11.6.1. KATI CİSİMLER

1. Dik Dairesel Silindir

Doğrusal olmayan her çizgi bir eğri, düzlemsel olmayan her yüzey eğri yüzeydir. Bir düzlem ya da eğri yüzey parçasını her yönden sınırlayan eğri kapalı eğridir.

Küp, kare prizma gibi yüzeyler düz yüzeylerdir. Silindir kutu (Görsel 6.1.1), basketbol topu (Görsel 6.1.2), dondurma külahı (Görsel 6.1.3) gibi yüzeyler ise eğri yüzeylere örnek olarak gösterilebilir.

Görsel 6.1.1: Silindir kutu

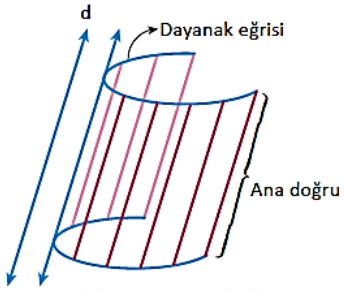
Görsel 6.1.2: Basketbol topu

Görsel 6.1.3: Dondurma külahı

Tanım

Uzayda kapalı düzlemsel bir eğri ile bu eğri düzlemine paralel olmayan bir d doğrusu verildiğinde eğri üzerindeki her noktadan d doğrusuna paralel çizilen doğruların oluşturduğu yüzey silindir yüzey, bu eğriler de silindir yüzeyin **dayanak eğrisi** olarak adlandırılır (Şekil 6.1.1).

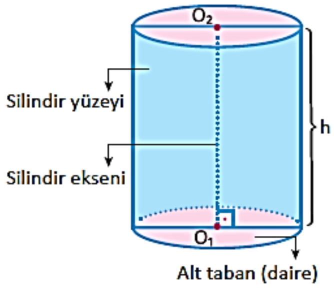
Dayanak eğrisi kapalı bir eğri olan silindir yüzeyin ana doğrularını kesen ve birbirine paralel iki düzlem arasında kalan cisimlere **silindir** denir.



Şekil 6.1.1: Dayanak eğrisi

Silindir yüzeyinin düzlemlerle olan kesitleri silindirin tabanları, tabanların sınırladığı silindir yüzey silindirin yanal yüzeyi, taban düzlemleri arasındaki uzaklık silindirin yüksekliği, tabanların merkezinden geçen doğru ise silindir eksenidir (Şekil 6.1.2).

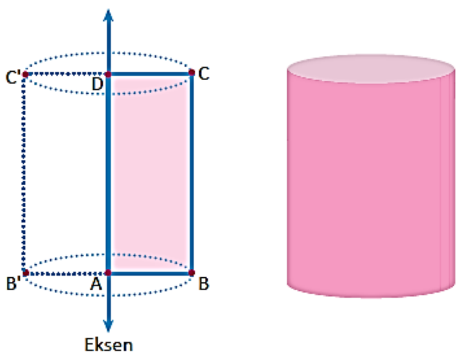
Tabanların karşılıklı iki noktasını birleştiren ve silindir eksenine paralel olan doğrulara silindirin **ana doğruları** denir (Şekil 6.1.2).



Şekil 6.1.2: Dik dairesel silindir.

Ana doğruları tabana dik olan silindirlere **dik silindir**, tabanı daire olan dik silindire de **dik dairesel silindir** denir (Şekil 6.1.2).

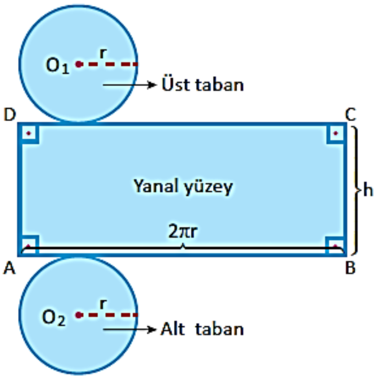
Bir dikdörtgenin herhangi bir kenarı etrafında $360°$ döndürülmesiyle oluşan cisim bir dik dairesel silindirdir (Şekil 6.1.3).



Şekil 6.1.3: Silindir

Dik Dairesel Silindirin Alan ve Hacim Bağıntıları

Şekil 6.1.4'te açık şekli verilen silindirin tabanları O merkezli r yarıçaplı daire, yanal yüzeyi de uzun kenarı $2\pi r$ (dairenin çevresi), kısa kenarı h (silindirin yüksekliği) olan ABCD dikdörtgenidir.



