10.3. POLİNOMLAR

10.3.1. Polinom Kavramı ve Polinomlarla İşlemler

10.3.1.1. Bir Değişkenli Polinom Kavramı

Bilgi

x bir değişken, $n \in \mathbb{N}$ ve $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ birer gerçek sayı olmak üzere

$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0$

biçimindeki ifadeye **gerçek katsayılı** ve **bir değişkenli polinom (çok terimli)** adı verilir. x değişkenine bağlı polinomlar $P(x), Q(x), R(x), ...$ gibi ifadelerle gösterilir.

Polinomun Derecesi, Katsayıları ve Sabit Terimi

Bilgi

$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0$ polinomunda,

- $a_n \cdot x^n,\ a_{n-1} \cdot x^{n-1},\ a_2 \cdot x^2,\ a_1 \cdot x^1,\ a_0$ ifadelerine polinomun **terimleri** denir.
- $a_n,\ a_{n-1},\ ...,\ a_2,\ a_1,\ a_0$ gerçek sayılarına polinomun **katsayıları** denir.
- x değişkeninin aldığı en büyük üsse polinomun **derecesi** denir ve der[P(x)] ile gösterilir.
- Bir polinomun en büyük dereceli teriminin katsayısına polinomun **baş katsayısı** denir.
- a_0 ifadesine polinomun **sabit terimi** denir.

İpucu

Bir polinomun katsayıları toplamı, polinomun değişkeninin yerine 1 yazılarak bulunur.

- $P(x)$ polinomunun katsayıları toplamı $P(1)$ dir.
- $P(x+3)$ polinomunun katsayıları toplamı $P(1+3) = P(4)$ olur.
- $Q(x^2+5x-1)$ polinomunun katsayıları toplamı $Q(1^2+5 \cdot 1-1) = Q(5)$ olur.
- $(x^2+3) \cdot R(x-1)$ polinomunun katsayıları toplamı
  $(1^2+3) \cdot R(1-1) = 4 \cdot R(0)$ olur.

İpucu

Bir P(x) polinomunda;

Çift dereceli terimlerin katsayıları toplamı $\dfrac{P(1)+P(-1)}{2}$,

Tek dereceli terimlerin katsayıları toplamı $\dfrac{P(1)-P(-1)}{2}$ olur.

İpucu

Bir polinomun sabit terimi, polinomun değişkeninin yerine 0 yazılarak bulunur.

- $P(x)$ polinomunun sabit terimi $P(0)$ dır.
- $P(x+3)$ polinomunun sabit terimi $P(0+3)=P(3)$ olur.
- $Q(2x^3+5x-1)$ polinomunun sabit terimi $Q(2\cdot(0)^3+5\cdot(0)-1)=Q(-1)$ olur.
- $(3x-6)\cdot R(x+7)$ polinomunun sabit terimi $(3\cdot(0)-6)\cdot R(0+7)=(-6)\cdot R(7)$ olur.

Sabit Polinom

Bilgi

a_0 sıfırdan farklı gerçek sayı olmak üzere $P(x)=a_0$ ise P(x) polinomuna **sabit polinom** denir. Sabit polinomun derecesi sıfırdır.

$P(x)=-7$, $Q(x)=-\sqrt{3}$, $R(x)=2a^2+a$ ve $T(x)=y^2-3y$ polinomları birer sabit polinomdur.

Sıfır Polinomu

Bilgi

$P(x)=0$ polinomuna **sıfır polinomu** denir. Sıfır polinomunun derecesi belirsizdir.

Bilgi

Dereceleri aynı ve aynı dereceli terimlerinin katsayıları karşılıklı olarak eşit olan polinomlara **eşit polinomlar** denir.

$P(x)=a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+...+a_2\cdot x^2+a_1\cdot x^1+a_0$,

$Q(x)=b_n\cdot x^n+b_{n-1}\cdot x^{n-1}+...+b_2\cdot x^2+b_1\cdot x^1+b_0$ polinomları birbirine eşit ise

$a_n=b_n$, $a_{n-1}=b_{n-1}$, ..., $a_2=b_2$, $a_1=b_1$, $a_0=b_0$ olmalıdır.

10.3.1.2. Polinomlarla Toplama, Çıkarma, Çarpma ve Bölme İşlemleri

Polinomlarla Toplama ve Çıkarma İşlemleri

Bilgi

Polinomlarla toplama ya da çıkarma işlemleri yapılırken dereceleri aynı olan terimlerin katsayıları toplanır ya da çıkarılır.

Örneğin $a,b\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$P(x)$ polinomunun bir terimi $a\cdot x^m$, $Q(x)$ polinomunun bir terimi $b\cdot x^m$ ise

$a\cdot x^m+b\cdot x^m=(a+b)\cdot x^m$ terimi $P(x)+Q(x)$ polinomunun bir terimidir.

