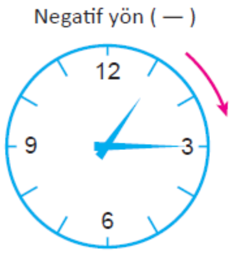
11.1.1. YÖNLÜ AÇILAR

1. Yönlü Açı

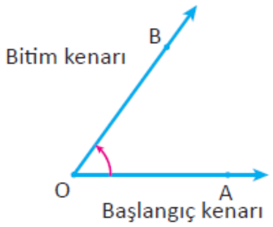
Saatin yelkovanının dönme yönünün tersi olan yöne **pozitif yön** (Şekil 1.1.1), aynı olan yöne **negatif yön** denir (Şekil 1.1.2).

Şekil 1.1.1

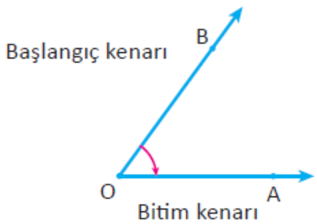


Şekil 1.1.2

Bir açının kenarlarından birini başlangıç kenarı, diğerini bitim kenarı alarak elde edilen açıya **yönlü açı** denir. Yönü pozitif olan yönlü açı ‘‘pozitif yönlü açı’’ (Şekil 1.1.3), yönü negatif olan yönlü açı ‘‘negatif yönlü açı’’ (Şekil 1.1.4) olarak adlandırılır.



Şekil 1.1.3: AOB pozitif yönlü açı



Şekil 1.1.4: BOA negatif yönlü açı

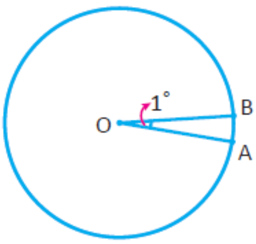
2. Açı Ölçü Birimleri

Derece

Bir çember çevresinin 360 eş parçaya bölündüğünde her bir yay parçasını gören merkez açının ölçüsüne **1 derece** denir. Derece (°) sembolü ile gösterilir.

a) $\mathbf{1^\circ}$ nin $\frac{1}{60}$ ine **1 dakika** denir. $\mathbf{1'}$ sembolü ile gösterilir.

b) $\mathbf{1'}$ nın $\frac{1}{60}$ ine **1 saniye** denir. $\mathbf{1''}$ sembolü ile gösterilir.



Şekil 1.1.5

Şekil 1.1.5’te O merkezli çemberde

$1^\circ = 60' = 3600'' = 59'\,60''$

$1' = 60''$

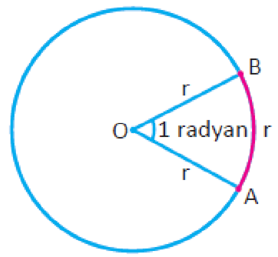
Çember yayı tam açı olduğundan ölçüsü 360° dir.

Radyan

Şekil 1.1.6'da O merkezli r yarıçaplı çember verilmiştir.

Herhangi bir çemberde, yarıçap uzunluğundaki yayı gören merkez açının ölçüsüne **bir radyan** denir ve **1 rad** ile gösterilir.

Çember yayı tam açı olduğundan ölçüsü 2π radyan, yarım çember yayının ölçüsü π radyandır.



Şekil 1.1.6

Esas Ölçü

Birim çember üzerinde başlangıç kenarları Ox ekseni ve bitim kenarları aynı olan açılardan ölçüsü $[0°, 360°)$ aralığındaki açıya bu açıların **esas ölçüsü** denir.

Derece cinsinden verilen bir açının $360°$ ye bölümünden kalan, o açının esas ölçüsüdür.

Radyan cinsinden verilen bir açının 2π ye bölümünden kalan, o açının esas ölçüsüdür.

11.1.2. TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR

1. Trigonometrik Fonksiyonlar

Sinüs ve Kosinüs Fonksiyonları

Bir x gerçek sayısını $\cos x$ e dönüştüren f fonksiyonuna **kosinüs fonksiyonu** denir.

