10.6.1. KATI CİSİMLER

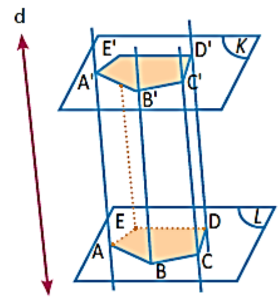
1. Dik Prizmalar

Tanım

Canlı ve cansız var olan her şeyi içine alan sonsuz boşluk **uzay** olarak adlandırılır.

Uzayda düzlemsel bir çokgen, çokgenin düzleminde bulunmayan ve çokgene paralel olmayan bir d doğrusu verilsin. Çokgenin kenarları üzerindeki noktalardan geçen ve d doğrusuna paralel doğruların oluşturduğu yüzeye **prizmatik yüzey**, d doğrusuna ise prizmatik yüzeyin **ana doğrusu** denir.

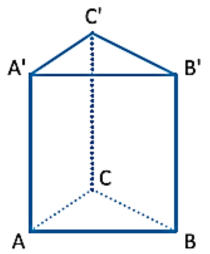
Paralel iki düzlem arasında kalan kapalı prizmatik yüzey parçasına **prizma yüzeyi**, prizma yüzeyinin sınırladığı uzay parçasına ise **prizma** denir (Şekil 6.1.1).



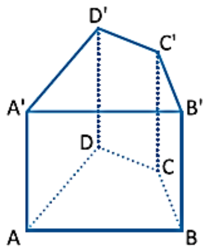
Şekil 6.1.1

Prizmalar taban çokgenlerine göre isimlendirilir. Taban çokgeni üçgen olan prizmaya **üçgen prizma** (Şekil 6.1.2), dörtgen olan prizmaya **dörtgen prizma** (Şekil 6.1.3), düzgün beşgen olan prizmaya **düzgün beşgen prizma** (Şekil 6.1.4), ..., n gen olan prizmaya **n gen prizma** denir.

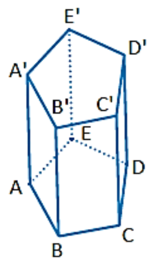
Ana doğrusu taban düzlemine dik olan prizmalara **dik prizma**, yanal ayrıtları tabanlara dik olmayan prizmalara ise **eğik prizma** adı verilir. Tabanları düzgün çokgen olan prizmalara **düzgün prizma** denir.



Şekil 6.1.2: Üçgen prizma



Şekil 6.1.3: Dörtgen prizma

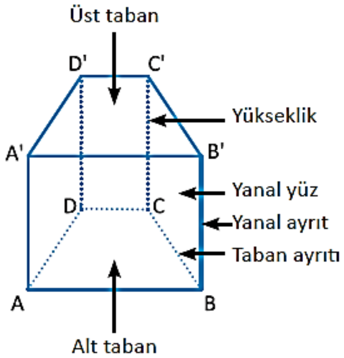


Şekil 6.1.4: Düzgün beşgen prizma

Şekilde ABCD ve A'B'C'D' dörtgenleri **prizmanın tabanları,** [AB], [BC], [CD], [AD] ve [A'B'], [B'C'], [C'D'], [A'D'] prizmanın **taban ayrıtlarıdır.**

Prizmada tabanların karşılıklı köşe noktalarını birleştiren doğru parçalarına **yanal ayrıtlar**, iki yanal ayrıt arasında kalan düzlemsel bölgelere de **yanal yüzler** denir.

Şekilde [AA'], [BB'], [CC'], [DD'] prizmanın yanal ayrıtları, ADD'A', ABB'A', BCC'B', CDD'C' dörtgenleri prizmanın yanal yüzleridir. Bir prizmada iki taban arasındaki uzaklığa **prizmanın yüksekliği** denir.



Şekil 6.1.5: Dörtgen dik prizma

Şekil 6.1.5'te AA', BB', CC' ve DD' prizmanın yüksekliğidir.
Prizmaların yanal yüz sayısı, çokgenin kenar sayısına eşittir.
Şekildeki dörtgen dik prizma ABCDA'B'C'D' şeklinde gösterilir.

Tanım

Bir prizmada aynı yüze ait olmayan, iki köşeyi birleştiren doğru parçasına **cisim köşegeni** denir (Şekil 6.1.6).

