# 10.1.1. SIRALAMA VE SEÇME

## 1. Sayma Yöntemleri

Bir kümenin elemanları ile $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ ...\}$ kümesinin elemanları arasında bire bir eşleme yaparak verilen kümenin eleman sayısını bulma işlemine **bire bir eşleme yoluyla sayma** denir. Kümenin son elemanı ile eşleşen doğal sayı kümenin eleman sayısı olur.

A ile B sonlu ve ayrık iki küme olsun. Bu iki kümenin birleşim kümesinin eleman sayısını bulma işlemine **toplama yoluyla sayma** denir.

Ayrık kümelerde birleşim kümesinin eleman sayısı $s(A \cup B) = s(A) + s(B)$ ile hesaplanır.

A ve B boş kümeden farklı, ayrık iki küme olmak üzere $A \times B$ kümesinde oluşan sıralı ikililerin eleman sayısını bulma işlemine **çarpma yoluyla sayma** veya **saymanın temel ilkesi** denir.

$s(A \times B) = s(A) \cdot s(B)$ şeklinde hesaplanır.

### Faktöriyel Kavramı

n bir pozitif tam sayı olmak üzere 1 den n ye kadar olan doğal sayıların çarpımına **n faktöriyel** denir ve n! şeklinde gösterilir.

$n! = 1 \cdot 2....(n-1) \cdot (n)$ dir.

$1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

$6! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 5 \cdot 4!$

$0! = 1$ kabul edilir. Ayrıca $n! = n \cdot (n-1)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!$ yazılabilir.

## 2. Permütasyon

$n, r \in \mathbb{N}$ ve $n \geq r$ olmak üzere n elemanlı bir $A = \{x_1, x_2, \ ..., x_n\}$ kümesinin birbirinden farklı r tane elemanından oluşan sıralı r lilerine A kümesinin **r li permütasyonları** (dizilişleri) denir.

n elemanlı bir A kümesinin r elemanlı permütasyonlarının sayısı $P(n, r)$ biçiminde gösterilir.

$P(n, r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ formülü ile hesaplanır.

## 3. Tekrarlı Permütasyon

Bazı elemanları özdeş olan n elemanlı bir kümenin n li permütasyonlarına **tekrarlı permütasyon** denir.

$r_1, r_2, \ldots, r_k \in \mathbb{Z}^+$ ve $n = r_1 + r_2 + \ldots + r_k$ olmak üzere n elemanlı bir kümenin $r_1$ tanesi birbiriyle özdeş, $r_2$ tanesi birbiriyle özdeş, ..., $r_k$ tanesi birbiriyle özdeş ise n elemanlı kümenin elemanlarının n li permütasyonlarının (dizilişlerinin) sayısı

$P(n;\ r_1, r_2, \ldots, r_k) = \dfrac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_k!}$ ile hesaplanır.

## 4. Dönel Permütasyon

$n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere n tane farklı elemanın dairesel permütasyonlarının sayısına n elemanın **dönel (dairesel) permütasyonu** denir.
n tane farklı elemanın dairesel dizilişlerinin sayısı $(n-1)!$ tanedir.

## 5. Kombinasyon

n elemanlı kümenin r elemanlı alt kümelerinin sayısına **n nin r li kombinasyonu** denir.
$C(n,r)$ veya $\binom{n}{r}$ şeklinde gösterilir.
$C(n,r) = \binom{n}{r} = \dfrac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$ $(n, r \in \mathbb{N}, 0 \le r \le n)$ olur.

### Özellikler

**1.** $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

**2.** $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

**3.** $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

**4.** $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$

**5.** $\binom{n}{r} = \binom{n}{k} \Rightarrow r = k$ veya $n = k + r$

**6.** $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$

### Bilgi

Düzlemde

- İki noktadan yalnız bir doğru geçer.
- Herhangi üçü doğrusal olmayan n tane nokta ile $\binom{n}{2}$ tane doğru çizilebilir.
- $3 \le r \le n$ olmak üzere herhangi üçü doğrusal olmayan n tane nokta ile $\binom{n}{3}$ tane üçgen, $\binom{n}{4}$ tane dörtgen, ..., $\binom{n}{r}$ tane r gen çizilebilir.

