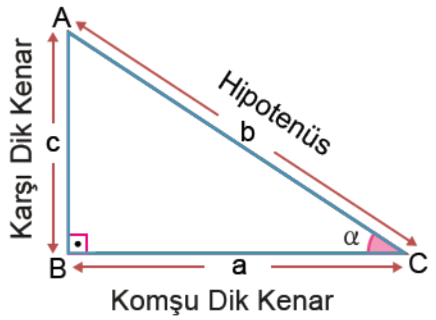
3.1. TOPLAM-FARK VE İKİ KAT AÇI FORMÜLLERİ

3.1.1. Toplam ve Fark Formülleri

HATIRLATMA

Trigonometrik Oranlar

ABC dik üçgeninde $[AB] \perp [BC]$ ve $m(\widehat{BCA}) = \alpha$ olmak üzere



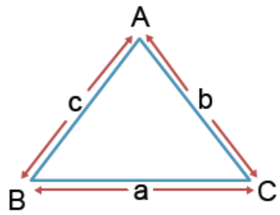
$$\sin\alpha = \frac{\text{Karşı Dik Kenar Uzunluğu}}{\text{Hipotenüs Uzunluğu}} = \frac{c}{b}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Komşu Dik Kenar Uzunluğu}}{\text{Hipotenüs Uzunluğu}} = \frac{a}{b}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Karşı Dik Kenar Uzunluğu}}{\text{Komşu Dik Kenar Uzunluğu}} = \frac{c}{a}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{Komşu Dik Kenar Uzunluğu}}{\text{Karşı Dik Kenar Uzunluğu}} = \frac{a}{c} \text{ olur.}$$

Kosinüs Teoremi

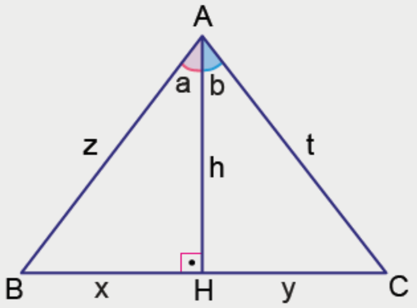


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C} \text{ olur.}$$

a ve b gibi iki açının toplamının kosinüsü

$$\mathbf{\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b} \text{ olur.}$$

Aşağıdaki ABC üçgeninde $\widehat{A}$ na göre kosinüs teoremi uygulanırsa



AHB dik üçgeninde

$$\cos a = \frac{h}{z},\ \sin a = \frac{x}{z} \text{ olur.}$$

AHC dik üçgeninde

$$\cos b = \frac{h}{t},\ \sin b = \frac{y}{t} \text{ olur.}$$

$$|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 - 2|AC|\cdot|AB|\cdot\cos\widehat{A}$$
$$(x+y)^2 = t^2 + z^2 - 2\cdot t\cdot z\cdot\cos(a+b)$$
$$2tz\cos(a+b) = t^2 + z^2 - (x+y)^2$$
$$2tz\cos(a+b) = t^2 + z^2 - x^2 - 2xy - y^2$$
$$2tz\cos(a+b) = \underbrace{t^2 - y^2}_{h^2} + \underbrace{z^2 - x^2}_{h^2} - 2xy$$
$$2tz\cos(a+b) = 2h^2 - 2xy$$
$$\frac{\cancel{2tz}\cos(a+b)}{\cancel{2tz}} = \frac{\cancel{2}(h^2 - xy)}{\cancel{2}tz}$$
$$\cos(a+b) = \frac{h^2}{tz} - \frac{xy}{tz}$$
$$\cos(a+b) = \underbrace{\frac{h}{z}}_{\cos a} \cdot \underbrace{\frac{h}{t}}_{\cos b} - \underbrace{\frac{x}{z}}_{\sin a} \cdot \underbrace{\frac{y}{t}}_{\sin b}$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \text{ bulunur.}$$

SONUÇ

- $\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$
- $\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$

a ve b gibi iki açının toplamının tanjantı

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$ olur.

