ORTAÖĞRETİM

FEN LİSESİ

MATEMATİK 9

DERS KİTABI

YAZARLAR

Ali UÇAK
Emin EMİR
Firdevs UÇKUN
Güler KUTLU
Seçil KAHRAMAN

MEB

DEVLET KİTAPLARI

BİRİNCİ BASKI

........................., 2018

MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI YAYINLARI ....: 6701
YARDIMCI VE KAYNAK KİTAPLAR DİZİSİ...: 992

HAZIRLAYANLAR

Editör
Prof. Dr. Erdal ULUALAN

Dil Uzmanı
Gülçin GÜRPINAR

Program Geliştirme Uzmanı
Yrd. Doç. Dr. Nihal TUNCA

Ölçme ve Değerlendirme Uzmanı
Yrd. Doç. Dr. Recep Serkan ARIK

Rehberlik ve Gelişim Uzmanı
Mevlüt DURAN

Görsel ve Grafik Tasarım Uzmanı
Hacı Mehmet ÖZTÜRKOĞLU

ISBN 978-975-11-4535-2

Millî Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığının 25.06.2018 gün ve 12254648 sayılı yazısı ile eğitim aracı olarak kabul edilmiş, Destek Hizmetleri Genel Müdürlüğünün 03.07.2018 gün ve 12720148 sayılı yazısı ile birinci defa 77.011 adet basılmıştır.

İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl.
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl.

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,
Medeniyyet dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş, yurduma alçakları uğratma sakın;
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın;
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın.

Bastığın yerleri toprak diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki feda?
Şüheda fışkıracak toprağı sıksan, şüheda!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüda.

Ruhumun senden İlâhî, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar -ki şehadetleri dinin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,
Her cerîhamdan İlâhî, boşanıp kanlı yaşım,
Fışkırır ruh-ı mücerret gibi yerden na'şım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalan sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl;
Hakkıdır hür yaşamış bayrağımın hürriyyet;
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif Ersoy

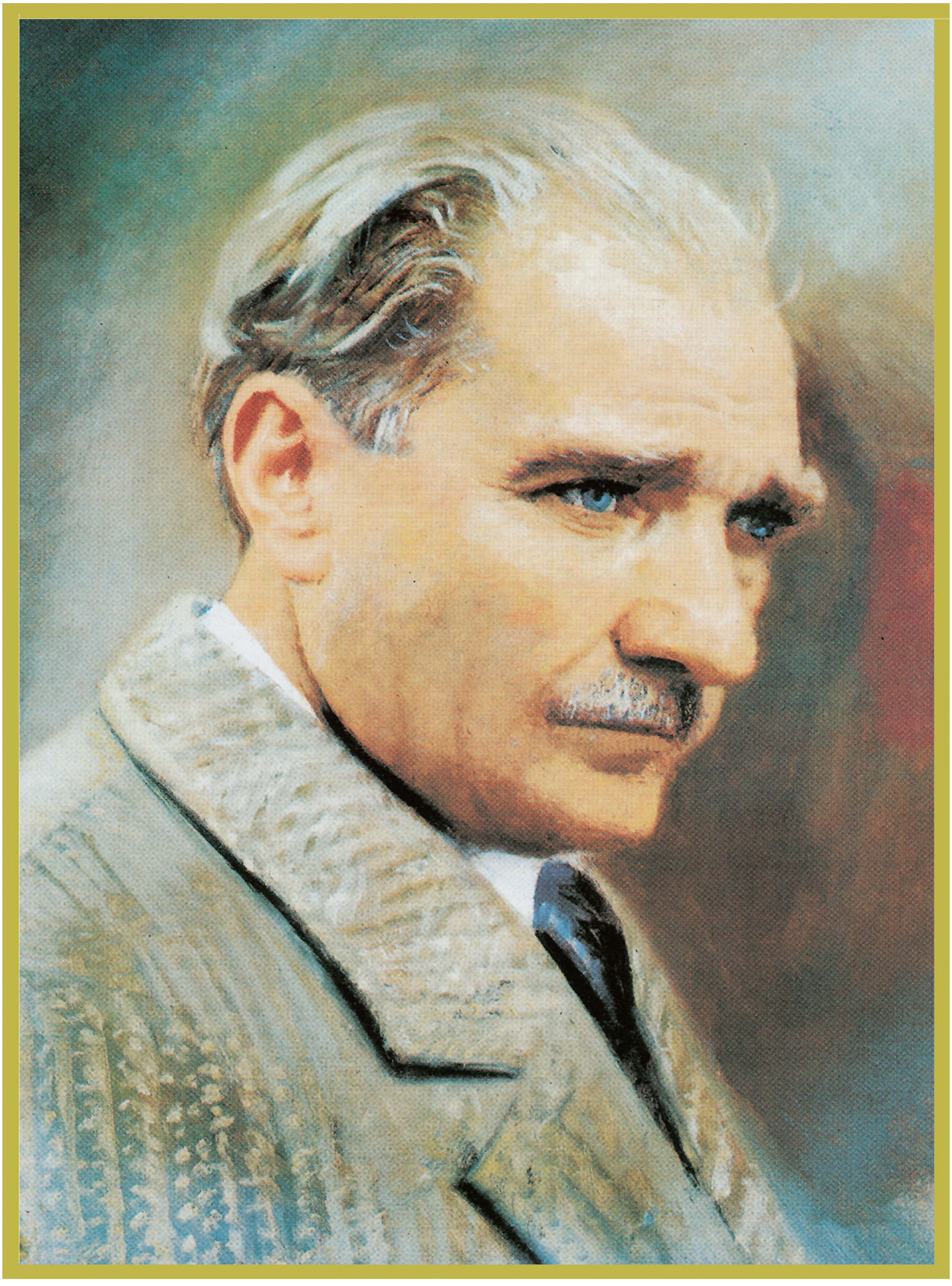
GENÇLİĞE HİTABE

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk Cumhuriyetini, ilelebet muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni bu hazineden mahrum etmek isteyecek dâhilî ve hâricî bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok namüsait bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dâhilinde iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlîlerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi vazifen, Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır. Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asil kanda mevcuttur.

Mustafa Kemal Atatürk



MUSTAFA KEMAL ATATÜRK

İÇİNDEKİLER

9.3. DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

9.4. ÜÇGENLER

9.5. VERİ

KİTABIN TANITIMI

Karekod uygulamasıyla alt öğrenme alanlarına interaktif olarak ulaşabilirsiniz.

GEOMETRİ

Öğrenme Alanı.

9.4. ÜÇGENLER

Alt Öğrenme Alanı.

Neler Öğreneceksiniz?

- Üçgende açı özelliklerini kullanarak uygulamalar yapabilmeyi,
- Üçgenin kenar uzunlukları ile bu kenarları gören açılar arasındaki ilişkilendirmeyi,
- Üçgen eşitsizliğini,
- Üçgenin iç ve dış açıortayları ile bunların özelliklerini, iç ve dış açıortay uzunluklarını hesaplayabilmeyi,
- Üçgende kenarortay ve özellikleri ile kenarortay uzunluğunu hesaplayabilmeyi,
- Üçgende kenarortayı,
- Farklı üçgen çeşitlerine göre kenarlara ait yükseklikleri çizebilmeyi,
- İki üçgenin eş olması için gerekli asgari koşullar ile üçgende eşlik kurallarını,
- İki üçgenin benzer olması için gerekli asgari koşullar ile üçgendeki temel benzerlik kurallarını (Menelaus, Seva, Stewart, Carnot ve Thales teoremleri),
- Dik üçgendeki Pisagor ve Öklid teoremleri, bu teoremlerin uygulamaları ile dar açıların trigonometrik oranlarını,
- Yükseklikleri aynı olan üçgenlerin alanları ile tabanları arasındaki ilişkiyi,
- Benzer üçgenlerin alanları ile benzerlik oranı arasındaki ilişkiyi öğreneceksiniz.

Üçgenleri Öğrenmek Neden Önemlidir?

- Açılar ve üçgenler, geometrinin en temel konularıdır. Karşılaşılan şekillerin çevre, yükseklik, açıortay, kenarortay ve alanını bulmak gerekebilir. Mesela inşaatçılık, haritacılık, mobilyacılık, arazi ölçümü ve süslemecilik gibi alanlarda açıların ve üçgenlerin bu özellikleri ve hesaplamaları kullanılmaktadır.
- Üçgenler konusu ne kadar iyi öğrenilip uygulanabilirse dörtgenler, beşgenler vb. konuların öğrenilmesi de o ölçüde kolaylaşır. Bu da günlük hayatta karşılaşılan karmaşık şekillerin üçgenlere bölünerek daha iyi anlaşılmasını sağlar.
- Ayrıca günlük hayatta karşılaşılan hesaplaması zor bazı uzunlukların (örneğin bir ağacın boyu, bir binanın ya da dağın yüksekliği, bir deniz aracının kıyıya uzaklığı, çok uzak mesafedeki uzunluklar vb.) bulunmasında geometri teoremlerinden yararlanılır.
- Geometri, bazı matematik problemlerine farklı açılardan bakılmasını sağlayarak yeni çözüm yöntemlerinin geliştirilmesine olanak sağlar.

Fen Lisesi Matematik 9 | 225

Alt öğrenme alanında neler öğrenileceğini, alt öğrenme alanını öğrenmenin önemini, alt öğrenme alanının günlük hayatla ilişkisini tanıtan bölümdür.

Alt Öğrenme Alanı.

KÜMELER

9.2.2. KÜMELERDE İŞLEMLER VE BAĞINTI

Alt öğrenme alanına yönelik dikkat çeken çalışmaların ve uygulamaların bulunduğu bölümdür.

Etkinlik

Ada ve Ebru Türkiye Bayan Voleybol Millî Takımı Yılın Altısı seçmeleri için Bahar, Çağla, Eda, Gözde, Naz, Neslihan, Polen, Seda, Ezgi, Güldeniz arasından seçim yapacaktır.

Antrenörlerden Ada Yılın Altısı takımına Çağla, Gözde, Neslihan, Polen, Ezgi, Güldeniz,

Ebru ise Yılın Altısı takımına Gözde, Polen, Çağla, Eda, Seda, Bahar oyuncularını seçiyor.

Ada veya Ebru'dan en az birisinin Yılın Altısı için oy verdikleri oyuncuların oluşturduğu küme:

K = {..}

Ada ve Ebru'nun her ikisinin de Yılın Altısı için ortak oy verdikleri oyuncuların oluşturduğu küme:

L = {..}

Ada'nın Yılın Altısına alıp Ebru'nun almadığı oyuncuların oluşturduğu küme:

M = {..}

Ada'nın Yılın Altısı için seçmediği oyuncuların oluşturduğu küme:

N = {..}

- K kümesinde Ada veya Ebru'dan en az birisinin Yılın Altısı için oy verdikleri tüm voleybolcuların bulunduğunu ve her voleybolcunun bir kez yazıldığını,
- L kümesinde Ada ve Ebru'nun her ikisinin de Yılın Altısı için oy verdikleri ortak voleybolcuların bulunduğunu,
- M kümesinde sadece Ada'nın Yılın Altısına aldığı voleybolcuların bulunduğunu,
- N kümesinde Ada'nın Yılın Altısı için seçtiği oyuncular dışında kalan voleybolcuların bulunduğunu fark ettiniz mi?

Oluşturulan kümeler, hangi küme işlemleri ile ifade edilir? Düşününüz.

56 | Fen Lisesi Matematik 9

Alt öğrenme alanı ile ilgili tanım, bilgi ve özelliklerin bulunduğu bölümdür.

Sayı Kümeleri Arasındaki İlişki

1. Doğal Sayılar Kümesi

Sayıları yazmak için kullanılan sembollere rakam adı verilir.
Rakamlar kümesi $= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
Sayma sayıları kümesi $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$
Sayma sayıları kümesine sıfırın eklenmesiyle elde edilen kümeye doğal sayılar kümesi denir.
$\mathbb{N}$ ile gösterilir. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$

Alt öğrenme alanındaki dikkat edilmesi gereken uyarıların bulunduğu bölümdür.

a, b, c birer rakam olmak üzere
ab iki basamaklı bir sayı olsun. $ab = 10a + b$
abc üç basamaklı bir sayı olsun. $abc = 100a + 10b + c$ *şeklinde yazılır.*

Alt öğrenme alanıyla ilgili işlenişleri açıklayan örneklerin ve çözümlerinin bulunduğu bölümdür.

12. ÖRNEK

33 basamaklı 444...4 sayısının 9 ile bölümünden kalanı bulunuz.

ÇÖZÜM

Sayının 9 ile bölümünden kalanı bulmak için rakamları toplamı hesaplanır.

$\underbrace{4 + 4 + 4 + \ldots + 4}_{33\ \text{tane}} = 4 \cdot 33 = 132$ dir.

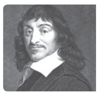
132 nin 9 ile bölümünden kalan: $1 + 3 + 2 = 6$ dır.

Alt öğrenme alanındaki işlenişe yönelik kısa tarihi bilgilerin bulunduğu bölümdür.

TARİHÇE

Koordinat kavramını ilk kez tarif eden Pierre de Fermat'tır [Piyer Dö Ferma (1601-1665)].

Modern koordinat kavramı ise Fransız Matematikçi ve Filozof Rene Descartes [Rene Dekart (1596-1650)] (Görsel 3.1.2) tarafından verilmiştir. Descartes, cebrin geometriye uygulanması ile ilgili yaptığı çalışmaları ilerleterek kartezyen koordinat sistemini "La Géometrie" adlı eserinde tanıtmıştır. Bu bakımdan Descartes, analitik geometrinin kurucusu olarak kabul edilmektedir.



Görsel 3.1.2
Rene Descartes (1596-1650)

Alt öğrenme alanının tarihsel gelişimini içeren bölümdür.

ÜÇGENLER

(Mustafa Kemal Atatürk 1881-1938)

ABC

İnsanoğlu, çok eski çağlardan bugüne kadar geometriye ve geometrik hesaplamalara ihtiyaç duymuştur.

Hendese	Geometri	Murabba	Kare
Zaviye	Açı	Muhit-i daire	Çember
Müselles	Üçgen	Kutur	Çap
Mustatil	Dikdörtgen	Mesaha-i sathiyye	Alan

226 | Fen Lisesi Matematik 9

Alt öğrenme alanının pekiştirilmesi amacıyla verilen uygulama sorularının bulunduğu bölümdür.

Sıra Sizde

SORU:

Tam sayılardan oluşan $4, 7, x, x + 3, 10, y, 2y - 5$ veri grubunun aritmetik ortalaması 10, modu 7 ise medyanını bulunuz.

ÇÖZÜM:

Alt öğrenme alanıyla ilgili düşünmeye, tartışmaya ve araştırmaya yönelik soruların bulunduğu bölümdür.

Seçtiğiniz bir konuda (sınıf arkadaşlarınızın burçları, tuttukları futbol takımları vb.) tüm sınıf arkadaşlarınızın bilgilerini alınız. Aldığınız bilgilere göre bir veri grubu oluşturunuz. Veri grubunun merkezi eğilim ölçülerini bulunuz.

ALIŞTIRMALAR

Bir veya birkaç işlenişi içeren pekiştirme sorularının bulunduğu bölümdür.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

Her alt öğrenme alanının sonunda verilen değerlendirme sorularının bulunduğu bölümdür.

SAYILAR VE CEBİR

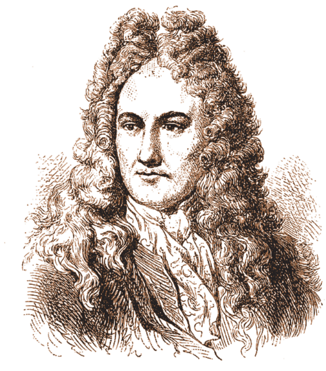
9.1. MANTIK

Neler Öğreneceksiniz?

- Önerme kavramı ile bir önermenin doğruluk değerini, değilini (olumsuzunu) ve denk önermeleri,
- “ve, veya, ya da, ise, ancak ve ancak” bağlaçları ile oluşturulan bileşik önermeleri ve bu önermelerin doğruluk değerlerini,
- Elektrik devrelerindeki paralel-seri bağlama ile ve/veya/bağlaçları arasındaki ilişkiyi,
- De Morgan kurallarını,
- Tek yönlü ve iki yönlü koşullu önermeleri, bu önermeler arasındaki ilişkileri,
- Bir koşullu önermenin tersini, karşıtını ve karşıt tersini bulmayı,
- Sözel veya sembolik mantık dilinde verilen önermeleri birbirine dönüştürmeyi,
- Totoloji ve çelişki kavramlarını,
- Açık önermeleri ve açık önermelerin doğruluk değerlerini bulabilmeyi,
- Tanımlı tanımsız terim, aksiyom, teorem ve ispatlama kavramlarını öğreneceksiniz.

Mantık Öğrenmek Neden Önemlidir?

- İnsanlar günlük yaşantılarında duygu ve düşüncelerini ifade etmek için farklı cümleler kurar. Kişi, kendine ve sosyal çevresine zarar verecek cümleler kurmaktan sakınır. Bu durum mantıklı konuşma, düşünme ve hareket etme şeklinde de ifade edilir.
- Matematik, doğru ve sistemli düşünme sanatı olarak da ifade edilebilir. Mantık ise doğru düşünebilme bilimidir. Bu açıdan bakıldığında mantık, matematiğin ayrılmaz bir parçasıdır. Bilinenleri kullanarak yeni gerçeklere ulaşmak, yeni buluşlar yapmak sistemli akıl yürütme ile mümkündür.
- Mantık kuralları, matematikte ve günlük yaşantıda problemlerin anlaşılmasında önemli bir yer tutar. Problemler, mantık ilke ve sembolleri kullanılarak formüle edilir. Çözümlemeler sonucu elde edilen sonuçlar yorumlanarak kesin hükümlere ulaşılır.
- Sembolik mantık, matematiksel zekânın alt yapısını oluşturur. Alt yapısı güçlü olan bireyler, matematiksel kavram ve problemleri çözmede üstünlük elde eder.



Görsel 1.1.1:Gottfried Wilhelm Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz [Gottfried Wilhelm Leybnits (1646-1716)], matematik ve mantık alanında önemli çalışmalar yapmış bir bilim insanıdır. Leibniz, matematiksel simge mucitlerinin en önemlilerinden biridir. Matematik dışında hukuk, siyaset, tarih, metafizik, mantık, edebiyat ve felsefe alanlarında da yaptığı çalışmalarla insanlığa büyük hizmetlerde bulunmuştur.

George Boole [Corç Buul (1815-1864)], matematik ve mantık alanında çalışmaları olan ünlü İngiliz bilim insanıdır. Matematiksel mantık kuramına ilişkin Boolean cebrini geliştirmiştir. Boole cebri olarak adlandırılan mantık cebri, sayısal bilgisayar devreleri tasarımının matematiksel temelini oluşturur. Bilgi teknolojilerinin ulaştığı bugünkü aşamada onun çalışmalarının katkısı övgüye değerdir. 1848 yılında “Mantığın Matematiksel Analizi” adlı eserini yayımlayarak matematik biliminde yeni bir sayfa açmıştır.

Bertrand Russell [Bertrat Rassıl (1872-1970)]; “Matematiğin İlkeleri” adlı kitabında önermelerin “ve, veya, ise, ancak ve ancak" gibi mantıksal bağlaçlarla ilişkisini kurup mantık bilimini tanıtmıştır. Matematiği $p \Rightarrow q$ şeklindeki önermeler bütünü olarak ifade ederek farklı bir yaklaşım ortaya koymuştur.

Kaynak: A.Dönmez, Matematiğin Öyküsü ve Serüveni/Alman Matematikçileri, 2002

9.1.1. ÖNERMELER VE BİLEŞİK ÖNERMELER

Etkinlik

Yasin ve Hilal, amaçlarına ulaşmak için sayısal derslerdeki eksikliklerini gidermek istemektedir. Bu amaçla okul rehberlik öğretmeni ile görüşürler. Görüşme sonucunda aşağıdaki önerileri not ederler.

- Sayısal derslerde başarılı olmak için dersi derste anlamalısınız.
- Derste anlamadığınız her konuyu zamanında öğretmeninize sorarak öğrenmelisiniz.
- Günlük tekrarlarınızı yazarak yapmalısınız.
- Uzun vadeli değil amaca dönük kısa vadeli planlar yapmalısınız.

Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerlere "ve, veya, ise, ancak ve ancak" kelime ya da kelime gruplarından uygun olanını yazınız.

-Yasin ve Hilal'in amaca ulaşmaları .... yapılan plana uymaları ile mümkündür.

-Yasin ve Hilal amaca ulaşmak istiyor .... kısa vadeli amaca dönük planlar yapmalıdır.

-Yasin ve Hilal, öğrenilen kavram .... konuları yazarak tekrar etmelidir.

-Yasin ve Hilal derste anlayamadıkları konuları öğretmenine zamanında sorup öğrenmeli .... çok tekrar yaparak anlamalıdır.

Siz de yukarıdaki kelime ya da kelime gruplarını kullanarak olumlu ve olumsuz cümleler kurunuz. Kurduğunuz cümlelerin hükmünün doğru ve yanlış olma durumlarını tartışınız.

"Mantıklı düşün!" veya "Mantıklı ol!" sözlerinden ne anladığınızı ifade ediniz.

1. Önermelerde Temel Kavramlar

İnsanı diğer canlılardan ayıran en temel özellik, akıl sahibi bir varlık olarak düşünen bir canlı olmasıdır. Düşüncelerin anlamlı ve tutarlı olduğu akıl yürütme yoluna mantık denir.

İnsanlar günlük yaşantılarında, sosyal ve kültürel ilişkilerinde farklı cümleler kurarak kendilerini ifade eder. Bu ifadeler duygu ve düşüncelerin açıklanmasının doğal bir sonucudur. Örneğin “Kızılırmak, uzun bir ırmaktır.” cümlesi bazılarına göre doğru olabileceği gibi bazılarına göre de yanlış olabilir. Çünkü ırmakların hangi ölçüden sonra “uzun” olarak niteleneceğinin kriteri belli değildir. Bu cümle “Ülkemizin Karadeniz'e dökülen en uzun ırmağı Kızılırmak'tır.” şeklinde söylenseydi doğru bir ifade olurdu. “Bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° dir.” cümlesi ise matematikte doğruluğu gösterilmiş olduğundan doğru bir hüküm bildirir. “Nasılsın?” ve “Koşma!” gibi cümleler, soru ve ünlem cümlesi olduğu için bir hüküm bildirmez.

Doğru ya da yanlış, kesin hüküm bildiren ifadelere önerme adı verilir.
Önermeler genellikle “p, q, r, s, t” gibi küçük harflerle gösterilir.

1. ÖRNEK

Aşağıdaki ifadelerin önerme olup olmadığını inceleyiniz.
a) p: “Çift ve asal olan doğal sayı sadece 2 dir.”
b) q: “Bugün tiyatroya gidelim.”
c) r: “Sakarya, Karadeniz Bölgesi'ne ait bir ilimizdir.”
ç) s: “Kiraz, lezzetli bir meyvedir.”
d) t: “Onur, başarılı bir öğrencidir.”
e) v: “$1-5=-6$ olur.”

ÇÖZÜM

a) “Çift ve asal olan doğal sayı sadece 2 dir.” ifadesi kesin hüküm bildirdiğinden bir önermedir.
b) “Bugün tiyatroya gidelim.” cümlesi bir istek cümlesi olduğundan önerme değildir.
c) “Sakarya, Karadeniz Bölgesi'ne ait bir ilimizdir.” ifadesi kesin hüküm bildirdiğinden önermedir.
ç) Kirazın lezzetli bir meyve olması, kişiden kişiye farklılık gösterebilir. Bu cümle, kesin bir yargı bildirmemektedir. Bu sebeple bu ifade bir önerme değildir.
d) Başarı kriteri belli olmadığından bu ifade, kesin bir hüküm bildirmez. Bu sebeple önerme değildir.
e)“$1-5=-6$ tir.” ifadesi kesin hüküm bildirdiğinden önermedir.

Bir Önermenin Doğruluk Değeri

Doğru ya da yanlış kesin hüküm bildiren ifadeler önerme olarak tanımlandığından bir önermenin iki farklı doğruluk değeri olur. Eğer p önermesi doğru ise D veya 1, yanlış ise Y veya 0 ile gösterilir.

p önermesi doğru ise $p \equiv 1$, yanlış ise $p \equiv 0$ şeklinde yazılır.

Bir p önermesinin doğruluk değeri, tabloda

p
D
Y

veya

p
1
0

biçiminde gösterilir.

Bir önerme için iki farklı durum vardır. Bu durum $2^1=2$ olarak yazılır.

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

p ve q gibi iki önermenin doğruluk değerleri, tablo biçiminde yandaki gibi gösterilebilir.

Birbirinden bağımsız iki önerme için dört farklı durum vardır. Bu durum $2^2=4$ olarak yazılır.

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Birbirinden bağımsız herhangi üç önerme için sekiz farklı durum vardır. Bu durum $2^3 = 8$ olarak yazılır.

$n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere birbirinden bağımsız n tane önermenin 2^n tane doğruluk değeri vardır.

2. ÖRNEK

Birbirinden bağımsız p, q, r, s ve t önermelerinin kaç farklı doğruluk değeri olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

5 tane önerme olduğundan bu önermelerin $2^5 = 32$ farklı doğruluk değeri vardır.

İki Önermenin Denkliği

Doğruluk değerleri aynı olan önermelere denk önermeler denir. p ve q önermelerinin doğruluk değerleri aynı ise bu durum $p \equiv q$ şeklinde gösterilir. Doğruluk değerleri aynı olmayan p ve q önermeleri $p \not\equiv q$ biçiminde gösterilir.

3. ÖRNEK

Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini inceleyiniz. Bu önermelerden denk olanları belirtiniz.

p: “7 asal sayıdır.”

q: “Bir hafta 7 gündür.”

r: “En küçük asal sayı 3 olur.”

ÇÖZÜM

$$\left.\begin{array}{l} \text{p önermesi doğru bir önermedir. } p \equiv 1 \\ \text{q önermesi doğru bir önermedir. } q \equiv 1 \end{array}\right\} p \equiv q$$

r önermesi yanlış bir önermedir. $(r \equiv 0)$ Bu durumda $p \not\equiv r$ ve $q \not\equiv r$ yazılır.

Bir Önermenin Değili (Olumsuzu)

Bir önermenin hükmünün değiştirilmesiyle elde edilen yeni önermeye bu önermenin değili (olumsuzu) denir. p önermesinin değili p' ya da $\sim p$ ile gösterilir.

p önermesi doğru ise değili yanlış, p önermesi yanlış ise değili doğru önerme olur.

p	p'	$(p')'$
1	0	1
0	1	0

1 in değili $\longrightarrow 1' \equiv 0$

0 ın değili $\longrightarrow 0' \equiv 1$ olur.

Bir önermenin değilinin değili kendisidir. $(p')' \equiv p$ olur.

4. ÖRNEK

Aşağıdaki önermelerin değillerini yazınız. Önermelerin ve değillerinin doğruluk değerlerini bulunuz.

a) p: “Tek doğal sayıların pozitif tam sayı kuvvetleri de tektir.”

b) q: “23 sayısı, 2 ile tam bölünür.”

c) r: “Karenin dış açıları toplamı 360° dir.”

ç) s: “Doğrusal olmayan üç noktanın ikişer ikişer birleştirilmesiyle elde edilen şekil üçgendir.”

ÇÖZÜM

a) p: “Tek doğal sayıların pozitif tam sayı kuvvetleri de tektir.” önermesi doğru bir önerme olur. Çünkü iki tek sayı çarpıldığında sonuç yine bir tek sayı olur. Buna göre $p \equiv 1$ olur. Bu önermenin değili:

p': “Tek doğal sayıların pozitif tam sayı kuvvetleri tek değildir.” şeklindedir. p' önermesi yanlış önerme olduğundan $p' \equiv 0$ olur.

b) q: “23 sayısı, 2 ile tam bölünür.” önermesi yanlış bir önermedir. Çünkü $23 = 2 \cdot 11 + 1$ olur. Buna göre $q \equiv 0$ bulunur. Bu önermenin değili:

q': “23 sayısı, 2 ile tam bölünmez.” şeklindedir. q' önermesi doğru önerme olduğundan $q' \equiv 1$ olur.

c) r: “Karenin dış açıları toplamı 360° dir.” önermesi doğru bir önermedir. Çünkü, karenin dış açı ölçülerinin her biri 90° dir. Buna göre $r \equiv 1$ dir. Bu önermenin değili:

r': “Karenin dış açı ölçüleri toplamı 360° değildir.” şeklindedir. r' önermesi yanlış bir önerme olduğundan $r' \equiv 0$ olur.

ç) s: “Doğrusal olmayan üç noktanın ikişer ikişer birleştirilmesiyle elde edilen şekle üçgen denir.” önermesi doğru bir önerme olduğundan $s \equiv 1$ bulunur. Bu önermenin değili:

s': “Doğrusal olmayan üç noktanın ikişer ikişer birleştirilmesiyle elde edilen şekil, üçgen değildir.” şeklindedir. s' önermesi yanlış bir önerme olduğundan $s' \equiv 0$ olur.

5. ÖRNEK

p : “İki tek tam sayının çarpımı tektir. ” önermesinin değilinin değilini yazıp p ile denkliklerini inceleyiniz.

