

9.1.1. ÖNERMELER VE BİLEŞİK ÖNERMELER

1. Önermelerde Temel Kavramlar

Doğru ya da yanlış, kesin hüküm bildiren ifadelere **önerme** adı verilir. Önermeler genellikle “p, q, r, s, t” gibi küçük harflerle gösterilir.

Bir Önermenin Doğruluk Değeri

Doğru ya da yanlış kesin hüküm bildiren ifadeler önerme olarak tanımlandığından bir önermenin iki farklı doğruluk değeri olur. Eğer p önermesi doğru ise D veya 1, yanlış ise Y veya 0 ile gösterilir. p önermesi doğru ise $p \equiv 1$, yanlış ise $p \equiv 0$ şeklinde yazılır.

Bir p önermesinin doğruluk değeri, tabloda

p		p
D	veya	1
Y		0

biçiminde gösterilir.

Bir önerme için iki farklı durum vardır. Bu durum $2^1 = 2$ olarak yazılır.

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

p ve q önermelerinin doğruluk değerleri, tablo biçiminde yandaki gibi gösterilebilir.

Birbirinden bağımsız iki önerme için dört farklı durum vardır. Bu durum $2^2 = 4$ olarak yazılır.

$n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere birbirinden bağımsız n tane önermenin 2^n tane doğruluk değeri vardır.

İki Önermenin Denkliği

Doğruluk değerleri aynı olan önermelere **denk önermeler** denir. p ve q önermelerinin doğruluk değerleri aynı ise bu durum $p \equiv q$ şeklinde gösterilir ve “p denktir q” diye okunur. Doğruluk değerleri aynı olmayan p ve q önermeleri $p \not\equiv q$ biçiminde gösterilir ve “p denk değildir q” diye okunur.

Bir Önermenin Değili (Olumsuzu)

Bir önermenin hükmünün değiştirilmesiyle elde edilen yeni önermeye bu **önermenin değili (olumsuzu)** denir. p önermesinin değili p' ya da $\sim p$ ile gösterilir.

p önermesi doğru ise değili yanlış, p önermesi yanlış ise değili doğru önerme olur.

p	p'	(p')'
1	0	1
0	1	0

1 in değili $\rightarrow 1' \equiv 0$

0 in değili $\rightarrow 0' \equiv 1$ olur.

Bir önermenin değilinin değili kendisidir. $(p')' \equiv p$ olur.

2. Bileşik Önerme

İki veya daha fazla önermenin ve (\wedge), veya (\vee), ya da (\vee), ise (\Rightarrow), ancak ve ancak (\Leftrightarrow) bağlaçları ile birleştirilmesiyle elde edilen yeni önermelere **bileşik önerme** denir.

a) "ve" Bağlacı ile Yapılan Bileşik Önergeler

"ve (\wedge)" bağlacı ile bağlanan bileşik önerme, bileşenlerden her ikisi doğru ise doğru, en az biri yanlış ise yanlıştır. Doğruluk tablosu yanda verilmiştir.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

b) "veya" Bağlacı ile Yapılan Bileşik Önergeler

"veya (\vee)" bağlacı ile bağlanan bileşik önerme; bileşenlerden en az biri doğru ise doğru, her iki bileşen de yanlış ise yanlıştır. Bu önermenin doğruluk tablosu yanda verilmiştir.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

"ve" ve "veya" Bağlacıyla Yapılan Bileşik Önergelerin Özellikleri

1. Her p önermesi için $p \wedge p \equiv p$ ve $p \vee p \equiv p$ olur. (Tek kuvvet özelliği)

p	p	$p \wedge p \equiv p$
1	1	1
0	0	0

p	p	$p \vee p \equiv p$
1	1	1
0	0	0

2. Her p ve q önermeleri için $p \wedge q \equiv q \wedge p$ ve $p \vee q \equiv q \vee p$ olur. (Değişme özelliği)

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

3. Her p, q ve r önermeleri için $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ ve $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ olur. (Birleşme özelliği)

p	q	r	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Benzer şekilde $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ denkleğinin doğruluğunu tablo yaparak gösteriniz.

4. Her p, q ve r önermeleri için

a) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$(q \vee r) \wedge p \equiv (q \wedge p) \vee (r \wedge p)$ olur. ("ve" bağlacının "veya" bağlacı üzerine dağılma özelliği)

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

b) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$(q \wedge r) \vee p \equiv (q \vee p) \wedge (r \vee p)$ olur. ("veya" bağlacının "ve" bağlacı üzerine dağılma özelliği)

Siz de "veya" bağlacının "ve" bağlacı üzerine soldan dağılma özelliği olduğunu tablo yaparak gösteriniz.

