GENEL MATEMATİK

MAT103U

KISA ÖZET

1

Tanım A ve B iki küme olsun. Her $x \in A$ için $x \in B$ ise A kümesine B kümesinin altkümesidir denir ve

$$A \subset B$$

ile gösterilir.

Şimdi kümelerle ilgili bazı temel tanımları ifade edelim. Elimizde A ve B gibi iki küme olsun. Eğer A kümesinin her elemanı, B'nin de bir elemanı ise A kümesine B kümesinin altkümesidir diyoruz ve bu durumu

$$A \subset B$$

olarak gösteriyoruz.

İlk örnekteki A ve B kümeleri ve ikinci örnekteki C ve D kümeleri eşittir.

İlk verdiğiniz örnekte elemanların yazılış sırası farklıydı, ikinci örnekte de bir eleman birden fazla yazılmıştı. O halde bir kümenin elemanlarının yazılışında sıranın değiştirilmesi ya da elemanların tekrar edilmesi kümeyi değiştirmiyor.

Tebrikler Engin, haklısın. Şunu da ekleyelim, A ve B kümelerinin eşit olmaması durumu da $A \neq B$ olarak gösterilir.

Ayrıca $A \subset B$ ve $A \neq B$ ise A kümesi B kümesinin öz altkümesidir denir.

Mesela az önce Mete Hoca'nın verdiği örnekteki $A = \{1, 2\}$ kümesi $B = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesinin öz altkümesidir.

Tanım Eğer $A \subset B$ ve $B \subset A$ ise A ve B kümeleri eşittir denir ve

$$A = B$$

olarak gösterilir.

Örnek "LEBLEBİ" kelimesinin harfleri kümesi

{B, E, İ, L}

olur.
Bu küme aynı zamanda "BELLİ" kelimesinin harfleri kümesine de eşittir.

Tanım Hiçbir elemanı olmayan kümeye boş küme denir. Boş küme

$$\emptyset$$

simgesiyle gösterilir.

A herhangi bir küme olmak üzere

$$\emptyset \subset A$$

olur.

Tanım A ve B kümelerinden en az birine ait elemanların oluşturduğu kümeye A ve B kümelerinin birleşimi denir ve

$$A \cup B$$

ile gösterilir. Bir başka deyişle

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in B\}$$

olur.

Örnek
$A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, ve $C = \{3, 4\}$ kümeleri için
$A \cup B = \{1, 2, 3\}$,
$B \cup C = \{2, 3, 4\}$,

$$(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4\}$$

ve

$$A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4\}$$

olur.

Örnek $A = \{1,3,5\}$ ve $B = \{1,2,3,4\}$ kümeleri için

- $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$
- $A \cap B = \{1,3\}$
- $A \setminus B = \{5\}$ ve $B \setminus A = \{2,4\}$ olur.

Örnek $A = \{1,2,3\}$ ve $B = \{4,5,6\}$ kümeleri için

- $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$
- $A \cap B = \emptyset$ olur, çünkü hem A hem de B kümesine ait olan eleman yoktur.

Tanım: *E* evrensel kümesi ve bunun bir *A* altkümesi verilsin. *E* kümesine ait olup *A* kümesine ait olmayan elemanların kümesine *A* kümesinin *E* kümesine göre tümleyeni denir ve bu küme A^t ile gösterilir.

Sayılar

Kümeler kadar tanıdık bir başka konu da sayılar değil mi arkadaşlar? Hatta belki kümelerden de tanıdık. Üstelik az önce kümeler konusundan bahsederken sayıları kullandık. Aranızda doğal sayılar kümesini bilmeyen var mı?

Doğal sayılar kümesini kim bilmez! Adı üstünde hocam, $1,2,3,\ldots$ diye giden sayı kümesine doğal sayılar kümesi diyoruz.

N= {1,2,3, . . . }

Tamsayılar kümesini $\mathbb{Z}$ ile gösteriyoruz. Engin'in dediği gibi bu küme

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &= \{1, 2, 3, \ldots\} \cup \{0\} \cup \{-1, -2, -3, \ldots\} \\ &= \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \end{aligned}$$

biçimindedir.

