10.3.1. POLİNOM KAVRAMI VE POLİNOMLARDA İŞLEMLER

1. Temel Kavramlar

Tanım

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ gerçek sayılar; $a_n \neq 0$, x değişken ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ şeklindeki ifadelere bir değişkenli, gerçek (reel) katsayılı n. dereceden bir **polinom** (çok terimli) denir.

Burada

$a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \ldots, a_2 x^2, a_1 x, a_0$ ifadelerine polinomun terimleri,

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ gerçek sayılarına polinomun **katsayıları** denir.

Değişkeninin üssü en büyük olan terimin üssüne **polinomun derecesi** denir ve $\text{der}[P(x)]$ ile gösterilir.

Değişkenin üssü en büyük olan terimin katsayısına **polinomun başkatsayısı**,

Değişken bulundurmayan terime **polinomun sabit terimi** denir.

Sonuç

Bir polinomun sabit terimini bulmak için değişken yerine “0” yazılır.

Sonuç

Bir polinomun katsayıları toplamını bulmak için değişken yerine “1” yazılır.

Tanım

$a_n = a_{n-1} = \ldots = a_2 = a_1 = 0$ ve $a_0 \neq 0$ olmak üzere

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ polinomuna **sabit polinom** denir.

$P(x) = a_0$ şeklinde gösterilir.

Sabit polinomun derecesi sıfırdır.

Tanım

$a_n = a_{n-1} = \ldots = a_2 = a_1 = a_0 = 0$ olmak üzere

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ polinomuna yani tüm terimleri “0” olan polinoma **sıfır polinomu** denir.

$P(x) = 0$ şeklinde gösterilir. Sıfır polinomunun derecesi belirsizdir.

Tanım

Dereceleri eşit olan iki polinomun aynı dereceli terimlerinin katsayıları birbirine eşit ise bu iki polinoma **eşit polinomlar** denir. Buna göre

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ polinomları verilsin.

$$P(x) = Q(x) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_n = b_n \\ a_{n-1} = b_{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_2 = b_2 \\ a_1 = b_1 \\ a_0 = b_0 \end{array} \right\} \text{ olur.}$$

Tanım

Bir P polinomu birden fazla değişken içeriyorsa bu tür polinomlara **çok değişkenli polinom** denir.
$P(x,y,\ldots)$ şeklinde gösterilir.

P polinomu x değişkenine göre verilmişse P(x), x ve y değişkenlerine göre verilmişse P(x, y) şeklinde gösterilir.
Çok değişkenli polinomlarda değişkenlerin kuvvetleri, tek değişkenli polinomlarda olduğu gibi doğal sayıdır. Polinomun derecesi, terimlerin derecelerinden en büyük olanıdır.

2. Polinomlarda İşlemler

Sayılarda olduğu gibi polinomlarda da toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri yapılabilir. Bu işlemler yapılırken belirli kurallar kullanılır.

Polinomlarda Toplama ve Çıkarma İşlemleri

Polinomlar toplanıp çıkarılırken aynı dereceli terimler (benzer terimler) kendi aralarında toplanıp çıkarılır, farklı dereceden terimler aynen alınır. Polinomlar toplanıp çıkarıldığında elde edilen polinomun derecesi, derecesi büyük olan polinomun derecesine eşit olur. Yani

$\text{der}[P(x)] = n,\ \text{der}[Q(x)] = m$ ve $m > n$ ise $\text{der}[P(x) \mp Q(x)] = m$ olur.

Polinomlarda Çarpma İşlemi

İki polinom çarpılırken birinci polinomun her bir terimi ikinci polinomun her bir terimi ile ayrı ayrı çarpılır. Elde edilen polinomda aynı dereceli terimler toplanır, farklı dereceden terimler aynen yazılır.

Özellikler

$\text{der}[P(x)] = n,\ \text{der}[Q(x)] = m$ olsun.

1. $\text{der}[P(x) \cdot Q(x)] = n + m$ olur.
2. $\text{der}[P(x)] = n$ ise $P(x) = x^n$ alınabilir.
   Bu durumda $P^k(x) = (x^n)^k = x^{n\cdot k}$ ve $P(x^k) = (x^k)^n = x^{n\cdot k}$ olduğundan
   $\text{der}[P^k(x)] = \text{der}[P(x^k)] = n \cdot k$ olur.
3. $\text{der}\{P[Q(x)]\} = m \cdot n$ olur.

Polinomlarda Bölme İşlemi

$P(x)$ ve $Q(x)$ birer polinom, $Q(x) \neq 0$ ve $\text{der}[P(x)] \geq \text{der}[Q(x)]$ olmak üzere

$$\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} & B(x) \\ \underline{-\quad\quad} & \\ K(x) & \end{array}$$

$P(x)$: Bölünen
$Q(x)$: Bölen
$B(x)$: Bölüm
$K(x)$: Kalan polinomudur.