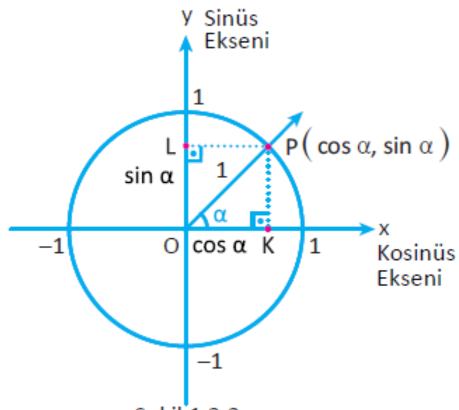
$f:\mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$

$f(x) = \cos x$ şeklinde gösterilir.

Bir x gerçek sayısını $\sin x$ e dönüştüren f fonksiyonuna **sinüs fonksiyonu** denir.

$f:\mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$

$f(x) = \sin x$ şeklinde gösterilir.



Şekil 1.2.2

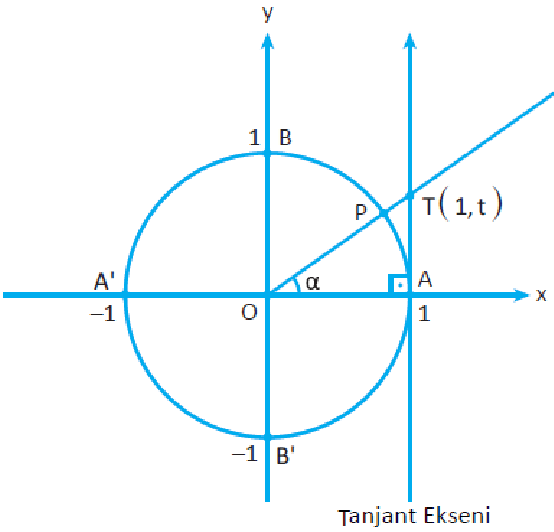
Tanjant ve Kotanjant Fonksiyonları

Tanjant Fonksiyonu

Birim çemberde ölçüsü α olan $\widehat{AOP}$ verilsin. OP ışınının $x = 1$ doğrusunu kestiği $T(1, t)$ noktasının ordinatına **$\widehat{AOP}$ nın tanjantı** denir ve $\tan\alpha = t$ ile gösterilir.

OAT dik üçgeninde $\tan\alpha = \dfrac{|TA|}{|OA|} = \dfrac{|TA|}{1} = |TA| = t$ ise $\alpha, t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\tan\alpha = t$ olur.

Bu durumda $x = 1$ doğrusuna **tanjant ekseni** denir.



Her $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ gerçek sayılarını $\tan x$ e dönüştüren fonksiyona **tanjant fonksiyonu** denir.

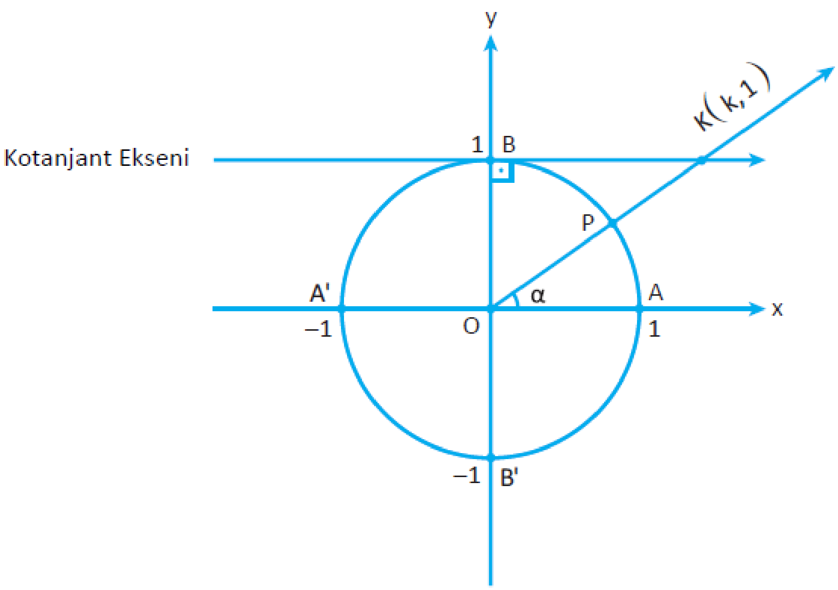
$f : \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$ şeklinde gösterilir.