Şekilde $[A'C]$ dik prizmanın cisim köşegenidir.

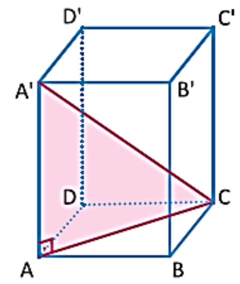
$[AA'] \perp [AC]$ olduğundan $\widehat{ACA'}$ dik üçgendir.

Bu durumda

$[A'C]$ cisim köşegeninin uzunluğu Pisagor teoreminden

$|A'C|^2 = |AA'|^2 + |AC|^2$

$|A'C| = \sqrt{|AA'|^2 + |AC|^2}$ elde edilir.



Şekil 6.1.6: Cisim köşegeni

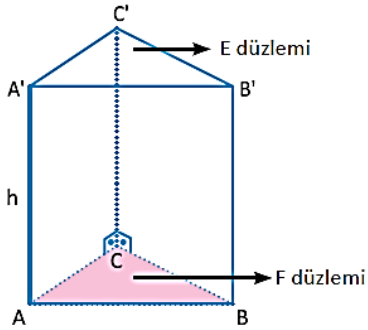
Özellikler

1. Prizmada alt ve üst tabanlar eş ve paraleldir.
   $\widehat{ABC} \cong \widehat{A'B'C'}$ ve $E \,/\!/\, F$ dir (Şekil 6.1.7).

2. Bir dik prizmada yan yüzeyler dikdörtgendir.
   ABB'A', ACC'A' ve BCC'B' yan yüzleri dikdörtgendir.

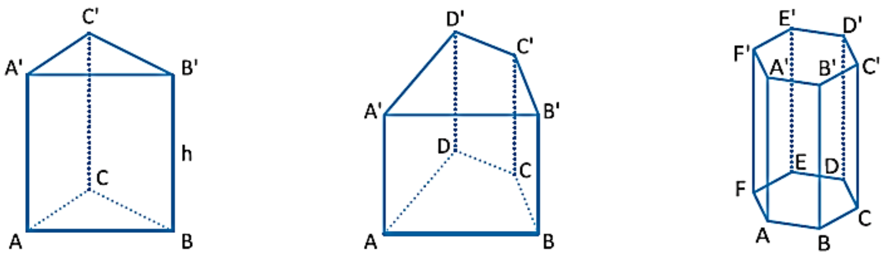
3. Bir dik prizmada yan ayrıtlar, prizmanın yüksekliği olarak alınabilir. Bu durumda
   $h = |AA'| = |BB'| = |CC'|$ olur.

4. Bir prizmada köşe sayısı **K**, yüz sayısı **Y**, ayrıt sayısı **A** ile gösterilirse bu elemanlar arasında
   $K + Y - A = 2$ bağıntısı vardır.



Şekil 6.1.7

Şekil 6.1.8'deki prizmaları Tablo 6.1.1'e göre inceleyiniz.



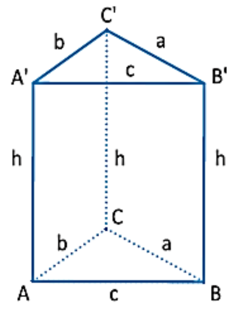
Şekil 6.1.8

Tablo 6.1.1

Prizma	Köşe sayısı (K)	Yüz sayısı (Y)	Ayrıt sayısı (A)	$K + Y - A$
Üçgen prizma	6	5	9	$6 + 5 - 9 = 2$
Dörtgen prizma	8	6	12	$8 + 6 - 12 = 2$
Altıgen prizma	12	8	18	$12 + 8 - 18 = 2$
...	...	...	...	...
n gen prizma	2n	n+2	3n	$2n + (n + 2) - 3n = 2$

Dik Prizmaların Alan ve Hacim Bağıntıları

Herhangi bir dik prizmanın yüzey alanı, dikdörtgensel bölgeden oluşan yanal yüzlerin alanı ile çokgensel bölge olan taban alanının 2 katının toplamına eşittir (Şekil 6.1.9).