5. Her p, q önermesi için $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$ ve $(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$ olur. (De Morgan kuralları)

Bu denkliklerin doğruluk tablosu aşağıda verilmiştir. Bu tabloyu inceleyiniz.

p	q	p'	q'	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(p \vee q)'$	$p' \wedge q'$	$(p \wedge q)'$	$p' \vee q'$
1	1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1



Her p ve q önermeleri için

1. $p \wedge 1 \equiv p$, $p \wedge 0 \equiv 0$, $p \vee 1 \equiv 1$, $p \vee 0 \equiv p$

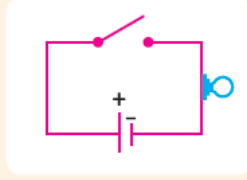
2. $p \wedge p' \equiv 0$, $p \vee p' \equiv 1$, $p \wedge (p \vee q) \equiv p$, $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ olur.

ve / veya Bağlaçlarının Elektrik Devrelerinde Kullanılışı

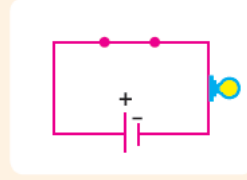
Sembolik mantığın matematik dışında elektrik devrelerinde de kullanım alanı vardır. Elektrik devrelerinde akımın geçmesi 1, geçmemesi 0 ile gösterilirse tüm elektrik devreleri sembolik mantık ile ifade edilebilir.

- Açık anahtar (akım geçirmeyen anahtar):  şeklinde gösterilir. p anahtarı açık ise doğruluk değeri $p \equiv 0$ olur.
- Kapalı anahtar (akım geçiren anahtar):  şeklinde gösterilir. p anahtarı kapalı ise doğruluk değeri $p \equiv 1$ olur.

- Aşağıdaki elektrik devreleri, akım geçiren ve geçirmeyen durumları göstermektedir. Bu durumları inceleyiniz.




Şekil: 1

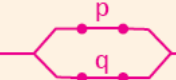


Şekil: 2

Şekil 1: Akım geçmediğinden lamba yanmaz. Şekil 2: Akım geçtiğinden lamba yanar.

Bu durumda seri ve paralel bağlama aşağıdaki gibi gösterilir.

Elektrik devrelerinde seri bağlama  şeklinde çizilir. $p \wedge q \wedge r$ ile gösterilir.

Elektrik devrelerinde paralel bağlama  şeklinde çizilir. $p \vee q$ ile gösterilir.

Bir elektrik devresine karşılık gelen bileşik önerme yazılırken anahtarların açık ya da kapalı olması dikkate alınmaz. Ancak devre çizilirken anahtarların açık ya da kapalı olması dikkate alınır.

c) “ya da (\vee)” Bağlacı ile Yapılan Bileşik Önergeler

“ya da (\vee)” bağlacı ile bağlanan bileşik önerme; bileşenlerinin doğruluk değerleri aynı ise yanlış, bileşenlerinin doğruluk değerleri farklı ise doğrudur.

p	q	$p \vee q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

“ya da” Bağlacının Özellikleri

Her p, q önergeleri için

1. $p \vee q \equiv q \vee p$ olur. (Değişme özelliği)

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

2. $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ olur. (Birleşme özelliği)

p	q	r	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$
1	1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0

3. $(p \vee q)' \equiv p' \vee q' \equiv p \vee q'$ olur.

4. $p \vee p \equiv 0$, $p \vee 1 \equiv p'$, $p \vee 0 \equiv p$, $p \vee p' \equiv 1$ olur.

3. Koşullu Önerme ve İki Yönlü Koşullu Önerme

a) Koşullu Önerme

p ve q iki önerme olmak üzere p ve q önergelerinin ise (\Rightarrow) bağlacı ile birleştirilmesiyle elde edilen $p \Rightarrow q$ önermesine **koşullu önerme** denir. $p \Rightarrow q$ önermesi **p ise q** şeklinde okunur.

$p \Rightarrow q$ koşullu önermesinde

p: **hipotez**

q: **hüküm** olarak adlandırılır.

$p \Rightarrow q$ koşullu önermesinin doğruluk değeri 1 ise bu koşullu önermeye **gerektirme** denir.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Bir Koşullu Önermenin Karşıtı, Tersi, Karşıt Tersi

p ve q önermeleri ile oluşturulan $p \Rightarrow q$ koşullu önermesi verilmiş olsun. Bu durumda

a) $p \Rightarrow q$ önermesinin **karşıtı** $q \Rightarrow p$,

b) $p \Rightarrow q$ önermesinin **tersi** $p' \Rightarrow q'$,

c) $p \Rightarrow q$ önermesinin **karşıt tersi** $q' \Rightarrow p'$

şeklinde tanımlanır.

