7.1. Koşullu Olasılık

7.1.1. Koşullu Olasılık

Matematik Tarihi

Milattan önce 4. yüzyılda yaşamış Aristo'nun eserlerinde **olasılık**, bir olayın rastgele gerçekleşmesi durumunu ifade etmek için kullanılan kavramdır. Olasılık kavramının matematiğin bir dalı olarak ortaya çıkışı 17. yüzyılın ortalarına denk gelir. Blaise Pascal (Bileys Paskal), kendisine yöneltilen bir olasılık sorusunu çözmekle yetinmeyip bu konuda çalışmalar başlatmıştır. Pascal, çağdaşı Pierre de Fermat (Piyer dö Ferma) ile bu alanda sık sık fikir alışverişinde bulunmuştur. İkili, matematiğin önemli bir dalı olan **olasılık kuramını** ortaya atmıştır. Olasılık kuramı günümüzde bilim, endüstri, ekonomi, spor, yönetim, bankacılık, sigortacılık, kalite kontrolü, gazların kinetik teorisi, mekanik gibi alanlarda kullanılmaktadır.

Doğacak bir bebeğin cinsiyeti ve göz rengi, bir spor müsabakasının sonucu, aylık enflasyon beklentileri, hava tahmin raporları gibi belirsizlik içeren durumlara günlük hayatta sıklıkla rastlanabilir. Belirsizliklere dair tahmin yürütülürken olasılık kavramına başvurulur. Tahmin yürütülen olayların sonuçları pek çok etkene bağlı olabilir.

Hatırlatma

E örnek uzayında A ve B iki olay olmak üzere A olayının olasılığı $P(A)=\frac{s(A)}{s(E)}$ şeklindedir.
Herhangi bir A olayının gerçekleşme olasılığı P(A), gerçekleşmeme olasılığı P(A') olmak üzere $P(A)+P(A')=1$ olur.
Bir deneyin tüm sonuçlarının oluşturduğu kümeye **örnek uzay** denir ve bu küme **E** ile gösterilir. Örnek uzayın her bir alt kümesine **olay** denir.
Bir olayın gerçekleşme değerinin [0,1] ndaki bir reel sayı ile gösterilmesine bu **olayın olma olasılığı** denir.

İki olayın birleşiminin olasılığı $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ olur.
Aynı anda gerçekleşmesi mümkün olmayan olaylara **ayrık olaylar** denir.
A ve B ayrık olaylar ise $P(A\cap B)=0$ ve $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ olur.
E örnek uzayında A ve B iki olay olsun. B olayının gerçekleşmiş olması hâlinde A olayının gerçekleşme olasılığına **A olayının B olayına bağlı koşullu olasılığı** denir ve bu olasılık **P(A|B)** şeklinde gösterilir.
A olayının B olayına bağlı koşullu olasılığı, $P(B)\neq 0$ olmak üzere

$$\boxed{P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$$ şeklindedir.

$P(A\cap B)=\frac{s(A\cap B)}{s(E)}$, $P(B)=\frac{s(B)}{s(E)}$ ve $s(B)\neq 0$ olmak üzere

$$\boxed{P(A|B)=\frac{s(A\cap B)}{s(B)}}$$ şeklindedir.

P(A|B)

Gerçekleşmesi istenen olay ← A | B → Gerçekleşmiş olay

7.1.2. Bağımlı ve Bağımsız Olaylar

Bir zar ile bir madenî paranın birlikte atılma deneyinde zarın üst yüzeyine çift sayı gelmesi olayı paranın tura gelmesi olayını etkiler mi?

E örnek uzayında A ve B olayları için $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ olmak üzere B olayının gerçekleşme olasılığı A olayının gerçekleşmesini etkilemiyorsa **A olayı B olayından bağımsızdır** denir.

A ve B olayları bağımsız ise $\mathbf{P(A|B) = P(A)}$ olur. $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ olduğundan

$P(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ olur.

A ile B bağımsız olaylar ise $\boxed{\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}}$ olur.

A olayının gerçekleşmesi B olayının gerçekleşmesini etkiliyorsa A ve B olaylarına **bağımlı olaylar** denir.

Buna göre A ile B bağımlı olaylar ise $\boxed{\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)}}$ olur.

7.1.3. Bileşik Olaylar

Bir deneyin tüm çıktılarına **olay**, sadece bir çıktısından oluşan kümeye **basit olay**, birden çok çıktısından oluşan kümeye **bileşik olay** denir.

Bir zar atma deneyinde zarın üst yüzeyinin 6 olması basit olay, asal sayı olması bileşik olaydır.

7.2. Deneysel ve Teorik Olasılık

7.2.1. Deneysel Olasılık ile Teorik Olasılığın İlişkilendirilmesi

Bir deneyde ortaya çıkabilecek tüm sonuçlar göz önünde bulundurularak yapılan matematiksel hesaplamaya **teorik olasılık** denir.

Aşağıda bir zar atma olayında zarın üst yüzeyine 3 gelme olasılığı hesaplanmıştır.

Zarın birbirine eşit 6 yüzeyi vardır ve bu yüzeylerden bir tanesi 3 ile gösterilir.

O hâlde $P(3) = \dfrac{1}{6}$ olur.

Bir olayın olma olasılığını yapılan denemelerin sonuçlarına göre bulmaya **deneysel olasılık** denir.

Olayın gerçekleşme sayısının deney sayısına oranına **olayın deneysel olasılığı** denir.

Not

Bir örnek uzayda deneysel olasılık değeri, deneme sayısı arttıkça teorik olasılık değerine yaklaşır.