

## 9. 1. MANTIK

### 9.1.1. Önermeler ve Bileşik Önermeler

#### 9.1.1.1. Önerme

Doğru ya da yanlış kesin bir hüküm (yargı) bildiren ifadelere **önerme** adı verilir. Matematikte önermeler genellikle  $p, q, r, s$  gibi küçük harflerle gösterilir.

Bir önermenin doğru ya da yanlış olmasına, o önermenin **doğruluk değeri** denir. Bir önerme doğru ise doğruluk değeri **D** veya **1** ile yanlış ise **Y** veya **0** ile gösterilir.

Bir **p** önermesi doğru bir önerme ise " $p \equiv 1$ ", yanlış bir önerme ise " $p \equiv 0$ " şeklinde gösterilir ve "**p** önermesi **1** e denktir. " ya da "**p** önermesi **0** a denktir. " şeklinde okunur.

Doğruluk değerleri aynı olan iki önermeye **denk önermeler** denir.  $p$  önermesi  $q$  önermesine denk ise  $p \equiv q$ ,  $p$  önermesi  $q$  önermesine denk değil ise " $p \not\equiv q$ " ile gösterilir.

Önermelerin doğruluk değerlerinin gösterildiği tabloya **doğruluk tablosu** denir.

$p$  önermesinin 2 farklı doğruluk durumu vardır ve tablosu aşağıdaki gibidir.

<b>p</b>	
1	$\longrightarrow$ p doğru
0	$\longrightarrow$ p yanlış

$p$  önermesinin 2,  $q$  önermesinin 2 farklı doğruluk değeri olduğundan  $p$  ve  $q$  önermelerinin  $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$  farklı doğruluk durumu vardır. Önermelerin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

<b>p</b>	<b>q</b>	
1	1	p doğru iken q doğru
1	0	p doğru iken q yanlış
0	1	p yanlış iken q doğru
0	0	p yanlış iken q yanlış

$n$  farklı önermenin birbirine göre  $2^n$  tane doğruluk durumu vardır.

Bir önermenin hükmünün değiştirilip yerine olumsuzunun kullanılması ile elde edilen önermeye ilk önermenin **değili (olumsuzu)** denir.  $p$  önermesinin değili  $p'$  veya  $\sim p$  ile gösterilir.

$p$  önermesi doğru ise doğruluk değeri **1** dir ve  $p'$  önermesinin doğruluk değeri **0** dir.  $p \equiv 1$  ise  $p' \equiv 0$  ile gösterilir.

Bir önermenin değilinin değili önermenin kendisine denktir.  $[(p')' \equiv p]$

Bu özelliğin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

$p$	$p'$	$(p')'$
1	0	1
0	1	0

### 9.1.1.2. Bileşik Önermeler

İki veya daha fazla önermenin “ve”, “veya”, “ya da”, “ise”, “ancak ve ancak” gibi bağlaçlarla birbirine bağlanmasıyla elde edilen yeni önermeye **bileşik önerme** denir.

#### “ve” Bağlacı ile Kurulan Bileşik Önermeler

$p$  ile  $q$  önermelerinin “ve” bağlacı ile bağlanmasından oluşan bileşik önermeye,  **$p$  ve  $q$  bileşik önermesi** denir ve bu önerme  $p \wedge q$  biçiminde gösterilir.

$p \wedge q$  bileşik önermesinin doğruluk değeri;  $p$  ile  $q$  önermelerinin her ikisi de doğru iken doğru, diğer durumlarda ise yanlıştır.

$p$  ve  $q$  önermeleri için  $p \wedge q$  önermesinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

$p$	$q$	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

- $p \wedge p' \equiv 0$
- $p \wedge 0 \equiv 0$
- $p \wedge 1 \equiv p$

## “ve” Bağlacı ile Kurulan Bileşik Önermelerin Özellikleri

### 1. Tek Kuvvet Özelliği

Her  $p$  önermesi için  $p \wedge p \equiv p$  dir. Bu özelliğin doğruluk tablosu ile gösterimi aşağıdaki gibidir.

