi yine A kümesidir.

4. $A \subseteq B$ ise $A \cap B = A$ olur. A kümesindeki her eleman aynı zamanda B kümesinde de vardır. Dolayısıyla kesişimleri A kümesidir.

$A \subseteq B$ ise $A \cup B = B$ olur. A kümesindeki her eleman aynı zamanda B kümesininde de vardır. Dolayısıyla birleşimleri B kümesidir.

5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ olur. Bu özelliğe **kesişim işleminin birleşme özelliği** denir.

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ olur. Bu özelliğe **birleşim işleminin birleşme özelliği** denir.

6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ özelliğine **kesişim işleminin birleşim işlemi üzerine soldan dağılma özelliği** denir.

Ortak özellik yöntemi ile doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\begin{aligned}
A \cap (B \cup C) &= \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in (B \cup C)\} \\
&= \{x \mid x \in A \text{ ve } (x \in B \text{ veya } x \in C)\} \\
&= \{x \mid (x \in A \text{ ve } x \in B) \text{ veya } (x \in A \text{ ve } x \in C)\} \\
&= \{x \mid x \in (A \cap B) \text{ veya } x \in (A \cap C)\} \\
&= \{x \mid x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)\} \\
&= (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}$$

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ özelliğine **kesişim işleminin birleşim işlemi üzerine sağdan dağılma özelliği** denir. Siz de bu özelliğin doğruluğunu ortak özellik yöntemi kullanarak gösteriniz.

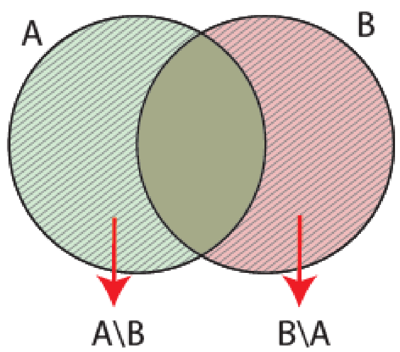
7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ özelliğine **birleşim işleminin kesişim işlemi üzerine soldan dağılma özelliği** denir. Ortak özellik yöntemi ile doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in (B \cap C)\} \\ &= \{x \mid x \in A \text{ veya } (x \in B \text{ ve } x \in C)\} \\ &= \{x \mid (x \in A \text{ veya } x \in B) \text{ ve } (x \in A \text{ veya } x \in C)\} \\ &= \{x \mid x \in (A \cup B) \text{ ve } x \in (A \cup C)\} \\ &= \{x \mid x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)\} \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ özelliğine **birleşim işleminin kesişim işlemi üzerine sağdan dağılma özelliği** adı verilir. Siz de bu özelliğin doğruluğunu ortak özellik yöntemi kullanarak gösteriniz.

Kümelerde Fark İşlemi

A ve B herhangi iki küme olmak üzere A kümesinde olup B kümesinde olmayan tüm elemanların oluşturduğu kümeye **A kümesinin B kümesinden farkı** adı verilir. A – B veya A \ B ile gösterilir.



A \ B ve B \ A kümesi ortak özellik yöntemi ile aşağıdaki şekilde gösterilir.

- $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \notin B\}$
- $B \setminus A = \{x \mid x \in B \text{ ve } x \notin A\}$

A \ B ve B \ A kümesinin Venn şeması ile gösterimi yandaki gibidir.

Kümelerde Fark İşleminin Özellikleri

E evrensel kümesine ait A ve B kümeleri için

1. $A \neq B$ iken $A \setminus B \neq B \setminus A$ olur. Fark işleminin değişme özelliği yoktur.

2. $A \setminus A = \varnothing$ olur. Bir kümenin kendisinden farkı alınırsa elde edilen kümenin elemanı kalmaz. Dolayısıyla sonuç boş kümedir.

3. $A \setminus E = \varnothing$ olur. Evrensel kümenin elemanları içinde A kümesinin elemanları da olduğundan A nın E den farkı alınırsa elde edilen kümenin elemanı kalmaz. Dolayısıyla sonuç boş kümedir.

4. $A \setminus \varnothing = A$ olur. Boş kümenin elemanı olmadığından A kümesinin boş kümeden farkı yine A kümesidir.

Bir Kümenin Tümleyeni

E evrensel kümesine ait bir A kümesi için A kümesinde bulunmayıp E kümesinde bulunan tüm elemanların oluşturduğu kümeye **A kümesinin tümleyeni** adı verilir ve A' ile gösterilir. Ortak özellik yöntemiyle $A' = \{x \mid x \notin A \text{ ve } x \in E\}$ olarak ifade edilir.

1. $(A')' = A$
2. $A \cap A' = \varnothing$
3. $A \cup A' = E$
4. $E' = \varnothing$ ve $\varnothing' = E$
5. $A \setminus A' = A$
6. $E \setminus A = A'$ ve $A \setminus E = \varnothing$
7. $s(A) + s(A') = s(E)$

1. $A \setminus B = A \cap B'$
   $B \setminus A = B \cap A'$
2. De Morgan kuralları
   $(A \cup B)' = A' \cap B'$
   $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Kümeler ile Sembolik Mantık Kuralları Arasındaki İlişki

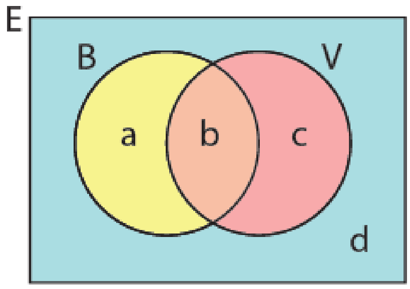
Kümeler ve sembolik mantık arasındaki ilişkilerden bazıları aşağıdaki tablolarda verilmiştir.