ÇÖZÜM

p: “İki tek tam sayının çarpımı tektir.” önermesi doğru önerme olduğundan $p \equiv 1$ dir. p önermesinin değili:

p': “İki tek tam sayının çarpımı tek değildir.” şeklindedir. Bu önerme yanlış önerme olduğundan $p' \equiv 0$ olur.

p' önermesinin tekrar değili alınırsa

$(p')'$: “İki tek tam sayının çarpımı tektir.” şeklinde olur. Bu önerme, doğru önerme olduğundan

$(p')' \equiv 1$ olur.

$p \equiv 1$ ve $(p')' \equiv 1$ olduğundan $p \equiv (p')'$ elde edilir.

2. Bileşik Önerme

İki veya daha fazla önermenin ve ($\wedge$), veya ($\vee$), ya da ($\veebar$), ise ($\Rightarrow$), ancak ve ancak ($\Leftrightarrow$) bağlaçları ile birleştirilmesiyle elde edilen yeni önermelere bileşik önerme denir.

a) "ve" Bağlacı ile Yapılan Bileşik Önermeler

p: “Mehmet kiraz aldı.”

q: “Mehmet vişne aldı.”

p, q ve p', q' önermeleri, “ve ($\wedge$)” bağlacı ile birleştirilerek bileşik önerme hâlinde yazılmıştır. Bu önermeyi inceleyiniz.

$p \wedge q$: “Mehmet, kiraz ve vişne aldı.”

$p' \wedge q$: “Mehmet, kiraz almadı ve vişne aldı.”

$p \wedge q'$: “Mehmet, kiraz aldı ve vişne almadı.”

$p' \wedge q'$: “Mehmet, kiraz almadı ve vişne almadı.”

“ve ($\wedge$)” bağlacı ile bağlanan bileşik önerme, bileşenlerden her ikisi doğru ise doğru, en az biri yanlış ise yanlıştır. Doğruluk tablosu yanda verilmiştir.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

b) "veya" Bağlacı ile Yapılan Bileşik Önermeler

p: “Nazlı, sarışın bir öğrencidir.”

q: “Nazlı, mavi gözlü bir öğrencidir.”

p, q, p' ve q' önermeleri “veya ($\vee$)” bağlacı ile birleştirilerek bileşik önerme hâlinde yazılmıştır. Bu önermeyi inceleyiniz.

$p \vee q$: “Nazlı, sarışın bir öğrencidir veya mavi gözlü bir öğrencidir.”

$p' \vee q$: “Nazlı, sarışın bir öğrenci değil veya mavi gözlü bir öğrencidir.”

$p \vee q'$: “Nazlı, sarışın bir öğrencidir veya mavi gözlü bir öğrenci değildir.”

$p' \vee q'$: “Nazlı, sarışın bir öğrenci değildir veya mavi gözlü bir öğrenci değildir."

“veya ($\vee$)” bağlacı ile bağlanan bileşik önerme; bileşenlerden en az biri doğru ise doğru, her iki bileşen de yanlış ise yanlıştır. Bu önermenin doğruluk tablosu yanda verilmiştir.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

“ve” ve “veya” Bağlacıyla Yapılan Bileşik Önermelerin Özellikleri

1. Her p önermesi için $p \wedge p \equiv p$ ve $p \vee p \equiv p$ (Tek kuvvet özelliği)

p	p	$p \wedge p \equiv p$
1	1	1
0	0	0

p	p	$p \vee p \equiv p$
1	1	1
0	0	0

2. p ve q önermeleri için $p \wedge q \equiv q \wedge p$ ve $p \vee q \equiv q \vee p$ (Değişme özelliği)

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

3. Her p, q ve r önermeleri için $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ ve $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ (Birleşme özelliği)

p	q	r	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Benzer şekilde $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ denkliğinin doğruluğunu tablo yaparak gösteriniz.

4. Her p, q ve r önermeleri için

a) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (“ve” bağlacının “veya” bağlacı üzerine soldan dağılma özelliği)

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

b) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ ("veya" bağlacının "ve" bağlacı üzerine soldan dağılma özelliği)

Siz de "veya" bağlacının "ve" bağlacı üzerine soldan dağılma özelliği olduğunu tablo yaparak gösteriniz.

5. Her p, q önermesi için $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$ ve $(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$ (De Morgan kuralları)

Bu denkliklerin doğruluk tablosu aşağıda verilmiştir. Bu tabloyu inceleyiniz.

p	q	p'	q'	$p \vee q$	$p \wedge q$	$(p \vee q)'$	$p' \wedge q'$	$(p \wedge q)'$	$p' \vee q'$
1	1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1

p ve q önermeleri için

1. $p \wedge 1 \equiv p,\quad p \wedge 0 \equiv 0,\quad p \vee 1 \equiv 1,\quad p \vee 0 \equiv p$
2. $p \wedge p' \equiv 0,\quad p \vee p' \equiv 1$

1. ÖRNEK

$[(1 \vee 0) \vee (0 \wedge 0)']'$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$[(1 \vee 0) \vee (0 \wedge 0)']' \equiv [1 \vee 0']' \equiv [1 \vee 1]' \equiv [1]' \equiv 0$ olur.

2. ÖRNEK

$(p \wedge q')' \wedge (p' \vee q') \equiv p'$ olduğunu doğruluk tablosu yaparak gösteriniz.

ÇÖZÜM

p	q	p'	q'	$p \wedge q'$	$(p \wedge q')'$	$p' \vee q'$	$(p \wedge q')' \wedge (p' \vee q')$
1	1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1

Doğruluk tablosundaki $(p \wedge q')' \wedge (p' \vee q')$ önermesi ile p' önermesinin doğruluk değerleri aynı olduğundan $(p \wedge q')' \wedge (p' \vee q') \equiv p'$ olur.

3. ÖRNEK

$p \wedge [(p' \vee q)' \vee (p \wedge q)]$ bileşik önermesinin en sade şeklini yazınız.

ÇÖZÜM

$$
\begin{aligned}
p \wedge [(p' \vee q)' \vee (p \wedge q)] &\equiv p \wedge [(p \wedge q') \vee (p \wedge q)] && \text{(De Morgan kuralı)} \\
&\equiv p \wedge [p \wedge (q' \vee q)] && (\wedge \text{ nin } \vee \text{ üzerine dağılma özelliği}) \\
&\equiv p \wedge [p \wedge 1] \\
&\equiv p \wedge p \\
&\equiv p
\end{aligned}
$$

4. ÖRNEK

$(p \wedge q)' \vee r \equiv 0$ olduğuna göre p, q ve r önermelerinin doğruluk değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(p \wedge q)' \vee r \equiv 0$ ise $(p \wedge q)' \equiv 0$ ve $r \equiv 0$ olmalıdır.
$(p \wedge q)' \equiv 0$ ise $p \wedge q \equiv 1$ olur. Buradan $p \equiv 1,\ q \equiv 1$ elde edilir.
O hâlde p, q ve r önermelerinin doğruluk değerleri $p \equiv 1,\ q \equiv 1,\ r \equiv 0$ bulunur.

5. ÖRNEK

$(p' \vee q)' \wedge (r \wedge s')$ bileşik önermesinin $p \equiv 0,\ q \equiv 1,\ r \equiv 0$ ve $s \equiv 1$ için doğruluk değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen doğruluk değerleri bileşik önermede yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}(p' \vee q)' \wedge (r \wedge s') &\equiv (0' \vee 1)' \wedge (0 \wedge 1') \\ &\equiv (1 \vee 1)' \wedge (0 \wedge 0) \\ &\equiv 1' \wedge 0 \\ &\equiv 0 \wedge 0 \\ &\equiv 0 \ \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

6. ÖRNEK

$p \wedge r' \equiv 1$ ve $p' \vee q' \equiv 0$ ise $[p \wedge (q' \vee r)] \vee [(p' \vee q) \wedge r']$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$p \wedge r' \equiv 1$ ise $p \equiv 1$ ve $r' \equiv 1$ olmalıdır. Buradan $r \equiv 0$ olur.

$$\begin{aligned}p' \vee q' \equiv 0 \ \text{ ise } \ 1' \vee q' &\equiv 0 \\ 0 \vee q' &\equiv 0 \\ q' &\equiv 0 \\ q &\equiv 1 \ \text{ olur.}\end{aligned}$$

$p \equiv 1,\ q \equiv 1$ ve $r \equiv 0$ doğruluk değerleri $[p \wedge (q' \vee r)] \vee [(p' \vee q) \wedge r']$ bileşik önermesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}[p \wedge (q' \vee r)] \vee [(p' \vee q) \wedge r'] &\equiv [1 \wedge (1' \vee 0)] \vee [(1' \vee 1) \wedge 0'] \\ &\equiv [1 \wedge (0 \vee 0)] \vee [(0 \vee 1) \wedge 1] \\ &\equiv (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \\ &\equiv 0 \vee 1 \\ &\equiv 1 \ \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

Sıra Sizde

SORU:
$[p \wedge (p' \vee q)]' \wedge [q' \vee (p \wedge q)] \equiv q'$ olduğunu gösteriniz.

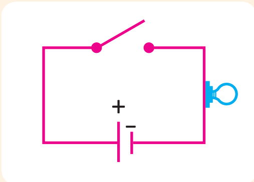
ÇÖZÜM

ve / veya Bağlaçlarının Elektrik Devrelerinde Kullanılışı

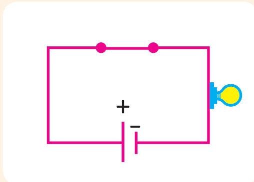
Sembolik mantığın matematik dışında elektrik devrelerinde de kullanım alanı vardır. Elektrik devrelerinde akımın geçmesi 1, geçmemesi 0 ile gösterilirse tüm elektrik devreleri sembolik mantık ile ifade edilebilir.

- Açık anahtar (akım geçirmeyen anahtar): şeklinde gösterilir. p anahtarı açık ise doğruluk değeri $p \equiv 0$ olur.
- Kapalı anahtar (akım geçiren anahtar): şeklinde gösterilir. p anahtarı kapalı ise doğruluk değeri $p \equiv 1$ olur.

Aşağıdaki elektrik devreleri, akım geçiren ve geçirmeyen durumları göstermektedir. İnceleyiniz.



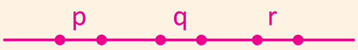
Şekil: 1



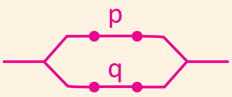
Şekil: 2

Şekil 1: Akım geçmediğinden lamba yanmaz. Şekil 2: Akım geçtiğinden lamba yanar.

Bu durumda seri ve paralel bağlama aşağıdaki gibi gösterilir.

Elektrik devrelerinde seri bağlama 

şeklinde çizilir. $p \wedge q \wedge r$ ile gösterilir.

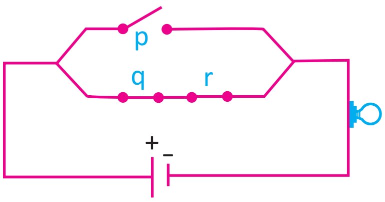
Elektrik devrelerinde paralel bağlama 

şeklinde çizilir. $p \vee q$ ile gösterilir.

Bir elektrik devresine karşılık gelen bileşik önerme yazılırken anahtarların açık ya da kapalı olması dikkate alınmaz. Ancak devre çizilirken anahtarların açık ya da kapalı olması dikkate alınır.

7. ÖRNEK

Aşağıdaki şekilde verilen elektrik devresine karşı gelen bileşik önermeyi yazınız. Bu önermeye göre lambanın yanıp yanmayacağını belirtiniz.



ÇÖZÜM

Şekilde q ve r anahtarları seri, p anahtarı ise bu anahtarlara paralel bağlanmıştır. Bu durumda elektrik devresine karşı gelen bileşik önerme $p \vee (q \wedge r)$ olur.

p anahtarı açık olduğundan akım geçirmez. $p \equiv 0$ olur.

q ve r anahtarları kapalı olduğundan akım geçirir. $q \equiv 1$ ve $r \equiv 1$ olur.

Bulunan doğruluk değerleri bileşik önermede yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
p \vee (q \wedge r) &\equiv 0 \vee (1 \wedge 1) \\
&\equiv 0 \vee 1 \\
&\equiv 1
\end{aligned}
$$
bulunur. Bu durumda devreden akım geçer ve lamba yanar.

8. ÖRNEK

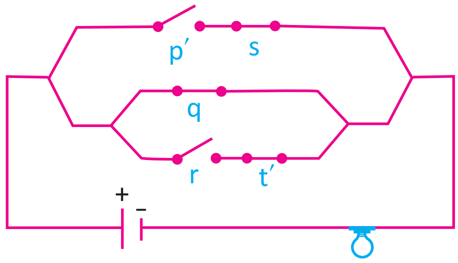
$p \equiv 1,\ q \equiv 1,\ r \equiv 0,\ s \equiv 1,\ t \equiv 0$ olduğuna göre

a) $(p' \wedge s) \vee [q \vee (r \wedge t')]$ bileşik önermesine karşı gelen elektrik devresini çiziniz.

b) Lambanın yanıp yanmayacağını belirtiniz.

ÇÖZÜM

a) $p \equiv 1,\ q \equiv 1,\ r \equiv 0,\ s \equiv 1,\ t \equiv 0$ olmak üzere p, q, r, s, t anahtarları için p, q, s kapalı konumu; r, t açık konumu gösterir. $(p' \wedge s) \vee [q \vee (r \wedge t')]$ bileşik önermesine ait elektrik devresi yanda çizilmiştir.



b) $p \equiv 1,\ q \equiv 1,\ r \equiv 0,\ s \equiv 1,\ t \equiv 0$ değerleri bileşik önermede yerine yazılırsa

$$(p' \wedge s) \vee [q \vee (r \wedge t')] \equiv (0 \wedge 1) \vee [1 \vee (0 \wedge 1)] \equiv 0 \vee (1 \vee 0)$$

$$\equiv 0 \vee 1 \equiv 1$$ olduğundan lamba yanar.

c) "ya da ($\veebar$)" Bağlacı ile Yapılan Bileşik Önermeler

p: "Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ tir."

q: "61, asal sayıdır."

p, q, p' ve q' önermeleri "ya da ($\veebar$)" bağlacı ile birleştirilerek bileşik önerme hâlinde yazılmıştır. Önermeyi inceleyiniz.

$p \veebar q$: "Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ ya da 61 asal sayıdır."

$p' \veebar q$: "Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $x^2 - y^2 \neq (x-y)(x+y)$ ya da 61 asal sayıdır."

$p \veebar q'$: " Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ ya da 61 asal sayı değildir."

$p' \veebar q'$: "Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $x^2 - y^2 \neq (x-y)(x+y)$ ya da 61 asal sayı değildir."

"ya da ($\veebar$)" bağlacı ile bağlanan bileşik önerme; bileşenlerinin doğruluk değerleri aynı ise yanlış, bileşenlerinin doğruluk değerleri farklı ise doğrudur.

p	q	$p \veebar q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

"ya da" Bağlacının Özellikleri

1. p, q önermeleri için

$p \veebar q \equiv q \veebar p$ (Değişme özelliği)

p	q	$p \veebar q$	$q \veebar p$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

2. Her p, q ve r önermesi için

$p \veebar (q \veebar r) \equiv (p \veebar q) \veebar r$ olur. (Birleşme özelliği)

p	q	r	$q \veebar r$	$p \veebar (q \veebar r)$	$p \veebar q$	$(p \veebar q) \veebar r$
1	1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0

3. $(p \veebar q)' \equiv p' \veebar q \equiv p \veebar q'$

4. $p \veebar p \equiv 0, \qquad p \veebar 1 \equiv p', \qquad p \veebar 0 \equiv p, \qquad p \veebar p' \equiv 1$

9. ÖRNEK

$q' \equiv 0$ ve $p' \veebar q \equiv 0$ olduğuna göre $[(p' \wedge q) \veebar (p \vee q')]' \veebar p$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$q' \equiv 0 \Rightarrow q \equiv 1$ olur. $q \equiv 1$ değeri $p' \veebar q \equiv 0$ ifadesinde yerine yazılırsa

$p' \veebar 1 \equiv 0$ ise $p' \equiv 1$ ise $p \equiv 0$ bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}[(p' \wedge q) \veebar (p \vee q')]' \veebar p &\equiv [(0' \wedge 1) \veebar (0 \vee 0)]' \veebar 0 \equiv [(1 \wedge 1) \veebar (0 \vee 0)]' \veebar 0 \\ &\equiv (1 \veebar 0)' \veebar 0 \\ &\equiv 1' \veebar 0 \equiv 0 \veebar 0 \equiv 0 \text{ sonucuna ulaşılır.}\end{aligned}$$

10. ÖRNEK

$(p \veebar p') \wedge (q \veebar q) \wedge (p \veebar q)$ bileşik önermesini en sade biçimde yazınız.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}(p \veebar p') \wedge (q \veebar q) \wedge (p \veebar q) &\equiv 1 \wedge 0 \wedge (p \veebar q) \\ &\equiv 0 \wedge (p \veebar q) \\ &\equiv 0 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

3. Koşullu Önerme ve İki Yönlü Koşullu Önerme

a) Koşullu Önerme

p ve q iki önerme olmak üzere p ve q önermelerinin ise $(\Rightarrow)$ bağlacı ile birleştirilmesiyle elde edilen $p \Rightarrow q$ önermesine koşullu önerme denir. $p \Rightarrow q$ önermesi p ise q şeklinde okunur.

Köyde yaşayan Ahmet ÇELİK "Eğer muhtar seçilirsem köy yolu asfalt yaptırılacaktır." şeklinde bir cümle kuruyor. Kişinin kurduğu bu cümle,

p: "Ahmet ÇELİK muhtar seçilir."

q: "Köy yolu asfalt yaptırılacaktır."

şeklinde iki önermenin birleşimi ile kurulmuş bir bileşik önermedir. Kullanılan bağlaç ise $(\Rightarrow)$ bağlacıdır. Cümle, koşula bağlı olduğundan koşullu önerme olur.

p, q ve p', q' önermeleri, ise $(\Rightarrow)$ bağlacı ile birleştirilerek bileşik önerme hâlinde yazılmıştır. Önermeyi inceleyiniz.

$p \Rightarrow q$: "Eğer muhtar seçilirsem köy yolu asfalt yaptırılacaktır."

$p' \Rightarrow q$: "Eğer muhtar seçilmezsem köy yolu asfalt yaptırılacaktır."

$p \Rightarrow q'$: "Eğer muhtar seçilirsem köy yolu asfalt yaptırılmayacaktır."

$p' \Rightarrow q'$: "Eğer muhtar seçilmezsem köy yolu asfalt yaptırılmayacaktır."

$p \Rightarrow q$ koşullu önermesinde

p: Koşullu önermenin hipotezidir.

q: Koşullu önermenin hükmüdür.

$p \Rightarrow q$ koşullu önermesinin doğruluk değeri 1 ise bu koşullu önermeye gerektirme denir.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

1. ÖRNEK

$p \Rightarrow (q' \vee r) \equiv 0$ olduğuna göre $p \vee (q \veebar r)$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$p \Rightarrow (q' \vee r) \equiv 0$ ise $p \equiv 1$ ve $q' \vee r \equiv 0$

$q' \vee r \equiv 0$ ise $q' \equiv 0$ ve $r \equiv 0$

Buradan $q \equiv 1$ olur.

$$\begin{aligned} p \equiv 1,\ q \equiv 1,\ r \equiv 0 \text{ için } p \vee (q \veebar r) &\equiv 1 \vee (1 \veebar 0) \\ &\equiv 1 \vee 1 \\ &\equiv 1 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Bir Koşullu Önermenin Karşıtı, Tersi, Karşıt Tersi

p ve q önermeleri ile oluşturulan $p \Rightarrow q$ koşullu önermesi verilmiş olsun. Bu durumda

a) $p \Rightarrow q$ önermesinin karşıtı $q \Rightarrow p$,

b) $p \Rightarrow q$ önermesinin tersi $p' \Rightarrow q'$,

c) $p \Rightarrow q$ önermesinin karşıt tersi $q' \Rightarrow p'$

şeklinde tanımlanır.

$p \Rightarrow q$ önermesinin tersi $p' \Rightarrow q'$ ile $p \Rightarrow q$ önermesinin değili $(p \Rightarrow q)'$ aynı olmadığı aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

p	q	p'	q'	$p' \Rightarrow q'$	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q)'$
1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1	0

2. ÖRNEK

"$x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$ dur." koşullu önermesinin karşıtı, tersi ve karşıt tersini yazınız.

ÇÖZÜM

$p \Rightarrow q$: "$x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$ dur." koşullu önermesinde

$p \Rightarrow q$ önermesinin karşıtı $q \Rightarrow p$: "$x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$ bulunur."

$p \Rightarrow q$ önermesinin tersi $p' \Rightarrow q'$: "$x \neq 3 \Rightarrow x^2 \neq 9$ olur."

$p \Rightarrow q$ önermesinin karşıt tersi $q' \Rightarrow p'$: "$x^2 \neq 9 \Rightarrow x \neq 3$ olur."

“ise $(\Rightarrow)$” Bağlacının Özellikleri

p ve q önermeleri için

1. $p \Rightarrow p \equiv 1$

2. $p \Rightarrow 1 \equiv 1, \quad p \Rightarrow 0 \equiv p', \quad 1 \Rightarrow p \equiv p$

$0 \Rightarrow p \equiv 1, \quad p \Rightarrow p' \equiv p', \quad p' \Rightarrow p \equiv p$

3. $p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$

p	q	p'	$p \Rightarrow q$	$p' \vee q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

4. $p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$ olur.

p	q	p'	q'	$p \Rightarrow q$	$q' \Rightarrow p'$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

3. ÖRNEK

“Hava bulutlu ise yağmur yağar.” önermesinin olumsuzunu yazınız.

ÇÖZÜM

p: “Hava bulutludur.”

q: “Yağmur yağar.”

$p \Rightarrow q$: “Hava bulutlu ise yağmur yağar.” önermesinin olumsuzu,

$(p \Rightarrow q)' \equiv (p' \vee q)' \equiv p \wedge q'$ olduğundan

$(p \Rightarrow q)'$: “Hava bulutlu ve yağmur yağmaz.” olur.

4. ÖRNEK

$(p' \Rightarrow q) \Rightarrow p$ önermesine denk olan önermeyi bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}(p' \Rightarrow q) \Rightarrow p \equiv (p \vee q) \Rightarrow p \equiv (p \vee q)' \vee p \equiv (p' \wedge q') \vee p &\equiv (p' \vee p) \wedge (q' \vee p)\\ &\equiv 1 \wedge (q' \vee p)\\ &\equiv q' \vee p \text{ olur.}\end{aligned}$$

5. ÖRNEK

$(p \wedge q) \Rightarrow (r \vee q') \equiv 0$ olduğuna göre $(p \veebar q) \Rightarrow r$ önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(p \wedge q) \Rightarrow (r \vee q') \equiv 0$ ise $(p \wedge q) \equiv 1$ ve $r \vee q' \equiv 0$

$p \wedge q \equiv 1$ ise $p \equiv 1$ ve $q \equiv 1$ olur. $r \vee q' \equiv 0$ ise $r \equiv 0$ ve $q' \equiv 0$, $q \equiv 1$ bulunur.

$$\begin{aligned}p \equiv q \equiv 1 \text{ ve } r \equiv 0 \text{ için } (p \veebar q) \Rightarrow r &\equiv (1 \veebar 1) \Rightarrow 0\\ &\equiv 0 \Rightarrow 0\\ &\equiv 1 \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

6. ÖRNEK

$(p \Rightarrow q')' \Rightarrow (p \Rightarrow p')$ önermesine denk olan önermeyi bulunuz.

ÇÖZÜM

$(p \Rightarrow q')' \Rightarrow (p \Rightarrow p') \equiv (p' \vee q') \vee p'$ $\quad (p \Rightarrow q' \equiv p' \vee q',\ p \Rightarrow p' \equiv p')$

$\equiv (q' \vee p') \vee p'$ (Değişme özelliği)

$\equiv q' \vee (p' \vee p')$ (Birleşme özelliği)

$\equiv q' \vee p'$

b) İki Yönlü Koşullu Önerme

p ve q iki önerme olmak üzere p ve q önermelerinin ancak ve ancak bağlacı ile birleştirilmesiyle elde edilen $p \Leftrightarrow q$ önermesine iki yönlü koşullu önerme denir. $p \Leftrightarrow q$ önermesi "p ancak ve ancak q" şeklinde okunur.

p: "ABC üçgeni eşkenar bir üçgendir."

q: "Üçgenin her bir iç açısı 60° dir."

p, q ve p', q' önermeleri "ancak ve ancak ($\Leftrightarrow$)" bağlacı ile birleştirilerek bileşik önerme hâlinde yazılmıştır. Önermeyi inceleyiniz.

$p \Leftrightarrow q$: "ABC üçgeni eşkenar üçgendir ancak ve ancak üçgenin her bir iç açısı 60° dir."

$p' \Leftrightarrow q$: "ABC üçgeni eşkenar üçgen değildir ancak ve ancak üçgenin her bir iç açısı 60° dir."

$p \Leftrightarrow q'$: "ABC üçgeni eşkenar üçgendir ancak ve ancak üçgenin her bir iç açısı 60° değildir."

$p' \Leftrightarrow q'$: "ABC üçgeni eşkenar üçgen değildir ancak ve ancak üçgenin her bir iç açısı 60° değildir."

$p \Leftrightarrow q$ iki yönlü koşullu önermesi p ve q nun doğruluk değerleri aynı iken doğru, farklı iken yanlıştır.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

7. ÖRNEK

$(p' \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r') \equiv 0$ olduğuna göre $(p \Leftrightarrow q') \wedge (q \Rightarrow r)$ önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(p' \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r') \equiv 0$ ise $p' \Rightarrow q \equiv 1$ ve $p \vee r' \equiv 0$

$p \vee r' \equiv 0$ ise $p \equiv 0$ ve $r' \equiv 0$, $r \equiv 1$ olur.

$p \equiv 0$ bulunduğunda

$p' \Rightarrow q \equiv 1$ ise $0' \Rightarrow q \equiv 1$

$1 \Rightarrow q \equiv 1$, $q \equiv 1$ bulunur.

$p \equiv 0$, $q \equiv 1$ ve $r \equiv 1$ için

$(p \Leftrightarrow q') \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (0 \Leftrightarrow 1') \wedge (1 \Rightarrow 1)$

$\equiv (0 \Leftrightarrow 0) \wedge 1$

$\equiv 1 \wedge 1$

$\equiv 1$ bulunur.

“ancak ve ancak $(\Leftrightarrow)$" Bağlacının Özellikleri

p ve q önermeleri için

1. $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

2. $p \Leftrightarrow q \equiv p' \Leftrightarrow q'$

3. $p \Leftrightarrow p \equiv 1$, $p \Leftrightarrow p' \equiv 0$, $p \Leftrightarrow 1 \equiv p$, $p \Leftrightarrow 0 \equiv p'$

4. $(p \Leftrightarrow q)' \equiv p' \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow q'$

5. $(p \Leftrightarrow q)' \equiv p \veebar q$

8. ÖRNEK

$[(p \Rightarrow q') \wedge p]' \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ önermesinin en sade şeklini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}
[(p \Rightarrow q') \wedge p]' \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) &\equiv [(p' \vee q') \wedge p]' \Leftrightarrow (p' \vee q) \\
&\equiv [(p' \wedge p) \vee (q' \wedge p)]' \Leftrightarrow (p' \vee q) \\
&\equiv [0 \vee (q' \wedge p)]' \Leftrightarrow (p' \vee q) \\
&\equiv (q' \wedge p)' \Leftrightarrow (p' \vee q) \\
&\equiv (p' \vee q) \Leftrightarrow (p' \vee q) \\
&\equiv 1 \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

9. ÖRNEK

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p$ önermesinin en sade şeklini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}
(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p &\equiv [(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \wedge [p \Rightarrow (p \Rightarrow q)] \\
&\equiv [(p' \vee q) \Rightarrow p] \wedge [p \Rightarrow (p' \vee q)] \\
&\equiv [(p' \vee q)' \vee p] \wedge [p' \vee (p' \vee q)] \\
&\equiv [(p \wedge q') \vee p] \wedge [(p' \vee p') \vee q], \qquad ((p \wedge q') \vee p \equiv p) \\
&\equiv p \wedge (p' \vee q) \\
&\equiv (p \wedge p') \vee (p \wedge q) \\
&\equiv 0 \vee (p \wedge q) \\
&\equiv p \wedge q \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

4. Sözel ya da Sembolik Mantık Dilinde Verilen Bileşik Önermelerin Birbirine Dönüştürülmesi

Sözel olarak verilen bir önerme; sembolik mantık dilinde yazılırken sözel ifadede bulunan matematiksel sembol, kavram ve bağlaçlar belirlenir. Daha sonra sözel olarak verilen önerme, sembolik mantık dilinde yazılır.

Önerme, sembolik mantık dilinde verilmişse kullanılan sembol, bağlaç ve diğer matematiksel kavramlar sözel ifadeye dönüştürülerek önermenin sözel ifadesi yazılır.

1. ÖRNEK

Aşağıda verilen önermeleri sözel ya da sembolik mantık dilinde yazınız.

a) “Bütün tam sayılar aynı zamanda rasyonel sayıdır.”

b) “Bir gerçek sayının 5 katının 3 eksiği 7 ise bu sayı 2 dir.”

c) “$(x^2 = 25) \Rightarrow (x = 5 \vee x = -5)$ tir.”