Kotanjant Fonksiyonu

Birim çemberde ölçüsü α olan $\widehat{AOP}$ verilsin. OP ışınının $y = 1$ doğrusunu kestiği $K(k,1)$ noktasının apsisine $\widehat{AOP}$ **nın kotanjantı** denir ve $\cot \alpha = k$ ile gösterilir.

OBK dik üçgeninde $\cot \alpha = \frac{|BK|}{|OB|} = \frac{|BK|}{1} = |BK| = k$ ise $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\cot \alpha = k$ olur.

Bu durumda $y = 1$ doğrusuna **kotanjant ekseni** denir.

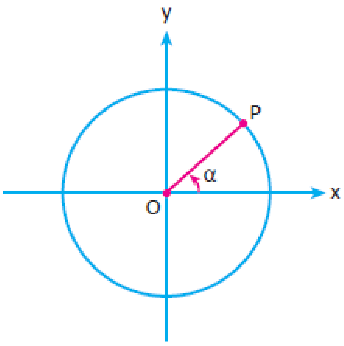


Her $x \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ gerçek sayılarını $\cot x$ e dönüştüren fonksiyona **kotanjant fonksiyonu** denir.

$f : \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cot x$ şeklinde tanımlanır.

Trigonometrik Fonksiyonların Bölgelere göre İşaretleri

1. Bölgede



$0^\circ < \alpha < 90^\circ$

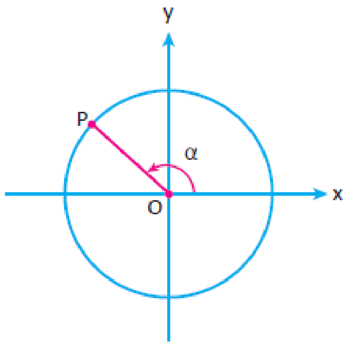
$\sin\alpha > 0$

$\cos\alpha > 0$

$\tan\alpha > 0$

$\cot\alpha > 0$

2. Bölgede



$90^\circ < \alpha < 180^\circ$

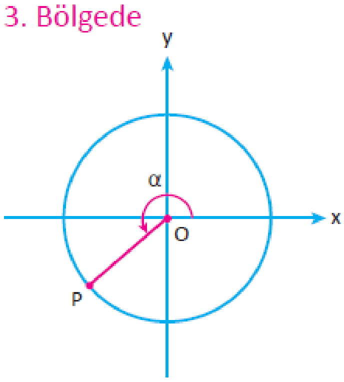
$\sin\alpha > 0$

$\cos\alpha < 0$

$\tan\alpha < 0$

$\cot\alpha < 0$

3. Bölgede



$180^\circ < \alpha < 270^\circ$

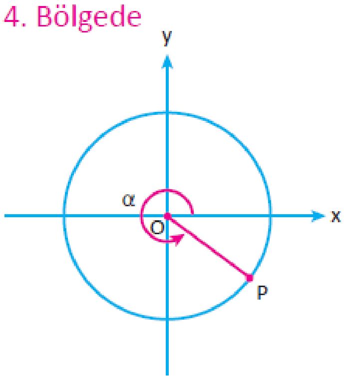
$\sin\alpha < 0$

$\cos\alpha < 0$

$\tan\alpha > 0$

$\cot\alpha > 0$

4. Bölgede



$270^\circ < \alpha < 360^\circ$

$\sin\alpha < 0$

$\cos\alpha > 0$

$\tan\alpha < 0$

$\cot\alpha < 0$

Sekant ve Kosekant Fonksiyonları

Her $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ gerçek sayılarını $\sec x$ e dönüştüren fonksiyona **sekant fonksiyonu** denir.

$f : \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \longrightarrow \mathbb{R} - (-1, 1)$, $f(x) = \sec x$ şeklinde tanımlanır.

Her $x \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ gerçek sayılarını $\operatorname{cosec} x$ e dönüştüren fonksiyona **kosekant fonksiyonu** denir.

$f : \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R} - (-1, 1)$, $f(x) = \operatorname{cosec} x$ şeklinde tanımlanır.