Özellikler

1. $\text{der}[K(x)] < \text{der}[Q(x)]$
2. $K(x) = 0$ ise $P(x)$ polinomu $Q(x)$ polinomuna tam bölünür.
3. $\text{der}[P(x)] = m$ ve $\text{der}[Q(x)] = n$ ise $\text{der}\left[\dfrac{P(x)}{Q(x)}\right] = m - n$ olur.

Polinomlarda Bölme İşleminde Kalan Bulma

P(x) Polinomunun $ax+b$ ile bölümü

$$\begin{array}{r|l} P(x) & ax+b \\ \hline - & B(x) \\ \hline K & \end{array}$$

$P(x)=(ax+b)\cdot B(x)+K \qquad ax+b=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$

$P\left(-\frac{b}{a}\right)=\left(a\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)+b\right)\cdot B\left(-\frac{b}{a}\right)+K=0\cdot B\left(-\frac{b}{a}\right)+K$

$K=P\left(-\frac{b}{a}\right)$

Bir $P(x)$ polinomu $ax+b$ ile tam bölünüyorsa $P\left(-\frac{b}{a}\right)=0$ olur. Bu durumda $ax+b$, $P(x)$ polinomunun bir çarpanıdır. Yani

$P\left(-\frac{b}{a}\right)=0 \Leftrightarrow ax+b$, $P(x)$ in bir çarpanıdır.

Bir $P(x)$ polinomu, $ax+b$ ile bölündüğünde $K=P\left(-\frac{b}{a}\right)=0$ ise $x=-\frac{b}{a}$, $P(x)=0$ denkleminin sıfırı (kökü) olur.

10.3.2. POLİNOMLARIN ÇARPANLARA AYRILMASI

1. Çarpanlara Ayırma

Tanım

$P(x)$, $A(x)$ ve $B(x)$ birer polinom olmak üzere $P(x)=A(x)\cdot B(x)$ şeklinde yazılabiliyorsa $A(x)$ ve $B(x)$ polinomları, $P(x)$ polinomunun birer çarpanıdır.

$P(x)$ polinomu, sabit polinomdan farklı iki veya daha fazla polinomun çarpımı şeklide yazılabiliyorsa $P(x)$ polinomuna **çarpanlarına ayrılabilen polinom** (indirgenebilir polinom)**,** aksi hâlde **çarpanlarına ayrılamayan polinom** (indirgenemeyen polinom) denir.

Başkatsayısı 1 olan indirgenemeyen polinom **asal polinom** olarak adlandırılır.

Bir $P(x)$ polinomunun derecesinden daha küçük iki ya da daha fazla polinomun çarpımı şeklinde yazılmasına $P(x)$ polinomunun **çarpanlara ayrılması** denir.

- $P(x)=x^2+x-6$ polinomu, $P(x)=(x-2)\cdot(x+3)$ şeklinde yazılabilir. $(x-2)$ ve $(x+3)$ polinomları $P(x)$ polinomunun birer çarpanıdır.
- $P(x)=5x-6$, $Q(x)=2x^2+3$ polinomları, çarpanlarına ayrılamayan polinomlardır.
- $P(x)=x^2+4$, $Q(x)=x+7$ bu polinomlar başkatsayıları 1 olan indirgenemeyen polinomlar olduğundan asal polinomlardır.

Çarpanlara Ayırma Yöntemleri

a) Ortak Çarpan Parantezine Alma Yöntemi

Bir ifade çarpanlarına ayrılırken ifadenin her teriminde ortak çarpan varsa bu ifade ortak çarpan parantezine alınarak çarpanlarına ayrılır.

$P(x)\cdot B(x)\mp P(x)\cdot C(x)$ ifadesinin her teriminde $P(x)$ polinomu ortak bir çarpandır. Bu ifade $P(x)$ ortak çarpan parantezine alınırsa

$P(x)\cdot B(x)\mp P(x)\cdot C(x)=P(x)\cdot[B(x)\mp C(x)]$

eşitliği elde edilir. Böylece bu ifade çarpanlarına ayrılmış olur.