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} \Rightarrow \tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$$

$$= \frac{\sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b}{\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b}$$

(sin(a+b) ve cos(a+b) ifadelerinin eşiti yerlerine yazıldıktan sonra pay ve payda $\cos a \cdot \cos b$ ile bölünür.)

$$= \frac{\dfrac{\sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b}{\cos a \cdot \cos b}}{\dfrac{\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b}{\cos a \cdot \cos b}}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin a \cdot \cancel{\cos b}}{\cos a \cdot \cancel{\cos b}} + \dfrac{\cancel{\cos a} \cdot \sin b}{\cancel{\cos a} \cdot \cos b}}{\dfrac{\cancel{\cos a \cdot \cos b}}{\cancel{\cos a \cdot \cos b}} - \dfrac{\sin a \cdot \sin b}{\cos a \cdot \cos b}}$$

$$= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

SONUÇ

- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$
- $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$
- $\cot(a+b) = \dfrac{\cot a \cdot \cot b - 1}{\cot a + \cot b}$
- $\cot(a-b) = \dfrac{\cot a \cdot \cot b + 1}{\cot b - \cot a}$

3.1.2. İki Kat Açı Formülleri

$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$ eşitliğinde **b** yerine **a** yazılırsa

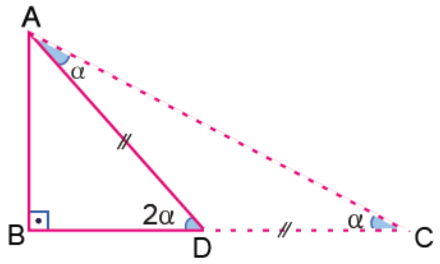
$\sin(a+a) = \sin a \cdot \cos a + \cos a \cdot \sin a$

$\mathbf{\sin 2a = 2\sin a \cdot \cos a}$ formülü elde edilir.

SONUÇ

- $\sin 2a = 2\sin a \cdot \cos a$
- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$
  $= 2\cos^2 a - 1$
  $= 1 - 2\sin^2 a$
- $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$
- $\cot 2a = \dfrac{\cot^2 a - 1}{2\cot a}$

Uyarı



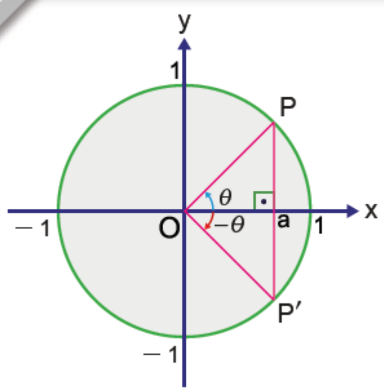
2α dar açı olmak üzere ABD üçgeninin $[BD]$ kenarı doğrusal olarak $|AD| = |DC|$ olacak şekilde $[DC]$ kadar uzatılırsa ADC ikizkenar üçgeni ve C açısı α olan ABC dik üçgeni elde edilir.

Böylece α açısının trigonometrik oranlarını bulmak için oluşturulan ABC dik üçgeni kullanılabilir.

3.2. TRİGONOMETRİK DENKLEMLER

3.2.1. Trigonometrik Denklemlerin Çözüm Kümeleri

$\cos x = a$ Denkleminin Çözüm Kümesi



Yandaki birim çembere göre $\cos\theta = a$ veya $\cos(-\theta) = a$ olur. Kosinüs fonksiyonu 2π periyotlu periyodik bir fonksiyon olduğundan $\cos\theta = \cos(\theta + k\cdot 2\pi)$ veya $\cos(-\theta) = \cos(-\theta + k\cdot 2\pi)$ olur.

Bu durumda $\cos x = a$ denkleminin kökleri

$\cos(\theta + k\cdot 2\pi) = \cos x$ ve $\cos(-\theta + k\cdot 2\pi) = \cos x$

eşitliklerini sağlayan x değerleridir. Buna göre

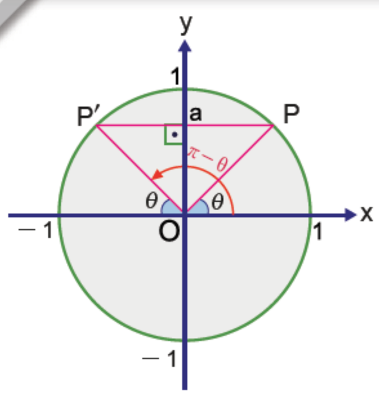
$\cos(\theta + k\cdot 2\pi) = \cos x \Rightarrow x = \theta + k\cdot 2\pi$

$\cos(-\theta + k\cdot 2\pi) = \cos x \Rightarrow x = -\theta + k\cdot 2\pi$ olur.