“ise (\Rightarrow)” Bağlacının Özellikleri

Her p ve q önermeleri için

1. $p \Rightarrow p \equiv 1$

2. $p \Rightarrow 1 \equiv 1$, $p \Rightarrow 0 \equiv p'$, $1 \Rightarrow p \equiv p$

$0 \Rightarrow p \equiv 1$, $p \Rightarrow p' \equiv p'$, $p' \Rightarrow p \equiv p$

3. $p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$

p	q	p'	$p \Rightarrow q$	$p' \vee q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

4. $p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$ olur.

p	q	p'	q'	$p \Rightarrow q$	$q' \Rightarrow p'$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

b) İki Yönlü Koşullu Önerme

p ve q iki önerme olmak üzere p ve q önermelerinin ancak ve ancak (\Leftrightarrow) bağlacı ile birleştirilmesiyle elde edilen $p \Leftrightarrow q$ önermesine **iki yönlü koşullu önerme** denir. $p \Leftrightarrow q$ önermesi “p ancak ve ancak q” şeklinde okunur.

$p \Leftrightarrow q$ iki yönlü koşullu önermesi p ve q nun doğruluk değerleri aynı iken doğru, farklı iken yanlıştır.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

“ancak ve ancak (\Leftrightarrow)” Bağlacının Özellikleri

Her p ve q önermeleri için

1. $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

2. $p \Leftrightarrow q \equiv p' \Leftrightarrow q'$

3. $p \Leftrightarrow p \equiv 1$, $p \Leftrightarrow p' \equiv 0$, $p \Leftrightarrow 1 \equiv p$, $p \Leftrightarrow 0 \equiv p'$

4. $(p \Leftrightarrow q)' \equiv p' \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow q'$

5. $(p \Leftrightarrow q)' \equiv p \vee q$ olur.

4. Sözel ya da Sembolik Mantık Dilinde Verilen Bileşik Önermelerin Birbirine Dönüştürülmesi

Sözel olarak verilen bir önerme; sembolik mantık dilinde yazılırken sözel ifadede bulunan matematiksel sembol, kavram ve bağlaçlar belirlenir. Daha sonra sözel olarak verilen önerme, sembolik mantık dilinde yazılır.

Önerme, sembolik mantık dilinde verilmişse kullanılan sembol, bağlaç ve diğer matematiksel kavramlar sözel ifadeye dönüştürülerek önermenin sözel ifadesi yazılır.

5. Totoloji ve Çelişki

Bir bileşik önerme; bileşenlerinin bütün doğruluk değerleri için doğru (1) oluyorsa **totoloji**, yanlış (0) oluyorsa **çelişki** olarak tanımlanır.

9.1.2. AÇIK ÖNERMELER VE İSPAT YÖNTEMLERİ

1. Her (\forall) ve Bazı (\exists) Niceleyicileri

“Her” sözcüğü bütün, hepsi, tamamı anlamına gelir. Her sözcüğü “ \forall ” sembolü ile gösterilir.

“Bazı” sözcüğü ile “en az bir” sözcüğü aynı anlama gelmektedir. “Bazı” sözcüğü “ \exists ” sembolü ile gösterilir.

“Her” sözcüğü **evrensel niceleyici**, “bazı” sözcüğü **varlıksal niceleyici** olarak isimlendirilir.

2. Açık Önerme

p : “Çift olan asal sayı yalnız 2 dir.”

q(x) : “ $x \in \mathbb{Z}$, $3x + 9 = 0$ olur.”

p önermesinde değişken bulunmazken q(x) önermesinde x değişkeni bulunmaktadır. q(x), x in bazı değerleri için sağlanırken bazı değeri için sağlanmaz.

İçinde en az bir değişken bulunduran ve bu değişkenlere verilen değerler sonucunda kesin olarak doğru ya da yanlış yargı bildiren ifadelere **açık önerme** denir. Açık önermeyi sağlayan değerler kümesine, açık önermenin **doğruluk kümesi (çözüm kümesi)** denir.

Örneğin “....., doğal sayılar kümesinin elemanıdır.” ifadesi, içinde bilinmeyen bulundurduğu için bir açık önermedir.

Boş bırakılan yere 5 yazılırsa “5, doğal sayılar kümesinin elemanıdır.” önermesi doğru bir önerme olur. Eğer (-5) yazılırsa “ (-5) , doğal sayılar kümesinin elemanıdır.” önermesi yanlış bir önerme olur.

Denklem ve eşitsizlikler, değişken içerdiğinden açık önerme olarak değerlendirilir.