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad (\cos\alpha \neq 0)$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad (\sin\alpha \neq 0)$$

$$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \quad (\cos\alpha \neq 0)$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \quad (\sin\alpha \neq 0)$$

$\frac{k\pi}{2} \mp \alpha$ Şeklindeki Açılarının Trigonometrik Oranları

1. k nin Tek Tam Sayı Olması Hâli

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$ $\qquad$ $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$ $\qquad$ $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$

$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$ $\qquad$ $\cot\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$ $\qquad$ $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$ $\qquad$ $\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$

$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$ $\qquad$ $\cot\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$

2. k nin Çift Tam Sayı Olması Hâli

$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ $\qquad$ $\sin(2\pi-\alpha)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$

$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos(2\pi-\alpha)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$ $\qquad$ $\tan(2\pi-\alpha)=\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$

$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$ $\qquad$ $\cot(2\pi-\alpha)=\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$

$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$ $\qquad$ $\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha$

$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha$

$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$ $\qquad$ $\tan(2\pi+\alpha)=\tan\alpha$

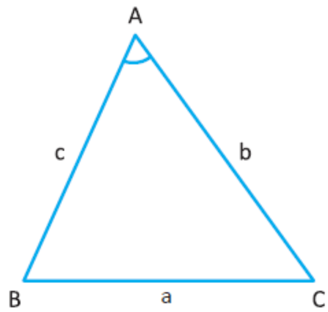
$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$ $\qquad$ $\cot(2\pi+\alpha)=\cot\alpha$

2. Kosinüs Teoremi

Bu teorem ile bir üçgende iki kenar uzunluğu ve bu kenarlar arasındaki açı veya bu açının kosinüsü verildiğinde diğer kenar uzunluğunu bulmayı öğreneceksiniz.

$\overset{\frown}{ABC}$ nin kenar uzunlukları a, b, c ve bu kenarları gören açılar $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ ve $\widehat{C}$ olmak üzere

$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\widehat{A}$ bağıntısı yazılabilir (Şekil 1.2.10).



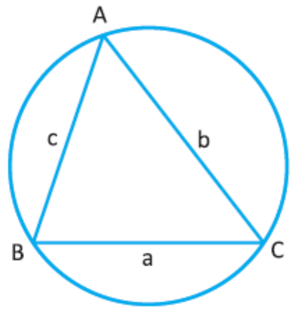
Şekil 1.2.10

3. Sinüs Teoremi

Bir üçgende her kenarın uzunluğu, karşısındaki açının sinüs değeri ile doğru orantılıdır.

Şekil 1.2.12'deki ABC üçgeninin kenar uzunlukları a, b, c olmak üzere

$\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}}$ tir.



Şekil 1.2.12

4. Trigonometrik Fonksiyonların Periyodu

Periyodik Fonksiyonlar

$f: A \rightarrow B$ bir fonksiyon olsun. $\forall x \in A$ için $f(x+T)=f(x)$ eşitliğini sağlayan en az bir $T \neq 0$ gerçek sayısı varsa f fonksiyonuna **periyodik fonksiyon**, T gerçek sayısına da f **fonksiyonunun bir periyodu** denir. Bu eşitliği sağlayan T sayılarından pozitif olanların en küçüğüne f fonksiyonunun **esas periyodu** denir. Bu fonksiyonun periyodu ifadesinden o fonksiyonun esas periyodu anlaşılacaktır.

$f(x)=p \cdot \sin(ax+b)+c$ veya $g(x)=p \cdot \cos(ax+b)+c$ Fonksiyonlarının Periyotları

$a \neq 0$ için $f(x) = p \cdot \sin(ax+b)+c$ ve $g(x) = p \cdot \cos(ax+b)+c$ şeklindeki fonksiyonların periyodu $T = \dfrac{2\pi}{|a|}$ olur.