$a\cdot x^m-b\cdot x^m=(a-b)\cdot x^m$ terimi $P(x)-Q(x)$ polinomunun bir terimidir.

Polinomlarla Çarpma İşlemi

Bilgi

P(x) ve Q(x) birer polinom olmak üzere $P(x) \cdot Q(x)$ işlemi yapılırken P(x) polinomunun her terimi Q(x) polinomunun her terimiyle çarpılır ve elde edilen ifadelerin cebirsel toplamı x değişkeninin azalan ya da artan kuvvetlerine göre sıralanarak yazılır. Örneğin P(x) polinomuna ait herhangi bir terim $a \cdot x^m$ ve Q(x) polinomuna ait herhangi bir terim $b \cdot x^n$ ise $a \cdot x^m \cdot b \cdot x^n = a \cdot b \cdot x^{m+n}$ terimi $P(x) \cdot Q(x)$ polinomunun bir terimidir.

İpucu

$P(x) \neq 0$ ve $Q(x) \neq 0$ olmak üzere
$der[P(x)] = m$ ve $der[Q(x)] = n \Rightarrow der[P(x) \cdot Q(x)] = m + n$ olur.

Polinomlarla Bölme İşlemi

Bilgi

P(x) ve $Q(x) \neq 0$ polinomları için $der[P(x)] \geq der[Q(x)] \geq 1$ olmak üzere P(x) polinomunun Q(x) polinomu ile bölümü aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$
\begin{array}{r|l}
P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2}
-\ B(x) \cdot Q(x) & B(x) \\ \cline{1-1}
K(x) &
\end{array}
$$

$P(x)$: Bölünen polinom,

$Q(x)$: Bölen polinom,

$B(x)$: Bölüm polinomu,

$K(x)$: Kalan polinomudur.

Yukarıda verilen bölme işleminde

- $P(x) = Q(x) \cdot B(x) + K(x)$ olur. Bu eşitliğe bölme eşitliği denir.
- $K(x) = 0$ ise $P(x)$ polinomu $Q(x)$ polinomuna tam (kalansız) bölünüyor denir.
- $der[K(x)] < der[Q(x)]$ olur.
- $der[B(x)] = der[P(x)] - der[Q(x)]$ olur.

İpucu

Polinomlarda bölme işlemi aşağıda verilen sıralamaya uygun yapılır.

- Bölünen ve bölen polinom bu polinomların değişkeninin azalan kuvvetlerine göre yazılır.
- Bölünen polinomun en büyük dereceli terimi bölen polinomun en büyük dereceli terimine bölünür ve elde edilen sonuç bölüm polinomunun ilk terimi olarak yazılır.
- Bölüm polinomuna ait bulunan ilk terim, bölen polinomla çarpılır ve elde edilen ifade bölünen polinomdan çıkarılır.
- Yukarıdaki işlemler, çıkarma işlemi sonucunda elde edilen her polinoma kalanın derecesi bölenin derecesinden küçük oluncaya kadar uygulanır.

Bilgi

- Bir $P(x)$ polinomunun $x-a$ ile bölümünden kalan $P(a)$ dır.
- $P(a)=0 \Leftrightarrow (x-a)$, $P(x)$ polinomunun bir çarpanıdır.
- $x=a$ için $P(a)=0$ ise $x=a$ sayısına, $P(x)$ **polinomunun sıfırı (bir kökü)** denir.

10.3.2. Polinomların Çarpanlara Ayrılması

10.3.2.1. Bir Polinomu Çarpanlarına Ayırma

Bilgi

Bir polinomun iki ya da daha fazla polinomun çarpımı biçiminde yazılması işlemine **çarpanlara ayırma** denir.

$P(x), Q(x)$ ve $R(x)$ birer polinom olmak üzere $R(x)=P(x)\cdot Q(x)$ şeklinde ifade edilen eşitlikte $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarına **R(x) polinomunun çarpanları** denir.

Çarpanlara Ayırma Yöntemleri

Ortak Çarpan Parantezine Alma

Bilgi

Bir polinomun her teriminde bulunan ortak çarpanın paranteze alınması işlemine **ortak çarpan parantezine alma yoluyla çarpanlara ayırma yöntemi** denir.

$A(x), B(x)$ ve $C(x)$ birer polinom olmak üzere
$A(x)\cdot B(x)+A(x)\cdot C(x)=A(x)\cdot[B(x)+C(x)]$ olur.

Gruplandırma Yöntemi ile Çarpanlara Ayırma

Bilgi

Verilen polinomun her teriminde ortak bir sayı, ortak bir değişken veya ortak bir terim bulunmuyor ise ortak çarpanı olan terimler bir araya getirilerek gruplandırılır. Her grup parantez içindeki ifadeleri aynı olacak biçimde çarpanlarına ayrılır. Sonra gruplar, ortak çarpan parantezine alınır.