$p$	$p$	$p \wedge p$
1	1	1
0	0	0

### 2. Değişme Özelliği

Her  $p, q$  önermesi için  $p \wedge q \equiv q \wedge p$  olur. Bu özelliğin doğruluk tablosu ile gösterimi aşağıdaki gibidir.

$p$	$q$	$p \wedge q$	$q \wedge p$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

$p \wedge q \equiv q \wedge p$

### 3. Birleşme Özelliği

Her  $p, q, r$  önermesi için  $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$  dir. Bu özelliğin doğruluk tablosu ile gösterimi aşağıdaki gibidir.

$p$	$q$	$r$	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

## “veya” Bağlacı ile Oluşan Bileşik Önermeler

$p$  ile  $q$  önermelerinin “veya” bağlacı ile bağlanmasından oluşan bileşik önermeye,  **$p$  veya  $q$  bileşik önermesi** denir ve önerme  **$p \vee q$**  biçiminde gösterilir.

**$p \vee q$**  bileşik önermesi;  $p$  ile  $q$  önermelerinden en az biri doğru iken doğru, her ikisi de yanlış iken yanlıştır.

$p$  ve  $q$  önermeleri için  **$p \vee q$**  önermesinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

$p$	$q$	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

- $p \vee p' \equiv 1$
- $p \vee 0 \equiv p$
- $p \vee 1 \equiv 1$

## “veya” Bağlacı ile Kurulan Bileşik Önermelerin Özellikleri

### 1. Tek Kuvvet Özelliği

Her  $p$  önermesi için  $p \vee p \equiv p$  dir. Bu özelliğin doğruluk tablosu ile gösterimi aşağıdaki gibidir.

$p$	$p$	$p \vee p$
1	1	1
0	0	0

$p \equiv p \vee p$

### 2. Değişme Özelliği

Her  $p, q$  önermeleri için  $p \vee q \equiv q \vee p$  dir. Bu özelliğin doğruluk tablosu ile gösterimi aşağıdaki gibidir.

$p$	$q$	$p \vee q$	$q \vee p$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

$p \vee q \equiv q \vee p$

### 3. Birleşme Özelliği

Her  $p, q, r$  önermesi için  $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$  dir. Bu özelliğin doğruluk tablosu ile gösterimi aşağıdaki gibidir.

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

### Dağılma Özelliği

1. "ve" nin "veya" üzerine soldan dağılma özelliği,  $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$  dir. Bu özelliğin doğruluk tablosu ile gösterimi aşağıdaki gibidir.

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

2. "veya"nın "ve" üzerine soldan dağılma özelliği  $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$  dir. Bu özelliğin doğruluk tablosu ile gösterimi aşağıdaki gibidir.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

### De Morgan kuralları

- p veya q nun değili  $(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$
  - p ve q nun değili  $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$
- şeklinde verilen kurallara **De Morgan kuralları** denir.

Bu kuralların doğruluk tablosu ile gösterimi aşağıdaki gibidir.

p	q	p'	q'	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q)'$	$p' \vee q'$	$(p \vee q)'$	$p' \wedge q'$
1	1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1

$$(p \wedge q)' \equiv p' \vee q' \quad (p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$$

### "ya da" Bağlacı ile Oluşan Bileşik Önermeler

p ile q önermelerinin "ya da" bağlacı ile bağlanmasından oluşan bileşik önerme-ye, **p ya da q bileşik önermesi** denir ve önerme  $p \vee q$  biçiminde gösterilir.