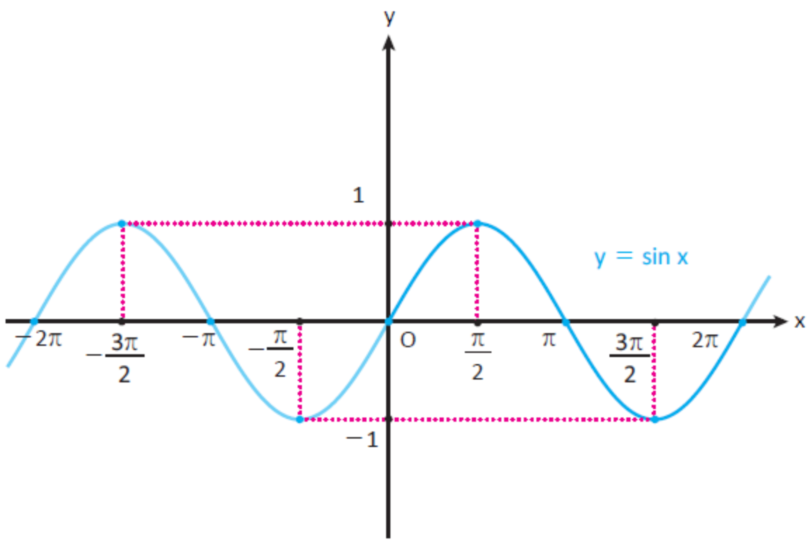
$f(x)=p \cdot \tan(ax+b)+c$ veya $g(x)=p \cdot \cot(ax+b)+c$ Fonksiyonlarının Periyotları

$a \neq 0$ için $f(x) = p \cdot \tan(ax+b)+c$ ve $g(x) = p \cdot \cot(ax+b)+c$ şeklindeki fonksiyonların periyodu $T = \dfrac{\pi}{|a|}$ olur.