## 6. Pascal Üçgeni

$x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x + y$ ifadesinin kuvvetleri alınırsa

$(x+y)^0 = 1$

$(x+y)^1 = 1 \cdot x + 1 \cdot y$

$(x+y)^2 = 1 \cdot x^2 + 2 \cdot xy + 1 \cdot y^2$

$(x+y)^3 = 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2y + 3 \cdot xy^2 + 1 \cdot y^3$

.............................................................

$(x+y)^n = \binom{n}{0} \cdot x^n y^0 + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} y + \ldots + \binom{n}{n} \cdot x^0 y^n$

açılımları elde edilir. Bu açılımlardaki terimlerin katsayıları ortalanarak yazılırsa

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ \end{array}$$

...............................

şeklindeki sayılardan oluşan üçgen elde edilir.
Bu üçgene **Pascal üçgeni** adı verilir.

Pascal üçgeninin herhangi bir n. satırının r. sırasındaki sayı ile $(r+1)$. sırasındaki sayı toplanırsa Pascal üçgeninin $(n+1)$. satırının $(r+1)$. sırasındaki sayı elde edilir. Başka bir ifadeyle Pascal üçgeninin herhangi bir satırındaki ardışık iki sayının toplamı, takip eden satırda bu iki sayının ortasındaki sayıya eşittir.

$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$ olur. Bu eşitliğe **Pascal özdeşliği** denir.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ \end{array}$$

$1 + 2 = 3$ ya da $\binom{2}{0} + \binom{2}{1} = \binom{3}{1}$

$4 + 6 = 10$ ya da $\binom{4}{1} + \binom{4}{2} = \binom{5}{2}$

$4 + 1 = 5$ ya da $\binom{4}{3} + \binom{4}{4} = \binom{5}{4}$ olur.

## 7. Binom Açılımı

$x, y \in \mathbb{R}; n, r \in \mathbb{N}; r \leq n$ olmak üzere

$(x+y)^n = \binom{n}{0} \cdot x^n y^0 + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} y^1 + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} y^2 + \ldots + \binom{n}{r} \cdot x^{n-r} y^r + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot x^0 y^n$ olur.

Binom teoremindeki $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$ katsayıları Pascal üçgeninin $(n+1)$. satırındaki katsayılardır. Bunların sayısı $(n+1)$ tanedir.

### Özellikler

**1.** $(x+y)^n$ ifadesinin açılımındaki terim sayısı $(n+1)$ tanedir.

**2.** $(x+y)^n$ ifadesinin açılımındaki katsayılar toplamı $x=1$ ve $y=1$ alınırsa

$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$ eşitliği elde edilir.

**3.** $(x+y)^n$ ifadesinin açılımında sabit terim bulunurken $x=0$ ve $y=0$ (tanımsızlık yoksa) alınır.

**4.** $(x+y)^n$ ifadesinin açılımındaki her bir terimde x ile y nin kuvvetleri toplamı n ye eşittir.

$\left(\binom{n}{r}\cdot x^{n-r}\cdot y^r\right.$ teriminde $\left.n-r+r=n\right)$

**5.** $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(x+y)^{2n}$ ifadesinin açılımındaki ortanca terim $\binom{2n}{n}\cdot x^n y^n$ olur.

**6.** $(x+y)^n$ ifadesinin x in azalan kuvvetlerine göre açılımında baştan $(r+1)$. terim

$\binom{n}{r}\cdot x^{n-r}\cdot y^r$ olur.