Şekil 6.1.9

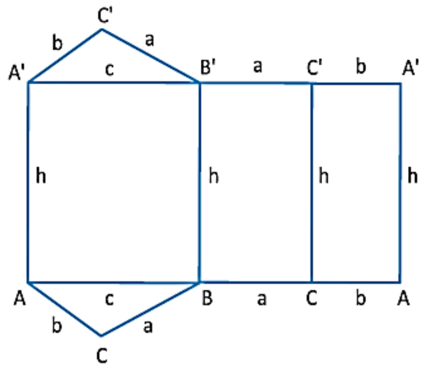
Yanal yüzey alanı, prizma taban çevresi ile prizma yüksekliğinin çarpımına eşittir. Buna göre prizmanın yüzey alanı

Yüzey alanı : A
Yanal yüz alanları : A_Y
Taban alanı : A_T
Taban çevresinin uzunluğu : $Ç_T$
Yükseklik : h olmak üzere

$A = 2A_T + A_Y = 2A_T + Ç_T \cdot h$ olur.

Çeşitkenar üçgen dik prizmanın açınımı Şekil 6.1.10'da açık olarak verilmiştir.

Şeklin yanal yüzeyi bir dikdörtgen olduğundan alanı, uzun ve kısa kenar uzunlukları çarpımına eşittir.



Şekil 6.1.10

Bu durumda

$$A_Y = Ç(\widehat{ABC}) \cdot |AA'|$$
$$= (|BC| + |AC| + |AB|) \cdot |AA'|$$
$$= (a + b + c) \cdot h$$
$$= Ç_T \cdot h \text{ olur.}$$

Şeklin tabanları çeşitkenar eş iki üçgen olduğundan alanı

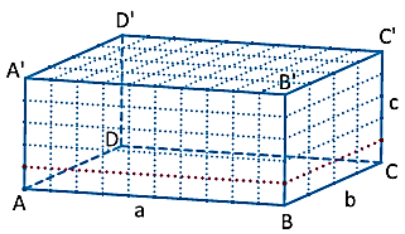
$2A_T = 2 \cdot A(\widehat{ABC})$ olur.

Sonuç olarak çeşitkenar üçgen dik prizmanın yüzey alanı

$$A = 2A_T + A_Y = 2A_T + Ç_T \cdot |AA'|$$
$$= 2 \cdot A(\widehat{ABC}) + Ç(\widehat{ABC}) \cdot h$$
$$= 2 \cdot A(\widehat{ABC}) + (a + b + c) \cdot h \text{ olur.}$$

Bir dik prizmanın hacmi, taban alanı ile yükseklik uzunluğu çarpımına eşittir.

A_T : Taban alanı
h : Yükseklik olmak üzere
$V = A_T \cdot h$ olur.



Şekil 6.1.11

Şekil 6.1.11'deki dikdörtgenler prizmasının taban ayrıt uzunlukları $|AB| = a$ birim, $|BC| = b$ birim ve yüksekliği c birim verilsin.

Prizmanın tabanı, ayrıt uzunlukları 1 birim olan küplerle döşenirse 1. döşemedeki birim küplerin sayısı $a \cdot b$ tane olur. Bu prizmanın taban alanı $A(ABCD) = a \cdot b$ olur. Bu durumda 1. döşemede prizmanın tabanına döşenen birim küplerin sayısı, prizmanın taban alan değerine eşittir. Bu işlemin benzer şekilde tekrarlanması durumunda

1. döşemedeki birim küplerin sayısı $a \cdot b$ tane
2. döşemedeki birim küplerin sayısı $a \cdot b$ tane
3. döşemedeki birim küplerin sayısı $a \cdot b$ tane

....

c. döşemedeki birim küplerin sayısı $a \cdot b$ tane olduğundan prizmanın içine döşenen birim küplerin sayısı $a \cdot b \cdot c$ tane olur.

Sonuç olarak dikdörtgenler prizmasının hacmi

$V = A(ABCD) \cdot h = A_T \cdot h = a \cdot b \cdot c$ birimküp olur.

Dikdörtgenler Prizması

Tanım

Bütün yüzeyleri dikdörtgen olan prizmalara **dikdörtgenler prizması** denir (Şekil 6.1.12).

Dikdörtgenler prizmasında üç farklı yüzey vardır. Bu yüzeyler karşılıklı yüzeyler olup birbirine eş ve paraleldir. Bu durumda dikdörtgenler prizmasının yüzey alanı, farklı yüzey alanları toplamının iki katı olur.