Sonuç olarak

$-1 \le a \le 1$ olmak üzere $\cos x = a$ denkleminin $[0, 2\pi)$ nda bir kökü θ ise denklemin çözüm kümesi $\mathbf{Ç = \{x \mid x = \theta + k\cdot 2\pi \lor x = -\theta + k\cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}}$ olur.

$\sin x = a$ Denkleminin Çözüm Kümesi



Yandaki birim çembere göre $\sin\theta = a$ veya $\sin(\pi - \theta) = a$ olur. Sinüs fonksiyonu 2π periyotlu periyodik bir fonksiyon olduğundan $\sin\theta = \sin(\theta + k\cdot 2\pi)$ veya $\sin(\pi - \theta) = \sin(\pi - \theta + k\cdot 2\pi)$ olur.

Bu durumda $\sin x = a$ denkleminin kökleri

$\sin(\theta + k\cdot 2\pi) = \sin x$ ve $\sin(\pi - \theta + k\cdot 2\pi) = \sin x$

eşitliklerini sağlayan x değerleridir. Buna göre

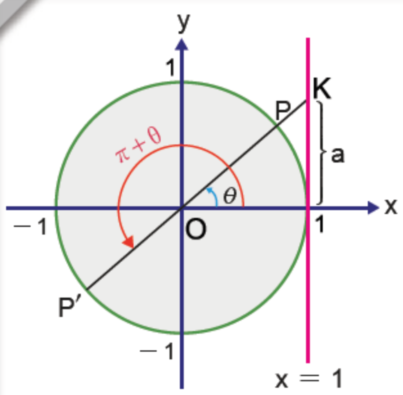
$\sin(\theta + k\cdot 2\pi) = \sin x \Rightarrow x = \theta + k\cdot 2\pi$

$\sin(\pi - \theta + k\cdot 2\pi) = \sin x \Rightarrow x = \pi - \theta + k\cdot 2\pi$ olur.

Sonuç olarak

$-1 \le a \le 1$ olmak üzere $\sin x = a$ denkleminin $[0, 2\pi)$ nda bir kökü θ ise denklemin çözüm kümesi $\mathbf{Ç = \{x \mid x = \theta + k\cdot 2\pi \lor x = \pi - \theta + k\cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}}$ olur.

$\tan x = a$ Denkleminin Çözüm Kümesi



Yandaki birim çembere göre $\tan\theta = a$ olur. Tanjant fonksiyonu π periyotlu periyodik bir fonksiyon olduğundan $\tan\theta = \tan(\theta + k\cdot\pi)$ olur.

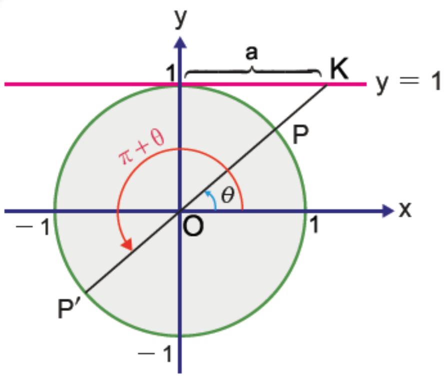
Bu durumda $\tan x = a$ denkleminin kökleri $\tan(\theta + k\cdot\pi) = \tan x$ eşitliğini sağlayan x değerleridir.

Buna göre

$\tan(\theta + k\cdot\pi) = \tan x \Rightarrow x = \theta + k\cdot\pi$ olur.

Sonuç olarak $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\tan x = a$ denkleminin $[0,\pi)$ nda bir kökü θ $\left(\theta \neq \frac{\pi}{2}\right)$ ise denklemin çözüm kümesi $\textbf{Ç} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \theta + \mathbf{k}\cdot\pi,\ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}\}$ olur.

$\cot x = a$ Denkleminin Çözüm Kümesi



Yandaki birim çembere göre $\cot\theta = a$ olur. Kotanjant fonksiyonu π periyotlu periyodik bir fonksiyon olduğundan $\cot\theta = \cot(\theta + k\cdot\pi)$ olur.