Sembolik mantık ile gösterimi	0	1	$\wedge$	$\vee$	Değili $(')$	$\equiv$
Küme işlemleri ile gösterimi	$\varnothing$	E	$\cap$	$\cup$	Tümleyeni $(')$	$=$

Sembolik Mantık İle	**Kümeler İle**
$(p')' \equiv p$	$(A')' = A$
$p \wedge p' \equiv 0$	$A \cap A' = \varnothing$
$1 \wedge 0 \equiv 0$	$E \cap \varnothing = \varnothing$
$p \vee p' \equiv 1$	$A \cup A' = E$
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$	$(A \cap B)' = A' \cup B'$

Küme İşlemleri Yardımıyla Problem Çözümü

Basketbol veya voleybol oynayan ya da oynamayan bir grup öğrenci için aşağıdaki çalışmalar yapılabilir. Gruptaki tüm öğrencilerin oluşturduğu küme E, basketbol oynayanların oluşturduğu küme B, voleybol oynayanların oluşturduğu küme ise V ile gösterilsin.



İstenilenin Sözel Anlatımı	Küme İşlemleri ile Gösterimi	Sayısal Olarak Gösterimi
Basketbol oynayanların sayısı	$s(B)$	$a+b$
Basketbol oynamayanların sayısı	$s(B')$	$c+d$
Yalnız basketbol oynayanların sayısı	$s(B \setminus V)$	a
Voleybol oynayanların sayısı	$s(V)$	$b+c$
Voleybol oynamayanların sayısı	$s(V')$	$a+d$
Yalnız voleybol oynayanların sayısı	$s(V \setminus B)$	c
Basketbol ve voleybol oynayanların sayısı	$s(B \cap V)$	b
Basketbol veya voleybol oynayanların sayısı	$s(B \cup V)$	$a+b+c$
Yalnız bir oyun oynayanların sayısı	$s(B \setminus V)+s(V \setminus B)$	$a+c$
En çok bir oyun oynayanların sayısı	$s(E)-s(B \cap V)$	$a+c+d$
En az bir oyun oynayanların sayısı	$s(B \cup V)$	$a+b+c$
Basketbol veya voleybol oyunlarını oynamayanların sayısı	$s(E)-s(B \cup V)$	d

9.2.2.2. İki Kümenin Kartezyen Çarpımı

Sıralı İkili

Her ikisi de boş kümeden farklı A ve B kümeleri için A kümesinden bir a elemanı, B kümesinden bir b elemanı alınarak elde edilen ve (a, b) şeklinde gösterilen ifadeye **sıralı ikili** adı verilir. Bu gösterimde "a" ya **birinci bileşen**, "b" ye ise **ikinci bileşen** adı verilir.

a ve b birbirinden farklı ise (a,b) ve (b,a) sıralı ikilileri de birbirinden farklıdır. Sıralı ikili yazılımında bileşenlerin yazılış sırası önemlidir.

Sıralı İkililerin Eşitliği

(a, b) ve (c, d) sıralı ikilileri birbirine eşit ise bu durum (a, b) =(c, d) şeklinde gösterilir.

Bu eşitlikte a =c ve b =d dir.

Kartezyen Çarpım Kümesi

Birinci bileşeni bir A kümesinden, ikinci bileşeni ise bir B kümesinden alarak oluşturulan tüm sıralı ikililerin kümesine **A kartezyen çarpım B kümesi** denir ve **AxB** ile gösterilir. AxB kümesinin ortak özellik yöntemi ile gösterimi

AxB ={(a, b) | a ∈ A ve b ∈ B} dir.

Kartezyen Çarpımın Özellikleri

1. A ve B birbirinden farklı iki küme ise AxB $\neq$ BxA olur. Kümeler yer değiştirdiğinde farklı sıralı ikililer oluşacağı için kartezyen çarpımları da birbirinden farklı kümeler oluştururlar.
2. Ax∅ = ∅xA = ∅ olur. Boş kümenin kartezyen çarpımına ekleyebileceği herhangi bir elemanı olmadığı için kartezyen çarpımının sonucu da yine boş küme bulunur.

Grafiğin dik koordinat sisteminde gösterimi
AxB kümesini oluşturan sıralı ikililerin birinci bileşenleri x ekseni üzerinde, ikinci bileşenleri ise y ekseni üzerinde bulunur. x eksenindeki bileşenlere düşey ve kesikli, y eksenindeki bileşenlere yatay ve kesikli doğrular çizilip kesiştiği noktalar işaretlenir. Bu şekilde elde edilen noktaların oluşturduğu grafik AxB nin grafiğidir.