Rasyonel sayılar kümesini de $\mathbb{Q}$ ile gösteriyoruz. O halde rasyonel sayılar kümesini

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

biçiminde ifade edebiliriz. Dikkat ederseniz tamsayılar kümesi de rasyonel sayılar kümesinin altkümesidir.

Doğal sayılar kümesi tamsayılar kümesinin, tamsayılar kümesi de rasyonel sayılar kümesinin altkümesidir.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

İşte rasyonel sayılar ile irrasyonel sayılar kümesinin birleşimi de "gerçel sayılar" kümesini oluşturmaktadır. Gerçel sayılar kümesini $\mathbb{R}$ ile gösteriyoruz. Rasyonel sayılar kümesinin, gerçel sayılar kümesinin bir altkümesi olduğu açıktır.

Evet, çünkü iki küme için bu kümelerden herhangi biri, bu kümelerin birleşiminin altkümesiydi. Yani kümelerimiz A ve B ise hem $A \subset A \cup B$ hem de $B \subset A \cup B$ idi.

Rasyonel sayılar gerçel sayıların altkümesi olduğuna göre $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ yazabiliriz.

Doğru söylüyorsun Zeynep, konuyu bu şekilde özetleyebiliriz. Artık elimizde gerçel sayılar kümesi var. Herhangi iki gerçel sayıyı toplayabilir ya da çarpabiliriz. Sonuç yine bir gerçel sayı olacaktır.

Şimdi bize a ve b gibi iki gerçel sayı verilmiş olsun. a sayısının sayı doğrusundaki konumu b sayısınınkine göre solda ise "a sayısı, b sayısından küçüktür" diyeceğiz ve bunu $a < b$ olarak göstereceğiz.

Az önce verdiğim örneğe göre -2 sayısı $-4/3$ sayısından küçüktür. Yani $-2 < -\frac{4}{3}$ olur.

Bu duruma bir başka açıdan bakacak olursak, b sayısı da sayı doğrusunda konum olarak a sayısına göre sağda kaldığı için "b sayısı, a sayısından büyüktür" diyebiliriz ve bunu $b > a$ olarak gösteririz.

O halde "$-4/3$ sayısı, -2 sayısından büyüktür" de diyebilirim. Yani $-\frac{4}{3} > -2$ olur.

Üslü Sayılar

Bir a gerçel sayısının kendisiyle çarpımını a^2 ile $a \cdot a \cdot a$ sayısını a^3 ile gösteriyoruz ve bu sayılara sırasıyla a sayısının "kare"si ve "küp"ü diyoruz. Genel olarak $n \geq 2$ doğal sayısı için, n tane a sayısının çarpımını a^n ile gösteriyoruz. Yani

$$\begin{aligned} a^2 &= a \cdot a \\ a^3 &= a \cdot a \cdot a \\ &\vdots \\ a^n &= \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ tane}} \end{aligned}$$

a^n sayısına "a sayısının n. kuvveti" diyoruz. Peki arkadaşlar, yine $n \geq 2$, $m \geq 2$ olmak üzere n, m doğal sayıları için a^n ile a^m sayılarını çarptığımızda ne olacak?

a^n sayısı n tane, a^m sayısı da m tane a sayısının çarpımı olduğuna göre bu ikisinin çarpımı $n+m$ tane a sayısının çarpımıdır.

Engin doğru söylüyor.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ tane}} \text{ ve } a^m = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{m \text{ tane}}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ tane}} \cdot \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{m \text{ tane}} \\ &= \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n+m \text{ tane}} \\ &= a^{n+m} \end{aligned}$$

olduğunu elde ederiz.

Tanım $a^0 = 1$ ve $a^1 = a$ olarak tanımlanır.

Tanım $a \neq 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

ve özel olarak

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

olarak tanımlanır.

$a^0 = 1$ ve $a^1 = a$ olarak tanımlıyoruz Selçuk. Ayrıca $a \neq 0$ sayısı ve n doğal sayısı için a^{-n} sayısını da

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

olarak tanımlıyoruz.