$p \vee q$  bileşik önermesi; p ile q önermelerinden yalnız biri doğru iken doğru, diğer durumlarda yanlıştır.

p ve q önermeleri için  $p \vee q$  önermesinin doğruluk değerleri tablosu aşağıdaki gibidir.

p	q	$p \vee q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$$\begin{aligned} p \vee p' &\equiv 1 \\ p \vee p &\equiv 0 \\ p \vee 1 &\equiv p' \\ p \vee 0 &\equiv p \end{aligned}$$

## “ya da” Bağlacı İle Kurulan Bileşik Önermelerin Özellikleri

### 1. Değişme Özelliği

Her p ve q önermesi için  $p \vee q \equiv q \vee p$  dir. Bu özelliğin doğruluk tablosu ile gösterimi aşağıdaki gibidir.

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

$p \vee q \equiv q \vee p$

### 2. Birleşme Özelliği

Her p, q, r önermesi için  $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$  dir. Bu özelliğin doğruluk tablosu ile gösterimi aşağıdaki gibidir.

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

### 9.1.1.3. Koşullu Önerme ve İki Yönlü Koşullu Önerme

#### “ise” Bağlacı ile Oluşan Bileşik Önermeler

p ile q önermelerinin “ise” bağlacı ile bağlanmasından oluşan bileşik önermeye **koşullu önerme** denir ve bu koşullu önerme  $p \Rightarrow q$  biçiminde gösterilir.

$p \Rightarrow q$  önermesi; p doğru, q yanlış iken yanlış diğer durumlarda doğrudur.

p ve q önermeleri için  $p \Rightarrow q$  önermesinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

- $p \Rightarrow p \equiv 1$
- $p \Rightarrow 0 \equiv p'$
- $0 \Rightarrow p \equiv 1$
- $p \Rightarrow 1 \equiv 1$
- $1 \Rightarrow p \equiv p$

$p \Rightarrow q$  önermesi  $p' \vee q$  önermesine denktir.

p	q	p'	$p' \vee q$	$p \Rightarrow q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

$$p' \vee q \equiv p \Rightarrow q$$

#### Önermenin Karşıtı, Tersİ ve Karşıt Tersİ

- $p \Rightarrow q$  önermesinin **karşıtı**  $q \Rightarrow p$ ,
- $p \Rightarrow q$  önermesinin **tersi**  $p' \Rightarrow q'$ ,
- $p \Rightarrow q$  önermesinin **karşıt tersi**  $q' \Rightarrow p'$  olur.

p	q	p'	q'	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p' \Rightarrow q'$	$q' \Rightarrow p'$
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1

$$q \Rightarrow p \equiv p' \Rightarrow q'$$

$$p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$$



## “ancak ve ancak” Bağlacı ile Kurulan Bileşik Önergeler

$p$  ve  $q$  iki önerme olmak üzere  $p \Rightarrow q$  ile  $q \Rightarrow p$  koşullu önermelerinin  $\wedge$  bağlacı ile birbirine bağlanmasından oluşan  $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$  bileşik önermesine **iki yönlü koşullu** önerme denir.

İki yönlü koşullu önerme  $p \Leftrightarrow q$  şeklinde yazılır ve “ $p$  ancak ve ancak  $q$ ” olarak okunur.

$p \Leftrightarrow q$  iki yönlü koşullu önermesi  $p$  ile  $q$  nun doğruluk değerleri aynı iken doğru, farklı iken yanlıştır.

$p$  ve  $q$  önermeleri için  $p \Leftrightarrow q$  önermesinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

$p$	$q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

$$\begin{aligned} p \Leftrightarrow 0 &\equiv p' \\ p \Leftrightarrow 1 &\equiv p \end{aligned}$$

$p$  ve  $q$  önermeleri için  $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$  önermesinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv p \Leftrightarrow q$$

### “ancak ve ancak” Bağlacının Özellikleri

- $p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$
- $p \Leftrightarrow p \equiv 1$
- $p \Leftrightarrow p' \equiv 0$
- $p \Leftrightarrow q \equiv p' \Leftrightarrow q'$
- $(p \Leftrightarrow q)' \equiv p' \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow q'$

### 9.1.1.4. Her ( $\forall$ ) ve Bazı ( $\exists$ ) Niceleyicileri

#### Açık Önerme

İçinde en az bir değişken bulunan ve bu değişkenlere verilen değerlerle doğru ya da yanlış olduğu belirlenen önermelere **açık önerme** denir.