5. Trigonometrik Fonksiyonların Grafikleri ve Yorumlanması

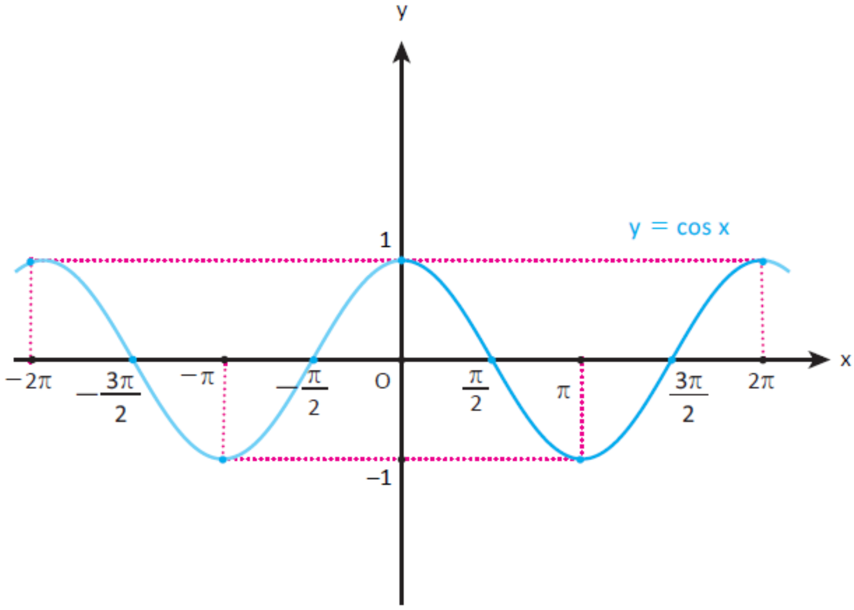
Sinüs Fonksiyonunun Grafiği

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \sin x$	0	1	0	-1	0



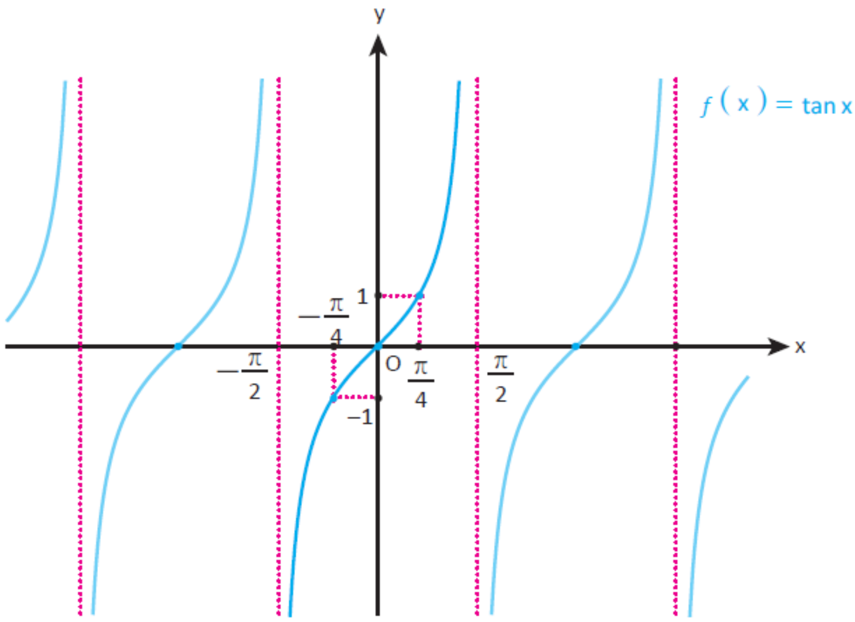
Kosinüs Fonksiyonunun Grafiği

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \cos x$	1	0	-1	0	1



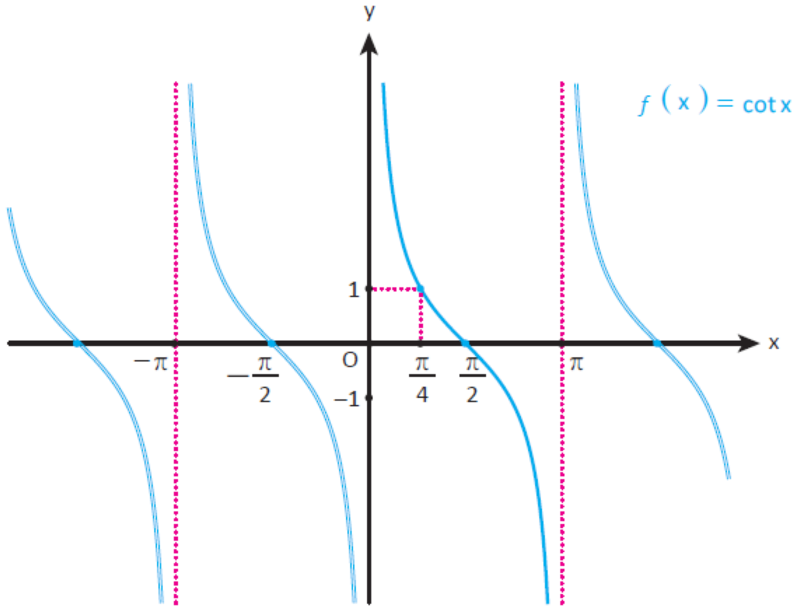
Tanjant Fonksiyonunun Grafiği

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$y = \tan x$	tanımsız	-1	0	1	tanımsız



Kotanjant Fonksiyonunun Grafiği

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$y = \cot x$	tanımsız	1	0	-1	tanımsız



6. Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

Sinüs Fonksiyonunun Ters Fonksiyonu

Sinüs fonksiyonunun birebir ve örten olduğu alt aralıklardan biri olan $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığı tanım kümesi olarak alınırsa;

$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$ fonksiyonu bire bir ve örten olup tersi vardır.

$f^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ fonksiyonuna **sinüs fonksiyonunun ters fonksiyonu** denir.

Bu fonksiyonun ters fonksiyonu $f^{-1}(x) = \arcsin x$ şeklinde gösterilir.

$y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y$ ve $\arcsin(\sin x) = x$ olur.

Kosinüs Fonksiyonunun Ters Fonksiyonu

Kosinüs fonksiyonunun birebir ve örten olduğu alt aralıklardan biri olan $[0, \pi]$ aralığı tanım kümesi olarak alınırsa

$f : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $f(x) = \cos x$ fonksiyonu bire bir ve örten olup tersi vardır.

$f^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ fonksiyonuna **kosinüs fonksiyonunun ters fonksiyonu** denir.

Bu fonksiyonun ters fonksiyonu $f^{-1}(x) = \arccos x$ şeklinde gösterilir.

$y = \cos x \Leftrightarrow x = \arccos y$ ve $\arccos(\cos x) = x$ olur.

Tanjant Fonksiyonunun Ters Fonksiyonu

$f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ f(x)=\tan x$ fonksiyonu bire bir ve örten olsun. Bu durumda $f^{-1}:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ şeklinde tanımlanan fonksiyona **tanjant fonksiyonunun ters fonksiyonu** denir. $f^{-1}(x)=\arctan x$ şeklinde gösterilir.

$y=\tan x \Leftrightarrow x=\arctan y$ ve $\arctan(\tan x)=x$ olur.