Şekil 6.1.4

Yanal yüzeyinin alanı A_Y olmak üzere $A_Y = 2\pi r \cdot h$ olur.
Taban alanlarının toplamı A_T olmak üzere $A_T = 2 \cdot \pi r^2$ olur.
Buradan silindirin yüzey alanı, yanal alanı ile taban alanlarının toplamına eşittir.

$A = A_Y + A_T$

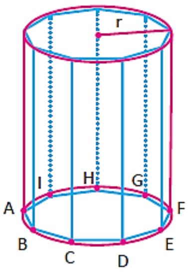
$A = 2\pi r \cdot h + 2 \cdot \pi r^2$ bulunur.

Şekil 6.1.5'te dik dairesel silindirin alt ve üst tabanları, eş düzgün çokgenlere bölünür ve karşılıklı kenarları silindirin simetri eksenine paralel olacak şekilde birleştirildiğinde n kenarlı düzgün çokgen prizma oluşur.

Kenar sayısı istenildiği kadar artırıldığında düzgün çokgen prizma silindire dönüşür. Bu durumda silindirin hacmi de prizmaların hacminde olduğu gibi taban alanı ile yüksekliğinin çarpımına eşit olur.
Buradan silindirin hacmi

A_T taban alanı, h yükseklik, V hacim olmak üzere

$V = A_T \cdot h = \pi r^2 \cdot h$ bulunur.

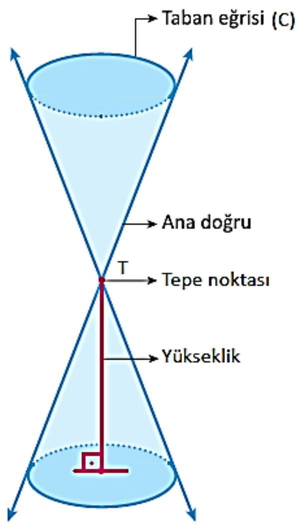


Şekil 6.1.5: Düzgün çokgen prizma

2. Dik Dairesel Koni

Tanım

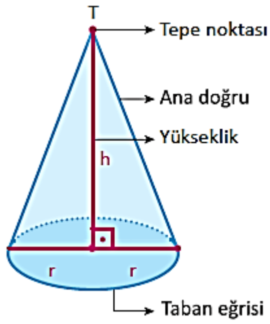
Uzayda sabit bir T noktası ile düzlemsel bir kapalı C eğrisi verilsin. T noktası ile C eğrisinin her noktasından geçen doğruların oluşturduğu yüzey koni yüzeydir.
C eğrisi, taban eğrisi (dayanak eğrisi) olarak adlandırılır.
T noktasına **tepe noktası**, T den geçen ve koni yüzeyi oluşturan doğru parçalarına ise **koni yüzeyinin ana doğruları** denir (Şekil 6.1.6).



Şekil 6.1.6: Koni yüzeyinin ana doğruları

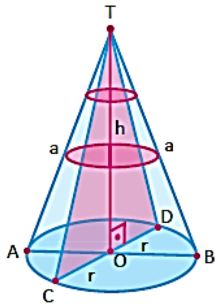
Dayanak eğrisi kapalı bir eğri olan koni yüzeyin, tüm ana doğrularını kesen bir düzlemle tepe noktası arasında kalan cisme **koni** denir.
Düzlemsel kesit koninin tabanı, tepe noktası ile taban arasındaki uzaklık koninin yüksekliğidir (Şekil 6.1.7).
Koninin tepe noktasından tabana inilen dikmenin taban ile kesiştiği noktaya **taban ayağı** denir.

Yükseklik ayağı taban merkezinde olan koniye **dik koni**, tabanı daire olan koniye de **dik dairesel koni** denir (Şekil 6.1.7).



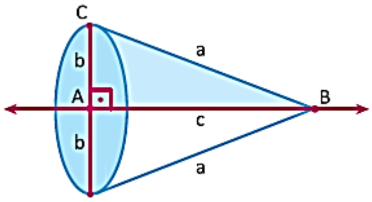
Şekil 6.1.7: Dik dairesel koni

Dik dairesel koninin yüksekliği simetri eksenidir.
Dik dairesel konide ana doğruların uzunlukları eşittir.
$|TA| = |TC| = |TB| = a$
Dik dairesel koninin simetri ekseninden geçen bütün düzlemlerle ara kesiti birbirine eş ikizkenar üçgensel bölgelerdir. Şekilde TCD üçgeni ikizkenar üçgendir.
Dik dairesel konide tabana paralel her kesit bir dairedir (Şekil 6.1.8).



Şekil 6.1.8

Bir dik üçgenin herhangi bir dik kenarı etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan cisim, dik dairesel konidir (Şekil 6.1.9).