ÇÖZÜM

p ve q önermeleri sözel olarak yazılmış birer önerme iken r önermesi sembolik mantık dilinde yazılmış bir önermedir.

a) p(x) : “$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$” şeklinde yazılır.

b) q önermesi, sembolik mantık dilinde “Bir gerçek sayı (x), gerçek sayının 5 katının 3 eksiği $(5x - 3)$, eşitlik $(=)$” sembol ve kavramları kullanılarak q(x) : “$(x \in \mathbb{R}, 5x - 3 = 7) \Rightarrow (x = 2)$” şeklinde yazılır.

c) r(x): “Bir x gerçek sayısının karesi 25 ise bu sayılar -5 veya 5 tir.”

5. Totoloji ve Çelişki

Bir bileşik önerme, bileşenlerinin bütün doğruluk değerleri için doğru (1) oluyorsa totoloji, yanlış (0) oluyorsa çelişki olarak tanımlanır.

1. ÖRNEK

$p \vee p'$ ve $p \wedge p'$ önermelerinin doğruluk değerlerini tablo yaparak inceleyiniz.

ÇÖZÜM

p	p'	$p \vee p'$
1	0	1
0	1	1

Totoloji

p	p'	$p \wedge p'$
1	0	0
0	1	0

Çelişki

$p \vee p'$ bileşik önermesi, p nin tüm doğruluk değerleri için doğru (1) olduğundan bir totolojidir.

$p \wedge p'$ bileşik önermesi, p nin tüm doğruluk değerleri için yanlış (0) olduğundan bir çelişkidir.

2. ÖRNEK

$[(p \vee q') \Rightarrow (p' \vee q)] \Leftrightarrow (p' \vee q)$ bileşik önermesinin totoloji olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

$$
\begin{aligned}
[(p \vee q') \Rightarrow (p' \vee q)] \Leftrightarrow (p' \vee q) &\equiv [(p \vee q')' \vee (p' \vee q)] \Leftrightarrow (p' \vee q) \\
&\equiv [(p' \wedge q) \vee (p' \vee q)] \Leftrightarrow (p' \vee q) \\
&\equiv \{[(p' \wedge q) \vee p'] \vee q\} \Leftrightarrow (p' \vee q) \quad (p' \equiv p' \wedge 1) \\
&\equiv \{[(p' \wedge q) \vee (p' \wedge 1)] \vee q\} \Leftrightarrow (p' \vee q) \\
&\equiv \{[p' \wedge (q \vee 1)] \vee q\} \Leftrightarrow (p' \vee q) \\
&\equiv \{[p' \wedge 1] \vee q\} \Leftrightarrow (p' \vee q) \\
&\equiv (p' \vee q) \Leftrightarrow (p' \vee q) \\
&\equiv 1
\end{aligned}
$$

Bileşik önerme, p ve q önermelerinin tüm doğruluk değerleri için doğru olduğundan totolojidir.

3. ÖRNEK

$[p \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow 0)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \vee p]$ bileşik önermesinin çelişki olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

$$
\begin{aligned}
[p \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow 0)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \vee p] \equiv (p \Leftrightarrow p') \Leftrightarrow [(p' \vee q) \vee p] \equiv 0 \Leftrightarrow [(p' \vee p) \vee q] &\equiv 0 \Leftrightarrow (1 \vee q) \\
&\equiv 0 \Leftrightarrow 1 \\
&\equiv 0 \text{ olduğundan çelişkidir.}
\end{aligned}
$$

4. ÖRNEK

$[(p \Rightarrow q') \Rightarrow (p \wedge q')] \Rightarrow [(q' \wedge p) \Rightarrow p]$ bileşik önermesinin totoloji olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

$$
\begin{aligned}
[(p \Rightarrow q') \Rightarrow (p \wedge q')] \Rightarrow [(q' \wedge p) \Rightarrow p] &\equiv [(p' \vee q')' \vee (p \wedge q')] \Rightarrow [(q' \wedge p)' \vee p] \\
&\equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge q')] \Rightarrow [q \vee p' \vee p] \\
&\equiv [p \wedge (q \vee q')] \Rightarrow [q \vee (p' \vee p)] \\
&\equiv (p \wedge 1) \Rightarrow (q \vee 1) \equiv p \Rightarrow 1 \equiv 1 \text{ olduğundan totolojidir.}
\end{aligned}
$$

Sıra Sizde

SORU:

$[(p \wedge q)' \Rightarrow (p \Rightarrow q)] \vee p$ bileşik önermesini en sade şekilde yazınız.

ÇÖZÜM

ALIŞTIRMALAR-1

1. Aşağıdaki cümlelerden önerme olanların doğruluk değerlerini karşılarındaki sütunlara yazınız.

	Önerme	Doğruluk Değeri
a) Ordu-Giresun Havaalanı, denize dolgu yapılarak inşa edilmiştir.		
b) En büyük negatif tam sayı -2 dir.		
c) Trafik kurallarına uyunuz.		
ç) 3 katının 4 eksiği 17 olan doğal sayı -7 dir.		
d) Hangi spor dalı ile ilgileniyorsun?		
e) Negatif tam sayıların tek kuvvetleri negatiftir.		

2. Aşağıda verilen önermelerden denk olanların arasına "$\equiv$" sembolünü, denk olmayanların arasına "$\not\equiv$" sembolünü yazınız.

p: "Tümler iki açının ölçüleri toplamı 90° dir."

q: "Doğrusal olan üç nokta bir üçgen belirtir."

r: "$3x+4=-8$ ise $x=-4$ olur."

s: "Doğal sayılar kümesi, tam sayılar kümesini kapsar."

p...q	q...r
q...s	s...r
p...r	p...s

3. Aşağıda verilen önermelerin her birinin değilini (olumsuzunu) yazınız.

Önerme	Önermenin Değili
p: "$5-3=2$"	p':
q: "316 sayısı, 5 ile bölünmez."	q':
r: "$2^4=4^2$"	r':
s: "$\sqrt{16}-3\sqrt{4}=2$"	s':

4. $(p'\vee q)'\wedge r'\equiv 1$ olduğuna göre p, q ve r önermelerinin doğruluk değerlerini bulunuz.

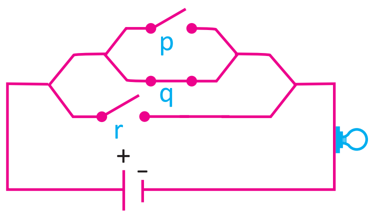
5. $p'\vee q\equiv 0$ ve $q\vee r'\equiv 1$ olduğuna göre $[p\vee(q'\wedge r)]\vee[(p\vee q)'\wedge r']$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

6. $(p'\wedge q)\Rightarrow(p\vee r')\equiv 0$ olduğuna göre $p\Rightarrow(q'\Rightarrow r)$ önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

7. $(r' \wedge p) \vee [p \wedge (r \vee q)]$ bileşik önermesinin en sade şeklini bulunuz.

8. $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ olduğunu doğruluk değerleri tablosu yaparak gösteriniz.

9. Aşağıdaki şekilde elektrik devresine karşılık gelen bileşik önermeyi yazarak ampulün yanma durumunu belirtiniz.



10. Birbirinden bağımsız $3n-1$ tane önermeden 2 tanesinin doğruluk değeri bilinmektedir. Bu önermelerin doğruluk tablosunda 16^{15} tane farklı durum var ise n nin kaç olduğunu bulunuz.

11. a) "Bir hayvan tavuksa 2 ayaklıdır." Koşullu önermesinin karşıtı, tersi ve karşıt tersini yazınız.

b) "$(x^3=-1) \Rightarrow (x=-1)$" koşullu önermesinin karşıt tersini yazınız.

12. $q' \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ bileşik önermesinin doğruluk değerini, doğruluk değerleri tablosu yaparak bulunuz.

13. a) $(p' \vee q') \wedge (p \wedge q)$ bileşik önermesinin çelişki olduğunu tablo yapmadan gösteriniz.

b) $[(p \Rightarrow q') \Rightarrow p'] \vee q'$ bileşik önermesinin totoloji olduğunu tablo yapmadan gösteriniz.

14. $p: |x| = |y|$ $\qquad$ $q: x+y=0$

$r: x^2 = y^2$ $\qquad$ $s: x \cdot y \leq 0$

Yukarıda verilenlere göre aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a) $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$

b) $p \Leftrightarrow r$

c) $s \Rightarrow (p \vee q')$

ç) $(q' \wedge r) \Rightarrow s'$

9.1.2. AÇIK ÖNERMELER VE İSPAT YÖNTEMLERİ

1. Her (∀) ve Bazı (∃) Niceleyicileri

Günlük konuşma dilinde ve matematikte "her, bütün, hemen hemen hepsi, bazı, en az bir, hiçbiri" gibi sözcük ya da sözcük grupları kullanılır. Örneğin:

"Her tek sayının karesi tektir."

"Her gün ders çalıştı."

"Bazı doğal sayılar 3 ile tam bölünür."

"15 Temmuz Şehitleri konulu şiir yarışmasında her sınıftan en az bir öğrenci ödül aldı."

cümleleri incelendiğinde

"Her" sözcüğü bütün, hepsi, tamamı anlamına gelir. Her sözcüğü " $\forall$ " sembolü ile gösterilir.

"Bazı" sözcüğü ile "en az bir" sözcüğü aynı anlama gelmektedir. "Bazı" sözcüğü "$\exists$" sembolü ile gösterilir.

"Her" sözcüğü evrensel niceleyici, "bazı" sözcüğü varlıksal niceleyici olarak isimlendirilir.

2. Açık Önerme

p : "Çift olan asal sayı yalnız 2 dir."

q(x) : "$x \in \mathbb{Z},\ 3x + 9 = 0$"

p önermesinde değişken bulunmazken q(x) önermesinde x değişkeni bulunmaktadır. q(x), x in bazı değerleri için sağlanırken bazı değeri için sağlanmaz.

İçinde en az bir değişken bulunduran ve bu değişkenlere verilen değerler sonucunda kesin olarak doğru ya da yanlış yargı bildiren ifadelere açık önerme denir. Açık önermeyi sağlayan değerler kümesine, açık önermenin doğruluk kümesi (çözüm kümesi) denir.

Örneğin " ....., Ege Bölgesi'ndedir." ifadesi, içinde bilinmeyen bulundurduğu için bir açık önermedir.

Boş bırakılan yere Kütahya yazılırsa "Kütahya, Ege Bölgesi'ndedir." önermesi doğru bir önerme olur. Eğer Bursa yazılırsa "Bursa, Ege Bölgesi'ndedir." önermesi yanlış bir önerme olur.

Denklem ve eşitsizlikler, değişken içerdiğinden açık önerme olarak değerlendirilir

A kümesinde tanımlı p önermesi "her" ve "bazı" sözcükleri kullanılarak "$\forall x \in A, p(x)$" ya da "$\exists x \in A, p(x)$" şeklinde yazılabilir.

1. ÖRNEK

p(x): "$x^2 < 9, x \in \mathbb{Z}$" açık önermesinin doğruluk kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2 < 9,\ x \in \mathbb{Z}$

$|x| < 3,\ x \in \mathbb{Z}$

$-3 < x < 3,\ x \in \mathbb{Z}$

p(x) önermesinde x yerine $-2, -1, 0, 1, 2$ yazılırsa elde edilen önermelerin doğruluk değeri 1 olur. Bunun dışındaki değerlerde önerme yanlış olur. Öyleyse bu durumda p(x) açık önermesinin doğruluk kümesi $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ bulunur.

2. ÖRNEK

Aşağıda sözel olarak verilen önermeleri, sembolik mantık diliyle yazarak önermelerin doğruluk değerlerini inceleyiniz.

a) p: “Her x tam sayısı için $x^2 \geq 0$ olur.”

b) q: “Bütün tam sayılar aynı zamanda birer doğal sayıdır.”

c) r: “En az bir x doğal sayısı için $x^3 - 1 = 0$ olur.”

ç) s: “Bazı n doğal sayıları için $n^2 = 5$ olur.”

d) t: “3 katının 10 eksiği, 5 ten küçük olan en az bir doğal sayı vardır.”

ÇÖZÜM

a) p: “Her x tam sayısı için $x^2 \geq 0$ tir.” önermesi sembolik mantık diliyle p(x): “$\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 \geq 0$” şeklinde yazılır. Önerme, her x tam sayısı için doğru olduğundan doğruluk değeri 1 dir.

b) q: “Bütün tam sayılar aynı zamanda doğal sayıdır.” önermesi sembolik mantık diliyle q(n):“$\forall n \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$” şeklinde yazılır. Bu önerme, bütün tam sayılar için doğru olmadığından yanlış bir önermedir. Örneğin $-2 \in \mathbb{Z}$ ve $-2 \notin \mathbb{N}$ olur.

c) r: “En az bir x doğal sayısı için $x^3 - 1 = 0$ tir.” önermesi sembolik mantık diliyle r(x): “$\exists x \in \mathbb{N}, x^3 - 1 = 0$” şeklinde yazılır. Önerme bazı doğal sayılar için sağlandığından doğru bir önermedir. $1 \in \mathbb{N}$ için $1^3 - 1 = 0$ olduğundan en az bir doğal sayı için $x^3 - 1 = 0$ olur.

ç) s: “Bazı n doğal sayıları için $n^2 = 5$ tir.” önermesi sembolik mantık diliyle s(x): “$\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 = 5$” şeklinde yazılır. Bu önerme hiçbir doğal sayı için sağlanamadığından yanlış bir önermedir.

d) t: “3 katının 10 eksiği, 5 ten küçük olan en az bir doğal sayı vardır.” önermesi sembolik mantık diliyle t(x): “$\exists x \in \mathbb{N},\ 3x - 10 < 5$ tür.” şeklinde yazılır. Bu önerme bazı doğal sayılar için sağlandığından doğru bir önermedir. Örneğin $x = 0$ için $3.0 - 10 = -10 < 5$ olup sağlanır.

3. ÖRNEK

Aşağıda sembolik mantık diliyle verilen önermeleri sözel olarak yazınız.

a) p(x): “$\exists x \in \mathbb{R},\ 2x - 3 = 0$”

b) q(x): “$\forall x \in \mathbb{N},\ x^2 < 7$”

c) r(x): “$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$”

ÇÖZÜM

p, q ve r önermelerinin sözel olarak yazılışı,

a) p(x): “$\exists x \in \mathbb{R},\ 2x - 3 = 0$” önermesi için p: “Bazı gerçek sayıların iki katının üç eksiği sıfırdır.”

b) q(x): “$\forall x \in \mathbb{N},\ x^2 < 7$” önermesi için q: “Her doğal sayının karesi 7 den küçüktür”

c) r(x):“$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$” önermesi için r: “Her gerçek sayının karesinin bir eksiği, bu gerçek sayının bir eksiği ile bir fazlasının çarpımına eşittir.”

Her (∀) ve Bazı (∃) Niceleyicilerinin Değili (Olumsuzu)

p(x), x değişkenine bağlı bir önerme olsun. $p'(x)$, p önermesinin değili olmak üzere

a)“ $\exists x, p(x)$ tir.” önermesinin değili “ $\forall x, p'(x)$ tir.”

b)“ $\forall x, p(x)$ tir.” önermesinin değili “ $\exists x, p'(x)$ tir.”

şeklinde tanımlanır. Bu durum,

$[\exists x, p(x)]' \equiv \forall x, p'(x)$ ve $[\forall x, p(x)]' \equiv \exists x, p'(x)$ şeklinde de yazılır.

Aşağıda bazı sembol ve niceleyicilerin değili tablo hâlinde verilmiştir.

Sembol	$\exists$	$\forall$	$\vee$	$\wedge$	$<$	$\leq$	$>$	$\geq$	$=$	$\neq$
Değili	$\forall$	$\exists$	$\wedge$	$\vee$	$\geq$	$>$	$\leq$	$<$	$\neq$	$=$

4. ÖRNEK

Aşağıda sembolik mantık diliyle verilen önermelerin değillerini yazınız.

a) p(x): “ $\exists x \in \mathbb{Z}, 3x - 6 = 0$ olur.”

b) q(n): “ $\forall n \in \mathbb{N}, 2n$ çift doğal sayıdır.”

ÇÖZÜM

a) p(x): “ $\exists x \in \mathbb{Z}, 3x - 6 = 0$ ” ise

$p'(x)$: “ $\forall x \in \mathbb{Z},\ 3x - 6 \neq 0$ olur.”

b) q(n): “ $\forall n \in \mathbb{N}, 2n$ çift doğal sayıdır.” ise

$q'(n)$: “ $\exists n \in \mathbb{N},\ 2n$ çift doğal sayı değildir.”

5. ÖRNEK

$(\exists x \in \mathbb{N}, 4x - 12 = 0) \vee (\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 \geq 0)$ bileşik önermesinin değilini bulunuz.

ÇÖZÜM

p ve q önermeleri için $(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$ tir. (De Morgan kuralı)

p(x):“ $\exists x \in \mathbb{N}, 4x - 12 = 0$ ” ve q(x): “ $\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 \geq 0$ ” alınırsa

$$[(\exists x \in \mathbb{N}, 4x - 12 = 0) \vee (\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 \geq 0)]' \equiv (\exists x \in \mathbb{N}, 4x - 12 = 0)' \wedge (\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 \geq 0)'$$
$$\equiv (\forall x \in \mathbb{N}, 4x - 12 \neq 0) \wedge (\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 < 0) \text{ olur.}$$

6. ÖRNEK

$(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 < 0) \Rightarrow (\exists x, y \in \mathbb{Z}, 2x - 3y = 0)$ bileşik önermesinin değilini bulunuz.

ÇÖZÜM

p ve q önermeleri için $(p \Rightarrow q)' \equiv (p' \vee q)' \equiv p \wedge q'$ olduğundan

$$[(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 < 0) \Rightarrow (\exists x, y \in \mathbb{Z}, 2x - 3y = 0)]'$$
$$\equiv (\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 < 0) \wedge (\forall x, y \in \mathbb{Z}, 2x - 3y \neq 0) \text{ olur.}$$

3. Tanım, Aksiyom, Teorem ve İspat Kavramları

İnsanlar günlük hayatlarında, sosyal ve kültürel ilişkilerinde farklı cümleler kurarak iletişimini gerçekleştirir. Bu iletişimin amacına ulaşması, kullanılan cümleler kadar seçilen kelimelerle de yakından ilişkilidir. Bazen satırlar ya da paragraflar alabilen anlatımlar, uygun birkaç cümle ile daha kısa ve öz şekilde aktarılabilir. Örneğin avukatlar uzun ve karmaşık sorunları, mesleki kelime ve cümlelerle daha kısa ve öz olarak anlatabilirler.

Bilim dallarının günlük konuşma dilinden farklı, kendine özgü terimleri vardır. Bu terimler, bir bilim dalına özgü sözcük ya da sözcük gruplarıdır. Örneğin roman, hikâye, sıfat, dörtlük vb. terimler edebî terimlerdir. Denklem, eşitsizlik, rakam, açı, üçgen vb. terimler ise matematiksel terimlerdir.

Matematikte bir kavram ve özellik ifade edilirken belli terimler kullanılır. Bu terimler iki grupta toplanır:

1) Tanımsız terimler

2) Tanımlı terimler

Tanımsız Terimler: Başka bir terim ya da tanıma ihtiyaç duyulmadan anlaşılabilen terimlerdir. Örneğin nokta, doğru, düzlem tanımsız terimlerdir.

Tanımlı Terimler: Kendisinden önce tanımlanan terimler, tanımsız terim ve başkaca kavramlar kullanılarak tanımlanmaya ihtiyaç duyulan terimlerdir. Çünkü denklem "İçinde değişken bulunan ve değişkene verilen bazı değerler için sağlanan eşitliktir." şeklinde tanımlanır. Dikkat edilirse denklem tanımı yapılırken "değişken, eşitlik" gibi farklı terimler de kullanılmıştır.

Tanım: Bir kavram ya da terimi, tanımlı tanımsız terimler kullanmak suretiyle özelliklerini belirterek açıklamaya tanım (tanımlama) adı verilir. Üçgen "Doğrusal olmayan üç noktanın ikişer ikişer birleştirilmesiyle elde edilen geometrik bir şekildir." şeklinde tanımlanır. Bu tanımda tanımsız terimler (nokta, doğru) kullanıldığına dikkat ediniz.

Aksiyom: İspata gerek duyulmaksızın doğruluğu kabul edilen önermelere aksiyom denir. Örneğin

"İki noktadan bir doğru geçer." önermesi bir aksiyomdur.

Teorem: Doğruluğu ispatsız, kabul görmeyen önermelere teorem denir. Örneğin

"Bir üçgenin dış açılarının ölçüleri toplamı 360° dir." önermesi doğrudan kabul edilebilecek bir önerme değildir. Belli terim, kavram ve tanımlamalar kullanılarak ispatlanma zorunluluğu vardır.

p ve q iki önerme olmak üzere

p önermesi doğru iken $p \Rightarrow q$ koşullu önermesi doğru ise $p \Rightarrow q$ önermesi bir teoremdir.

$p \Rightarrow q$ teoreminde

p: Teoremin hipotezi (varsayım),

q: Teoremin hükmü (yargı) dür.

"Akıllı insan, düşündüğü her şeyi söylemez
fakat söylediği her şeyi düşünür."
(Aristoteles)

1. ÖRNEK

"ABC üçgen ise iç açılarının ölçüleri toplamı 180° dir." teoreminin hipotez ve hükmünü yazınız.

ÇÖZÜM

Hipotez: "ABC üçgendir."
Hüküm: "ABC üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° dir."

ALIŞTIRMALAR-2

1. Aşağıda verilen önermeleri, sembolik mantık diliyle ifade ederek önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

a) p: "Bazı x tam sayıları için $3x-7=11$ olur."

b) q: "Bütün x tam sayıları için $x^2=36$ olur."

c) r: "Her rasyonel sayı kesirli yazılamaz."

2. Aşağıda sembolik mantık diliyle verilen önermeleri sözel olarak ifade ediniz.

Sembolik İfade	Sözel İfade
p(x): "$\exists x \in \mathbb{Q}, x<4 \Rightarrow x^2>16$"	
q(x): "$\forall x \in \mathbb{Z}, (x-2)^2 \geq 0$"	
r(x): "$\exists x \in \mathbb{Z}, x^2<8 \Rightarrow x-1>0$"	
s(x): "$\forall x \in \mathbb{Q}, 2^{-x}>0$"	

3. Aşağıdaki önermelerin değillerini yanlarındaki boşluğa yazınız.

Önerme	Değili
p(x): "$\exists x \in \mathbb{N}, x-1 \geq 0$"	
q(x): "$(\exists x \in \mathbb{Z}, 4x+3=-5) \Rightarrow (x=-2)$"	
r(x): "$(\exists x \in \mathbb{Q}, x^3<0) \wedge (\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 \geq 0)$"	
s(x): "$(\forall x \in \mathbb{N}, x \geq 0) \vee (\exists x \in \mathbb{N}, 2-x<0)$"	

4. Aşağıdaki açık önermelerin doğruluk kümelerini bulunuz.

a) p(x): "$2x+3<11, x \in \mathbb{N}$"

b) q(x): "$x^2-1=0, x \in \mathbb{Z}^-$"

c) r(x,y): "$x^2+y^2=1, x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$"

5.
I. $p: \forall x \in \mathbb{Z}, x^2-4 \geq 0$
II. $q: \exists x \in \mathbb{R}, x^2-1<0$
III. $r: \forall x \in \mathbb{Z}, x^2+x$ çift sayıdır

önermeleri veriliyor.

Buna göre aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

I. $q' \Leftrightarrow r$
II. $r \veebar p$
III. $(q \Rightarrow r')'$

6. Aşağıdaki önermelerin hipotezini ve hükmünü yazınız.

a) "$5x-7=18$ ise $x-1=4$ olur."

b) "ABCD dörtgeni bir kare ise her bir açısının ölçüsü 90° dir."

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A) Aşağıdaki 1-4. cümlelerde boş bırakılan yerlere uygun sözcük ya da değerleri yazınız.

1. n farklı önermenin .... tane farklı durumu vardır.

2. Bir önerme doğru ise .... yanlıştır.

3. $p \Rightarrow q'$ önermesinin değili .... olur.

4. $p(x):(x-2)^2=9,\ x \in \mathbb{Z}$ açık önermesinin doğruluk kümesi .... olur.

B) Aşağıda 5. soruda numaralar ile verilen ifadeleri, harf ile verilen ifadelerle eşleştiriniz.

5.

$(x^2=1) \Rightarrow (x=1$ veya $x=-1)$ koşullu önermesinin tersi	1.	a)	1
$(p \Rightarrow q) \vee p \equiv$	2.	b)	0
$(p \Rightarrow q) \wedge r \equiv 0$ olduğuna göre $(p \vee r) \Leftrightarrow q$ önermesinin doğruluk değeri	3.	c)	yanar.
Bir elektirik devresine karşı gelen bileşik önerme $p \wedge [q \vee r \vee (t \wedge s)]$ dir. Elektirik devresinde p, t, s anahtarları kapalı; q, r anahtarları açık olduğuna göre lamba	4.	ç)	yanmaz.
		d)	$(x^2=1) \vee (x \neq 1 \vee x \neq -1)$
		e)	$(x^2 \neq 1) \Rightarrow (x \neq 1 \wedge x \neq -1)$

C) Aşağıda 6-9. açık uçlu soruların cevaplarını boş bırakılan yerlere yazınız.

6. $p \Rightarrow (p \wedge p')$ bileşik önermesinin en sade şeklini bulunuz.

7. $p' \Rightarrow q \equiv 1$ ve $q \vee r \equiv 0$ olduğuna göre sırasıyla p, q ve r önermelerinin doğruluk değerlerini sırasıyla bulunuz.

8. $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p')$ bileşik önermesinin en sade şeklini bulunuz.

9. $[(0 \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Rightarrow p')] \vee p$ önermesinin en sade şeklini bulunuz.

Ç) Aşağıda 10-25. çoktan seçmeli soruları okuyunuz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

10. “20 sayısı, 6 ile bölünemez.” önermesinin değili aşağıdakilerden hangisidir?

A) 20 sayısı, 6 ile bölünür.
B) 20 sayısı, 6 ya kalanlı bölünür.
C) 6 sayısı, 20 yi bölmez.
D) 20 sayısı, 5 ile bölünür.
E) 20 sayısı, 6 nın katı değildir.

11. Aşağıdaki terimlerden kaç tanesi tanımlı terimdir?

I. Nokta
II. Doğru
III. Açı
IV. Uzay
V. Küme

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

12. $p \equiv 0,\ q \equiv 1,\ r \equiv 1$ olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $p' \wedge (q \Rightarrow r) \equiv 1$
B) $p \wedge (q \vee r) \equiv 0$
C) $p \Rightarrow (q' \Rightarrow r) \equiv 1$
D) $p \veebar (q \Rightarrow r') \equiv 0$
E) $(p' \Rightarrow q) \vee r' \equiv 0$

13. $(p \Leftrightarrow q)'$ önermesi, aşağıdaki önermelerden hangisine denk <u>değildir</u>?

A) $(p' \veebar q)'$
B) $p \Leftrightarrow q'$
C) $p \veebar q$
D) $(p \Rightarrow q) \wedge q'$
E) $(p \wedge q') \vee (q \wedge p')$

14. Aşağıdakilerden hangisi önermedir?

A) Kapıyı kapat!
B) İki doğal sayı alıp toplayınız.
C) 12 sayısı, 5 ile bölünür mü?
D) En küçük asal sayı 3 tür.
E) Günaydın!

15. Aşağıdakilerden hangisi $(p' \wedge q) \vee q'$ bileşik önermesinin değilidir?

A) $(p \vee q') \vee q$
B) $(p \wedge q') \wedge q$
C) $(p \vee q') \wedge q$
D) $(p' \vee q) \vee q'$
E) $(p' \wedge q) \vee q$

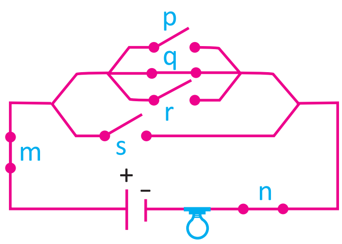
16. $(p \Rightarrow q) \vee (r' \Rightarrow q) \equiv 0$ olduğuna göre aşağıdakilerden hangisinin doğruluk değeri 1 dir?

A) $p' \wedge r$
B) $(p \Rightarrow q') \Leftrightarrow r$
C) $(p \vee q) \wedge r$
D) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r$
E) $(p \vee r) \wedge (p \Rightarrow q)$

17. Aşağıdaki önermelerden hangisi totolojidir?

A) $p \Leftrightarrow p'$ B) $p \veebar p'$ C) $p \wedge 0$
D) $1 \Rightarrow p$ E) $p \Rightarrow p'$

18.



Yukarıda verilen elektrik devresine karşı gelen bileşik önerme aşağıdakilerden hangisidir?