Not

$n\in\mathbb{Z}$ olmak üzere

a) $(x-y)^{2n}=(y-x)^{2n}$

b) $(x-y)^{2n+1}=(-1)\cdot(y-x)^{2n+1}$ olur.

b) Gruplandırarak Çarpanlara Ayırma Yöntemi

Verilen ifadenin bazı terimlerinde ortak çarpan bulunmayabilir. Bu durumda ortak çarpana sahip terimler ortak çarpan parantezine alınacak şekilde gruplandırılır ve çarpanlara ayırma işlemi yapılır.

$$\underbrace{A(x)\cdot B(x)}+\overbrace{D(x)\cdot C(x)}+\underbrace{A(x)\cdot C(x)}+\overbrace{D(x)\cdot B(x)}$$
$$=[A(x)\cdot B(x)+A(x)\cdot C(x)]+[D(x)\cdot C(x)+D(x)\cdot B(x)]$$
$$=A(x)\cdot[B(x)+C(x)]+D(x)\cdot[B(x)+C(x)]$$
$$=[A(x)+D(x)]\cdot[B(x)+C(x)]$$

Özdeşliklerden Yararlanarak Çarpanlara Ayırma Yöntemi

Polinomlar çarpanlara ayrılırken bilinen bazı temel özdeşliklerden yararlanılır. Bu özdeşlikler aşağıda incelenmiştir.

i. İki Kare Farkı Özdeşliğinden Yararlanarak Çarpanlara Ayırma

$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ olur.

Not

$$(x+y)^2-(x-y)^2=(x+y+x-y)\cdot[x+y-(x-y)]$$
$$=2x\cdot 2y$$
$$=4xy \text{ olur.}$$

ii. İki Küp Farkı ve İki Küp Toplamı Özdeşliklerinden Yararlanarak Çarpanlara Ayırma

1. $x^3-y^3=(x-y)\cdot(x^2+xy+y^2)$ (İki küp farkı özdeşliği)
2. $x^3+y^3=(x+y)\cdot(x^2-xy+y^2)$ (İki küp toplamı özdeşliği)

Not

$n\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere

1. $x^n-y^n=(x-y)\cdot(x^{n-1}y^0+x^{n-2}y^1+...+x^0y^{n-1})$
2. $x^n+y^n=(x+y)\cdot(x^{n-1}y^0-x^{n-2}y^1+...+x^0y^{n-1})$ $(n \text{ tek ise})$

iii. Tam Kare İfadeler

1. $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$
2. $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$
3. $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2\cdot(xy+yz+xz)$

iv. Tam Küp İfadeler

1. $(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ veya $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$
2. $(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ veya $(x-y)^3=x^3-y^3-3xy(x-y)$

Değişken Değiştirme İle Çarpanlara Ayırma Yöntemi

Değişken değiştirme, karmaşık ifadeleri basitleştirmek için kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntemde belirlenen ifade yerine daha basit yeni bir değişken kullanılır. İfade çarpanlarına ayrıldıktan sonra yeni değişkene göre elde edilen sonuç, verilen değişkene göre düzenlenir.

$ax^2 + bx + c$ Biçimindeki Üç Terimli İfadelerin Çarpanlarına Ayrılması

i. $a = 1$ ise

Bu durumda $b = m + n$ ve $c = m \cdot n$ olacak şekilde $m, n \in \mathbb{R}$ gerçek sayıları varsa verilen üç terimli ifade $x^2 + bx + c = x^2 + (m + n)x + (m \cdot n) = (x + m) \cdot (x + n)$ şeklinde çarpanlarına ayrılır.

ii. $a \neq 1$ ise

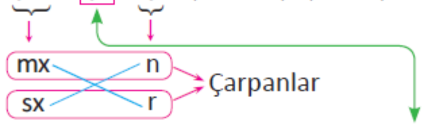
$a = m \cdot s$

$c = n \cdot r$

$b = m \cdot r + n \cdot s$ olacak biçimde m, n, r ve s gerçek sayıları varsa

$ax^2 + bx + c = (mx + n) \cdot (sx + r)$ şeklinde çarpanlarına ayrılır.

$$\underbrace{ax^2} + \boxed{bx} + \underbrace{c} = (mx + n) \cdot (sx + r)$$



$$mx \cdot r + sx \cdot n = (m \cdot r + n \cdot s) \cdot x = \boxed{bx}$$

Terim Ekleyip Çıkarma Yoluyla Çarpanlarına Ayırma

Bilinen yöntemlerle çarpanlarına ayrılamayan ifadeler; uygun terimler eklenip çıkarılarak bilinen özdeşlik, tam kare gibi ifadelere benzetilerek çarpanlarına ayrılır.

2. Rasyonel İfadelerin Sadeleştirilmesi

$P(x)$ ve $Q(x)$ gerçek katsayılı iki polinom ve $Q(x) \neq 0$ olmak üzere

$R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ifadesi rasyonel bir ifadedir.

$P(x)$ ve $Q(x)$ polinomları, uygun yöntemlerle çarpanlarına ayrılır. Ortak çarpan varsa pay ve payda ortak çarpana bölünür.

Bu işlem, rasyonel ifadenin sadeleştirilmesi şeklinde adlandırılır.