11.7.1. KOŞULLU OLASILIK

1. Koşullu Olasılık

Bir okul yönetimi “Kardeş Okul Projesi” kapsamında okullar arasında “barış, sevgi, kardeşlik, dostluk” gibi değerlerin geliştirilmesini amaçlamaktadır. Bu proje kapsamında Görsel 7.1.1’deki haritadan kura ile bir ilçe ve bu ilçeden bir okul seçilecektir.

Seçilen ilçenin haritadaki renginin mavi olduğu bilinmektedir. Bu ilçenin Söğüt olma olasılığı aşağıdaki gibi bulunur. Haritada mavi renkli ilçe sayısının 3 olduğu görülür (kesinleşmiş olayın eleman sayısı). İstenen ilçe sayısı 1 olduğundan istenen olayın olasılığı

$$\frac{\text{İstenilen ilçe sayısı}}{\text{Mavi renkli ilçe sayısı}} = \frac{1}{3} \text{ olarak bulunur.}$$

Görsel 7.1.1: Bilecik il haritası

Tanım

A ile B, E örnek uzayının iki olayı olsun. B olayının gerçekleşmiş olması koşulu ile A olayının gerçekleşme olasılığına A olayının B ye bağlı **koşullu olasılığı** denir ve $P(A \mid B)$ ile gösterilir.

$P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ biçiminde hesaplanır.

E eş olumlu örnek uzay ise $P(A \mid B) = \dfrac{s(A \cap B)}{s(B)}$ olur.

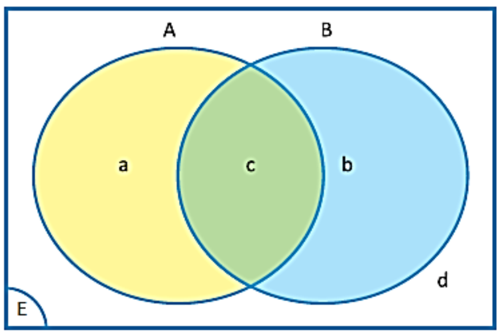
$s(A - B) = a$

$s(B - A) = b$

$s(A \cap B) = c$

$s(A \cup B)' = d$

bulundukları kümenin eleman sayıları olmak üzere Şekil 7.1.1’deki Venn şeması çizilir.



Şekil 7.1.1: Venn şeması

B olayının $(b + c)$ farklı şekilde gerçekleşmesi koşulunda A olayı c defa gerçekleşebilir.

Bu durum $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{c}{(b+c)} = \dfrac{\frac{c}{s(E)}}{\frac{b+c}{s(E)}} = \dfrac{\frac{s(A \cap B)}{s(E)}}{\frac{s(B)}{s(E)}} = \dfrac{s(A \cap B)}{s(B)}$ ile hesaplanır.

Tarih Köşesi

Olasılık bir şeyin olmasının veya olmamasının matematiksel veya olabilirlik yüzdesi değeri olarak tanımlanır. 17. yüzyılın ikinci yarısında olasılık konusunun Pascal (Paskal) ve Fermat (Ferma) tarafından matematiksel olarak incelenmeye başlanması ile olasılık sözcüğü modern anlamına doğru bir yol almıştır.

Bugün Olasılık Kuramı bilim, endüstri, ekonomi, spor, yönetim gibi çağdaş insanın yaşamını etkileyen her alana girmiştir. Örneğin bankacılık, sigortacılık, endüstride kalite kontrolü, genetik, gazların kinetik teorisi, kuantum mekaniği gibi pek çok alan olasılık kuramı olmadan ayakta duramaz.

Pierre Simon Laplace' ın (Piyer Simon Laplas) da belirttiği gibi olasılık, kökleri şanş oyunlarına dayanan ve büyük birikimler elde edilmesini sağlayan bir yöntem iken bugün insan bilgisinin önemli bir aracı durumuna gelmiştir.

Kaynak: Dönmez Ali, Matematiğin Öyküsü ve Serüveni, Toplumsal Dönüşüm Yayınları İstanbul, 2002

Görsel 7.1.2: Fermat

2. Bağımlı ve Bağımsız Olayların Olasılıkları

1.Bağımsız Olayların Olasılıkları

Tanım

A ve B, E örnek uzayında iki olay olsun. B olayının gerçekleşmesi veya gerçekleşmemesi, A olayının gerçekleşme olasılığını etkilemiyorsa A ve B olaylarına **bağımsız olay** denir. $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ olmak üzere

$P(A) = P(A \mid B)$ ya da $P(B) = P(B \mid A)$ veya $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ ise

A olayı B olayından bağımsızdır denir.

A ve B gibi iki olayda B olayının gerçekleştiğinin bilindiği durumda A olayının gerçekleşme olasılığı $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ile tanımlıydı.