A) $m \wedge [(p \vee r \vee s) \vee q] \wedge n$
B) $m \wedge [(p' \wedge q \wedge r') \vee s'] \wedge n$
C) $m \vee [(p' \vee q \vee r') \wedge s'] \wedge n$
D) $m \vee [(p' \vee q \vee r') \vee s'] \vee n$
E) $m \wedge [(p' \vee q \vee r) \wedge s'] \wedge n$

19. $(p' \Rightarrow q) \Rightarrow r$ önermesinin karşıt tersi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $r \Rightarrow (p' \Rightarrow q)'$
B) $(p' \Rightarrow q)' \Rightarrow r'$
C) $r \vee (p \wedge q')$
D) $r \vee (p' \wedge q')$
E) $r \wedge (p \vee q')$

20. "Bir hayvan, aslansa dört ayaklıdır." koşullu önermesinin tersi aşağıdakilerden hangisidir?

A) "Bir hayvan dört ayaklı değilse aslan değildir."
B) "Bir hayvan dört ayaklı ise aslandır."
C) "Bir hayvan dört ayaklı değilse aslandır."
D) "Bir hayvan aslansa dört ayaklı değildir."
E) "Bir hayvan aslan değilse dört ayaklı değildir."

21. p(x): "4 ten küçük bazı tam sayıların karesi, 16 dan büyüktür." açık önermesinin sembolik mantık dilinde yazılışı aşağıdakilerden hangisidir?

A) p(x): "$\forall x \in \mathbb{Z}, x < 4 \Rightarrow x^2 > 16$"
B) p(x): "$\exists x \in \mathbb{Z}, x < 4 \Rightarrow x^2 > 16$"
C) p(x): "$\forall x \in \mathbb{Z}, x > 4 \Rightarrow x^2 < 16$"
D) p(x): "$\forall x \in \mathbb{Z}, x > 4 \Rightarrow x^2 > 16$"
E) p(x): "$\exists x \in \mathbb{Z}, x > 4 \Rightarrow x^2 > 16$"

22. x bir tam sayı olmak üzere aşağıdaki açık önermelerden hangisi doğrudur?

A) $\forall x,\ 1-x>x^2$

B) $\forall x,\ 1+x<0$

C) $\exists x,\ x-x^2\leq 0$

D) $\exists x,\ \dfrac{x}{x-1}=1$

E) $\forall x,\ (-x)^3=x^3$

23. p:"$x,y\in\mathbb{Z}$ için $x\cdot y=10$" açık önermesinin doğruluk kümesinin eleman sayısı kaçtır?

A)6 B)8 C)10 D)12 E)16

24. $(\forall x\in\mathbb{N}, x^2+2>0)\vee(\exists x,y\in\mathbb{Z},\ x+y\geq 3)$ açık önermesinin değili aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(\exists x\in\mathbb{N},\ x^2+2>0)\wedge(\forall x,y\in\mathbb{Z},\ x+y<3)$

B) $(\forall x\in\mathbb{N},\ x^2+2<0)\wedge(\exists x,y\in\mathbb{Z},\ x+y\geq 3)$

C) $(\forall x\in\mathbb{N},\ x^2+2\leq 0)\vee(\forall x,y\in\mathbb{Z},\ x+y<3)$

D) $(\exists x\in\mathbb{N},\ x^2+2<0)\vee(\exists x,y\in\mathbb{Z},\ x+y\geq 3)$

E) $(\exists x\in\mathbb{N},\ x^2+2\leq 0)\wedge(\forall x,y\in\mathbb{Z},\ x+y<3)$

25. $x,y\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $|x|+|y|\leq 6$ açık önermesi için kaç farklı (x,y) ikilisi vardır?

A) 85 B) 80 C) 72 D) 63 E) 56

D) 26. soruyu aşağıda verilen metne göre cevaplandırınız.

26. Ayşe, Burak, Canan, Emre, Filiz ve Çağla isimli altı öğrencinin üniversite sınav sonuçlarına göre yaptıkları tercih listelerinde tıp, mühendislik, mimarlık, eczacılık ve hukuk bölümleri bulunmaktadır.

- Her öğrenci iki farklı bölüm tercih etmiştir.
- 4 kişi tıp, 3 kişi mühendislik, 2 kişi mimarlık, 2 kişi eczacılık ve 1 kişi hukuk bölümünü tercih etmiştir.
- Ayşe, tıp ve eczacılık bölümlerini tercih etmiştir.
- Filiz ve Emre, farklı bölümleri tercih etmiş ancak Çağla ve Canan aynı bölümleri tercih etmişlerdir.
- Hukuk bölümünü tercih eden kızlardan bir kişidir ve bu kişi aynı zamanda mimarlık bölümünü de tercih etmiştir.

Yukarıda verilen bilgilere göre aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini tabloya yazınız.

Önerme	Doğruluk Değerleri
Filiz, hukuk bölümünü tercih etmiştir.	
Canan, tıp ve mühendislik bölümlerini tercih etmiştir.	
Burak, mimarlık bölümünü tercih etmemiştir.	
Burak ve Filiz, eczacılık bölümünü tercih etmiştir.	
Emre veya Burak, tıp bölümünü tercih etmiştir.	
Burak, mühendislik bölümünü tercih etmiş ise Emre, eczacılık bölümünü tercih etmiştir.	
Emre, hukuk bölümünü tercih etmiştir veya Canan, mimarlık bölümünü tercih etmiştir.	

SAYILAR VE CEBİR

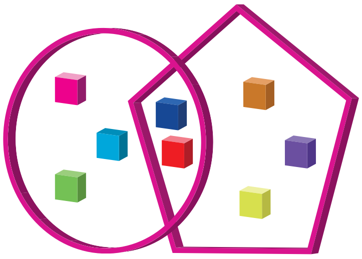
9.2. KÜMELER

Neler Öğreneceksiniz?

- Küme kavramını ve kümenin farklı gösterimlerini, kümeler ve elemanlarının sembollerle nasıl ifade edildiğini,
- Boş küme, evrensel küme, sonlu ve sonsuz küme, alt küme ile eşit ve denk küme kavramlarını,
- Kümelerde birleşim, kesişim, fark ve tümleme işlemlerini; ayrık kümeyi, De Morgan kurallarını ve uygulamalarını,
- Kümelerde yapılan işlemler ile sembolik mantıkta kullanılan sembol ve bunları ifade eden işlemler arasındaki ilişkiyi,
- Küme işlemlerini kullanarak günlük hayata ilişkin problemlerin nasıl çözülebildiğini,
- Sıralı ikili ya da sıralı n li kavramlarını ve uygulamalarını,
- İki ya da daha fazla kümenin kartezyen çarpımı ve özelliklerini, kartezyen çarpım kümesinin düzlemde nasıl gösterildiğini,
- Kartezyen çarpım kümesinin alt kümesi olarak bağıntı ve ters bağıntı kavramlarını ve uygulamalarını öğreneceksiniz.

Küme Kavramları ve Uygulamalarını Öğrenmek Neden Önemlidir?

- İnsanoğlu, yaşamının her anında hayatını kolaylaştırmak ve yaptığı işlerde zaman kazanmak ister. Bu amaçla sahip olduğu bilgileri veya etrafındaki varlıkları sayma, sıralama, listeleme, gruplandırma ve düzenleme ihtiyacı duyar. Kısacası insanoğlu bilerek veya farkına varmadan nesneleri zihninde kümeleştirmektedir.
- Kümeler, günlük hayatın her aşamasında görülebilir. Nesnelerle ilgili yapılan gruplandırma ya da sınıflandırmalara market, mağaza vb. reyonları, evin odaları ve eşyaları buna örnek olarak gösterilebilir.
- Matematikte de birçok konu, küme kavramı ve işlemleri üzerine kurulmuştur. Bu sayede eldeki bilgi ve veriler düzenlenerek bunlar üzerinde istatistiksel işlemler yapılmaktadır. Örneğin istatistikte veriler gruplara ayrıldıktan sonra veriler üzerinde çalışma yapılır ve grup hakkında tutarlı sonuçlara ulaşılır.
- Kümelerde işlemler bölümü, cebirsel bir yapı oluşturulmasını sağlar. Bu işlemler ve onların özellikleri sayesinde, kümeler konusu birçok uygulama alanına sahip olup günlük yaşam problemlerinin çözümlerinde etkin bir biçimde kullanılır.



(Georg Kantor 1845-1918)

On dokuzuncu yüzyıla kadar matematikteki işlemlerde bir birliktelik yoktu. Bu durum, işlemlerin daha düzenli ve kolay yapılmasını engellemekteydi.

Matematikte birliktelik sağlama ihtiyacı 19. yüzyılın sonlarına doğru ortaya çıkmıştır. Böylece bu birlikteliği sağlamaya yarayan, doğada her zaman var olan ve uzun yıllar boyunca kullanılmakta olan kümelerin; matematik terimi olarak tanımı 19. yüzyılda yapılmıştır.

Dönemin Alman matematikçisi Georg Cantor (Georg Kantor 1845-1918); bütün matematik araştırmalarında ve problemlerinde ele alınan nesnelerin kendi aralarında belirli birtakım özelliklere göre gruplanabileceğini, bu durumda anlaşılırlığın ve çözüme yönelik işlem yapmanın daha da kolay olacağını fark etmiştir.

1847'de Bolzeno'nun (Bulzano) oluşturduğu küme ve sonsuz küme kavramları, 1867-1871 yılları arasında Georg Cantor'un (Georg Kantor) çalışmalarıyla geliştirildi. 1874'te yayımlanan Cantor'un makalesi, kümeler konusunun ortaya çıkışında önemli bir adım olarak görülür.

Cantor'un, sonsuz kavramı üzerine gerçekleştirdiği çalışmalar, sayılar kuramında karşılaşılan sorunlarla ilişkilendirilerek kümelerin temelinin atılmasını sağlamıştır.

Günümüze kadar geliştirilen kümeler konusu; mühendislik, iktisat, yapay zekâ çalışmaları ve bilim felsefesi gibi dallarda geniş bir uygulama alanı bulmaktadır.

Evde, okulda, sokakta düşünülenlerin ve yaşananların her biri birer küme oluşturur. Bir mağazaya gidildiğinde eşyaların kümelenmiş olarak yerleştirilmesi istenilen eşyaya ulaşma açısından kolaylık sağlamaktadır. Kümeleri bir karmaşıklığın içerisindeki düzen olarak düşünebilirsiniz.

9.2.1. KÜMELERDE TEMEL KAVRAMLAR

Etkinlik

Sınıflar arası yapılacak bilgi yarışması için 9/A sınıf öğretmeni; matematik, edebiyat ve fizik öğretmenlerinden en az üç başarılı öğrenci ismi vermelerini istiyor.

- Matematik öğretmeni : Duru, Ahmet, Umut, Arzu
- Edebiyat öğretmeni : Mustafa, Duru, Umut, Serap
- Fizik öğretmeni : Batu, Arzu, Umut, Duru, Hülya'yı seçiyor.

Sizce matematik, edebiyat ve fizik öğretmenlerinin farklı isimler vermelerinin nedeni ne olabilir?
Başarı kriteri verilmiş olsaydı, önerilen isimler yine farklı mı olurdu?
Bir gruba ait olan ya da olmayan nesnelerin iyi tanımlanmış olmasından ne anlarsınız?

Matematiksel açıdan kümeyi oluşturan ögelerin iyi tanımlanması gerektiği akla gelen ilk husustur. İyi tanımlama topluluğa neyin dâhil edilip edilmeyeceğinin açık olarak belirtilmesi, kişilere göre seçeneklerin değişiklik göstermemesidir.

1. Temel Kavramlar

Küme Kavramı

İyi tanımlanmış, birbirinden farklı nesneler topluluğuna (yığınına) küme denir. Buradaki nesne soyut ya da somut olabilir.

1. ÖRNEK

Aşağıdaki ifadelerden hangisi veya hangileri bir küme belirtir? Nedeniyle açıklayınız.

I. Bazı çiçekler
II. 5 ten küçük doğal sayılar
III. En güzel aylar
IV. Okulumuzdaki yeşil gözlü öğrenciler
V. Türkiye'nin coğrafi bölgeleri

ÇÖZÜM

I ve III. maddelerde verilen ifadeler, kişiye göre farklı gruplar oluşturabileceği için küme belirtmez. II, IV ve V. maddeler iyi tanımlandığı için birer kümedir.

Kümeyi oluşturan nesnelerin veya sembollerin her birine kümenin elemanları adı verilir. Kümeler genellikle büyük harflerle gösterilir.

a, A kümesinin elemanı ise bu durum $a \in A$ ile gösterilir ve a elemanıdır A diye okunur. a, A kümesinin elemanı değil ise $a \notin A$ şeklinde gösterilir ve bu durum a elemanı değildir A diye okunur.

2. ÖRNEK

A kümesi, 3 ten küçük doğal sayılar olsun. A kümesinin elemanlarını ve bu kümeye ait olmayan üç doğal sayıyı belirtiniz.

ÇÖZÜM

A kümesi, 3 ten küçük doğal sayılar şeklinde verildiğinden 0, 1, 2 A kümesinin elemanlarıdır. Bu durum $0 \in A, 1 \in A, 2 \in A$ şeklinde gösterilir. 3 ve 3 ten büyük doğal sayılar, A kümesinin elemanı olmadığı için örneğin $3 \notin A, 4 \notin A, 5 \notin A$ şeklinde gösterilir.

Kümelerin Gösterilişi

Kümeler, yaygın olarak üç farklı yolla gösterilir:

I) Liste Yöntemi ile Gösterim

Kümeyi oluşturan bütün elemanların $\{\ \}$ parantezinin içerisinde aralarına virgül konularak gösterilmesidir.

II) Venn Şeması Yöntemi ile Gösterim

Kümeyi oluşturan bütün elemanların kapalı bir eğri içerisinde önüne • konularak gösterilmesidir.

III) Ortak Özellik Yöntemi ile Gösterim

Genellikle eleman sayıları çok olan kümelerin gösterilmesinde kullanılır. Kümenin bütün elemanlarının sahip olduğu ortak özelliğin matematiksel veya sözel bir ifade ile gösterilmesidir.

$A = \{x \mid x \text{ in özelliği}\}$

Burada $x \mid$ ifadesi x lerden oluşuyor öyle ki diye okunur.

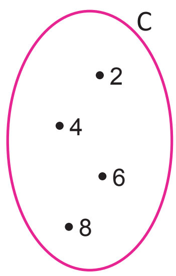
3. ÖRNEK

2, 4, 6, 8 elemanlarından oluşan kümeyi belirtilen üç farklı yöntemi kullanarak gösteriniz.

ÇÖZÜM

I. Verilen küme C ise liste yöntemi ile gösterimi $C=\{2,4,6,8\}$ olur.

II.



C kümesinin Venn şeması yöntemi ile gösterimi olur.

III. C kümesinin ortak özellik yöntemiyle gösterimi:

$C=\{x \mid x,\ 1 \text{ ile } 10 \text{ arasındaki bir çift doğal sayıdır.}\}=\{x \mid 1<x<10,\ x=2k,\ k\in\mathbb{Z}^+\}$ şeklinde yazılır.

4. ÖRNEK

$D=\{x \mid x\le 15 \text{ ve } x \text{ asal sayıdır.}\}$ kümesini liste yöntemiyle yazınız.

ÇÖZÜM

1 ve kendisi dışında böleni olmayan 1 den büyük sayılar, asal sayı olarak tanımlandığından D kümesinin liste şeklinde yazılışı $D=\{2,3,5,7,11,13\}$ olur.

5. ÖRNEK

$\{0,4,8,12,16,20\}$ kümesinin ortak özellik yöntemiyle gösteriminin aşağıdakilerden hangisi olduğunu belirtiniz.

A) $\{x \mid 0\le x\le 22,\ x=2k,\ k\in N\}$
B) $\{x \mid 4\le x< 22,\ x=4k,\ k\in N\}$
C) $\{x \mid 0\le x\le 21,\ x=3k,\ k\in N\}$
D) $\{x \mid -2\le x\le 23,\ x=4k,\ k\in N\}$
E) $\{x \mid 0\le x\le 30,\ x=5k,\ k\in N\}$

ÇÖZÜM

$\{0,4,8,12,16,20\}$ kümesinin elemanları 4 ün katı olan doğal sayılardır. Bu sayıların en küçüğü 0, en büyüğü 20 dir. Bu şartları sağlayan seçenek D dir.

$n\in\mathbb{N}$ olmak üzere bir A kümesinin eleman sayısı $s(A)=n$ olarak ifade edilir.

6. ÖRNEK

$B=\{2,a,1,\{3,4\},\{c\},b\}$ kümesinin eleman sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$
\left.\begin{array}{l}
B=\{2,\ a,\ 1,\ \{3,4\},\ \{c\},\ b\} \\
\quad\ \ \updownarrow\ \ \updownarrow\ \ \updownarrow\quad\ \ \updownarrow\qquad\ \updownarrow\quad \updownarrow \\
\quad\ \ 1\ \ \ 2\ \ \ 3\quad\ \ \ 4\qquad\ 5\quad\ 6
\end{array}\right\}
$$

olduğundan $s(B)=6$ dır. Görüldüğü gibi bir küme başka bir kümenin elemanı olabilir. Örneğin $\{3,4\}, \{c\}$

7. ÖRNEK

$A = \{k \mid 9 < x < 65, x = k^2, k \in \mathbb{N}\}$ kümesinin eleman sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen ifadeye göre kümenin elemanları, karesi 9 ile 65 arasındaki doğal sayılardır.

Bu elemanlar, aşağıdaki sayılar olduğundan A kümesinin elemanları:

$$\left.\begin{array}{l} 4^2 = 16 \\ 5^2 = 25 \\ 6^2 = 36 \\ 7^2 = 49 \\ 8^2 = 64 \end{array}\right\} A = \{4, 5, 6, 7, 8\} \text{ olur. } s(A) = 5 \text{ bulunur.}$$

8. ÖRNEK

$D = \{x \mid x \leq 99, x = 3k, k \in \mathbb{Z}^+\}$ kümesinin eleman sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

D kümesinin elemanları, 3 ün katı ve en çok 99 olan pozitif tam sayılardır. Buna göre, D kümesinin elemanları $D = \{3, 6, 9, \ldots, 96, 99\}$ olur.

Ardışık terimleri arasındaki farkı sabit olan bu tür kümelerin eleman sayısı:

$$s(D) = \frac{\text{son terim} - \text{ilk terim}}{\text{artış miktarı}} + 1 = \frac{99 - 3}{3} + 1 = \frac{96}{3} + 1 = 33 \text{ olur.}$$

Boş Küme

Elemanı olmayan kümeye boş küme denir. Boş kümenin gösterimi $\varnothing$ olup liste yöntemi ile gösterimi $\{\ \}$ biçimindedir. Boş kümenin eleman sayısı sıfırdır.

9. ÖRNEK

Aşağıdaki kümelerin eleman sayılarını bulunuz.

“ $A = \{x \mid x$, karesi kendisinden küçük olan bir doğal sayıdır$\}$ ”

“ $B = \{x \mid x$, negatif bir asal sayıdır$\}$ ”

“ $C = \{x \mid x^2 + 4 = 0,\ x \in \mathbb{Z}\}$ ”

ÇÖZÜM

- $x^2 < x$ eşitsizliğini sağlayan herhangi bir doğal sayı yoktur. Bu nedenle $A = \{\ \}$ olur.
- Bir ve kendisinden başka böleni olmayan 1 den büyük doğal sayılara asal sayı denir. Bu nedenle negatif asal sayı yoktur. $B = \{\ \}$
- $x^2 + 4 = 0$

  $x^2 = -4$ denklemini sağlayan tam sayı yoktur. $\forall x \in \mathbb{Z}$ ise $x^2 \geq 0$ dır. Bu nedenle $C = \{\ \}$

$\{\varnothing\}$ ve $\{\{\ \}\}$ kümeleri, birer elemanlı kümeler olduğu için boş küme değildir.

10. ÖRNEK

Aşağıdaki seçeneklerde gösterilen kümelerden hangisinin boş küme olmadığını nedeni ile açıklayınız.

- $A = \{x \mid x < -8, x$ bir doğal sayıdır.$\}$
- $B = \{x \mid x^2 + 1 = 0, x$ bir gerçek sayıdır.$\}$
- $C = \{x \mid 1 < x < 3, x$ bir gerçek sayıdır.$\}$
- $D = \{x \mid 4 < x < 5, x$ bir tam sayıdır.$\}$

ÇÖZÜM

A kümesinde -8 den küçük doğal sayı, B kümesinde karesi negatif olan gerçek sayı, D kümesinde 4 ile 5 arasında olan bir tam sayı olmadığından bu kümelerin elemanı yoktur. Bu yüzden A, B, D kümeleri birer boş kümedir.

1 ile 3 arasında en az bir gerçek sayı bulunduğundan C kümesi boş küme değildir.

Sonlu ve Sonsuz Kümeler

Eleman sayıları bir doğal sayı ile gösterilebilen kümelere sonlu küme, sonlu olmayan kümelere de sonsuz küme denir.

$A = \{x \mid 0 < x < 10, x \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin elemanları 0 ile 10 arasındaki tam sayılardır.

Bu sayılar $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ şeklinde ifade edilebilir ve $s(A) = 9$ olur. Bu durumda A kümesi sonlu sayıda elemana sahiptir denir.

Doğal sayılar kümesi incelendiğinde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(n+1) \in \mathbb{N}$ olduğundan kümenin eleman sayısı bir doğal sayı ile ifade edilemez. Bu durumda doğal sayılar kümesi sonsuz kümedir.

11. ÖRNEK

Aşağıdaki ifadeleri sonlu ve sonsuz küme olarak sınıflandırınız.

$A = \{x \mid x < 15, x$ pozitif tek tam sayıdır.$\}$

$B = \{x \mid x$, çift doğal sayılar$\}$

$C = \{x \mid x$, asal rakamlar$\}$

$D = \{x \mid -2 < x < 11, x$ rasyonel sayı$\}$

ÇÖZÜM

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$

$B = \{0, 2, 4, \ldots\}$

$C = \{2, 3, 5, 7\}$

D kümesinde -2 ile 11 arasında sonsuz sayıda rasyonel sayı bulunmaktadır.

Buna göre A ve C kümeleri, sonlu sayıda eleman bulundurduğundan sonlu kümeler olur. B ve D kümeleri ise sonsuz sayıda eleman bulundurduğundan sonsuz kümeler olur.

2. Alt Küme

İnsanoğlunun çevresinde bulunan nesneler gruplara ayrılarak sınıflandırılır. Oluşan gruplardan bazıları diğer grupları kapsar ya da onların içinde yer alır. Örneğin balıklar, omurgalıların içinde yer alırken omurgalılar da hayvanlar topluluğunun içinde yer alır. Hayvanlar da canlılar âleminin bir parçasıdır.

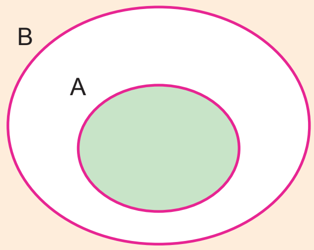
Bu duruma benzer olarak bir alışveriş merkezinin market, ayakkabı, giyim ve yiyecek gibi farklı bölümlerden oluştuğu hatta bu bölümlerin de daha küçük alt bölümlere ayrılarak gruplandığı da görülebilir. Yukarıdaki bölümleri ve bunların alt bölümlerini birbirinin içinde yer alma ve kapsama açısından nasıl ifade edebilirsiniz?

A ve B herhangi iki küme olmak üzere A kümesinin her elemanı aynı zamanda B kümesinin de elemanı oluyor ise A kümesine, B kümesinin alt kümesi denir. $A \subseteq B$ veya $A \subset B$ biçiminde gösterilir.

Bu ifade, B kümesi A kümesini kapsar şeklinde de söylenir. $B \supseteq A$ veya $B \supset A$ biçiminde gösterilir.

Alt kümenin Venn şemasıyla gösterilişi yandaki gibidir.

A kümesinin en az bir elemanı, B kümesinin elemanı değil ise A kümesi B kümesinin alt kümesi değildir denir ve $A \not\subset B$ biçiminde gösterilir.



1. ÖRNEK

$A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3\}$, $C = \{1,2,3,5,7\}$ kümeleri arasındaki kapsama ilişkisini inceleyiniz.

ÇÖZÜM

A kümesinin elemanlarının tamamı hem B hem de C kümesinde yer almaktadır. B kümesinin elemanları da C kümesinde yer almaktadır.

Bu bilgiler doğrultusunda örnekteki üç küme şu şekilde ilişkilendirilebilir:

$A \subset B$, $A \subset C$ ve $B \subset C$ dir ya da $B \supset A, C \supset A$ ve $C \supset B$ yazılabilir.

Başka bir ifadeyle: $A \subset B \subset C$ veya $C \supset B \supset A$ yazılabilir.

2. ÖRNEK

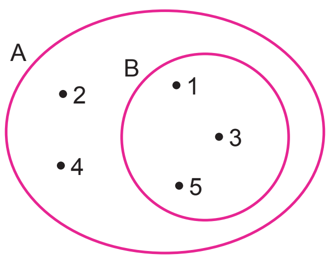
$A = \{x \mid 0 < x < 6, x \text{ bir doğal sayıdır.}\}$

$B = \{1,3,5\}$

Kümeleri arasındaki alt küme ilişkisini belirtiniz.

ÇÖZÜM

$$\left.\begin{array}{l} A = \{1,2,3,4,5\} \\ B = \{1,3,5\} \end{array}\right\}$$



Şekilde gösterildiği gibi B kümesinin bütün elemanları A kümesinin de elemanı olduğu için B kümesi, A kümesinin alt kümesidir. Bu durum, $B \subset A$ veya $A \supset B$ şeklinde gösterilir.

Alt Kümenin Özellikleri

1. Her küme, kendisinin alt kümesidir. $(A \subset A)$
2. Boş küme, her kümenin alt kümesidir. $(\varnothing \subset A)$
3. $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow A \subset C$ dir.

3. ÖRNEK

$A = \{\ \}$, $B = \{a\}$, $C = \{a, b\}$, $D = \{a, b, c\}$ kümelerinin alt kümelerini yazınız.

ÇÖZÜM

Alt küme ilişkisini daha iyi görebilmek için aşağıdaki tabloyu inceleyiniz.

Küme	Kümenin Eleman Sayısı	Alt Kümeleri	Alt Küme Sayısı
$A = \{\ \}$	$s(A) = 0$	$\varnothing$	$1 = 2^0 = 2^{s(A)}$
$B = \{a\}$	$s(B) = 1$	$\varnothing, \{a\}$	$2 = 2^1 = 2^{s(B)}$
$C = \{a, b\}$	$s(C) = 2$	$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$	$4 = 2^2 = 2^{s(C)}$
$D = \{a, b, c\}$	$s(D) = 3$	$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$	$8 = 2^3 = 2^{s(D)}$

Tablodaki kümeler, eleman sayıları ve alt küme sayıları arasındaki ilişki dikkate alınarak incelendiğinde alt küme sayısının, her zaman kümenin eleman sayısı kadar 2 nin kuvveti alınarak bulunduğu görülür.

n elemanlı bir kümenin alt kümelerinin sayısı 2^n şeklinde hesaplanır.

4. ÖRNEK

$A = \{x \mid 0 < x < 18, x \text{ asal sayıdır}\}$ kümesinin alt küme sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$ olduğundan $s(A) = 7$ olur.
Alt küme sayısı $2^7 = 128$ olur.

5. ÖRNEK

Alt küme sayısı 512 olan bir kümenin eleman sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

Kümenin eleman sayısı n ise alt küme sayısı 2^n dir. $512 = 2^9$ olduğundan $2^n = 2^9$, $n = 9$ olur.

Öz Alt Küme

Bir kümenin kendisi dışındaki alt kümelerine öz alt kümesi denir.
Bir kümenin öz alt kümelerinin sayısı $2^n - 1$ ile hesaplanır.

ÖRNEK 6:

Öz alt kümelerinin sayısı 63 olan bir kümenin eleman sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

$s(A) = n$ olsun. Öz alt kümelerinin sayısı 63 olduğundan $2^n - 1 = 63$ yazılır.
$2^n = 64 = 2^6 \Rightarrow s(A) = n = 6$ bulunur.

7. ÖRNEK

A kümesinin alt küme sayısı 32, B kümesinin öz alt kümelerinin sayısı 63 ise bu iki kümenin eleman sayılarının toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$s(A) = n$ ise alt küme sayısı 2^n ve $s(B) = m$ ise kümenin kendisi dışındaki alt kümelerinin sayısı $2^m - 1$ olur.

$2^n = 32$ $\qquad$ $2^m - 1 = 63 \Rightarrow 2^m = 64$

$2^n = 2^5$ $\qquad$ $2^m = 2^6$

$n = 5 \Rightarrow s(A) = 5$ $\qquad$ $m = 6 \Rightarrow s(B) = 6$ bulunur.

Buradan

$s(A) + s(B) = n + m = 5 + 6 = 11$ elde edilir.

8. ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesinin bütün alt kümelerindeki elemanlarının sayı değerlerinin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

1 sayısının içinde bulunduğu A nın alt kümelerinin sayısını bulmak için A kümesinden 1 elemanı çıkarılır. Geriye kalan 3 elemanın alt küme sayısı hesaplanır. Bu alt kümelerin her birine 1 elemanı tekrar eklenir. Bu durumda içerisinde 1 i bulunduran alt küme sayısı $2^3 = 8$ tane olur.

Benzer şekilde 2, 3, 4 sayılarından her birini içinde bulunduran sekizer tane alt küme vardır.