A kümesinde tanımlı p önermesi “her” ve “bazı” sözcükleri kullanılarak “ $\forall x \in A, p(x)$ ” ya da “ $\exists x \in A, p(x)$ ” şeklinde yazılabilir.

Her (\forall) ve Bazı (\exists) Niceleyicilerinin Değili (Olumsuzu)

$p(x)$, x değişkenine bağlı bir önerme olsun. $p'(x)$, p önermesinin değili olmak üzere

a) “ $\exists x, p(x)$ olur.” önermesinin değili “ $\forall x, p'(x)$ olur.”

b) “ $\forall x, p(x)$ olur.” önermesinin değili “ $\exists x, p'(x)$ olur.”

şeklinde tanımlanır. Bu durum,

$[\exists x, p(x)]' \equiv \forall x, p'(x)$ ve $[\forall x, p(x)]' \equiv \exists x, p'(x)$ şeklinde de yazılır.

Aşağıda bazı sembol ve niceleyicilerin değili tablo hâlinde verilmiştir.

Sembol	\exists	\forall	\vee	\wedge	$<$	\leq	$>$	\geq	$=$	\neq
Değili	\forall	\exists	\wedge	\vee	\geq	$>$	\leq	$<$	\neq	$=$

3. Tanım, Aksiyom, Teorem ve İspat Kavramları

İnsanlar günlük hayatlarında, sosyal ve kültürel ilişkilerinde farklı cümleler ile iletişim kurarlar. Bu iletişimin amacına ulaşması, kullanılan cümleler kadar seçilen kelimelerle de yakından ilişkilidir. Bazen satırlar ya da paragraflar alabilen anlatımlar, uygun birkaç cümle ile daha kısa ve öz şekilde aktarılabilir. Örneğin avukatlar uzun ve karmaşık sorunları, mesleki kelime ve cümlelerle daha kısa ve öz olarak anlatabilirler.

Bilim dallarının günlük konuşma dilinden farklı, kendine özgü terimleri vardır. Bu terimler, bir bilim dalına özgü sözcük ya da sözcük gruplarıdır. Örneğin roman, hikâye, sıfat, dörtlük vb. terimler edebî terimlerdir. Denklem, eşitsizlik, rakam, aç, üçgen vb. terimler ise matematiksel terimlerdir.

Matematikte bir kavram ve özellik ifade edilirken belli terimler kullanılır. Bu terimler iki grupta toplanır:

1) Tanımsız terimler

2) Tanımlı terimler

Tanımsız Terimler: Başka bir terim ya da tanıma ihtiyaç duyulmadan anlaşılabilen terimlerdir. Örneğin nokta, doğru, düzlem tanımsız terimlerdir.

Tanımlı Terimler: Kendisinden önce tanımlanan terimler, tanımsız terim ve başkaca kavramlar kullanılarak tanımlanmaya ihtiyaç duyulan terimlerdir. Örneğin denklem “İçinde değişken bulunan ve değişkene verilen bazı değerler için sağlanan eşitliktir.” şeklinde tanımlanır. Dikkat edilirse denklem tanımı yapılırken “değişken, eşitlik” gibi farklı terimler de kullanılmıştır.

Tanım: Bir kavram ya da terimi, tanımlı ve tanımsız terimler kullanmak suretiyle özelliklerini belirterek açıklamaya **tanım (tanımlama)** adı verilir. Üçgen “Doğrusal olmayan üç noktanın ikişer ikişer birleştirilmesiyle elde edilen geometrik bir şekildir.” şeklinde tanımlanır. Bu tanımda tanımsız terimler (nokta, doğru) kullanıldığına dikkat ediniz.

Aksiyom: İspata gerek duyulmaksızın doğruluğu kabul edilen önermelere **aksiyom** denir. Örneğin “İki noktadan bir doğru geçer.” önermesi bir aksiyomdur.

Teorem: Doğruluğu ispatsız, kabul görmeyen önermelere **teorem** denir. Örneğin

“Bir üçgenin dış açılarının ölçüleri toplamı 360° dir.” önermesi doğrudan kabul edilebilecek bir önerme değildir. Belli terim, kavram ve tanımlamalar kullanılarak ispatlanma zorunluluğu vardır.

p ve q iki önerme olmak üzere

p önermesi doğru iken $p \Rightarrow q$ koşullu önermesi doğru ise $p \Rightarrow q$ önermesi bir teoremdir.

$p \Rightarrow q$ teoreminde

p : Teoremin hipotezi (varsayım),

q : Teoremin hükmü (yargı) dır.

İspat: Aksiyom, kural, sonuç veya tanımları kullanarak bir yargının doğru veya yanlış olduğunun gösterilmesi işlemlerine **ispat** denir.