Bu durumda $\cot x = a$ denkleminin kökleri $\cot(\theta + k\cdot\pi) = \cot x$ eşitliğini sağlayan x değerleridir. Buna göre

$\cot(\theta + k\cdot\pi) = \cot x \Rightarrow x = \theta + k\cdot\pi$ olur.

Sonuç olarak

$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\cot x = a$ denkleminin $(0,\pi)$ nda bir kökü θ ise denklemin çözüm kümesi $\textbf{Ç} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \theta + \mathbf{k}\cdot\pi,\ \mathbf{k} \in \mathbb{Z}\}$ olur.

SONUÇ

$k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

- ✓ $\mathbf{\sin f(x) = \sin g(x)}$ ise $\mathbf{f(x) = g(x) + k\cdot 2\pi}$ veya $\mathbf{f(x) = \pi - g(x) + k\cdot 2\pi}$
- ✓ $\mathbf{\cos f(x) = \cos g(x)}$ ise $\mathbf{f(x) = g(x) + k\cdot 2\pi}$ veya $\mathbf{f(x) = -g(x) + k\cdot 2\pi}$
- ✓ $\mathbf{\tan f(x) = \tan g(x)}$ ise $\mathbf{f(x) = g(x) + k\cdot\pi}$
- ✓ $\mathbf{\cot f(x) = \cot g(x)}$ ise $\mathbf{f(x) = g(x) + k\cdot\pi}$

a, b ve $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere $a\sin x + b\cos x = c$ biçimindeki denklemlere, **$\sin x$ ve $\cos x$ e göre lineer (doğrusal) denklem** denir.

$a\sin x + b\cos x = c \Rightarrow \sin x + \frac{b}{a} \cdot \cos x = \frac{c}{a}$ (Eşitliğin her iki tarafı a ile bölünür.)

$\Rightarrow \sin x + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \cos x = \frac{c}{a}$ $\left(\frac{b}{a} = \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$

$\Rightarrow \frac{\cos\alpha \cdot \sin x + \sin\alpha \cdot \cos x}{\cos\alpha} = \frac{c}{a}$

$\Rightarrow \sin(x + \alpha) = \frac{c}{a} \cdot \cos\alpha$

denkleminin çözülebilmesi için $-1 \leq \frac{c}{a} \cdot \cos\alpha \leq 1$ olmalıdır.

$-1 \leq \frac{c}{a} \cdot \cos\alpha \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{c^2}{a^2} \cdot \cos^2\alpha \leq 1$

$\Rightarrow c^2 \leq \frac{a^2}{\cos^2\alpha}$ $\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha\right)$

$\Rightarrow c^2 \leq a^2 \cdot (1 + \tan^2\alpha)$

$\Rightarrow c^2 \leq a^2 \cdot \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)$

$\Rightarrow \mathbf{c^2 \leq a^2 + b^2}$ elde edilir.

Bu eşitsizliğin sağlanması durumunda denklemin çözüm kümesi bulunabilir.
Aksi durumda denklemin çözüm kümesi $\varnothing$ olur.

Uyarı

$k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

- $\mathbf{\sin f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = k \cdot \pi}$
- $\mathbf{\sin f(x) = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi}$
- $\mathbf{\sin f(x) = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi}$
- $\mathbf{\cos f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi}$
- $\mathbf{\cos f(x) = 1 \Rightarrow f(x) = k \cdot 2\pi}$
- $\mathbf{\cos f(x) = -1 \Rightarrow f(x) = \pi + k \cdot 2\pi}$

$a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere $\mathbf{a\sin x + b\cos x = 0}$ biçimindeki denklemlere **birinci dereceden homojen trigonometrik denklem** denir.

$a\sin x + b\cos x = 0$ denkleminde eşitliğin her iki yanı $\cos x \neq 0$ olmak üzere $\cos x$ e bölünüp

$a \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{\cos x}}_{\tan x} + b \cdot \frac{\cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}} = 0 \Rightarrow a \cdot \tan x + b = 0$

$\Rightarrow \tan x = -\frac{b}{a}$

denklemine dönüştürülerek çözüm yapılır.