Bu durumda 1, 2, 3, 4 sayıları sekiz defa toplanacağından

Alt kümelerdeki sayıların toplamı: $8 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) = 8 \cdot 10 = 80$ olur.

9. ÖRNEK

Bir kümenin eleman sayısı 4 artırılırsa alt küme sayısında nasıl bir değişiklik olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

$s(A) = n$ olsun. Bu durumda alt küme sayısı 2^n olur.

A kümesinin eleman sayısı 4 artırıldığında $s(A) = n + 4$ olur. Bu durumda alt küme sayısı,

$2^{n+4} = 2^n \cdot 2^4 = 2^n \cdot 16 = 16 \cdot 2^n$ olur. Sonuç olarak alt küme sayısı 16 katına çıkmış olur.

10. ÖRNEK

$A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$ kümeleri veriliyor.

$A \subset C \subset B$ olacak şekilde kaç farklı C kümesi yazılabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

$A \subset C \subset B \Rightarrow \{a, b\} \subset C \subset \{a, b, c, d, e\}$ yazılabilir.

C kümesinde a ve b elemanları olduğundan bunların dışındaki c, d ve e elemanlarının yardımıyla oluşturulan alt kümeler, yazılacak olan farklı C kümelerinin sayısını verir.

O hâlde $2^3 = 8$ tane C kümesi yazılabilir.

11. ÖRNEK

İki kümenin alt küme sayılarının toplamı 68 ise bu kümelerin eleman sayılarının toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

İki küme A, B ve eleman sayıları $s(A)=a$ ve $s(B)=b$ olsun.

$2^a+2^b=68$ yazılır.

Alt kümelerinin sayısı 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ... olabilir. Bu sayılardan toplamı 68 olabilecek iki tanesi sadece 4 ve 64 tür. Bu durumda

$2^a+2^b=4+64=2^2+2^6$ olur. Buradan a ve b nin 2 ve 6 olması gerekir.

$s(A)+s(B)=2+6=8$ olur.

12. ÖRNEK

Bir öğretmen ve 5 öğrencisi arasından

a) En çok dört öğrencinin katılacağı,

b) En az iki öğrencinin katılacağı gezi grubunu kaç farklı şekilde oluşturulabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Öğrencilerden oluşan küme A olsun.

a) $s(A)=5$ olduğundan en çok dört elemanlı alt kümelerinin sayısı, kendisi dışındaki bütün alt kümelerdir. Toplam alt küme sayısı: $2^5=32$ olur. O hâlde en çok dört elemanlı alt küme sayısı: $32-1=31$ olur.

b) Bu kümenin en az iki elemanlı alt kümelerinin sayısı tespit edileceği için A kümesinin bir elemanlı alt kümeleri ve boş küme toplama dâhil edilmez.

Boş olan alt küme sayısı: 1

A kümesi 5 elemanlı olduğundan bir elemanlı alt küme sayısı 5 tir.

En az iki elemanlı alt kümelerinin sayısı: $2^5-(1+5)=32-6=26$ olur.

13. ÖRNEK

$A=\{a,b,c,d,e,f,i\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde en az bir sesli harf olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

A kümesinin tüm alt kümelerinin sayısı: $2^7=128$ olur. A kümesinden a, e, i sesli harfleri çıkarılırsa $\{b,c,d,f,\}$ kümesi elde edilir. Bu kümenin alt küme sayısı $2^4=16$ olur. Bu alt kümelerin hiçbirinde sesli harf yoktur.

Tüm alt küme sayısından içinde sesli harf olmayan alt küme sayısı çıkarılırsa içinde en az bir sesli harf bulunduran alt küme sayısı bulunmuş olur. Bu değer $128-16=112$ olur.

14. ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde
a) 3 bulunur.
b) 1 ve 5 bulunur.
c) 1 veya 5 bulunur.
ç) 1 ve 2 birlikte bulunmaz.
d) Ne 1 ne de 2 bulunur.

ÇÖZÜM

a) A kümesinden 3 elemanı çıkarılırsa $\{1, 2, 4, 5\}$ kümesi bulunur. Bu kümenin alt küme sayısı $2^4 = 16$ olur. Her bir alt kümeye 3, eleman olarak eklenirse 3 ün de içinde bulunduğu 16 tane alt küme elde edilir.
Bu kümeler
$\{\ \} \longrightarrow \{3\}$
$\{1\}, \{2\}, \{4\}\ \{5\} \rightarrow \{3,1\}, \{3,2\}, \{3,4\}\ \{3,5\}$
$\{1,2\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{4,5\} \rightarrow \{3,1,2\}, \{3,1,4\}, \{3,1,5\}, \{3,2,4\}, \{3,2,5\}, \{3,4,5\}$
$\{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,4,5\}, \{2,4,5\} \longrightarrow \{3,1,2,4\}, \{3,1,2,5\}, \{3,1,4,5\}, \{3,2,4,5\}$
$\{1,2,4,5\} \longrightarrow \{3,1,2,4,5\}$ şeklinde yazılabilir.

b) A kümesinden 1 ve 5 çıkarılırsa $\{2, 3, 4\}$ kümesi bulunur. Bu kümenin alt küme sayısı $2^3 = 8$ olur. Her bir alt kümeye 1 ve 5 elemanları eklenirse 8 tane alt kümede 1 ve 5 elemanı bulunur.

c) **1. Yol**

A kümesinden 1 ve 5 çıkarılırsa $\{2, 3, 4\}$ kümesi bulunur. Bu kümenin $2^3 = 8$ tane alt kümesi vardır.

Alt kümelere 1 ve 5 eklenirse	8 tane
Alt kümelere 1 eklenirse	8 tane
Alt kümelere 5 eklenirse	+ 8 tane
	24 tane alt kümede 1 veya 5 eleman olarak bulunur.

2. Yol
A kümesinin tüm alt küme sayısı: $2^5 = 32$ olur.
İçinde 1 veya 5 in bulunmadığı alt küme sayısı: $2^3 = 8$ olduğundan
içinde 1 veya 5 in bulunduğu alt küme sayısı: $32 - 8 = 24$ olur.

ç) A kümesinden 1 ve 2 elemanları çıkarılırsa $\{3,4,5\}$ kümesi elde edilir. Bu kümenin alt küme sayısı $2^3 = 8$ olur.
Bu alt kümelerin her birine 1 eklenirse içinde 1 bulunan alt küme sayısı 8, buna benzer olarak da içinde 2 bulunan alt küme sayısı yine 8 olur. Sonuç olarak içinde 1 ve 2 elemanlarının birlikte bulunmadığı alt küme sayısı
$8 + 8 + 8 = 24$ olur.

d) A kümesinden 1 ve 2 elemanları çıkarılırsa $\{3,4,5\}$ kümesi elde edilir.
Bu kümenin alt küme sayısı $2^3 = 8$ olur. Bu alt kümelerde 1 veya 2 eleman olarak bulunmadığından sonuç 8 olarak bulunur.

15. ÖRNEK

$A = \{1,2,3,4\}$ kümesinin ardışık herhangi iki sayı içermeyen kaç tane alt kümesi olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

1. Yol

Eleman sayısı az olduğundan istenen alt kümeler kolayca yazılabilir.

Bu alt kümeler: $\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,4\}$ olup 8 tanedir.

2. Yol

Eleman sayısı fazla olduğunda istenen alt kümeleri yazmak zor olabilir. Bu durumda Alt küme sayısını bulmak için bir genelleştirme yapılabilir mi?

$A = \{1,2,3,4,...,n\}$ olsun. $(n \in \mathbb{N})$

A kümesinin ardışık herhangi iki sayı içermeyen alt kümelerinin sayısı a_n ile gösterildiğinde

Küme	İstenen Alt Kümeler	a_n
$n = 0$ için $A = \varnothing$	$\varnothing$	$a_0 = 1$
$n = 1$ için $A = \{1\}$	$\varnothing, \{1\}$	$a_1 = 2$
$n = 2$ için $A = \{1,2\}$	$\varnothing, \{1\}, \{2\}$	$a_2 = a_0 + a_1 = 3$
$n = 3$ için $A = \{1,2,3\}$	$\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}$	$a_3 = a_2 + a_1 = 5$
$n = 4$ için $A = \{1,2,3,4\}$	$\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,4\}$	$a_4 = a_3 + a_2 = 8$
...	...	...
$n \in \mathbb{N}$ için $A = \{1,2,3,4,...,n\}$	$\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}...$	$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Tabloda görüldüğü gibi istenen alt kümelerin sayıları arasında $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n \geq 2)$ bağıntısı vardır.

Sıra Sizde

SORU

$A = \{-5, -3, 0, 1, 2, 3, 6\}$ kümesi veriliyor. Bu kümenin alt kümelerinin

a) Kaç tanesinde pozitif sayı bulunur?
b) Kaç tanesinde asal sayı bulunmaz?
c) Kaç tanesinin elemanları çarpımı sıfırdır?
d) Kaç tanesinin elemanları çarpımı negatiftir?

ÇÖZÜM

A kümesiyle ilgili yukarıdaki soruların dışında farklı bir soru yazarak çözümünü bulunuz.

3. Eşit Küme

A ve B iki küme olsun. A ve B kümelerinin tüm elemanları aynı ise bu kümelere birbirine eşit kümeler denir. Bu durum $A = B$ şeklinde gösterilir.

Eğer bu kümeler birbirine eşit değilse bu durum $A \neq B$ şeklinde gösterilir.

A ve B kümelerinin birbirine eşit kümeler olması ancak ve ancak bu kümelerin birbirlerinin alt kümesi olmasıyla mümkündür. Bu durum $(A \subset B) \wedge (B \subset A) \Leftrightarrow A = B$ şeklinde ifade edilir.

1. ÖRNEK

$D = \{x \mid x^2 < 18, x \in \mathbb{N}\}$

$B = \{x \mid x < 5, x \in \mathbb{N}\}$ kümelerinin elemanlarını karşılaştırınız.

ÇÖZÜM

D kümesi, karesi 18 den küçük doğal sayılardan oluşur. $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

B kümesi, 5 ten küçük olan doğal sayılardır. $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Bulunan D ve B kümelerinin elemanlarının aynı olduğu görülür. Bu durumda $D = B$ elde edilir.

A ve B gibi herhangi iki kümenin sadece eleman sayıları eşitse bu kümelere birbirine denk kümeler denir ve $A \equiv B$ şeklinde gösterilir. Birbirine eşit olan kümeler birbirine denktir ancak birbirine denk olan kümeler birbirine eşit olmak zorunda değildir.

2. ÖRNEK

$Y = \{a, b, c\}$

$G = \{x \mid 1 < x < 5, x \in N\}$

$S = \{x \mid x, 15 \text{ in pozitif tam bölenleri}\}$

$L = \{x \mid x < 10, x = 3k, k \in \mathbb{Z}^+\}$ kümelerinden denk olanları bulunuz.

ÇÖZÜM

$Y = \{a, b, c\}$ $\quad s(Y) = 3$

$G = \{2, 3, 4\}$ $\quad s(G) = 3$

$S = \{1, 3, 5, 15\}$ $\quad s(S) = 4$

$L = \{3, 6, 9\}$ $\quad s(L) = 3$ elde edilir.

Kümeler incelendiğinde Y, G ve L kümelerinin eleman sayılarının eşit olduğu görülür. O hâlde bu üç küme birbirlerine denk kümelerdir. Bu durumda $Y \equiv G \equiv L$ yazılır.

Sıra Sizde

SORU

A ve B kümeleri için $m, n \in A$ ve $p \in B$ veriliyor. A kümesinin alt kümelerinin 32 tanesinde m ve n birlikte bulunur. B kümesinin alt kümelerinin 16 tanesinde p bulunmaz.
Buna göre A ve B kümelerinin birbirine denk olup olmadığını inceleyiniz.

ÇÖZÜM

ALIŞTIRMALAR-1

1. $C = \{1, 2, \{1, 2\}, 3, \{4\}, 5\}$
kümesi için aşağıdakilerden hangisinin doğru olduğunu belirtiniz.

A) $s(C) = 7$
B) $4 \in C$
C) $5 \notin C$
D) $\{1, 2\} \in C$
E) $s(C) = 5$

2. $A = \{x \mid x < 100, x = 5k, k \in \mathbb{Z}^+\}$
kümesinin eleman sayısını bulunuz.

3. $A = \{x \mid 0 < x < 19, x \in \mathbb{N}\}$ kümesi veriliyor. Buna göre aşağıda verilen kümelerin <u>hangileri</u> A kümesinin alt kümesidir.

$B = \{x \mid 0 < x < 20, x = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$
$C = \{x \mid 2x - 5 < 15, x \in \mathbb{N}\}$
$D = \{x \mid -7 < x < 20, x = 5k, k \in \mathbb{Z}\}$
$E = \{x \mid 3x - 7 = 13, x \in \mathbb{N}\}$

4. Aşağıdakilerden hangileri boş küme belirtir, bulunuz.

I. Negatif doğal sayılar
II. Haftanın c harfi ile başlayan günleri
III. $A = \{\{\ \}\}$
IV. 3 katının 5 fazlası 3 olan doğal sayı
V. $\{x \mid x + 3 = 0, x \in \mathbb{Z}\}$
VI. $A = \{x \mid x^2 + 2 = 0, x \in \mathbb{N}\}$

5. $\{x \mid x < 40, x = 5k, k \in \mathbb{N}\}$ kümesinin alt küme sayısını bulunuz.

6. Öz alt kümelerinin sayısı 127 olan bir kümenin en çok 1 elemanlı alt küme sayısını bulunuz.

7. $D = \{a, b, c, d, e\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde

a) a bulunur.
b) a ve b bulunur.
c) a veya b bulunur.
ç) a ve b bulunur, c bulunmaz.
d) a ve b birlikte bulunmaz.
e) Ne a ne de b bulunur, hesaplayınız.

8. Alt küme sayısı ile öz alt kümelerinin sayısı toplamı 1023 olan bir kümenin eleman sayısını bulunuz.

9. A kümesinin öz alt kümelerinin sayısı 15 ve B kümesinin alt küme sayısı 256 olarak veriliyor. Buna göre bu kümelerin eleman sayılarının çarpımını bulunuz.

10. $B = \{2, 3, 4\}$ kümesi veriliyor. Buna göre aşağıdakilerden hangilerinin B kümesine eşit olduğunu bulunuz.

$C = \{x \mid 1 < x < 5, x \in \mathbb{N}\}$
$D = \{x \mid x < 5, x \in \mathbb{N}\}$
$E = \{x \mid 2 \le x \le 4, x \in \mathbb{N}\}$
$F = \{x \mid x < 6, x = 2k, k \in \mathbb{N}\}$

11. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde <u>en az</u> bir tane tek sayı bulunduğunu hesaplayınız.

9.2.2. KÜMELERDE İŞLEMLER VE BAĞINTI

Etkinlik

Ada ve Ebru; Türkiye Bayan Voleybol Millî Takımı Yılın Altısı seçmeleri için Bahar, Çağla, Eda, Gözde, Naz, Neslihan, Polen, Seda, Ezgi, Güldeniz arasından seçim yapacaktır.

Antrenörlerden Ada; Yılın Altısı takımına Çağla, Gözde, Neslihan, Polen, Ezgi, Güldeniz,

Ebru ise Yılın Altısı takımına Gözde, Polen, Çağla, Eda, Seda, Bahar oyuncularını seçiyor.

Ada veya Ebru'dan en az birisinin Yılın Altısı için oy verdikleri oyuncuların oluşturduğu küme:

$K = \{$..$\}$

Ada ve Ebru'nun her ikisinin de Yılın Altısı için ortak oy verdikleri oyuncuların oluşturduğu küme:

$L = \{$..$\}$

Ada'nın Yılın Altısına alıp Ebru'nun almadığı oyuncuların oluşturduğu küme:

$M = \{$..$\}$

Ada'nın Yılın Altısı için seçmediği oyuncuların oluşturduğu küme:

$N = \{$..$\}$

- K kümesinde Ada veya Ebru'dan en az birisinin Yılın Altısı için oy verdikleri tüm voleybolcuların bulunduğunu ve her voleybolcunun bir kez yazıldığını,
- L kümesinde Ada ve Ebru'nun her ikisinin de Yılın Altısı için oy verdikleri ortak voleybolcuların bulunduğunu,
- M kümesinde sadece Ada'nın Yılın Altısına aldığı voleybolcuların bulunduğunu,
- N kümesinde Ada'nın Yılın Altısı için seçtiği oyuncular dışında kalan voleybolcuların bulunduğunu fark ettiniz mi?

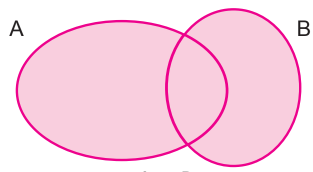
Oluşturulan kümeler, hangi küme işlemleri ile ifade edilir? Düşününüz.

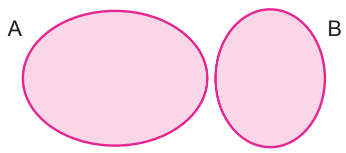
1. Kümelerde İşlemler

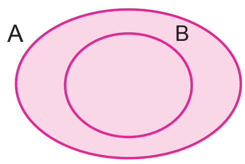
Kümelerde Birleşim İşlemi

A ile B iki küme olsun. A ile B kümelerinin tüm elemanlarının oluşturduğu kümeye, A ve B kümelerinin birleşim kümesi adı verilir. $A \cup B$ şeklinde gösterilir.

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ veya } x \in B\} = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ olarak ifade edilir.







Sembolik mantıktaki $\vee$ (veya) sembolü kümelerde $\cup$ (birleşim) işlemine karşılık gelir.

1. ÖRNEK

$A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{1, 2, 3, a, b\}$ kümelerinin tüm elemanları ile oluşturulan kümeyi liste yöntemiyle yazınız.

ÇÖZÜM

A ve B kümelerinin tüm elemanlarının oluşturduğu küme $A \cup B$ dir.

$A \cup B = \{a, b, c, d, e, 1, 2, 3\}$ elde edilir.

Burada her iki kümede bulunan elemanların bir kez yazılmış olduğuna dikkat ediniz.

Birleşim İşleminin Özellikleri

1. $A \cup A = \{x \mid x \in A \vee x \in A\} = \{x \mid x \in A\} = A$ olduğundan $A \cup A = A$ olur.

Bir kümenin kendisi ile birleşimi yine kendisidir. Buna tek kuvvet özelliği adı verilir.

2. $A \cup \varnothing = \{x \mid x \in A \vee x \in \varnothing\} = A$ olduğundan $A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$ olur.

Bir kümenin boş küme ile birleşimi yine kendisidir. Bu durumda boş küme, birleşim işleminin etkisiz elemanıdır.

3. $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} = \{x \mid x \in B \vee x \in A\} = B \cup A$ olduğundan $A \cup B = B \cup A$ olur.

Kümelerde birleşim işleminin değişme özelliği vardır.

4. $A \cup (B \cup C) = \{x \mid x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)\} = \{x \mid (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C\}$

$= \{x \mid x \in (A \cup B)\} \vee \{x \mid x \in C\} = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$ olur.

Kümelerde birleşim işleminin birleşme özelliği vardır.

2. ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 5, 7\}$ ve $C = \{6, 7, 8\}$ kümeleri için $A \cup (B \cup C)$ ve $(A \cup B) \cup C$ kümelerini yazınız.

ÇÖZÜM

$B \cup C = \{3, 5, 7\} \cup \{6, 7, 8\} = \{3, 5, 6, 7, 8\}$ olduğundan

$A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3\} \cup \{3, 5, 6, 7, 8\} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$ ...**(1)**

$A \cup B = \{1, 2, 3\} \cup \{3, 5, 7\} = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ olduğundan

$(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 5, 7\} \cup \{6, 7, 8\} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$ ...**(2)**

(1) ve **(2)** den $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ elde edilir.

5. $A \cup B = \varnothing$ olduğunda A ve B kümeleri boş küme olur. Bu durumun tersi de doğrudur. Kümeler boş küme ise birleşim kümesi de boş küme olur.
$A \cup B = \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing$ ve $B = \varnothing$ olur.

6. $B \subset A \Rightarrow A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} = \{x \mid x \in A \vee x \in A\} = \{x \mid x \in A\} = A$ olduğundan
$B \subset A \Rightarrow A \cup B = A$ olur.

3. ÖRNEK

$s(A) = 10$ ve $s(B) = 7$ olsun. Bu durumda

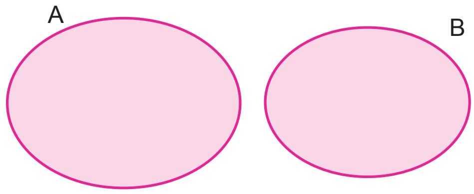
a) $s(A \cup B)$ nin en büyük değerini bulunuz.

b) $s(A \cup B)$ nin en küçük değerini bulunuz.

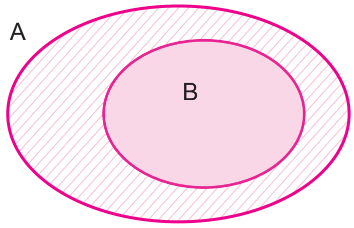
c) $B \not\subset A$ ise $s(A \cup B)$ nin en küçük değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

a) İki kümenin birleşiminin eleman sayısının en büyük olması için kümeler, ortak eleman bulundurmamalıdır. Bu durum Venn şemasında gösterilirse
$s(A) = 10$ ve $s(B) = 7 \Rightarrow s(A \cup B) = s(A) + s(B) = 10 + 7 = 17$ bulunur.

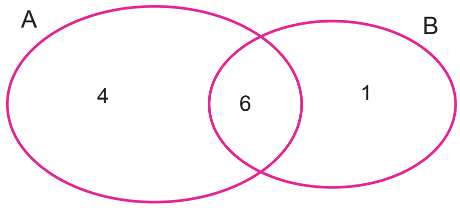


b) İki kümenin birleşiminin eleman sayısının en küçük olması için kümelerden biri, diğerinin alt kümesi olmalıdır.



Bu durumda $B \subset A$ olur. $s(A \cup B)$ nin en küçük değeri $s(A)$ ya eşit olacağından $s(A \cup B) = s(A) = 10$ olarak bulunur.

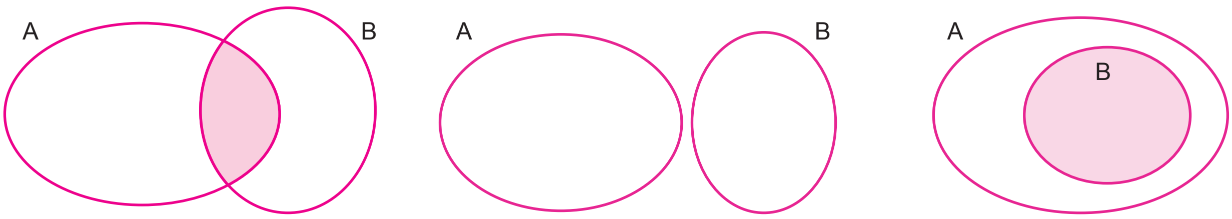
c) $B \subset A$ olduğundan B kümesinin A kümesinde olmayan en az bir elemanı vardır.



$s(A \cup B) = 4 + 6 + 1 = 11$ olur.

Kümelerde Kesişim İşlemi

A ile B iki küme olsun. A ile B kümelerinin ortak elemanlarının alınması ile oluşturulan kümeye, A ve B kümelerinin kesişim kümesi adı verilir. $A \cap B$ şeklinde gösterilir.
$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in B\} = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ olarak ifade edilir.



$A \cap B$ $\qquad$ $A \cap B = \varnothing$ $\qquad$ $A \cap B = B$

Sembolik mantıktaki $\wedge$ (ve) sembolü kümelerde $\cap$ (kesişim) işlemine karşılık gelir.

4. ÖRNEK

$A \cap B = \{x \mid x < 20, x \text{ bir asal sayıdır}\}$, $B = \{y \mid y < 10, y \in \mathbb{N}\}$ kümelerinin ortak elemanları ile oluşturulan kümeyi liste yöntemiyle yazınız.

ÇÖZÜM

A kümesi, 20 den küçük asal sayılar ise $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ ve
B kümesi, 10 dan küçük doğal sayılar ise $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ olur.
A ve B kümelerinin ortak elemanlarının alınması ile oluşacak küme D ile gösterilirse
$D = \{2, 3, 5, 7\}$ elde edilir.

Özellikler

1. $A \cap A = \{x \mid x \in A \wedge x \in A\} = \{x \mid x \in A\} = A$ olduğundan $A \cap A = A$ olur.
Bir kümenin kendisi ile kesişimi yine kendisidir. Buna tek kuvvet özelliği adı verilir.

2. $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} = \{x \in B \wedge x \in A\} = B \cap A$ olduğundan $A \cap B = B \cap A$ olur.
Kümelerde kesişim işleminin değişme özelliği vardır.

3. $A \cap (B \cap C) = \{x \mid x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C)\} = \{x \mid (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C\}$
$= \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} \cap \{x \mid x \in C\} = (A \cap B) \cap C$ olur.

Kümelerde kesişim işleminin birleşme özelliği vardır.

4. $A \cap \varnothing = \{x \mid x \in A \wedge x \in \varnothing\} = \{x \mid x \in \varnothing\} = \varnothing$ olduğundan $A \cap \varnothing = \varnothing \cap A = \varnothing$ olur.
Bir kümenin boş küme ile kesişimi boş kümedir. Bu durumda boş küme, kesişim işleminin yutan elemanıdır.

$A \cap B = \varnothing \Rightarrow$ A ve B kümelerinin ortak elemanı yoktur. Bu durumda A ve B kümeleri ayrık kümelerdir denir.

5. $B \subset A \Rightarrow A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} = \{x \mid x \in B\} = B$ olduğundan $B \subset A \Rightarrow A \cap B = B$ olur.
Bu durumda kesişim kümesi, kapsanan kümeye (alt kümeye) eşit olur.

6. $A \cap (B \cup C) = \{x \mid x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)\}$
$= \{x \mid (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)\}$
$= \{x \mid x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C)\}$
$= (A \cap B) \cup (A \cap C)$ olduğundan

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ elde edilir.

Bu durum, kesişim işleminin birleşim işlemi üzerine soldan dağılma özelliği olarak ifade edilir.
Benzer işlemlerle $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$ olduğunu gösterebilirsiniz.
Kesişim işleminin birleşim işlemi üzerine hem soldan hem de sağdan dağılma özelliği olduğundan kesişim işleminin birleşim işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

7. $A \cup (B \cap C) = \{x \mid x \in A \vee x \in (B \cap C)\}$
$= \{x \mid x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)\}$
$= \{x \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)\}$
$= \{x \mid x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C)\}$
$= (A \cup B) \cap (A \cup C)$ olduğundan

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ elde edilir.

Bu durum birleşim işleminin kesişim işlemi üzerine soldan dağılma özelliği olarak ifade edilir.

Benzer işlemlerle $(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$ olduğunu gösteriniz.

Birleşim işleminin kesişim işlemi üzerine hem soldan hem de sağdan dağılma özelliği olduğundan birleşim işleminin kesişim işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

5. ÖRNEK

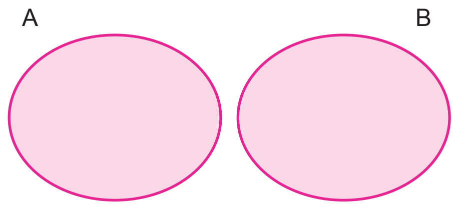
$A \cap B = \{x \mid -2 < x \leq 4, x \in \mathbb{Z}\}$ ve
$A \cap C = \{y \mid -1 \leq y < 4, y \in \mathbb{N}\}$ olduğuna göre $A \cap (B \cup C)$ kümesini liste yöntemiyle yazınız.

ÇÖZÜM

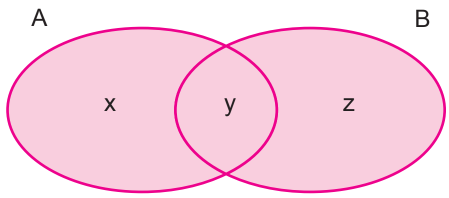
Verilenlerden $A \cap B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ ve $A \cap C = \{0, 1, 2, 3\}$ olduğu görülür.
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ olduğundan (Dağılma özelliği)
$A \cap (B \cup C) = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{0, 1, 2, 3\}$
$= \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ olarak bulunur.

8.

a) A ve B ayrık kümeler ise $A \cup B$ kümesinin eleman sayısı,
$s(A \cup B) = s(A) + s(B)$ şeklinde olur.



b) A ve B ayrık kümeler değilse $A \cup B$ kümesinin eleman sayısı
$s(A) + s(B) - s(A \cap B) = (x + y) + (y + z) - y$
$= x + y + z = s(A \cup B)$ bulunur.
$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ olur.



6. ÖRNEK

Bir seyahat acentesi, Trabzon ve Rize illerine Karadeniz gezisi düzenliyor. Geziye katılan öğrencilerin bu illerden en az birisini gezeceği bilinmektedir. 24 öğrenci Rize'yi, 13 öğrenci hem Rize hem de Trabzon'u gezmek istiyor. Gezi grubunda 43 öğrenci olduğuna göre Trabzon'u gezmek isteyen öğrenci sayısını bulunuz.