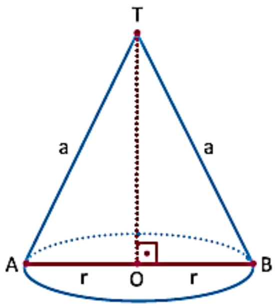


Şekil 6.1.9

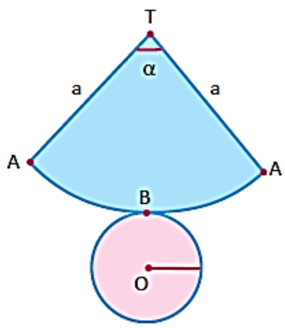
Dik Dairesel Koninin Alan ve Hacim Bağıntıları

Dik dairesel koninin tabanı daire olduğundan taban alanı $A_T = \pi r^2$ olur (Şekil 6.1.10). Yanal alanı ise T merkezli yarıçapı a olan α merkez açılı daire diliminin alanına eşittir.

Şekil 6.1.11'de $|\widehat{ABA}| = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi a$ ve $\widehat{ABA}$ taban dairesinin çevresi olduğundan
$|\widehat{ABA}| = 2\pi r$ olur. Bu iki değer eşitlenirse
$|\widehat{ABA}| = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \cancel{2\pi} a = \cancel{2\pi} r \Rightarrow \frac{r}{a} = \frac{\alpha}{360^\circ}$ bulunur.
T merkezli daire dilimi koninin yanal yüzü olduğundan koninin yanal alanı
$A_Y = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi a^2$ denkleminde $\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{r}{a}$ değeri yerine yazılırsa
yanal alan $A_Y = \frac{r}{a} \cdot \pi a^2 = \pi r a$ bulunur.
Sonuç olarak dik dairesel koninin yüzey alanı, taban alanı ile yüzey alanının toplamı olmak üzere
$A = A_T + A_Y = \pi r^2 + \pi r a$ şeklinde elde edilir.



Şekil 6.1.10

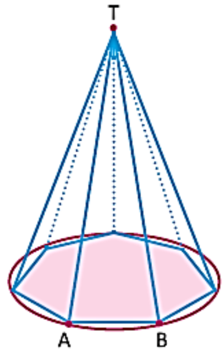


Şekil 6.1.11

Şekil 6.1.12'de tepe noktası T ve yarıçapı r olan koninin içerisine, tepe noktası T ve köşeleri koninin taban çemberi üzerinde olacak şekilde n kenarlı düzgün bir piramit yerleştiriliyor. Bu piramidin taban kenar uzunlukları küçültülerek piramidin kenar sayısı istenildiği kadar artırılırsa piramit, koniye dönüşür.

Bu durumda koninin hacmi, piramidin hacminde olduğu gibi taban alanı ile yüksekliğinin çarpımının üçte birine eşit olur.

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$ elde edilir.



Şekil 6.1.12

3. Küre

Tanım

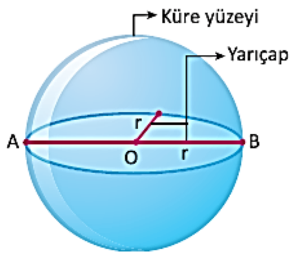
Uzayda sabit bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesine **küre yüzeyi**, küre yüzeyinin sınırladığı cisme de **küre** denir.

Sabit nokta kürenin merkezi, sabit uzunluk da kürenin yarıçapıdır.

Bir küre yüzeyinin bir düzlemle ara kesiti bir çember, kürenin bir düzlemle ara kesiti de bir dairedir.

Bir kürenin merkezinden geçen bir düzlemle ara kesiti kürenin en büyük dairesidir.

Kürenin en büyük dairesinin çapı, aynı zamanda kürenin de çapıdır (Şekil 6.1.13).



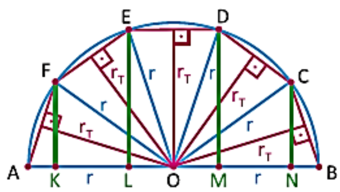
Şekil 6.1.13

Kürenin Alan ve Hacim Bağıntıları

Yarıçapı r olan küre yüzeyinin alanı, en büyük dairesinin alanının 4 katına eşittir. $A = 4 \cdot \pi r^2$ olur.

Şekil 6.1.14'te O merkezli r yarıçaplı yarım çember $[AB]$ etrafında 360° döndürülürse r yarıçaplı bir küre yüzeyi oluşur.

Bu yarım çemberin içine BCDEFA yarım düzgün bir çokgen çizilirse şekildeki gibi bu çokgenin iç teğet çemberinin yarıçapı r_T olur.