Bir açık önermeyi doğrulayan elemanların kümesine o açık önermenin **doğruluk kümesi** denir.

Bir  $a$  sayısı  $p(x)$  açık önermesinin doğruluk kümesinin elemanı ise  $p(a) \equiv 1$  dir.

Bir  $b$  sayısı  $p(x)$  açık önermesinin doğruluk kümesinin elemanı değil ise  $p(b) \equiv 0$  dir.

#### Niceleyiciler

“Her” sözcüğü, bütün ve tamamı sözcükleri ile aynı anlamdadır.

“Her” niceleyicisi, önüne geldiği elemanların tamamını anlattığı için bu niceleyiciye **evrensel niceleyici** denir ve “ $\forall$ ” sembolü ile gösterilir.

“Bazı” sözcüğü, en az bir ifadesi ile aynı anlamdadır.

“Bazı” niceleyicisi, en az bir tane anlamında kullanıldığı için bu niceleyiciye **varlıksal niceleyici** denir ve “ $\exists$ ” sembolü ile gösterilir.

#### Açık Önermenin Değili (Olumsuzu)

$\exists x, p(x)$  açık önermesinin değili  $\forall x, p'(x)$  tir. Bu özellik sembol ile  $[\exists x, p(x)] \equiv \forall x, p'(x)$  şeklinde ifade edilir.

$\forall x, p(x)$  açık önermesinin değili  $\exists x, p'(x)$  tir. Bu özellik sembol ile  $[\forall x, p(x)] \equiv \exists x, p'(x)$  şeklinde ifade edilir.

Gösterim	Değili
$\forall$	$\exists$
$\exists$	$\forall$
$=$	$\neq$
$\neq$	$=$
$<$	$\geq$
$>$	$\leq$
$\leq$	$>$
$\geq$	$<$

### 9.1.1.5. Tanım, Aksiyom, Teorem ve İspat Kavramları

Anlamı bilinen sözcükler, tanımsız terimler ve daha önceden tanımlanmış terimler yardımıyla terimlerin özelliklerini belirtmeye bu terimleri **tanımlama** denir. Anlamları bilinen terimler tanımlı ya da tanımsız olabilir.

İyi bir tanımda olması gereken özellikler aşağıdaki gibidir.

- I. Anlamı bilinen sözcükler, tanımsız terimler veya tanımlı terimlerle yapılmalıdır.
- II. Tutarlı, açık ve anlaşılır olmalıdır.
- III. Tanım; belirtilmesi gereken özelliği kapsamalı, başka özellikleri kapsamayacak biçimde kesin olmalıdır.

Doğruluğu ispatsız olarak kabul edilen önermelere **aksiyom** denir. Aksiyomlarda bulunması gereken özellikler aşağıdaki gibidir.

- I. Birbirleri ile çelişmemelidir.
- II. Birbirlerinden bağımsız olmalıdır. (Bir aksiyom diğer aksiyomlardan çıkarılmamalıdır.)
- III. Mümkün olduğu kadar az sayıda olmalıdır.

$p$  ve  $q$  önermeler olmak üzere  $p$  önermesi doğru iken  $p \Rightarrow q$  önermesinin doğruluğu ispatlanabiliyorsa  $p \Rightarrow q$  önermesi bir teoremdir. Başka bir ifadeyle doğruluğu ispatlanabilen önermelere **teorem** denir.

$p \Rightarrow q$  teorem olmak üzere  $p$  önermesine **hipotez**,  $q$  önermesine **hüküm** denir.