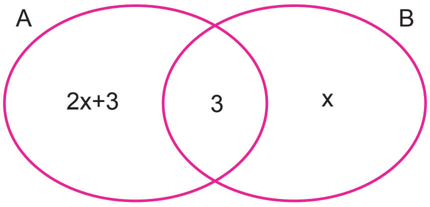
ÇÖZÜM

Rize'yi gezmek isteyenlerin kümesi R ise $s(R) = 24$ tir.
Trabzon'u gezmek isteyenlerin kümesi T ile gösterilsin. Hem Trabzon hem de Rize'yi gezmek isteyenlerin sayısı $s(T \cap R) = 13$ tir. Gezi grubu 43 kişi ise $s(T \cup R) = 43$ olur. $s(T \cup R) = s(T) + s(R) - s(T \cap R)$ olduğundan verilen değerler yerine yazıldığında $43 = s(T) + 24 - 13$, $s(T) = 32$ bulunur.

7. ÖRNEK

A ve B kümeleri için $s(A \cap B) = 3$, $s(A) = 2 \cdot s(B)$, $s(A \cup B) = 24$ olduğuna göre B kümesinin eleman sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM



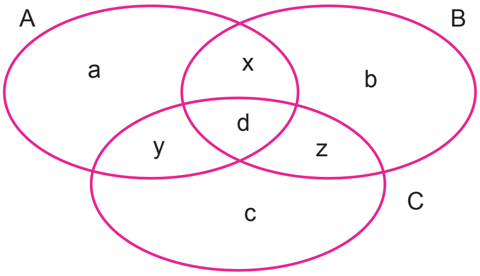
$s(B) = x + 3$ olduğundan $s(A) = 2s(B) = 2(x+3) = 2x + 6$ olur.

$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$

$24 = 2x + 6 + x + 3 - 3$ denkleminden $x = 6$ bulunur.

Bu durumda $s(B) = 6 + 3 = 9$ olur.

c) A, B ve C herhangi üç küme olsun. Bu kümelerin birleşiminin eleman sayısı aşağıdaki şekilde hesaplanır. (Şekildeki harfler bulundukları bölgenin eleman sayısını göstermektedir.)



$s(A \cup B \cup C) = a + b + c + d + x + y + z$ dir.

$$\begin{array}{ll} s(A) = a + d + x + y & s(A \cap B) = d + x \\ s(B) = b + d + x + z & s(A \cap C) = d + y \\ + \; s(C) = c + d + y + z & + \; s(B \cap C) = d + z \\ \hline = a + b + c + 2x + 2y + 2z + 3d \ldots (1) & = x + y + z + 3d \ldots (2) \end{array}$$

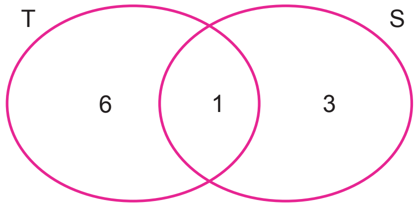
$s(A \cap B \cap C) = d \ldots (3)$

(1) toplamından (2) toplamı çıkarılıp bulunan değere (3) ilave edilirse
$(1) - (2) + (3) = (a + b + c + 2x + 2y + 2z + 3d) - (x + y + z + 3d) + d$ elde edilir.
Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa
$= a + b + c + d + x + y + z = s(A \cup B \cup C)$ değeri elde edilir.
$s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - [s(A \cap B) + s(A \cap C) + s(B \cap C)] + s(A \cap B \cap C)$

8. ÖRNEK

$T \cap S \neq \varnothing$ olmak üzere $s(T) = 7$ ve $s(S) = 4$ olduğuna göre $s(T \cup S)$ nın en çok kaç elemanlı olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



$T \cap S \neq \varnothing$ olduğundan birleşim kümesinin en çok olabilmesi için kesişim kümesinde en az sayıda eleman bulunmalıdır. $s(T \cap S) = 1$ alınmalıdır.

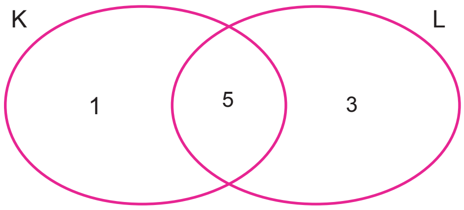
$s(T \cup S) = s(T) + s(S) - s(T \cap S) = 7 + 4 - 1 = 10$ olur.

9. ÖRNEK

$K \not\subseteq L$ olmak üzere ve $s(K) = 6$, $s(L) = 8$ olduğuna göre $s(K \cup L)$ nin en az kaç elemanlı olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

K kümesi, L nin alt kümesi olmadığından birleşim kümesinin eleman sayısının en az olması için kesişim kümesinde en çok sayıda eleman bulunmalıdır. $K \not\subseteq L$ olduğuna göre $s(K \cap L)$ 6 dan küçük olmalıdır. Bu durumda $s(K \cap L) = 5$ olur.



$$s(K \cup L) = s(K) + s(L) - s(K \cap L)$$
$$= 6 + 8 - 5$$
$$= 9 \text{ bulunur.}$$

10. ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesinin elemanlarının boş kümeden farklı birleşimleri A kümesini veren ayrık iki kümeye kaç farklı şekilde ayrılabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

1. Yol

Bu kümeler X ve Y olsun. A nın her elemanı için bu eleman X veya Y kümesinde olur. Bu durumda her eleman için iki farklı durum oluşur.

$s(A) = 4$ olduğundan $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$ farklı şekilde ayırma işlemi yapılır.

$X \neq \varnothing$ ve $Y \neq \varnothing$ olduğundan $16 - 2 = 14$ şekilde ayırma işlemi gerçekleşir.

X ve Y kümeleri için aynı ayırma işlemi iki kez oluştuğu için 14, ikiye bölünmelidir.

O hâlde sonuç $= \dfrac{2^4 - 2}{2} = 7$ bulunur.

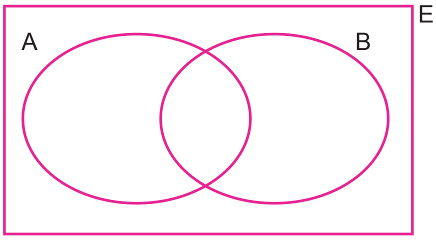
2. Yol

$\{1\}$	$\{2, 3, 4\}$
$\{1, 2\}$	$\{3, 4\}$
$\{1, 4\}$	$\{2, 3\}$
$\{1, 3\}$	$\{2, 4\}$
$\{1, 3, 4\}$	$\{2\}$
$\{1, 2, 4\}$	$\{3\}$
$\{1, 2, 3\}$	$\{4\}$

Bu kümelerden birine 1 elemanını yerleştiriniz. 1 in yanına gelecek her bir eleman ya da elemanlardan kalanlar, diğer kümeyi oluşturur. Bu durumda bütün elemanlar 1 in yanına gelirse diğer küme boş küme olur. Boş kümeden farklı ayrık küme oluşturulması istendiği için sonuç $2^3 - 1 = 7$ olarak bulunur.

Evrensel Küme ve Bir Kümenin Tümleyeni

Belirli bir konuda üzerinde işlem yapılan, bütün kümeleri içine alan, boş kümeden farklı en geniş kümeye evrensel küme denir. Evrensel küme genel olarak E sembolü ile gösterilir.



$A, B \subset E$ olmak üzere $A \cap E = A$, $A \cup E = E$ olur.

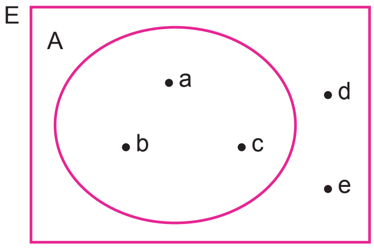
Ege Bölgesi'ne ait illerle ilgili bir işlem yapıldığında bu illerin oluşturduğu en büyük küme Ege Bölgesi illeri olur.

Bu durumda evrensel küme Ege Bölgesindeki illerin kümesi olur.

$A \subset E$ olmak üzere, evrensel kümede olup da A da olmayan elemanların kümesine, A kümesinin tümleyeni denir. A' ile gösterilir.

$A' = \{x \mid x \in E \wedge x \notin A\}$ şeklinde ifade edilir.

Örneğin aşağıdaki şekilde



$E = \{a, b, c, d, e\}$ evrensel kümesinin bir alt kümesi $\{d, e\}$ dir.

Örnekteki $\{d, e\}$ kümesi, A kümesinin tümleyeni olarak bulunur.

$A' = \{d, e\}$, $s(A') = 2$, $A = \{a, b, c\}$, $s(A) = 3$,

$A \cup A' = E$ ve $A \cap A' = \varnothing$ olduğundan

$s(A \cup A') = s(E) = s(A) + s(A') = 3 + 2 = 5$ olur.

Özellikler

Tablo 9.2.1

1	$A \subset E$ olmak üzere $s(E) = s(A) + s(A')$	5	$A \subset B \Rightarrow B' \subset A'$
2	$(A')' = A$	6	$A \cup A' = E$, $A \cap A' = \varnothing$
3	$\varnothing' = E$, $E' = \varnothing$	7	$E \cup A' = E$, $E \cap A' = A'$
4	De Morgan Kuralları $(A \cup B)' = A' \cap B'$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$		

11. ÖRNEK

E, A ve B nin evrensel kümesi olmak üzere $s(A) + s(B') = 23$ ve $s(B) + s(A') = 17$ olduğuna göre $s(E)$ bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{array}{r} s(A) + s(B') = 23 \\ + \underline{s(B) + s(A') = 17} \end{array}$$ eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$s(A) + s(B') + s(B) + s(A') = (s(A) + s(A')) + (s(B) + s(B'))$$
$$23 + 17 = s(E) + s(E)$$
$$40 = 2 \cdot s(E)$$
$$20 = s(E) \text{ olur.}$$

12. ÖRNEK

E, A ile B nin evrensel kümesi olmak üzere $[(A \cap B) \cup (A \cap B')]'$ ifadesini en sade şekilde yazınız.

ÇÖZÜM

$(A \cap B) \cup (A \cap B') = A \cap (B \cup B') = A \cap E = A$ olduğundan
$[(A \cap B) \cup (A \cap B')]' = [A]' = A'$ olur.

Kümelerde Fark İşlemi

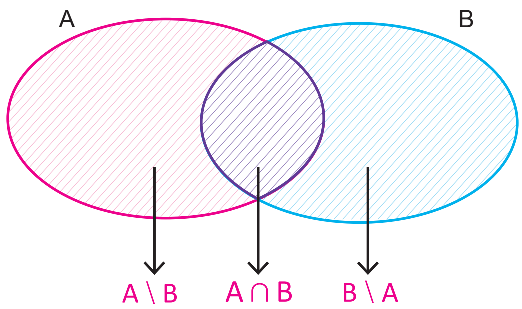
A ve B iki küme olsun.

A kümesinde olup B kümesinde olmayan elemanların oluşturduğu kümeye (yalnız A da olan elemanların oluşturduğu kümeye) A fark B kümesi adı verilir.

$A - B$ veya $A \setminus B$ şeklinde gösterilir. Buna göre

$A - B = A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ olur.

Aşağıdaki taralı alanlar incelendiğinde $s(A \cup B) = s(A \setminus B) + s(B \setminus A) + s(A \cap B)$ olduğu görülür.

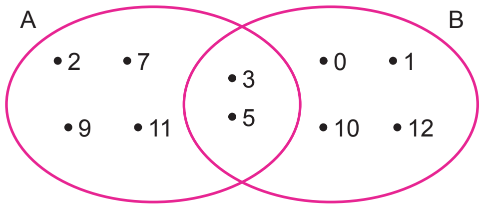


13. ÖRNEK

$A = \{2, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $B = \{0, 1, 3, 5, 10, 12\}$ kümeleri veriliyor.

a) Bu iki kümedeki elemanlar içinden yalnız A da olan elemanların kümesini,
b) Bu iki kümedeki elemanlar içindeki yalnız B de olan elemanların kümesini,
c) $A \cap B$ kümesini liste yöntemiyle yazınız.

ÇÖZÜM



a) Yalnız A da olan elemanların kümesi:
$A - B = \{2, 7, 9, 11\}$
b) Yalnız B de olan elemanların kümesi:
$B - A = \{0, 1, 10, 12\}$
c) $A \cap B = \{3, 5\}$

Özellikler

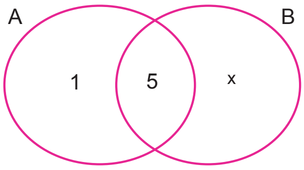
Tablo 9.2.2

1.	$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} = \{x \mid x \in A \wedge x \in B'\} = A \cap B'$ olduğundan $A \setminus B = A \cap B'$ elde edilir.		
2.	$A \setminus A = \varnothing$	3.	$A \setminus \varnothing = A$
4.	$E \setminus A = A'$	5.	$A \setminus E = \varnothing$
6.	$\varnothing \setminus A = \varnothing$	7.	$(A \setminus B)' = (A \cap B')' = A' \cup (B')' = A' \cup B$
8.	$A \subset B \Rightarrow A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ demektir. Ancak $A \subset B$ durumunda $x \notin B$ olamaz. Sonuç olarak $A \subset B \Rightarrow A \setminus B = \varnothing$ olur.		

14. ÖRNEK

$A \not\subset B$ ve $B \not\subset A$ olmak üzere $s(A \cup B) = 20$, $s(A \cap B) = 5$ olduğuna göre $s(B \setminus A)$ nın en çok kaç olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM



$B \setminus A$ kümesinin eleman sayısının en çok olabilmesi için

$A \setminus B$ kümesinin eleman sayısının en az olması gerekir.

$s(A \setminus B) = 1$ ve $s(B \setminus A) = x$ alınırsa

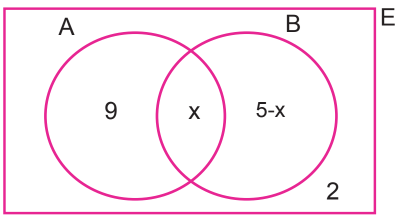
$s(A \cup B) = s(A \setminus B) + s(B \setminus A) + s(A \cap B)$

$20 = 1 + x + 5$ ise $x = 14$ bulunur.

15. ÖRNEK

E, A ile B nin evrensel kümesi olmak üzere $s(A \setminus B) = 9$, $s(B) = 5$ ve $s(A' \cap B') = 2$ olduğuna göre $s(E)$ bulunuz.

ÇÖZÜM



$s(A \cap B) = x$ alınırsa

$s(A' \cap B') = s[(A \cup B)'] = 2$ olur.

$s(B \setminus A) + s(A \cap B) = s(B) = 5$ olduğundan

$s(E) = s(A \setminus B) + s(B \setminus A) + s(A \cap B) + s(A' \cap B')$

$s(E) = 9 + 5 + 2 = 16$ bulunur.

Sıra Sizde

SORU

A ve B, E evrensel kümesinin alt kümeleri olmak üzere $(B \setminus A) \cap (A \cup B')$ ifadesinin en sade şeklini bulunuz.

ÇÖZÜM

Küme İşlemleri ve Sembolik Mantık Kuralları Arasındaki İlişki

Kümelerle sembolik mantık arasında gösterim, sembol ve bunları ifade eden işlemler arasında ilişki vardır. Bu ilişki aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 9.2.3

Sembolik Mantık	0	1	$\vee$	$\wedge$	Değil (')	$\equiv$
Kümeler	$\varnothing$	E	$\cup$	$\cap$	Tümleme (')	$=$

Tablo 9.2.4

Sembolik Mantık	Kümeler
$p \vee p' \equiv 1$	$A \cup A' = E$
$p \wedge p' \equiv 0$	$A \cap A' = \varnothing$
$p \vee 1 \equiv 1$	$A \cup E = E$
$p \vee p \equiv p$ (Tek Kuvvet Özelliği)	$A \cup A = A$ (Tek Kuvvet Özelliği)
$p \wedge p \equiv p$ (Tek Kuvvet Özelliği)	$A \cap A = A$ (Tek Kuvvet Özelliği)
$p \vee q \equiv q \vee p$ (Değişme Özelliği)	$A \cup B = B \cup A$ (Değişme Özelliği)
$(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$ (De Morgan Kuralı)	$(A \cup B)' = A' \cap B'$ (Tümleme İşlemi)
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (Dağılma Özelliği)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (Dağılma Özelliği)

16. ÖRNEK

A ve B boş olmayan iki küme olsun. $(A \cap B)' = A' \cup B'$ eşitliğini sembolik mantık kurallarından yararlanarak gösteriniz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}(A \cap B)' &= \{x \mid x \in (A \cap B)'\}\\ &= \{x \mid (x \in A \wedge x \in B)'\}\\ &= \{x \mid x \in A' \vee x \in B'\}\\ &= \{x \mid x \in (A' \cup B')\}\\ &= A' \cup B' \text{ bulunur.}\end{aligned}$$

17. ÖRNEK

p ve q önermeleri sırasıyla A ve B kümeleriyle ilişkilidir. $(p \wedge q')' \vee p \equiv 0$ olduğuna göre A ve B kümelerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$(p \wedge q')' \vee p' \equiv 0 \Rightarrow p' \equiv 0 \ \wedge \ (p \wedge q')' \equiv 0$$

$$\Rightarrow p \equiv 1 \ \wedge \quad p \wedge q' \equiv 1$$

$p \equiv 1$ olduğundan $1 \wedge q' \equiv 1 \Rightarrow q' \equiv 1 \Rightarrow q \equiv 0$ olur.

p, A kümesi ile q, B kümesi ile ilişkili olduğundan

$p \equiv 1 \Rightarrow A = E$

$q \equiv 0 \Rightarrow B = \varnothing$ bulunur.

18. ÖRNEK

p ve q önermeleri sırasıyla A ve B kümeleriyle ilişkilidir. $[(p \vee q')' \wedge (p' \vee q)']' \vee q'$ önermesinin en sade şeklinin Tablo 9.2.4 e göre karşılık geldiği kümeyi bulunuz.

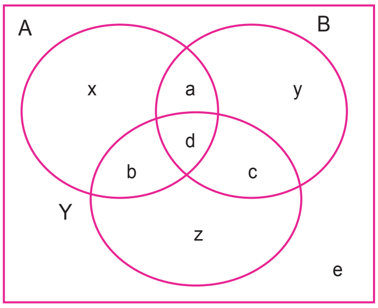
ÇÖZÜM

p, A kümesi ve q, B kümesi ile ilişkili olduğundan

$$
\begin{aligned}
[(p \vee q')' \wedge (p' \vee q)']' \vee q' \rightarrow & [(A \cup B')' \cap (A' \cup B)']' \cup B' \\
& = [(A' \cap B) \cap (A \cap B')]' \cup B' \\
& = [(A \cap A') \cap (B \cap B')]' \cup B' \\
& = \varnothing' \cup B' \\
& = E \cup B' \\
& = E \quad \text{bulunur.}
\end{aligned}
$$

Kümelerle İlgili Uygulamalar

Küme problemlerinde aşağıdaki şekli incelemeniz çözüm aşamasında yararınıza olacaktır.



A: arpa ekilen alan
B: buğday ekilen alan
Y: yulaf ekilen alan
E: evrensel küme

Şekildeki harfler bulundukları bölgenin eleman sayısını ifade etmektedir.

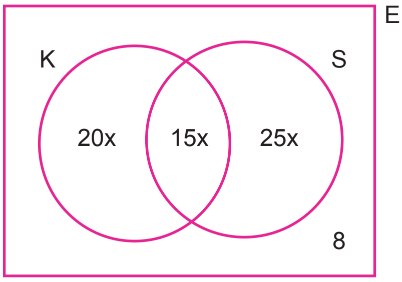
Tablo: 9.2.5

1.	Arpa ekilen alan	$a+b+d+x$
2.	Buğday ekilen alan	$a+c+d+y$
3.	Yulaf ekilen alan	$b+d+c+z$
4.	Yalnız buğday ekilen alan	y
5.	Arpa ve buğday ekilen alan	$a+d$
6.	Her üç ürünün de ekildiği alan	d
7.	Buğday ekilip yulaf ekilmeyen alan	$a+y$
8.	Arpa veya buğday ekilen alan	$a+b+c+d+x+y$
9.	Yalnız bir ürün ekilen alan	$x+y+z$
10.	Yalnız iki ürün ekilen alan	$a+b+c$
11.	En çok bir ürün ekilen alan	$x+y+z+e$
12.	En az bir ürün ekilen alan	$a+b+c+d+x+y+z$
13.	Hiç ürün ekilmeyen (nadasa bırakılan alan)	e
14.	En az iki ürün ekilen alan	$a+b+c+d$
15.	En çok iki ürün ekilen alan	$a+b+c+e+x+y+z$
16.	Yulaf ekilmeyen alan	$a+e+x+y$

19. ÖRNEK

Öğrencilerin kaynaşması için Kapadokya ve Safranbolu'ya yapılacak geziye katılan bir sınıftaki öğrencilerin %35 i Kapadokya'yı, %40 ı Safranbolu'yu, %15 i hem Kapadokya hem de Safranbolu'yu gezmek istiyor. Bu yerlere yapılacak olan gezilerin hiçbirine katılmak istemeyen 8 öğrenci olduğuna göre bu sınıfın mevcudunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Sınıf mevcudu 100x kabul edilirse

$s(K \setminus S) = 20x,\ s(K \cap S) = 15x,\ s(S \setminus K) = 25x$ olur.

$20x + 15x + 25x = 60x$

$100x - 60x = 40x$ ı geziye katılmamıştır.

$40x = 8$ olur.

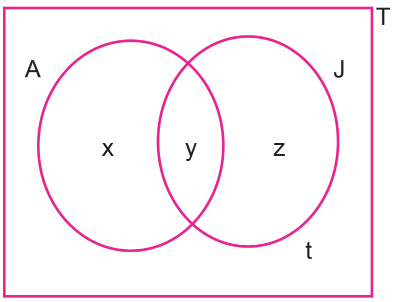
Bu durumda $x = \dfrac{8}{40} = \dfrac{1}{5} = 0,2$ bulunur.

$s(E) = (0,2) \cdot 100 = 20$ olur.

20. ÖRNEK

24 kişilik bir topluluktaki herkes Türkçe bilmektedir. Bu toplulukta Arapça bilmeyen 10 kişi, Japonca bilmeyen 15 kişi ve bu üç dili de bilen 7 kişi olduğuna göre bu toplulukta sadece Arapça bilenlerin sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM



$s(A \setminus J) = x,\ s(A \cap J) = y,\ s(J \setminus A) = z,\ s(A \cup J)' = t$ olsun

$x + y + z + t = 24$ ...(1)

$z + t = 10$ ...(2)

$x + t = 15$ ...(3)

$y = 7$ (4) denklemleri elde edilir. (2) deki değer (1) de yerine yazıldığında $x + y + 10 = 24$ elde edilir.

Buradan $x + y = 14$ bulunur.

$y = 7$ değeri yerine yazılırsa sadece Arapça bilen kişi sayısı $x = 7$ bulunur.

21. ÖRNEK

Bir sınıftaki öğrencilerin %20 si erkektir. Bu öğrencilerden matematik dersinden geçen kızlar; bu dersten kalan erkek öğrencilerin iki katı, tüm öğrencilerin $\frac{1}{3}$ idir . Matematik dersinden kalan 14 kız olduğuna göre bu sınıfın mevcudunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Dersten kalan erkek öğrenci sayısı x olsun. Bu durumda matematik dersinden geçen kız öğrenci sayısı 2x tir. Bu sayı, sınıfın üçte biri olduğundan sınıfın tamamı 6x olur.

Sınıftaki erkek öğrencilerin sayısı: $6x \cdot \dfrac{20}{100} = \dfrac{6x}{5}$ olur.

rler tabloda gösterilirse

	Kız	Erkek	
Geçenler	$2x$		
Kalanlar	14	x	
Toplam	$\dfrac{24x}{5}$	$\dfrac{6x}{5}$	$6x$

$2x + 14 = \dfrac{24x}{5} \Rightarrow 10x + 70 = 24x \Rightarrow x = 5$

O hâlde sınıf mevcudu: $6 \cdot 5 = 30$ olarak bulunur.

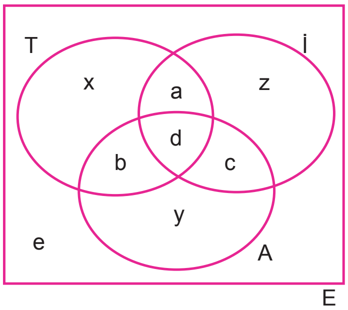
22. ÖRNEK

Bir grubun %70 i İngilizce, %75 i Türkçe, %60 ı Almanca bilmektedir. Bu grubun en az % kaçının her üç dili de bildiğini bulunuz.

ÇÖZÜM

E grubun kümesi, T Türkçe bilenlerin kümesi, İ İngilizce bilenlerin kümesi ve A Almanca bilenlerin kümesi olmak üzere

$s(E)=100$ denirse $s(T)=75,\ s(i)=70,\ s(A)=60$ olur.



$s(T \cup i \cup A) = s(T)+s(i)+s(A)-s(T \cap i)-s(T \cap A)-s(i \cap A)+s(T \cap i \cap A)$

$100-e=75+70+60-(a+d)-(b+d)-(c+d)+d$

$100-e=205-(a+b+c+3d)+d$

$d=105-(a+b+c+d)+e$

d nin en az değeri için e nin en küçük, $(a+b+c+d)$ nin en büyük değeri alması gerekir.

O hâlde $a+b+c+d=100$ ve $e=0$ olmalıdır. Dolayısıyla d nin en küçük değeri 5 bulunur.

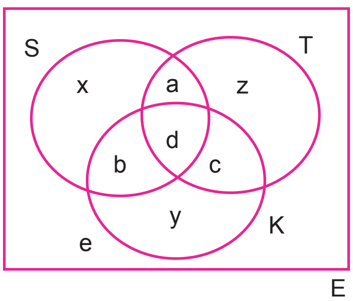
23. ÖRNEK

Sinema, tiyatro ve konser etkinliklerinden en az birini sevenler ile hiçbirini sevmeyenlerden oluşan 25 kişilik bir arkadaş grubunda

1. En az birini seven 24 kişi,
2. Tiyatro veya konser seven 20 kişi,
3. En çok birini seven 10 kişi,
4. Üç etkinliği de seven 3 kişi,
5. Sinema ve tiyatro seven 5 kişi,
6. Sadece konser seven 2 kişi vardır.

Buna göre tiyatro sevip konser sevmeyen kişi sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM



Verilenler yandaki şekle göre yazıldığında

$x+y+z+a+b+c+d+e=25$ ...(1)

$x+y+z+a+b+c+d=24$ ...(2)

$y+z+a+b+c+d=20$ ...(3)

$x+y+z+e=10$ ...(4)

$d=3$ ...(5)

$a+d=5$ ...(6)

$y=2$ ...(7) ise $a+z=?$

(1) eşitliğinden (2) eşitliği çıkarılırsa $e=1$ bulunur.

(2) eşitliğinden (3) eşitliği çıkarılırsa $x=4$ bulunur.

(6) eşitliğinden (5) eşitliği çıkarılırsa $a=2$ bulunur.

(4) eşitliğinde bilinen değerler yerine yazılırsa $4+2+z+1=10$ olur. Buradan $z=3$ bulunur.

Buna göre tiyatro sevip konser sevmeyen kişi sayısı: $a+z=2+3=5$ olarak bulunur.

24. ÖRNEK

$A = \{x \mid x < 500, x \in \mathbb{Z}^+\}$ kümesinin kaç tane elemanı 4 veya 6 ya bölünüp 5 e bölünemeyeceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

M: 4 e bölünenler kümesi, N: 6 ya bölünenler kümesi, P: 5 e bölünenler kümesi olsun.

4 e bölünenlerin sayısı $x = 4k \ (k \in \mathbb{Z}^+)$ için

$4k < 500$ olup $k < \frac{500}{4} = 125$ olur. Dolayısıyla $s(M) = 125 - 1 = 124$

6 ya bölünenlerin sayısı $x = 6k \ (k \in \mathbb{Z}^+)$ için

$6k < 500$ ise $k < \frac{500}{6}$ olup $k < 83,\overline{3}$ $s(N) = 83$ olur.

Benzer şekilde

4 ve 6 ya bölünebilen en küçük doğal sayı 12 olacağından 4 ve 6 ya bölünenlerin sayısı $\frac{500}{12}$ nin tam kısmı 41 olduğundan $s(M \cap N) = 41$ bulunur.

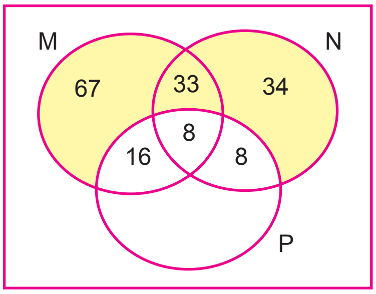
4 ve 5 e bölünebilen en küçük doğal sayı 20 olacağından 4 ve 5 e bölünebilenlerin sayısı $\frac{500}{20} = 25$ olup $s(M \cap P) = 25 - 1 = 24$ olur.

6 ve 5 e bölünebilen en küçük doğal sayı 30 olacağından 6 ve 5 e bölünebilenlerin sayısı $\frac{500}{30}$ tam kısmı 16 olduğundan $s(N \cap P) = 16$ dır.

4, 5 ve 6 ya bölünenlerin sayısı $\frac{500}{60}$ nın tam kısmı 8 dir. O hâlde $s(M \cap N \cap P) = 8$ dir.