Taban ayrıt uzunlukları a birim, b birim ve yüksekliği c birim olan bir dikdörtgenler prizmasında

Taban alanları toplamı

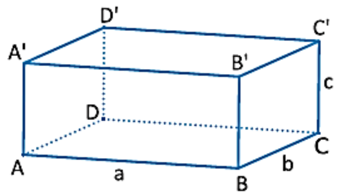
$A_T = a \cdot b \ \ br^2 \Rightarrow 2A_T = 2 \cdot a \cdot b$ birimkare

Yanal alanları toplamı $A_Y = Ç_T \cdot h = (2a + 2b) \cdot c$ olmak üzere

Yüzey alanı $A = 2A_T + A_Y = 2ab + (2a + 2b) \cdot c$

$= 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$ birimkare olur.

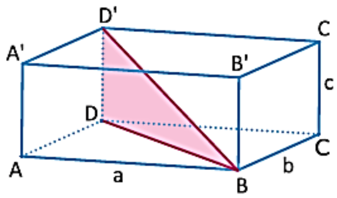
Dikdörtgenler prizmasının hacmi, bir köşesinde kesişen ayrıt uzunluklarının çarpımına eşittir. Hacim $V = a \cdot b \cdot c$ birimküp olur.



Şekil 6.1.12
Dikdörtgenler prizması

Özellik

5. Dikdörtgenler prizmasında cisim köşegeninin uzunluğu, üç farklı ayrıt uzunluğunun kareleri toplamının kareköküdür (Şekil 6.1.13).

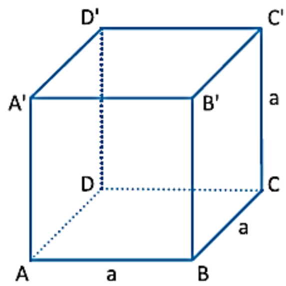


Şekil 6.1.13

Küp

Tanım

Bütün ayrıtlarının uzunluğu eşit olan dikdörtgenler prizmasına **küp** denir (Şekil 6.1.14).



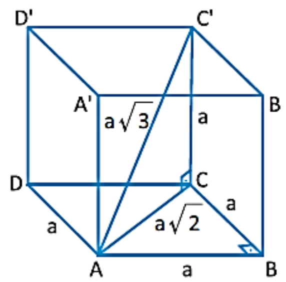
Şekil 6.1.14: Küp

Özellikler

Ayrıt uzunluğu a birim olan bir küpün

1. Tüm yüzey köşegen uzunlukları eşit ve $a\sqrt{2}$ birimdir.

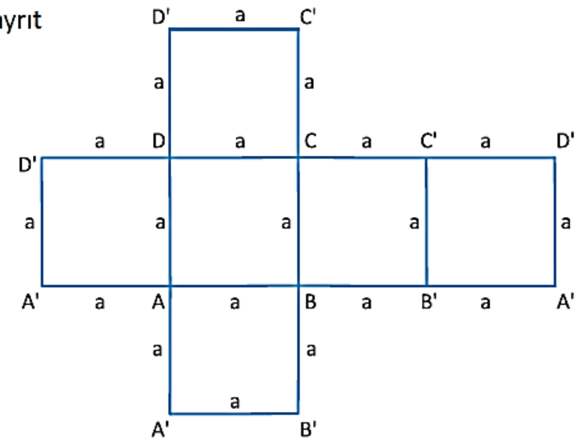
2. Cisim köşegen uzunluğu $a\sqrt{3}$ birimdir (Şekil 6.1.15).



Şekil 6.1.15

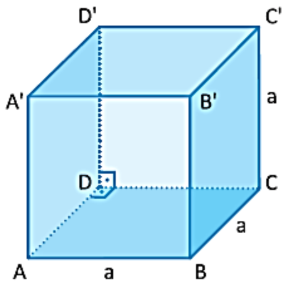
Küpün Alan ve Hacim Bağıntıları

Küpün tüm yüzleri karedir. Altı eş yüz bulunduğundan bir ayrıt uzunluğu a birim olan küpün yüzey alanı
$A = 6a^2$ olur (Şekil 6.1.16).