Özel olarak $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ olduğunu da söyleyebiliriz. Dikkat ederseniz, negatif tamsayı üsler için de üslü sayıların ne anlama geldiğini ifade etmiş olduk.

Son olarak $n \geq 2$ ve $m \geq 2$ olmak üzere m, n doğal sayıları için a^n sayısının m. kuvvetini, yani $(a^n)^m$ sayısını bulalım.

Bir sayının m. kuvveti o sayıdan m tanesinin çarpımı olduğuna göre a^n sayısının m. kuvveti, yani $(a^n)^m$ sayısı, m tane a^n 'nin çarpımı olacaktır. Bu durumda

$$\begin{aligned} (a^n)^m &= \underbrace{a^n \cdot a^n \ldots a^n}_{m \text{ tane}} \\ &= a^{\overbrace{(n+\ldots+n)}} \\ &= a^{n \cdot m} \end{aligned}$$

olur.

Bir soru da ben sorayım. $2^3 \cdot 2^4$ sayısını hesaplayın.

Aaa, bu da kolaymış. Bunu da ben yapayım. $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4}$ olur. O halde bu sayı 2^7'dir. Selçuk 2^6 sayısının 64 olduğunu hesaplamıştı. $2^7 = 2^6 \cdot 2 = 64 \cdot 2 = 128$ olur.

$2^3 = 8$ ve $2^4 = 16$ olduğundan $2^3 \cdot 2^4 = 8 \cdot 16 = 128$ de diyebilirdin.

Köklü Sayılar

Şimdi de köklü sayılara ilişkin bir takım temel bilgilerimizi gözden geçirelim. Öncelikle $a \geq 0$ ve n bir doğal sayı olmak üzere n. kuvveti a olacak biçimdeki negatif olmayan sayıya "a sayısının n. dereceden kökü" diyoruz ve $\sqrt[n]{a}$ ile gösteriyoruz. Özel olarak $n = 2$ ise $\sqrt[2]{a}$ yerine $\sqrt{a}$ yazıyoruz ve bunu "karekök" olarak adlandırıyoruz.

$a \geq 0$ ve n bir doğal sayı olmak üzere $\sqrt[n]{a}$ sayısı n.kuvveti a olan $b \geq 0$ sayısıdır.

$n = 2$ ise $\sqrt[2]{a}$ yerine

$$\sqrt{a}$$

yazılır.

Yani n tane $\sqrt[n]{a}$ sayısının çarpımı a olur.

Örnek

$3 \cdot 3 = 9$ olduğu için

$$\sqrt{9} = 3,$$

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ olduğu için

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

olur.

Örnek

$$\begin{aligned}
\sqrt{27} &= \sqrt{3^2 \cdot 3} \\
&= \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \\
\sqrt{108} &= \sqrt{4 \cdot 27} \\
&= \sqrt{4} \cdot \sqrt{27} \\
&= 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \\
\sqrt{108} + \sqrt{27} &= 6\sqrt{3} + 3\sqrt{3} \\
&= (6+3)\sqrt{3} = 9\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Örnek

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}} &= \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

ya da

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}} &= \sqrt{\frac{3}{27}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{9}} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Aralıklar

Şimdi biraz da aralıklar ile ilgilenelim.

Aralıklar, gerçel sayılarda seçilen iki sayı arasındaki tüm sayıların oluşturduğu kümeler değil miydi?

Evet Engin, dediğin gibi... a, b herhangi iki gerçel sayı ve $a < b$ olsun.

$$\{x \mid a \leq x \leq b,\ x \in \mathbb{R}\}$$

kümesine "kapalı aralık" diyoruz ve bu kümeyi $[a, b]$ olarak gösteriyoruz. Dikkat ederseniz, a ve b sayıları bu kümeye aittir. Bu nedenle aralığa kapalı diyoruz. a ve b sayılarına aralığın uç noktaları diyoruz. $[a, b]$ kapalı aralığı sayı ekseni üzerinde uçları a ve b olan doğru parçası ile gösterilir.

Şekil 1.12: $[a, b]$ aralığı.