$s(M \cup N) = s(M) + s(N) - s(M \cap N) = 124 + 83 - 41 = 166$

Bulunan eleman sayıları kullanılarak Venn şeması oluşturulduğunda

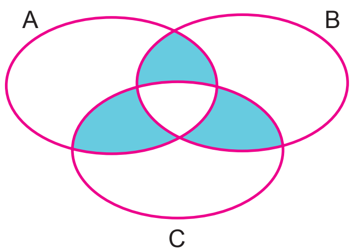


4 veya 6 ya bölünüp 5 e bölünmeyenlerin sayısı

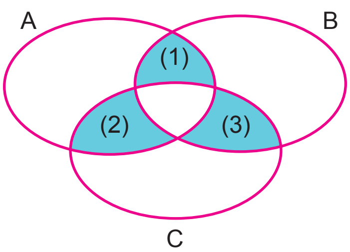
$166 - (16 + 8 + 8) = 166 - 32 = 134$ olur.

25. ÖRNEK

Şekilde verilen boyalı bölgeyi, küme işlemlerini kullanarak ifade ediniz.



ÇÖZÜM



(1) numaralı bölge $(A \cap B) \setminus C$
(2) numaralı bölge $(A \cap C) \setminus B$
(3) numaralı bölge $(B \cap C) \setminus A$
şeklinde ifade edilebilir.

İstenen boyalı bölge, bu üç bölgenin birleşim kümesi olduğundan boyalı bölgenin tamamı:

$[(A \cap B) \setminus C] \cup [(A \cap C) \setminus B] \cup [(B \cap C) \setminus A] = [(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)] \setminus (A \cap B \cap C)$

işlemi ile ifade edilmiş olur.

ALIŞTIRMALAR-2

1. $A \cap B = \{1,3,5,7\}$ ve $A \cap C = \{1,2,3,4,5,6\}$ olduğuna göre $A \cap (B \cup C)$ kümesinin eleman sayısını bulunuz.

2. $A = \{y \mid 10 < y < 160, y = 2k, k \in \mathbb{N}\}$

$B = \{x \mid 30 < x < 200, x = 5k, k \in \mathbb{N}\}$

kümeleri veriliyor. $s(A \cup B)$ değerini bulunuz.

3. $s(A) = 10,\ s(B) = s(C) = 9$

$s(A \cap B) = s(A \cap C) = 3,\ s(B \cap C) = 2$

$s(A \cap B \cap C) = 1$ olduğuna göre

$s(A \cup B \cup C)$ değerini bulunuz.

4. A ve B kümeleri için $s(A) = 5, s(B) = 13$ ve $s(B \setminus A) = 3 \cdot s(A \setminus B)$ olduğuna göre $s(A \cup B)$ değerini bulunuz.

5. $A, B \subseteq E$ olmak üzere

$s(A') + s(B) = 26$

$s(A) + s(B') = 14$ olduğuna göre $s(E)$ değerini bulunuz.

6. $s(K) = 12$ ve $s(L) = 5$ olmak üzere

a) $K \cap L \neq \varnothing$ olduğuna göre $s(K \cup L)$ nin <u>en çok</u> ve<u>en az</u> kaç olduğunu bulunuz.

b) $L \not\subset K$ olduğuna göre $s(K \cup L)$ nin <u>en çok</u> ve <u>en az</u> aç olduğunu bulunuz.

7. $A, B \subset E$ olmak üzere

$A \cap B \neq \varnothing, s(A) = 3 \cdot s(B)$ ve $s(A \cup B) = 23$

olduğuna göre $s(B \setminus A)$ <u>en büyük</u> değerini bulunuz.

8. $[(A \cup \varnothing) \cap (B \cup \varnothing)] \cup A$ ifadesinin en sade şeklini bulunuz.

9. Bir sınıftaki öğrencilerin %55 i matematik, %75 i biyoloji dersinden başarılıdır. Sınıfta her iki dersten başarısız olan öğrenci bulunmamaktadır. Bu sınıfta biyolojiden başarılı olup matematikten başarısız olan 9 öğrenci bulunduğuna göre her iki dersten başarılı olan öğrenci sayısı kaçtır? Bulunuz.

10. Boş olmayan A ve B kümeleri için

$3 \cdot s(A - B) = 8 \cdot s(A \cap B) = 6 \cdot s(B - A)$

olduğuna göre $s(A \cup B)$ nin <u>en küçük</u> değerini bulunuz.

2. Kümelerin Kartezyen Çarpımı

Günümüzde birçok insan rutin hayatında değişiklik yapmak için spor müsabakaları, sinema, tiyatro gibi sosyal etkinliklere gitmektedir. Etkinliğe katılan insanların gösterinin yapıldığı salonlardaki biletlerinde belirtilen yerleri bulmalarına yönelik sorununun nasıl çözülebileceğini düşününüz.

Sıralı İkili

a ile b birer nesne olmak üzere (a,b) şeklindeki ifadeye bir sıralı ikili veya kısaca ikili denir. Buradaki a ile b birer sayı olmak zorunda değildir. a ya bu sıralı ikilinin birinci bileşeni, b ye bu sıralı ikilinin ikinci bileşeni denir.

Benzer şekilde a, b ve c nesneleri kullanılarak oluşturulan (a,b,c) ifadesine de sıralı üçlü denir.

Buradan yola çıkılarak bir genelleme yapıldığında $a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n$ elemanları kullanılarak oluşturulan $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ ifadesine sıralı n li denir.

Örneğin sinema salonlarındaki koltuk numaraları birer sıralı ikilidir.

$(B,7)$

sıra ← B, 7 → koltuk no.

Benzer şekilde bir öğrencinin okulu, sınıfı ve okul numarası birlikte kullanılarak bir üçlü oluşturulabilir. Böylece A lisesinin 9/A sınıfındaki 88 numaralı öğrenci üçlü oluşturarak gösterilebilir.

A Lisesi	9/A	88

Siz de benzer şekilde günlük hayatta karşılaştığımız sıralı ikili, sıralı üçlü, ... , sıralı n li örnekleri bulabilir misiniz?

Sıralı İkililerin Eşitliği

İki sıralı ikili birbirine eşit ise bu sıralı ikililerin aynı sıradaki bileşenleri birbirine eşittir.

$(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow (a=c \text{ ve } b=d)$ olur.

1. ÖRNEK

$(3x+5, y+2)=(-1,7)$ ise (x,y) sıralı ikilisini bulunuz.

ÇÖZÜM

$3x+5=-1$ ve $y+2=7$ ise

$3x=-6$ ve $y=5$ ise $(x,y)=(-2,5)$ olarak bulunur.

$x=-2$

2. ÖRNEK

$\left(2^{3a+b}, 3^{a-b}\right)=\left(4^{a+3}, \frac{1}{9}\right)$ ise $a \cdot b$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$2^{3a+b}=2^{2a+6}$

$3a+b=2a+6$

$a+b=6$

ve

$3^{a-b}=3^{-2}$

$a-b=-2$

$a+b=6$

$\underline{a-b=-2}$

$a=2$

$b=4$ olup $a \cdot b=8$ bulunur.

Kartezyen Çarpım

Boş kümeden farklı A ve B kümeleri verilsin. Birinci bileşeni A kümesinden, ikinci bileşeni B kümesinden alınarak oluşturulan tüm ikililerin kümesine A ve B kümelerinin kartezyen çarpım kümesi veya A kartezyen B denir.

$A \times B$ ortak özellik yöntemiyle $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ ve } y \in B\}$ şeklinde yazılabilir. $A = B$ durumunda $A \times A$ elde edilir ve bu küme A^2 şeklinde gösterilir.

3. ÖRNEK

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ kümeleri verilsin. $A \times B$, $B \times A$ ve $A \times A$ kümelerini liste yöntemiyle yazınız.

ÇÖZÜM

$A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$

$B \times A = \{(a,1),(b,1),(a,2),(b,2),(a,3),(b,3)\}$

$A \times A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

4. ÖRNEK

$M \times N = \{(0,1),(-1,3),(3,5),(0,3),(0,5),(-1,5),(3,1),(3,3),(-1,1)\}$

$N \times P = \{(1,0),(5,0),(3,0)\}$ kümeleri veriliyor.

Buna göre $N \cup (M \cap P)$ kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$M \times N$ deki sıralı ikililerin birinci bileşenlerinin kümesi M yi, ikinci bileşenlerinin kümesi N yi verir. Benzer biçimde $M \times P$ deki sıralı ikililerin ikinci bileşenlerinin kümesi P yi verir. Buna göre

$M = \{0, -1, 3\}$

$N = \{1, 3, 5\}$

$P = \{0\}$ kümeleri bulunur.

Buradan $M \cap P = \{0\}$ ve $N \cup (M \cap P) = \{0, 1, 3, 5\}$ elde edilir.

Kartezyen Çarpımın Özellikleri

1. $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_k\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, ..., b_n\}$ kümeleri verilsin. Bu kümelerin kartezyen çarpımı aşağıdaki tabloda görülmektedir.

Tablo 9.2.6

		B				
		b_1	b_2	b_3	...	b_n
A	a_1	(a_1, b_1)	(a_1, b_2)	(a_1, b_3)	...	(a_1, b_n)
	a_2	(a_2, b_1)	(a_2, b_2)	(a_2, b_3)	...	(a_2, b_n)
	a_3	(a_3, b_1)	(a_3, b_2)	(a_3, b_3)	...	(a_3, b_n)
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	a_k	(a_k, b_1)	(a_k, b_2)	(a_k, b_3)	...	(a_k, b_n)

Tablodaki tüm ikililer, kartezyen çarpım kümesinin elemanlarıdır.

$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), ..., (a_k, b_n)\}$

O hâlde kartezyen çarpım kümesinin eleman sayısı $s(A \times B) = s(A) \cdot s(B) = k \cdot n$ olarak bulunur.

Boş kümeden farklı A ve B kümeleri için $s(A \times B) = s(B \times A) = s(A) \cdot s(B)$ olur.

2. $A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \text{ ve } y \in B\}$

$B \times A = \{(y,x) \mid y \in B \text{ ve } x \in A\}$

Elde edilen ikililerde $A \times B$ kümesinin elemanlarının birinci bileşeni ile ikinci bileşeninin yer değiştirmesiyle $B \times A$ nın elemanları elde edilir.

$x \neq y$ için $(x,y) \neq (y,x)$ olduğuna göre kartezyen çarpım işleminin değişme özelliği yoktur.

$A \neq B$ için $A \times B \neq B \times A$ olur.

3. $A \times (B \cup C) = \{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in (B \cup C)\}$

$= \{(x,y) \mid x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C)\}$

$= \{(x,y) \mid (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C)\}$

$= \{(x,y) \mid (x,y) \in A \times B \vee (x,y) \in A \times C\}$

$= (A \times B) \cup (A \times C)$

olduğundan kartezyen çarpım işleminin birleşim işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ Bu eşitlik, kartezyen çarpım işleminin birleşim işlemi üzerine soldan dağılma özelliği olarak ifade edilir. Buradan yola çıkıldığında kartezyen çarpım işleminin soldan ve sağdan birleşim, kesişim ve fark işlemleri üzerine dağılma özelliği olduğu görülmektedir.

I. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$, $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$

II. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$, $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$

III. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$, $(B \setminus C) \times A = (B \times A) \setminus (C \times A)$

5. ÖRNEK

Bir okuldaki A sınıfında 10 öğrenci, B sınıfında 8 öğrenci vardır. Birinci öğrenci A sınıfından, ikinci öğrenci B sınıfından olacak şekilde 2 öğrenci seçiliyor. Bu ikilinin kaç farklı şekilde oluşturulabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilenlere göre $s(A) = 10$ ve $s(B) = 8$ olur.

$s(A \times B) = s(A) \cdot s(B) = 10 \cdot 8 = 80$ elde edilir.

6. ÖRNEK

$A = \{x \mid -2 < x < 4, x \in \mathbb{Z}\}$

$B = \{x \mid 0 < x^2 < 5, x \in \mathbb{Z}\}$

$C = \{1,2,3,4,5\}$

$s((A \times B) \cup (A \times C))$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$A = \{-1,0,1,2,3\}$ $B = \{-2,-1,1,2\}$ $C = \{1,2,3,4,5\}$

$(A \times B) \cup (A \times C) = A \times (B \cup C)$ (Özellik 3)

$B \cup C = \{-2,-1,1,2,3,4,5\}$, $s(B \cup C) = 7$ ve $s(A) = 5$ değerleri yerine yazıldığında

$s(A \times (B \cup C)) = s(A) \cdot s(B \cup C) = 5 \cdot 7 = 35$ bulunur.

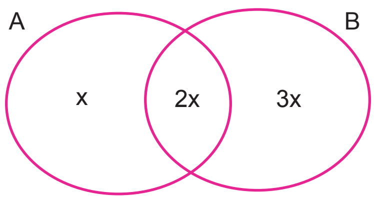
7. ÖRNEK

$5 \cdot s(A) = 3 \cdot s(B)$

$s(A \cap B) = 2 \cdot s(A - B)$

$s(A \cup B) = 24$ olduğuna göre $s[(B \times A) - (A \times A)]$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



$5 \cdot s(A) = 3 \cdot s(B) \Rightarrow s(A) = 3x$ için $s(B) = 5x$ olur.

$s(A \cap B) = 2 \cdot s(A - B) \Rightarrow s(A - B) = x$ için $s(A \cap B) = 2x$ olduğundan $s(B - A) = 3x$ olur.

$s(A \cup B) = x + 2x + 3x = 6x = 24$ ise $x = 4$ bulunur.

$s[(B \times A) - (A \times A)] = s[(B - A) \times A] = s(B - A) \cdot s(A) = 12 \cdot 12 = 144$ olarak bulunur.

8. ÖRNEK

$s(A \times B) = s(A) + s(B) + 10$ olduğuna göre $s[A \times (A \cup B)]$ değeri en çok kaçtır?

ÇÖZÜM

$s(A) = a, s(B) = b$ olmak üzere

$$a \cdot b = a + b + 10$$

$$a \cdot b - a = b + 10$$

$$a(b - 1) = b + 10$$

$$a = \frac{b + 10}{b - 1} = \frac{b - 1 + 11}{b - 1} = 1 + \frac{11}{b - 1}$$ olduğundan $b - 1 = 1$ ise $b = 2$ ve $a = 12$ olur.

$b - 1 = 11$ ise $b = 12$ ve $a = 2$ olur.

$s[A \times (A \cup B)]$nin en çok olması için A kümesinin eleman sayısının en fazla ve A ile B kümelerinin ayrık kümeler olması gerekir.

Bu durumda $s(A) = 12, s(B) = 2$ ve $s(A \cup B) = 14$ olur. Buna göre $s[A \times (A \cup B)] = 12 \cdot 14 = 168$ dir.

Sıra Sizde

SORU

A ve B kümeleri için

$s((A \cup B) \times B) = 132$

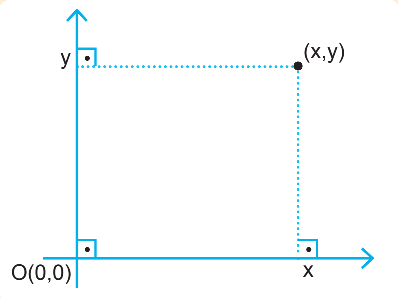
$s((A \cap B) \times B) = 77$ olduğuna göre $s(A - B) + s(B - A)$ toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

Kartezyen Çarpımın Grafiği

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ ve } y \in \mathbb{R}\}$ kümesinin belirttiği noktaların oluşturduğu düzleme kartezyen koordinat sistemi (analitik düzlem) denir.

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ise bu noktaların birinci bileşenine noktanın apsisi, ikinci bileşenine noktanın ordinatı denir. Oluşan (x,y) ikilisine A nın koordinatları adı verilir.



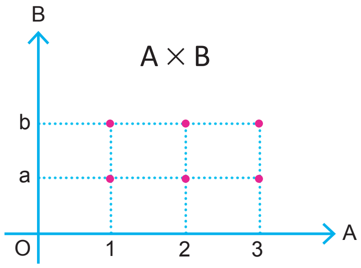
Grafik 9.2.1

A noktasına karşılık gelen sıralı ikili (x,y) ise x e A nın apsisi, y ye A nın ordinatı denir. Oluşan $A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \text{ ve } y \in B\}$ kümesinin elemanlarının analitik düzlemde işaretlenmesiyle elde edilen görüntüye $A \times B$ nin grafiği denir (Grafik 9.2.1).

9. ÖRNEK

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b\}$ olarak veriliyor. $A \times B$ yi analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM



$A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$ kümesindeki sıralı ikililerinin birinci bileşenleri noktanın apsisi, ikinci bileşenleri noktanın ordinatı olacak biçimde analitik düzlemde gösterilir.

10. ÖRNEK

$A = \{a,b,c,d\}$ $B = \{0,1,2,3,4\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre $A \times B$ nin alt kümelerinin kaç tanesinde

a) $(a,0)$ bulunur.
b) $(b,1)$ ve $(d,1)$ bulunur.
c) $(c,0)$ veya $(a,4)$ bulunur.

ÇÖZÜM

$s(A \times B) = 4 \cdot 5 = 20$ dir.

a) $A \times B$ kümesinin $(a,0)$ dışında 19 tane elemanı olduğu için bu kümenin 2^{19} tane alt kümesi vardır. Her bir alt kümeye $(a,0)$ eleman olarak eklenirse $(a,0)$ ın da içinde bulunduğu 2^{19} tane alt küme elde edilir.

b) $A \times B$ kümesinin $(b,1)$ ve $(d,1)$ elemanları dışında 18 tane elemanı vardır. Bu elemanlardan oluşan kümenin, 2^{18} tane alt kümesi vardır. Bu alt kümelerin her birine $(b,1)$ ve $(d,1)$ eleman olarak eklenirse $(b,1)$ ve $(d,1)$ in de içinde bulunduğu 2^{18} tane alt küme elde edilir.

c) Tüm alt kümelerinin sayısı: 2^{20} bulunur.

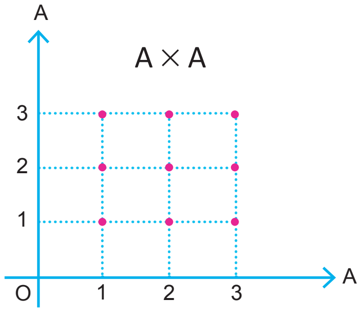
$A \times B$ kümesinin $(c,0)$ ve $(a,4)$ elemanları dışında 18 tane elemanı olduğu için içerisinde $(c,0)$ ve $(a,4)$ elemanları bulunmayan alt küme sayısı 2^{18} bulunur.

Bu durumda $(c,0)$ veya $(a,4)$ elemanlarının bulunduğu alt küme sayısı,

$2^{20} - 2^{18} = 2^{18} \cdot (2^2 - 1) = 3 \cdot 2^{18}$ olur.

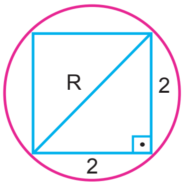
11. ÖRNEK

$A=\{1,2,3\}$ kümesi veriliyor. $A\times A$ kümesinin grafiğini çiziniz. $A\times A$ nın tüm elemanlarını içeren en küçük çemberin çapının kaç birim olduğunu bulunuz.



ÇÖZÜM

$A\times A$ nın tüm elemanlarını içeren çember aşağıda verilmiştir. Şekilde görüldüğü gibi $A\times A$ yı içine alan en küçük çemberin çapı Pisagor teoreminden



$R^2=2^2+2^2$

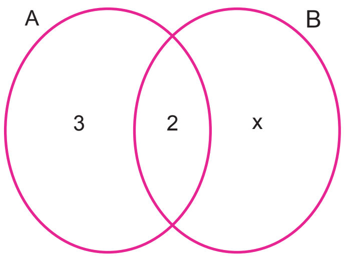
$R^2=8$

$R=2\sqrt{2}$ br olarak bulunur.

12. ÖRNEK

A ve B kümeleri için $s(A\cap B)=2$, $s(A)=5$ ve $s((A\cup B)\times B)=54$ olduğuna göre B kümesinin eleman sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM



Şekle göre $s(B)=x+2$, $s(A\cup B)=x+5$ olur.

Buradan $s((A\cup B)\times B)=s(A\cup B)\cdot s(B)$

$s((A\cup B)\times B)=(x+2)(x+5)=54$

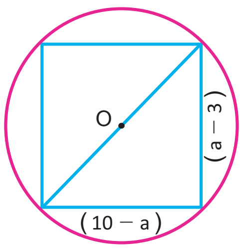
$x^2+7x+10=54\Rightarrow x^2+7x-44=0\Rightarrow(x+11)(x-4)=0$

olup $x=-11$ veya $x=4$ olarak bulunur. Kümelerin eleman sayıları negatif değer alamayacağından $x=4$ olur.
Bu durumda $s(B)=6$ bulunur.

13. ÖRNEK

$A=\{x \mid x\in[a,10], x\in\mathbb{Z}\}$, $B=\{x \mid x\in[3,a], x\in\mathbb{Z}\}$ ve a bir tam sayı olmak üzere $A\times B$ nin tüm elemanlarını içeren en küçük dairenin çevresi 5π olduğuna göre a nın alabileceği değerlerin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM



a bir tam sayı olduğuna göre $A\times B$ nin tüm elemanlarını içeren en küçük dikdörtgenin boyutları $(10-a)$ ve $(a-3)$ birimdir.

Bu dikdörtgeni kapsayan en küçük çember, dikdörtgenin çevrel çemberidir. Çemberin yarıçapı r olsun.

$2\pi r=5\pi$ olup $2r=R=5$ br dir.

Pisagor teoreminden

$(10-a)^2+(a-3)^2=R^2=5^2=25$

$100-20a+a^2+a^2-6a+9=25$

$2a^2-26a+84=0$

$a^2-13a+42=0$

$(a-6)\cdot(a-7)=0$

$a=7$ veya $a=6$ dır. Bu durumda a nın alabileceği değerler toplamı $6+7=13$ olur.

3. Bağıntı

İki kavram arasında kurulan ilişki ya da bağ bağıntı olarak tanımlanır. Veriler arasındaki ilişkiler (üretim ve tüketim arasındaki ilişki, yıllara göre işsizlik oranı vs.) birer bağıntı örneği olarak verilebilir.

A ve B herhangi iki küme olsun. $A \times B$ nin her alt kümesine A dan B ye bağıntı denir. Çoğunlukla $\beta, \beta_1, \beta_2, \ldots$ ile gösterilir. $\beta \subset A \times B$ olur.

Bu tanıma göre $s(A) = m, s(B) = n$ olarak verildiğinde $s(A \times B) = m \cdot n$ olduğu için A dan B ye tanımlanabilecek bütün bağıntıların sayısı, $2^{m.n}$ olarak hesaplanır.

$(x,y) \in \beta$ ise bu durum $y \beta x$ şeklinde yazılır ve y elemanı, β bağıntısı ile x elemanına bağlıdır diye okunur.

$A \times A$ nın her alt kümesine A da bir bağıntı denir.

1. ÖRNEK

$A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{5,7\}$ kümeleri veriliyor. Aşağıda tanımlanan kümelerin A dan B ye bağıntı olup olmadığını inceleyiniz.

$\beta_1 = \{(a,5),(c,5),(d,5),(d,7)\}$

$\beta_2 = \{(c,5),(a,7),(d,1)\}$

$\beta_3 = \{\ \}$

$\beta_4 = \{(b,5),(a,7),(5,c),(c,7),(a,5)\}$

$\beta_5 = A \times B$

ÇÖZÜM

$A \times B = \{(a,5),(a,7),(b,5),(b,7),(c,5),(c,7),(d,5),(d,7)\}$ olur.

$\beta_1 \subset A \times B$ olduğundan β_1, A dan B ye bir bağıntıdır.

$(d,1) \notin A \times B$ olduğundan $\beta_2 \not\subset A \times B$ dir. β_2, A dan B ye bir bağıntı değildir.

$\{\ \} \subseteq A \times B$ olduğundan β_3 A dan B ye bir bağıntıdır.

$(5,c) \notin A \times B$ olduğundan $\beta_4 \not\subset A \times B$ dir. β_4, A dan B ye bir bağıntı değildir.

$A \times B \subset A \times B$ olduğundan β_5 A dan B ye bir bağıntıdır.

2. ÖRNEK

$A = \{a,b\}$ $B = \{1,2,3\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre

a) A dan B ye tanımlanan bağıntı sayısını bulunuz.

b) A dan B ye tanımlanan kaç bağıntıda $(a,1)$ veya $(b,1)$ elemanlarının bulunduğunu hesaplayınız.

c) B de tanımlanan kaç bağıntıda $(1,3)$ elemanının bulunduğunu, $(3,1)$ elemanının bulunmadığını hesaplayınız.

ç) $\beta = \{(x,y) \mid x \geq y, (x,y) \in B \times B\}$ bağıntısının elemanlarını yazınız.

ÇÖZÜM

a) $s(A \times B) = 2 \cdot 3 = 6$ olduğundan A dan B ye bağıntı sayısı $= 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$ olur.

b) Tüm bağıntıların sayısı: $2^6 = 64$ bulunur.

$A \times B$ kümesinin $(a,1)$ ve $(b,1)$ elemanları dışında 4 tane elemanı olduğu için içerisinde $(a,1)$ ve $(b,1)$ elemanlarının bulunmadığı bağıntı sayısı: $2^4 = 16$ bulunur.

Bu durumda $(a,1)$ veya $(b,1)$ elemanlarının bulunduğu bağıntı sayısı: $64 - 16 = 48$ olur.

c) $B \times B$ de $s(B \times B) = s(B) \cdot s(B) = 3 \cdot 3 = 9$ olduğundan $(1,3)$ ve $(3,1)$ elemanları dışında 7 eleman vardır. Dolayısıyla oluşan $2^7 = 128$ tane bağıntıya $(1,3)$ elemanı eklenir, $(3,1)$ eklenmezse 128 tane bağıntıda $(1,3)$ elemanı bulunur, $(3,1)$ elemanı bulunmaz.

ç) $\beta = \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

Bağıntının Grafiği

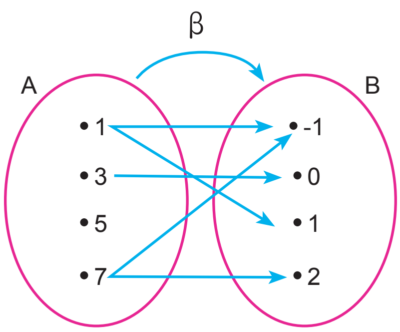
Bir bağıntının grafiği, bu bağıntının elamanlarının analitik düzlemde işaretlenmesiyle elde edilir.

3. ÖRNEK

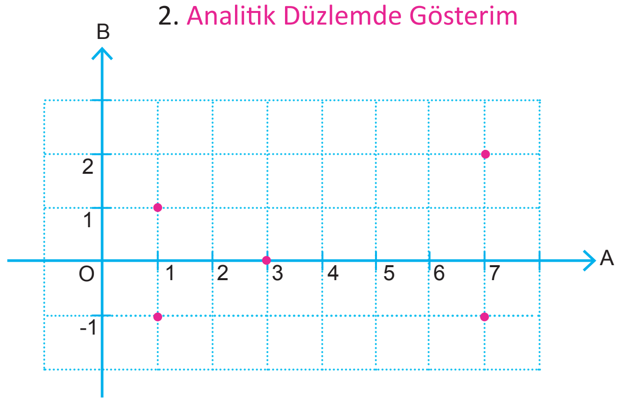
$A=\{1,3,5,7\}$ ve $B=\{-1,0,1,2\}$ kümeleri verilsin.
$\beta=\{(1,-1),(3,0),(1,1),(7,2),(7,-1)\}$ bağıntısını venn şeması ve analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM

1. Venn Şeması ile Gösterim



2. Analitik Düzlemde Gösterim



Bağıntının Tersi

A dan B ye tanımlı $\beta=\{(x,y)\mid x\in A \text{ ve } y\in B\}$ bağıntısının tersi $\beta^{-1}=\{(y,x)\mid y\in B \text{ ve } x\in A\}$ bağıntısıdır.

$(x,y)\in\beta \Leftrightarrow (y,x)\in\beta^{-1}$ ve

$\beta\subset A\times B \Leftrightarrow \beta^{-1}\subset B\times A$ olur.

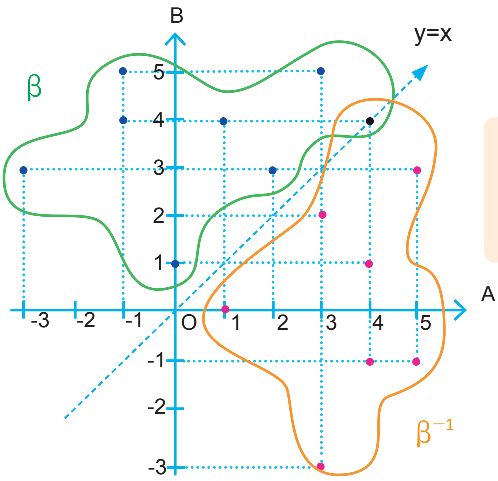
4. ÖRNEK

$A=\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$, $B=\{1,3,4,5\}$ kümeleri için A dan B ye
$\beta=\{(-3,3),(-1,4),(0,1),(-1,5),(1,4),(3,5),(4,4),(2,3)\}$ bağıntısı veriliyor.
Buna göre β ile β^{-1} bağıntılarının grafiklerini analitik düzlemde çiziniz.