Şekil 6.1.16

Küpün hacmi, bir ayrıt uzunluğunun küpüne eşittir.
Bir ayrıt uzunluğu a birim olan küpün hacmi $V = a^3$ olur (Şekil 6.1.17).

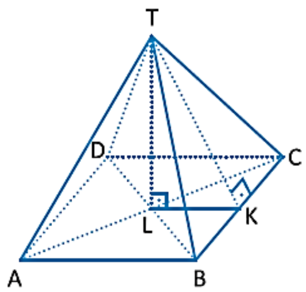


Şekil 6.1.17

2. Dik Piramitler

Tanım

Uzayda düzlemsel bir çokgen ile bunun düzlemi dışında sabit bir T noktası verilsin. T noktası ve çokgenin tüm noktalarından geçen doğruların oluşturduğu yüzeye **piramidal yüzey**, bu yüzeyin uzayda sınırladığı bölgeye **piramidal bölge**, piramidal bölgenin çokgenin düzlemine paralel bir düzlem ile T noktası arasındaki kısmına **piramit** denir (Şekil 6.1.18).

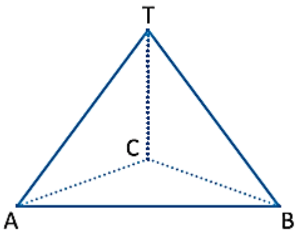


Şekil 6.1.18

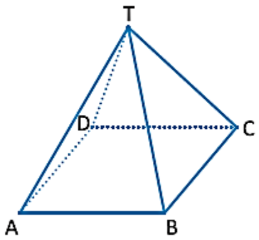
T noktası piramidin **tepe noktasıdır.**
ABCD çokgensel bölgesine **piramidin tabanı** denir. TAD, TBA, TCB ve TDC üçgensel bölgeleri piramidin **yan yüzleri**dir.

Tepe noktasının taban düzlemine olan uzaklığına **piramidin yüksekliği** denir.
Taban çokgeninin kenarları olan $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ ve $[DA]$ **piramidin taban ayrıtlarıdır.**
Tepe noktasını taban çokgeninin köşelerine birleştiren $[TA]$, $[TB]$, $[TC]$ ve $[TD]$ **piramidin yanal ayrıtlarıdır.**

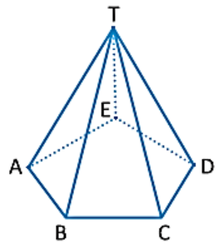
Tepe noktası T, tabanı ABCD olan piramit $(T, ABCD)$ şeklinde gösterilir.
Piramitler, prizmalarda olduğu gibi taban çokgeninin ismiyle adlandırılır. Tabanı üçgen olan piramide **üçgen piramit** (Şekil 6.1.19), dörtgen olan piramide **dörtgen piramit** (Şekil 6.1.20), beşgen olan piramide **beşgen piramit** denir (Şekil 6.1.21).



Şekil 6.1.19: Üçgen piramit



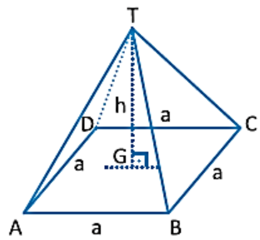
Şekil 6.1.20: Dörtgen piramit



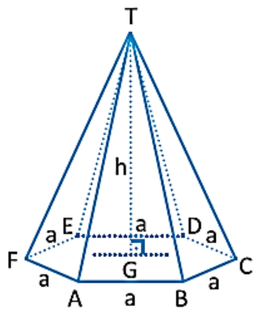
Şekil 6.1.21: Beşgen piramit

Bir piramidin yüksekliği, tabanın ağırlık merkezinden geçiyorsa bu piramide **dik piramit** (Şekil 6.1.22), geçmiyorsa **eğik piramit** denir.

G noktası, ABCD dörtgeninin ağırlık merkezi ve [TG] piramidin yüksekliğidir.



Şekil 6.1.22: Kare dik piramit



Şekil 6.1.23: Düzgün altıgen piramit

Tabanı düzgün çokgen olan dik piramide **düzgün piramit** denir (Şekil 6.1.23).

Not

Her düzgün piramit dik piramittir fakat her dik piramit düzgün piramit değildir.