Özdeşlikler Yardımıyla Çarpanlarına Ayırma

İpucu

Tam Kare Özdeşliği

$(x+y)^2$ ve $(x-y)^2$ biçimindeki ifadelere **tam kare ifadeler** denir.

$(x+y)^2=(x+y)\cdot(x+y)=x^2+xy+yx+y^2=x^2+2xy+y^2$ ve
$(x-y)^2=(x-y)\cdot(x-y)=x^2-xy-yx+y^2=x^2-2xy+y^2$ olur.

İpucu

İki Kare Farkı Özdeşliği

x^2-y^2 ifadesine **iki kare farkı durumundaki ifade** denir.
$x^2-y^2=(x-y)\cdot(x+y)$ olur.

İpucu

İki Terimin Toplamının ve Farkının Küpü Özdeşliği

$(x+y)^3=(x+y)\cdot(x+y)\cdot(x+y)=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$ olur.
Buradan $x^3+y^3=(x+y)^3-3x^2y-3xy^2=(x+y)^3-3xy(x+y)$ elde edilir.

$(x-y)^3=(x-y)\cdot(x-y)\cdot(x-y)=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ olur.
Buradan $x^3-y^3=(x-y)^3+3x^2y-3xy^2=(x-y)^3+3xy(x-y)$ elde edilir.

İpucu

İki Terimin Küplerinin Toplamı ve Farkının Özdeşliği

x^3+y^3 ifadesine **iki terimin küplerinin toplamı** denir. $x^3+y^3=(x+y)\cdot(x^2-xy+y^2)$ olur.

x^3-y^3 ifadesine **iki terimin küplerinin farkı** denir. $x^3-y^3=(x-y)\cdot(x^2+xy+y^2)$ olur.

İpucu

$a\neq 0$ ve $a, b, c\in\mathbb{R}$ olmak üzere
ax^2+bx+c şeklindeki üç terimliler çarpanlarına ayrılırken a ve c nin çarpanlarına bakılır.
$a=k\cdot t$ ve $c=m\cdot n$ olmak üzere ax^2+bx+c

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ kx & \times & m \\ tx & & n \end{array}$$

ve $kn+tm=b$ olacak biçimde $m, n, k, t\in R$ sayıları bulunabiliyorsa

$ax^2+bx+c=(kx+m)\cdot(tx+n)$ biçiminde çarpanlarına ayrılır.

Değişken Değiştirme Yöntemi ile Çarpanlara Ayırma

İpucu

Bir polinomda benzer terimlerin yeni bir değişkenle adlandırılıp daha sade bir hâle getirildikten sonra çarpanlara ayrılması işlemine **değişken değiştirme yöntemi ile çarpanlara ayırma yöntemi** denir.

10.3.2.2. Rasyonel İfadelerin Sadeleştirilmesi

Bilgi

$P(x)$ ve $Q(x)$ birer polinom ve $Q(x) \neq 0$ olmak üzere $\frac{P(x)}{Q(x)}$ şeklindeki ifadelere **rasyonel ifadeler** denir.

Rasyonel ifadelerde toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri rasyonel sayılarda olduğu gibi yapılır.

Rasyonel ifadelerde önce pay ve paydadaki ifadeler çarpanlarına ayrılır varsa ortak olan çarpanlar sadeleştirilir.

Rasyonel İfadelerde Toplama ve Çıkarma İşlemleri

İpucu

$Q(x) \neq 0,\ T(x) \neq 0$ iken $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ve $\frac{R(x)}{T(x)}$ birer rasyonel ifade olmak üzere

a) Toplama işlemi $\frac{P(x)}{Q(x)} + \frac{R(x)}{T(x)} = \frac{P(x) \cdot T(x) + R(x) \cdot Q(x)}{Q(x) \cdot T(x)}$ biçiminde yapılır.

b) Çıkarma işlemi $\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{R(x)}{T(x)} = \frac{P(x) \cdot T(x) - R(x) \cdot Q(x)}{Q(x) \cdot T(x)}$ biçiminde yapılır.

Rasyonel İfadelerde Çarpma ve Bölme İşlemleri

İpucu

$Q(x) \neq 0,\ R(x) \neq 0,\ T(x) \neq 0$ iken $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ve $\frac{R(x)}{T(x)}$ birer rasyonel ifade olmak üzere

a) Çarpma işlemi $\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{R(x)}{T(x)} = \frac{P(x) \cdot R(x)}{Q(x) \cdot T(x)}$ biçiminde yapılır.

b) Bölme işlemi $\frac{P(x)}{Q(x)} : \frac{R(x)}{T(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{T(x)}{R(x)} = \frac{P(x) \cdot T(x)}{Q(x) \cdot R(x)}$ biçiminde yapılır.