A ile B olayları bağımsız ise $P(A) = P(A \mid B)$ veya $P(B) = P(B \mid A)$ olur.

$P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ eşitliğinde $P(A \mid B)$ yerine $P(A)$ yazılırsa

$P(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ bağıntısı ile bağımsız A ve B olaylarının olasılığı hesaplanır.

Örneğin bir zar ve bir madenî para atıldığında zarın çift sayı gelmesi ile paranın tura gelmesi olayları bağımsız olaylardır. Zarın çift sayı gelmesi, paranın tura gelmesini ya da paranın tura gelmesi, zarın üst yüzüne çift sayı gelmesini etkilemez. Bu yüzden bu olaylar bağımsızdır.

Özellik

A ile B bağımsız olayları için

$$P(A \wedge B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\begin{aligned} P(A \vee B) &= P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \text{ olur.} \end{aligned}$$

Sonuç

Bağımsız olaylarla ayrık olaylar birbirine karıştırılmamalıdır. Bağımsız olayların olasılıkları sıfırdan farklı ise ortak noktaları vardır. Ayrık olayların örnek uzayları aynıdır, bağımsız olayların örnek uzayları farklıdır.

2. Bağımlı Olayların Olasılığı

Tanım

A ile B, E örnek uzayının iki olayı olsun. A olayının gerçekleşmesi durumunda B olayının gerçekleşme olasılığı ile A olayının gerçekleşmemesi durumunda B olayının gerçekleşme olasılığı birbirinden farklı ise A ve B olaylarına **bağımlı olaylar** denir.

$P(A) \neq P(A \mid B)$ ve $P(B) \neq P(B \mid A)$ olur.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$ bağıntısı hem bağımlı olaylar hem de bağımsız olaylar için geçerlidir.

Sonuç

A ve B bağımlı iki olay olsun. A ve B olaylarının gerçekleşme olasılığı, A olayının gerçekleşme olasılığı ile A olayının gerçekleşmesi durumunda B olayının gerçekleşme olasılığının çarpımına eşittir.

3. Bileşik Olayların Olasılıkları

Tanım

İki veya daha çok olayın birlikte veya art arda gerçekleşmesi olayına **bileşik olay** denir.

A ve B, E örnek uzayının iki olayı olsun. A ile B bağımsız iki olay iken ve bağlacı ile bağlanan olayların birlikte gerçekleşmesi beklenir. Veya bağlacı ile bağlanan olayların ise en az birinin gerçekleşmesi yeterlidir.

$P(A \text{ veya} B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$ olur.

$P(A \text{ ve} B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ olur.

A ile B ayrık olaylar ise $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ olur.

Örneğin bir para havaya atıldığında paranın tura gelme olayı basit olaydır. Bir para ve bir zar birlikte atıldığında ise paranın yazı ve zarın 4 gelmesi, iki basit olaydan oluşan bileşik olaydır.

Ağaç Diyagramı

Sayma yöntemlerinden biri de ağaç diyagramıdır. Ağaç diyagramı, sonlu sayıdaki denemeler dizisinin bütün çıktılarının sergilenmesinde kullanılan bir yöntemdir. Deneyin gelişimi dallara ayrılarak izlenir ve ağaca benzer bir görüntü oluşur. Aranılan çıktılar veya olaylar bu diyagramdan kolayca görülüp listelenebilir.

11.7.2. DENEYSEL VE TEORİK OLASILIK

Deneysel ve Teorik Olasılık

Tanım

Bir olayın olma olasılığını ,yapılan deneylere göre bulmaya **deneysel olasılık** denir. Deneysel olasılıkta bir olayın olasılığı geçmiş verilere göre ya da deneyimlere göre hesaplanır. Bir olayın deneysel olasılık değeri, deneyde istenen durumların gerçekleşme sayısının tüm deneme sayısının oranına eşittir.

$$\text{Deneysel olasılık} = \frac{\text{Yapılan deneyde istenilen durumun gerçekleşme sayısı}}{\text{Tüm deneme sayısı}}$$

Deney yapmadan teorik olarak hesaplanan olasılığa **teorik olasılık** denir.

Örneğin bir zar atıldığında üst yüzüne 5 gelme olasılığının $\frac{1}{6}$ olması teorik olasılıktır. Bir madenî parayı 50 kez atan Ali'nin 35 kez tura geldiğini gözlemlemesi ve 51. atışta tura gelme olasılığını hesaplarken $\frac{35}{50} = \frac{7}{10}$ sini bulması deneysel olasılıktır.

Sonuç

Deney sayısı arttıkça deneysel olasılığın değeri, teorik olasılığın değerine yaklaşır.