# 10.1.2. BASİT OLAYLARIN OLASILIKLARI

## 1. Temel Kavramlar

### Deney, Çıktı ve Örnek Uzay

Önceden sonucu bilinmeyen olayların gerçekleşme durumlarına ilişkin veri toplama sürecine **deney** adı verilir. İçinde farklı renkte bilyeler bulunan bir torbadan bir bilyenin çekilmesi ve madenî paranın yazı tura için havaya atılması işlemlerinin her biri matematiksel deneylere birer örnektir.
Bir deney sonucunda karşılaşılabilecek olası tüm durumların her birine **çıktı** (örnek nokta) denir.
Deney sonucunda elde edilen bütün çıktıların kümesine ise **örnek uzay** (örneklem uzayı) adı verilir ve E ile gösterilir.

### Bir Madenî Paranın N Kez (n Tane Madenî Paranın) Havaya Atılması Deneyinde Örnek Uzayın Eleman Sayısı

n tane madenî paranın havaya atılması deneyinde örnek uzayın eleman sayısı $2^n$ dir.

### n Tane Zarın Atılması Deneyinde Örnek Uzayın Eleman Sayısı

n tane zarın havaya atılması deneyinde örnek uzayın eleman sayısı $6^n$ olur.

### Bir Örnek Uzayda Olay

Bir E örnek uzayının her bir alt kümesine **olay** adı verilir.

### Bir Olayın Tümleyeni

Bir E örnek uzayının istenen koşulları sağlayan alt kümesi dışında kalan elemanlarının kümesine **bir olayın tümleyeni** denir.

### Kesin Olay

Bir deney sonucunda gerçekleşmesi mümkün olan tüm durumların kümesine **kesin olay** denir. Kesin olayların olasılığı 1 dir.
Örneğin bir çift zarın atılması deneyinde üst yüze gelen sayılar toplamının 13 ten küçük olması olayı kesin olaydır.

### İmkânsız Olay

Bir deney sonucunda gerçekleşmesi mümkün olmayan olaya imkânsız olay denir. İmkânsız olayın olasılığı 0 dır.
Bir zarın atılması deneyinde üst yüze gelen sayının 6 dan büyük olması imkânsız olaydır.

### Ayrık Olaylar

Bir E örnek uzayındaki A ve B şeklindeki iki olayın ortak elemanı yoksa ya da iki olayın aynı anda gerçekleşmesi mümkün değilse bu olaylara **ayrık olaylar** denir.

A ve B olayları ayrık olaylar ise $A \cap B = \emptyset$ olur.

$A \cap B \neq \emptyset$ ise A ve B olayları ayrık olmayan olaylardır.

## 2. Olasılık Hesabı

### Özellikler

$A \subseteq E$ ve $B \subseteq E$ olmak üzere A olayının olasılığı $P(A)$, B olayının olasılığı $P(B)$ şeklinde gösterilir.

**1.** $0 \leq P(A) \leq 1$ olur.

**2.** $P(E) = 1$ ve $P(\emptyset) = 0$ olur.

**3.** Bir olayın gerçekleşme olasılığı ile gerçekleşmeme olasılığı toplamı 1 olur.
Yani $P(A) + P(A') = 1$

**4.** $A \subset B$ ise $P(A) \leq P(B)$ olur.

Bir deneye ait sonlu örnek uzay $E = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$ olsun.
Bu örnek uzayın her bir elemanının olasılıkları eşit ise yani $P(e_1) = P(e_2) = ... = P(e_n)$ ise bu E örnek uzayına **eş olumlu örnek uzay** denir. $A \subseteq E$ olmak üzere

$$P(A) = \frac{\text{İstenen durumların sayısı}}{\text{Tüm durumların sayısı}} = \frac{s(A)}{s(E)} \text{ olur.}$$

Bir deneye ait sonlu örnek uzay $E = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$ olsun.
Bu örnek uzayın en az bir elemanının olasılığı diğerlerinden farklı ise bu E örnek uzayına **eş olumlu olmayan örnek uzay** denir.