Özellikler

Bir düzgün piramitte

1. Taban düzgün çokgendir.
2. Yanal yüzler birbirine eş ikizkenar üçgenlerdir.
3. Yükseklik taban çokgeninin merkezinden geçer.
4. Yanal yüz yükseklikleri eşittir.
5. Yanal ayrıt uzunlukları eşittir.

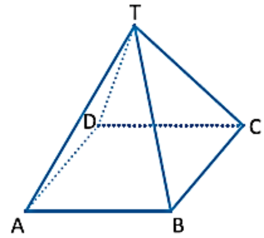
Not

Tüm prizmalarda olduğu gibi piramitlerde de köşe sayısı (K), yüz sayısı (Y) ve ayrıt sayısı (A) olmak üzere bunlar arasında $K + Y - A = 2$ bağıntısı geçerlidir.

Düzgün Piramitte Alan ve Hacim Bağıntıları

Bir düzgün piramidin yüzey alanı, ikizkenar üçgensel bölgeden oluşan yanal yüzlerin alanı ile düzgün çokgensel bölge olan taban alanı toplamına eşittir.

Yüzey alanı : A
Taban alanı : A_T
Yanal alanı : A_Y
Yanal yüz yüksekliği : h_Y
Cisim yüksekliği : h
olmak üzere $A = A_T + A_Y$ olur.



Şekil 6.1.24: Kare dik piramit

Şekil 6.1.24 ve 6.1.25 ile verilen kare dik piramidin yüzey alanı

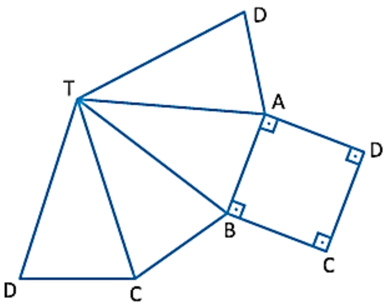
$$A_Y = A(\widehat{TDC}) + A(\widehat{TCB}) + A(\widehat{TBA}) + A(\widehat{TAD})$$
$$= \frac{a \cdot h_Y}{2} + \frac{a \cdot h_Y}{2} + \frac{a \cdot h_Y}{2} + \frac{a \cdot h_Y}{2} = \frac{(a+a+a+a) \cdot h_Y}{2}$$
$$= \frac{Ç(ABCD) \cdot \text{Yanal Yüz Yükseklik}}{2}$$

$A_T = A(ABCD)$ olduğundan

$$A = A_Y + A_T$$
$$= \frac{Ç(ABCD) \cdot \text{Yanal Yüz Yükseklik}}{2} + A(ABCD) \text{ olarak bulunur.}$$

Genelleme yapılırsa bir ABCD... düzgün dik piramidin alanı

$$A = A_Y + A_T$$
$$= \frac{Ç(ABCD...) \cdot \text{Yanal Yüz Yükseklik}}{2} + A(ABCD...) \text{ olur.}$$



Şekil 6.1.25: Kare dik piramidin açınımı

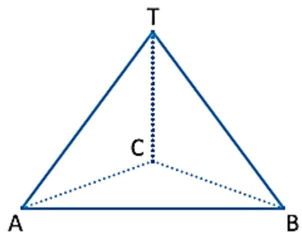
Düzgün piramidin hacmi, taban alanı ile cisim yüksekliği çarpımının üçte biridir.

$V = \frac{A_T \cdot h}{3}$ olur.

Düzgün Dörtyüzlü

Tanım

Dört yüzü eşkenar üçgen olan piramide **düzgün dörtyüzlü** denir (Şekil 6.1.26).



Şekil 6.1.26

Düzgün dörtyüzlünün bütün yüzleri eşkenar üçgendir. Düzgün dörtyüzlü, düzgün piramit olduğundan düzgün piramit özelliklerini sağlar.

Ayrıt uzunluğu a birim olan düzgün dörtyüzlünün yan yüz yüksekliği $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ olur.

Düzgün dörtyüzlüde ayrıt uzunluğu a birim olarak alınırsa yüzey alanı

$A = 4 \cdot A(\widehat{ABC}) = \cancel{4} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{\cancel{4}} = a^2\sqrt{3}$ birimkare olur.

Düzgün dörtyüzlünün hacmi, taban alanı ile yükseklik çarpımının üçte biridir. Bu durumda

$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ birimküp olur.