Şekil 6.1.14

BCDEFA düzgün yarım çokgenin $[AB]$ etrafında 360° döndürülmesiyle oluşan cismin alanı $A_Ç$ ile gösterilirse bu alan
$[AF], [FE], [ED], [DC], [CB]$
nin döndürülmesiyle elde edilen alanların toplamına eşittir. Buna göre

$$A_Ç = 2\pi \cdot r_T \cdot |AK| + 2\pi \cdot r_T \cdot |KL| + 2\pi \cdot r_T \cdot |LM| + 2\pi \cdot r_T \cdot |MN| + 2\pi \cdot r_T \cdot |NB|$$
$$= 2\pi \cdot r_T \underbrace{(|AK| + |KL| + |LM| + |MN| + |NB|)}_{2r}$$
$$= 2\pi \cdot r_T \cdot 2r$$
$$A_Ç = 4\pi r_T \cdot r \text{ bulunur.}$$

Düzgün yarım çokgenin kenarlarının uzunluklarını azaltarak kenar sayısı istenildiği kadar artırılırsa $r_T = r$ olacağından çokgenin alanı $(A_Ç)$ kürenin alanına (A) eşit olur. Buradan

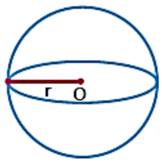
$$A_Ç = 2\pi r_T \cdot 2r = 2\pi \cdot r \cdot 2r$$
$$A = 4\pi r^2 \text{ elde edilir.}$$

Yarıçapı r olan kürenin hacmi $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ olur.

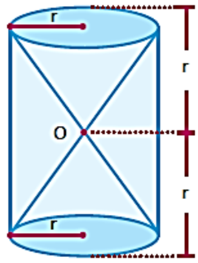
Şekil 6.1.15 ve 6.1.16'da r yarıçaplı O merkezli bir küre ile taban yarıçapı r, yüksekliği 2r olan içi dolu bir dik dairesel silindir görülmektedir.

Silindirden tabanı silindirin tabanları ile çakışık tepe noktası silindirin ağırlık merkezi O noktası olan iki dik dairesel koni çıkartılıyor.

Silindirin ağırlık merkezinden ve kürenin merkezinden k birim uzaklıktaki düzlemle silindirin ve koninin ara kesit alanlarını bulunuz.



Şekil 6.1.15



Şekil 6.1.16

Şekil 6.1.17'de r yarıçaplı kürenin merkezinden k birim uzaklıktaki düzlemle ara kesiti m yarıçaplı bir dairedir. OPS dik üçgeninde Pisagor teoreminden $m^2 = r^2 - k^2$ dir. Buradan kürenin ara kesit dairesinin alanı $A_K = \pi \cdot m^2 = \pi(r^2 - k^2)$ olur.

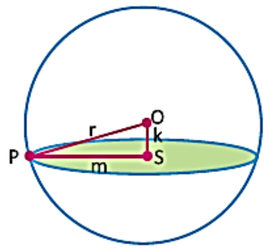
Şekil 6.1.18'de dik dairesel silindirin k birim uzaklıktaki düzlemle ara kesiti bir daire halkasıdır.
$|OB| = |AB| = r$ olduğundan $\widehat{OBA}$ ikizkenar üçgendir. OCD ve OBA üçgenleri benzer üçgen olduğu için $|OC| = |CD| = k$ olur.
Buradan silindir ara kesit daire halkasının alanı
$A_H = \pi r^2 - \pi k^2 = \pi(r^2 - k^2)$ olur.

$A_K = A_H$ eşitliğinden kürenin ve içerisinden iki koni çıkartılan silindirin merkezlerinden eşit uzaklıktaki arakesit alanlarının eşit olduğu görülür. Bu durumda Cavalieri İlkesi'ne (bk. Cavalieri İlkesi) göre bu iki cismin hacimleri eşittir. Böylece kürenin hacmi

$V =$ Silindirin hacmi $-$ $2 \cdot$ Koninin hacmi

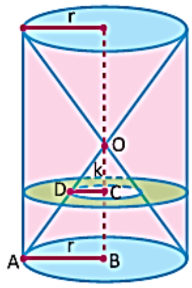
$$V = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ elde edilir.



Şekil 6.1.17

Cavalieri İlkesi
Yükseklikleri birbirine eşit olan iki katı cisim ile bir düzlem verilmiş olsun. Verilen düzleme paralel olan her düzlemle bu cisimlerin ara kesitleri eşit alanlı ise bu iki cismin hacimleri birbirine eşittir.



Şekil 6.1.18