ÇÖZÜM

$\beta=\{(-3,3),(-1,4),(0,1),(-1,5),(1,4),(3,5),(4,4),(2,3)\}$

$\beta^{-1}=\{(3,-3),(4,-1),(1,0),(5,-1),(4,1),(5,3),(4,4),(3,2)\}$ olur.



Yandaki şekilde de görüldüğü gibi β ile β^{-1} bağıntılarının grafikleri $y=x$ (1. açıortay doğrusu) doğrusuna göre simetriktir.

5. ÖRNEK

$A=\{x \mid -3<x\le 4, x\in\mathbb{Z}\}$ olmak üzere A da tanımlanan $\beta=\{(x,y)\mid y^x=4,(x,y)\in A\times A\}$ bağıntısı veriliyor. β ve β^{-1} bağıntılarının elemanlarını yazınız ve β bağıntısını Venn şeması yöntemiyle gösteriniz.

ÇÖZÜM

$A=\{-2,-1,0,1,2,3,4\}$ kümesine göre istenen bağıntının koşulu göz önünde bulundurulduğunda

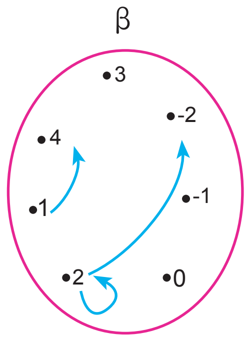
$y^x=4\Rightarrow y=4$ için $x=1$

$y=2$ için $x=2$

$y=-2$ için $x=2$ dir. Bu durumda

$\beta=\{(1,4),(2,2),(2,-2)\}$ ve $\beta^{-1}=\{(4,1),(2,2),(-2,2)\}$ olur.

A dan A ya tanımlı β bağıntısına ait grafik yanda verilmiştir.



6. ÖRNEK

$C=\{1,2,3,4\}$ ve $D=\{0,1,2,5\}$ kümeleri veriliyor.

a) $\beta_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 13,\ (x,y)\in C\times D\}$ bağıntısını bulunuz.

b) $\beta_2=\{(x,y)\mid y=x+1,\ (x,y)\in C\times C\}$ ise β_2^{-1} bağıntısını bulunuz.

ÇÖZÜM

C ve D kümelerinin elemanları β_1 ve β_2 bağıntılarında belirtilen özelliklere göre yazılırsa

$\beta_1=\{(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1),(3,2)\}$

$\beta_2=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ ise $\beta_2^{-1}=\{(2,1),(3,2),(4,3)\}$ olur.

Sıra Sizde

SORU

$A=\{x \mid -20<x\le 18, x=2k, k\in\mathbb{Z}\}$ kümesinde tanımlı

$\beta=\{(x,y)\mid y=3x,(x,y)\in A\times A\}$ bağıntısı veriliyor.

β^{-1} ters bağıntısının grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

Yukarıdaki A kümesinde tanımlı bir β bağıntısı yazınız. Bağıntınızın tersinin grafiğini çiziniz.

ALIŞTIRMALAR-3

1. $A \times B = \{(a,8),(b,0),(a,-1),(c,0),(c,8),(b,-1),(a,0),(b,8),(c,-1)\}$
$C \times D = \{(-1,c),(0,c),(3,d),(3,c),(-1,d),(0,d)\}$
$s[(D-A)\times(B\cup C)]$ değerini bulunuz.

2. $(2a+b-3, a+3b-5) = (a-5b, 7a+3)$
olduğuna göre $a \cdot b$ değerini bulunuz.

3. $\left(\sqrt{x+7}, \frac{1}{8}\right) = \left(3, x^{(y+5)}\right)$ ise $x-y$ değerini bulunuz.

4. $A = \{x \mid x < 4, x \in \mathbb{N}\}$
$B = \{-2,-1,0,1\}$ kümeleri veriliyor.

a) $s(A \times B)$ değerini bulunuz.

b) $(A \times B)$ yi analitik düzlemde gösteriniz.

c) $(A \times B)$ nin kaç tane alt kümesinde $(0,0)$ bulunmaz?

ç) $(A \times B)$ nin kaç alt kümesinde $(1,-1)$ veya $(3,1)$ bulunur?

5. $K = \{x \mid x < 20,\ x = 3k,\ k \in \mathbb{N}\}$
$L = \{y \mid 10 < y^2 < 145,\ y \in \mathbb{Z}\}$
$M = \{z \mid 8 < z \le 20,\ z \in \mathbb{Z}\}$ olduğuna göre
$s((K \times M) \cap (K \times L))$ değerini bulunuz.

6. $a \in \mathbb{Z}$ olmak üzere
$M = \{x \mid a \le x \le 8, x \in \mathbb{Z}\}$
$N = \{y \mid 2 \le y \le a, y \in \mathbb{Z}\}$
$M \times N$ nin tüm elemanlarını içeren en küçük dikdörtgenin alanı 9 birimkare olduğuna göre a nın kaç birim olduğunu bulunuz.

7. $A = \{-2,1,3,5\}$ ve $B = \{3,8\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre

a) A dan B ye kaç farklı bağıntı yazılabileceğini bulunuz.

b) A dan B ye tanımlanan kaç bağıntıda $(1,8)$ ve $(5,8)$ bulunur.

c) A dan B ye tanımlanan kaç bağıntıda $(5,8)$ bulunur ancak $(3,3)$ bulunmaz.

ç) A dan B ye tanımlanan <u>en çok</u> bir elemanlı kaç tane bağıntı vardır?

8. $A = \{-2,1,3,5\}$ $B = \{3,8\}$ kümeleri veriliyor. Buna göre aşağıdaki bağıntıları koordinat sisteminde gösteriniz.

a) $\beta_1 = \{(x,y) \mid x < y,\ (x,y) \in A \times B\}$

b) $\beta_2 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 > 15\ (x,y) \in A \times B\}$

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A) Aşağıdaki 1-4. cümlelerde boş bırakılan yerlere uygun sözcük ya da değerleri yazınız.

1. Bir kümenin kendisi dışındaki her bir alt kümesine .... denir.

2. A kümesinin elemanları dışında kalan elemanların oluşturduğu kümeye A kümesinin .... denir.

3. "SEVGİ" sözcüğünü oluşturan harflerin kümesi A, "SAYGI" sözcüğünü oluşturan harflerin kümesi B ise $s(A \cup B) =$ .... bulunur.

4. $s(A \times B) = 152,\ s(B) = 8$ olduğuna göre $s(A) =$ .... bulunur.

B) Aşağıda 5. soruda numaralar ile verilen ifadeleri, harf ile verilen ifadelerle eşleştiriniz.

5.

Herkesin en az bir kursa katıldığı 72 kişilik bir grupta 56 kişi hızlı okuma kursuna, 30 kişi yağlı boya resim kursuna katılmıştır. Her iki kursa katılan kişi sayısı	1.	a)	24
$(2x - 3y,\ y + 3) = (-6,\ 1)$ olduğuna göre $x + y$ toplamı	2.	b)	13
A kümesinin eleman sayısı 5, B kümesinin eleman sayısı 13 olduğuna göre $A \cup B$ kümesinin en az	3.	c)	14
$A \not\subset B$ ve $B \not\subset A$ olmak üzere $s(A \cup B) = 32$, $s(A \cap B) = 7$ olduğuna göre $s(A \setminus B)$ en çok	4.	ç)	-8
		d)	28
		e)	-12

C) Aşağıda 6-9. açık uçlu soruların cevaplarını boş bırakılan yerlere yazınız.

6. $A = \{x \mid -6 \leq x \leq 25, x = 2k; x, k \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin eleman sayısını bulunuz.

7. Bir kümenin eleman sayısı 4 arttırıldığında alt küme sayısı 60 arttığına göre bu kümenin öz alt küme sayısını bulunuz.

8. $(a + 3b, 5a - 2b + 4) = (3, 2)$ olduğuna göre $a + b$ toplamını bulunuz.

9. $A \cap B = \{h, a, m, s, i\}$ ve $C = \{k, e, f, a, l\}$ olduğuna göre $(A \times C) \cap (B \times C)$ kümesinin eleman sayısını bulunuz.

Ç) Aşağıda 10-39. çoktan seçmeli soruları okuyunuz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

10. Aşağıdaki ifadelerden hangisi iyi tanımlanmış değildir?

A) Kış mevsiminin ayları
B) Apartmanımızdaki insanlar
C) Güzel çocuklar
D) Ülkemizin coğrafi bölgeleri
E) İki basamaklı doğal sayılar

11. $A=\{1,2,\{1\},\{1,2\},3,\{1,2,3\}\}$ kümesi için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $\{1,2\}\in A$
B) $\{1,2\}\subset A$
C) $\{1\}\subset A$
D) $\{1,2,3\}\in A$
E) $\{2\}\in A$

12. A, B ve C kümelerinin evrensel kümesi E olmak üzere $s(A)+s(B')=15$
$s(A')+s(B)=21$, $s(C')=7$ olduğuna göre $s(C)$ kaçtır?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

13. I. $A=\{x\mid -1<x<7,\ x\in\mathbb{N}\}$
II. $B=\{y\mid y>-1,\ y\in\mathbb{Z}\}$
III. $C=\{z\mid z^2+5=0,\ z\in\mathbb{N}\}$
IV. $D=\{t\mid 1<t<2,\ t\in\mathbb{R}\}$
V. $E=\{m\mid m \text{ haftanın bir günüdür}\}$

Yukarıda verilen kümelerden hangisi ya da hangileri sonlu kümedir?

A) Yalnız V B) I ve III C) III ve IV D) I, II ve IV E) I, III ve V

14. A, B ve C kümelerinin evrensel kümesi E olmak üzere
I. $A\subset E$
II. $\varnothing\subset A$
III. $(A\subset B)\wedge(B\subset C)\Rightarrow A\subset C$
IV. $(A\subset B)\wedge(B\subset A)\Leftrightarrow A=B$
V. $A\subset A$

Yukarıdaki önermelerden kaç tanesi doğrudur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

15. $\dfrac{s(A\cap B)}{2}=\dfrac{s(A\setminus B)}{3}=\dfrac{s(B\setminus A)}{4}$ ve
$s(A\setminus B)+s(B\setminus A)=28$
olduğuna göre $s(A\cap B)$ kaçtır?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

16. $T = \{x \mid 25 < x \le 180,\ x = 5k,\ k \in \mathbb{N}\}$
$R = \{y \mid 60 \le y < 200,\ y = 3t,\ t \in \mathbb{N}\}$
kümeleri veriliyor. Buna göre, $R \setminus T$ kümesinin eleman sayısı aşağıdakilerden hangisi olur?

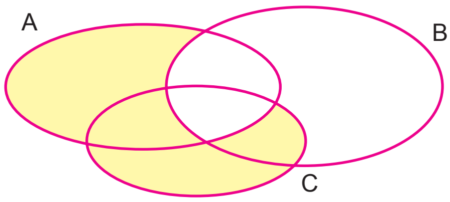
A) 32 B) 34 C) 36 D) 38 E) 40

17. $T = \{x \mid x^2 \le 9, x \in \mathbb{N}\}$ veriliyor.
Aşağıdakilerden hangileri T den $\mathbb{Z}$ ye bir bağıntı değildir?

I. $\beta_1 = \{(1,0),(-3,5),(0,-5)\}$
II. $\beta_2 = \left\{(3,3),\left(2,\frac{1}{5}\right)\right\}$
III. $\beta_3 = \{\ \}$
IV. $\beta_4 = T \times T$

A) I-III B) II-III C) I-II D) II-IV E) III-IV

18.



Şekilde verilen boyalı bölge hangi seçenekte doğru verilmiştir?

A) $(A \cup B \cup C) - (A \cup C)$
B) $(A - B) \cup (C - A)$
C) $(A \cup B) - (A \cap B \cap C)$
D) $(A - (B \cup C)) \cup (B - A)$
E) $(C - A) \cup (B \cup A')$

19. Futbol veya voleybol oynayanlardan oluşan bir grupta hem futbol hem voleybol oynayanlar, sadece futbol oynayanların 3 katının 5 eksiğidir. Voleybol oynayanlar, futbol oynayanların 2 katıdır. En çok bir oyun oynayan 13 kişi olduğuna göre grup kaç kişidir?

A) 17 B) 19 C) 21 D) 23 E) 25

20. A ve B kümeleri E evrensel kümesinin iki alt kümesi olmak üzere $(B \setminus A)' \cap (A \cap B)'$ ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) B B) E C) B' D) $\varnothing$ E) A'

21. Bir sınıftaki öğrencilerin %40 ı matematikten, %20 si hem matematik hem de fizikten kalmış, %70 i ise fizikten geçmiştir. Sadece fizikten kalan 4 kişi olduğuna göre hem matematik hem de fizikten geçen kaç öğrenci vardır?

A) 18 B) 20 C) 24 D) 25 E) 30

22. $A = \{x \mid x = 5k,\ x < 250,\ k \in \mathbb{N}\}$
$B = \{y \mid y = 4t,\ y \le 300,\ t \in \mathbb{N}\}$ ise $s(A \cup B)$ kaçtır?

A) 75 B) 84 C) 96 D) 113 E) 122

23. $A = \{0,1,2,3,4\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde en az bir çift sayı bulunur?

A) 24 B) 26 C) 28 D) 30 E) 32

24. $A = \{x \mid -1 \le x < 3, x \in \mathbb{Z}\}$
$B = \{y \mid 3 < y < 12,\ y \text{ asal sayı}\}$
$C = \{z \mid z < 7,\ z \in \mathbb{N}\}$ olduğuna göre
$s[(A \cup C) \times (B - C)]$ kaçtır?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

25. $A = \{1, 2, a, b\}$
$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, a, b\}$ kümeleri veriliyor.
$A \subset C \subset B$ koşulunu sağlayan kaç farklı C kümesi yazılabilir?

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

26. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ise
A da tanımlı kaç bağıntıda $(1, 2)$ bulunur, $(5, 3)$ bulunmaz?

A) 2^{23} B) 2^{24} C) 2^{25} D) 2^{26} E) 2^{27}

27. $A \cap B \neq \varnothing$ olmak üzere $s(A) = 7$ ve $s(B) = 4$ olduğuna göre $s(A \cup B)$ nin alabileceği en küçük değer ile en büyük değerin toplamı kaç olur?

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 20

28. $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 7\}$
$A \times C = \{(3,5), (3,8), (4,5), (4,8)\}$ kümeleri veriliyor. $A \cap B = \varnothing$ olduğuna göre $B \cap C$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{4, 2\}$ B) $\{5, 6\}$ C) $\{5\}$ D) $\{7\}$ E) $\{3, 8\}$

29. Alt küme sayısı, eleman sayısının 32 katı olan bir küme kaç elemanlıdır?

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

30. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ olduğuna göre $A \times A$ nın kaç alt kümesinde $(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)$ birlikte bulunur?

A) 2^{18} B) 2^{16} C) 2^{14} D) 2^{12} E) 2^{10}

31. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ kümesinin elemanları, boş olmayan iki ayrık kümeye kaç farklı şekilde ayrılabilir?

A) 185 B) 255 C) 511 D) 678 E) 1023

32. $A=\{x \mid 10 \leq x < 80, x \in \mathbb{Z}\}$ kümesi üzerinde tanımlanan $\beta=\{(x,y) \mid y=5x\}$ veriliyor. Bu bağıntının eleman sayısı kaçtır?

A) 10
B) 9
C) 8
D) 7
E) 6

33. $\{0,1,2,3,4\}$ kümesinin alt kümelerinin kaç tanesinde ne 1 ne de 2 bulunur?

A) 8 B) 12 C) 16 D) 24 E) 32

34. $A=\{x \mid x < 650, x \in \mathbb{Z}^+\}$ kümesinin elemanlarından kaç tanesi 7 veya 6 ya tam bölünür, 4 e <u>bölünemez</u>?

A) 115 B) 110 C) 100 D) 96 E) 85

35. Tam sayılar kümesinde tanımlı $\beta=\{(x,y) \mid y=2x+m\}$ bağıntısı veriliyor. $(3,-5) \in \beta^{-1}$ olduğuna göre m kaçtır?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

36. $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ kümesinin herhangi iki ardışık sayı içermeyen kaç alt kümesi vardır?

A) 34 B) 45 C) 55 D) 78 E) 89

37. $A=\{x \mid x < 50, x \in \mathbb{N}\}$ kümesinin elemanlarından kaç tanesi ne 2 ne de 3 ile tam bölünür?

A) 40 B) 41 C) 42 D) 43 E) 44

38. $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ kümesinin alt kümelerindeki elemanların sayı değerleri toplamı kaçtır?

A) 1578 B) 1680 C) 1792 D) 2560 E) 2816

39. Bir sınıftaki öğrencilerden kimya dersinden geçen herkes edebiyat dersinden de geçmiştir. Bu sınıfta matematik ve kimya dersinden geçen öğrenci bulunmamaktadır.

- En çok bir dersten geçen 15 kişi,
- Edebiyat dersinden geçip kimya dersinden kalan 7 kişi,
- Kimya dersinden kalan 18 kişi bulunduğuna göre

sadece edebiyat dersinden geçen kaç kişi vardır?

A) 8 B) 7 C) 5 D) 4 E) 3

SAYILAR VE CEBİR

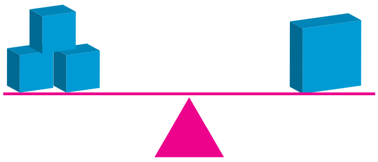
9.3. DENKLEMLER ve EŞİTSİZLİKLER

Neler Öğreneceksiniz?

- Sayı kümelerini (doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar, irrasyonel sayılar ve gerçek sayılar) ve bu kümelerin arasındaki ilişkiyi,
- Gerçek sayılar kümesindeki işlemlerin özelliklerini,
- Birinci dereceden bir ve iki bilinmeyenli denklem ve eşitsizlik sistemlerinin özelliklerini, bunların çözüm kümelerini analitik düzlemde göstermeyi ve kartezyen çarpımını,
- Mutlak değer kavramını, mutlak değerli denklem ve eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulmayı,
- Üslü ve köklü ifadeleri içeren denklemlerle ilgili uygulamaları yapmayı,
- Oran ve orantı (doğru ve ters orantı) kavramlarını ve bunların çözüm yöntemlerini, altın oran kavramını, bunlarla ilgili günlük hayat problemlerini modellemeyi ve çözmeyi,
- Farklı problem türleriyle ilgili (sayı, kesir, yaş, yüzde, kâr zarar, faiz, karışım, hareket, işçi havuz vb.) bilgileri yorumlamayı ve çözmeyi, birimler arası dönüşümleri öğreneceksiniz.

Denklem ve Eşitsizlikleri Öğrenmek Neden Önemlidir?

- Tam sayılar ve rasyonel sayılar, insanların yaşadığı çevrede karşılaştığı olay ve durumları doğru biçimde ölçmesinde ve tanımlayabilmesinde yeterli olmamıştır. Daha ayrıntılı ve güvenilir bilgilere ulaşabilmek için farklı sayı kümelerine ihtiyaç duyulmuştur.
- Ülkemizdeki bölgesel sıcaklık değerlerindeki sapmalarda, üretim miktarlarındaki hata payı hesaplamalarında mutlak değerli denklemler ve eşitsizlikler kullanılır.
- Bunun yanında çok büyük veya çok küçük sayıları içeren durumlarla ilgili ifadelerde üslü denklemler kullanmak, işlemleri kolaylaşmaktadır.
- Günlük hayattaki boy kilo karşılaştırmalarında, nesnelerin maketlerinin yapımında oran ve orantı kavram ve hesaplamaları kullanılmaktadır.
- Gerçek hayatta karşılaşılan problemlerin çözümünde denklem veya eşitsizlikleri kullanmak, denklemi anlamayı ve yorumlamayı kolaylaştıracağından çözüme ulaşmada fayda sağlayacaktır. GSM operatörlerinin tarifelerinden uygun ve ekonomik olanı seçmek, alışveriş merkezlerindeki indirimlerden kârlı olanları belirlemek bunlara örnek olarak gösterilebilir.



Görsel 3.1.1: Hârezmî'nin Özbekistan'ın Khiva (Hive) şehrinde bulunan heykeli

İnsanlar, sayıları bulmadan önce sahip oldukları nesnelerin miktarını belirlemek için sayma ve eşleme gibi yöntemler kullanmışlardır.

MÖ 3500'lü yıllarda Sümerler tarafından kil tabletlere yazılan bazı şekiller, bilinen en eski rakamlar olarak kabul edilmektedir.

Hintli Matematikçi Brahmagupta (Bramagupta 598-660); "Siddhanta" (Sidanta) adlı eserinde, dokuz ayrı sayı işareti ve sıfır ile hesap yapmaya dair kuralları göstermiştir. Brahmagupta bu eserinde ayrıca borç anlamına gelen negatif sayılardan da bahsetmiştir.

Hârizm Türklerinden olduğu bilinen Matematikçi Hârizmi'nin (780-850) en önemli özelliği, İslam dünyasında ilk defa yuvarlak bir şekil olan sıfırla beraber Hint rakamlarını ve ondalık konumlu sayı sistemini kullanmış olmasıdır (Görsel 3.1.1). Hârezmî, "Kitâbü'l-Muhtasar fi hisâbi'l-cebr ve'l-mukabele" adlı eserinde sıfırın dâhil edildiği yeni sayı sistemi ile çok yüksek basamaklı sayıların nasıl kolayca gösterilebileceğini anlatır. Bu kitap, adında "cebir" kelimesini taşıyan ilk matematik kitabıdır.

Hârezmî, "Sekiz, diğer sekizden çıkınca geriye bir şey kalmaz. Bu takdirde hanenin boş kalmaması için bir dairecik koy! Dairecik, boş hanenin yerine geçmek zorundadır." diyerek sıfırı tanımlamıştır.

Hârezmî, bilimin gelişmesine sağladığı katkılardan dolayı saygı duyulması gereken İslam bilginlerindendir. Cebirsel niceliği, açık şekilde ortaya koyan ve cebirsel denklemleri çözerken analitik çözüm yanında geometrik çizimi de kullanan ilk matematikçi Hârizmi'dir. Onun bu ilme yaptığı bir diğer önemli katkı ise cebirsel denklemleri çözerken yapılacak işlemleri, bir sıra düzenine koymak suretiyle bunları cebre uygulamasıdır. Bu yönteme daha sonra matematik tarihinde "algoritma" denilmiştir.

Kaynak: İslam Tarihi Ansiklopedisi, Cilt 7, S.196

9.3.1. SAYI KÜMELERİ

Etkinlik

Eski uygarlıklar (Sümer, Babil, Mısır, Roma vb.) döneminde sayma işlemleri için farklı yöntemler ve semboller kullanılmıştır. "Bire bir eşleme yöntemi" ise en çok kullanılan yöntemlerden biri olmuştur. Buna göre

- "Bire bir eşleme yöntemi" sözünden ne anlıyorsunuz?
- Rakamların ve sayı saymanın bilinmediği bir dönemde yaşadığınızı düşünün. Bu durumda
  - a) Sınıfınızdaki öğrenci sayısını nasıl ifade ederdiniz? Bir şehrin ya da ülkenin nüfusu gibi kalabalık gruplardaki kişi sayısını nasıl bulurdunuz?
  - b) Günlerin takibi, alışveriş, miras paylaşımı gibi durumlarda nasıl bir yol izlerdiniz?
- Nesneleri saymanın dışında, bir bütünü parçalara ayırıp ifade etme, hava sıcaklığındaki değişiklikleri belirtme gibi farklı konularda kolaylık sağlanması için ihtiyaç duyulan sayı kümeleri hangileridir?
- Şu ana kadar öğrenmiş olduğunuz sayı kümelerini belirterek bu kümeleri birbirleriyle ilişkilendiriniz.

1. Sayı Kümeleri Arasındaki İlişki

Doğal Sayılar Kümesi

Sayıları yazmak için kullanılan sembollere rakam adı verilir.

Rakamlar kümesi $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ dir.

Sayma sayılarına sıfırın eklenmesiyle elde edilen kümeye doğal sayılar kümesi denir.

$\mathbb{N}$ ile gösterilir. $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,...\}$ dir.

a, b, c birer rakam olmak üzere
ab iki basamaklı bir sayı olsun. $ab = 10a + b$
abc üç basamaklı bir sayı olsun. $abc = 100a + 10b + c$ *şeklinde yazılır.*

1. ÖRNEK

İki basamaklı ab doğal sayısı verilsin. ab sayısının rakamları yer değiştirdiğinde bu sayı 45 azaldığına göre kaç farklı ab sayısı olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

ab sayısının rakamları yer değiştirdiğinde oluşan yeni sayı ba olur.

$ab - 45 = ba$ olduğundan

$10a + b - 45 = 10b + a \Rightarrow 9a - 9b = 45 \Rightarrow 9(a-b) = 45 \Rightarrow a - b = 5$ olur.

Bu eşitliği sağlayan ab sayıları 94, 83, 72, 61, 50 olmak üzere 5 farklı sayı vardır.

2. ÖRNEK

a ve b birer doğal sayı olmak üzere $a \cdot b = 35$ ise $a + b$ nin alabileceği en büyük ve en küçük değerleri bulunuz.

ÇÖZÜM

Toplamın en büyük olması için sayılar birbirine en uzak durumda olmalıdır. $a = 35,\ b = 1$ alınırsa $a + b = 36$ tir.

Toplamın en küçük olması için sayılar birbirine en yakın durumda olmalıdır. $a = 7,\ b = 5$ alınırsa $a + b = 12$ bulunur.

Tam Sayılar Kümesi

Doğal sayılar kümesine sayma sayılarının negatiflerinin ilave edilmesiyle oluşan kümeye tam sayılar kümesi denir. $\mathbb{Z}$ ile gösterilir.

$\mathbb{Z} = \{... -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

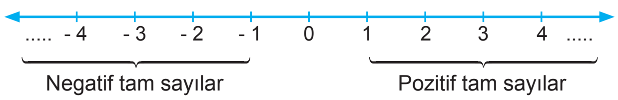
$\mathbb{Z}^{+} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ kümesi pozitif tam sayılar kümesi,

$\mathbb{Z}^{-} = \{..., -4, -3, -2, -1\}$ kümesi negatif tam sayılar kümesi olarak isimlendirilir.

0 pozitif tam sayı ya da negatif tam sayı değildir. Sıfırın işareti yoktur.

$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{-} \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^{+}$

Tam sayılar, sayı doğrusu üzerinde aşağıdaki gibi gösterilir:



3. ÖRNEK

a,b,c birbirinden farklı pozitif tam sayılar olmak üzere $5a+3b+7c$ ifadesinin en küçük tam sayı değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$5a+3b+7c$ ifadesinin en küçük tam sayı olması için katsayısı büyük olan terimlerdeki bilinmeyenler yerine sırasıyla en küçük pozitif tam sayılar yazılmalıdır.

Bu durumda $c=1, a=2, b=3$ alınırsa

$5\cdot 2+3\cdot 3+7\cdot 1=10+9+7=26$ bulunur.

4. ÖRNEK

a, b, c birbirinden farklı pozitif tam sayılardır. $a+3b+7c=60$ olduğuna göre a nın alabileceği en büyük değeri bulunuz.

ÇÖZÜM

$$a=60-(\underset{\substack{\downarrow\\2}}{3b}+\underset{\substack{\downarrow\\1}}{7c})=60-13=47$$

(En büyük)

5. ÖRNEK

x ve y birer pozitif tam sayı olmak üzere $3x+4y=45$ olduğuna göre y nin alabileceği değerler kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$3x+4y=45$ ise $3x=45-4y$

$x=\dfrac{45-4y}{3}=15-\dfrac{4y}{3}>0$ olmalıdır.

y sayısının 3 ün katı olduğu görülür. Bu durumda y nin alabileceği değerler 3, 6 ve 9 dur.

2 ile bölünebilen tam sayılara çift tam sayılar denir. $k\in\mathbb{Z}$ için $2k$ ile gösterilir.

Çift tam sayılar kümesi: $Ç=\{...,-6,-4,-2,0,2,4,6,...\}$

2 ile bölünemeyen tam sayılara tek tam sayılar denir. $k\in\mathbb{Z}$ için $2k+1$ veya $2k-1$ ile gösterilir.

Tek tam sayılar kümesi: $T=\{...,-5,-3,-1,3,5,...\}$

6. ÖRNEK

a) "Her çift tam sayının karesi yine bir çift tam sayıdır."

b) "Her tek tam sayının karesi yine bir tek tam sayıdır." ifadelerinin doğru olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

a) n bir çift tam sayı olsun. O hâlde $n=2k$ olacak şekilde bir $k\in\mathbb{Z}$ vardır.

$n^2=(2k)^2=4k^2=2\cdot\underbrace{2k^2}_{t}=2t,(t\in\mathbb{Z})$ olur.

Buradan $2t$ çift olduğundan n^2 çift tam sayı olur.

b) n bir tek tam sayı olsun. O hâlde $n=2k+1$ olacak şekilde bir $k\in\mathbb{Z}$ vardır.

$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2\underbrace{(2k^2+2k)}_{m}+1=2m+1,\ (m\in\mathbb{Z})$ olur.

Buradan $2m+1$ tek olduğundan n^2 de tek tam sayı olur.

$Ç = \text{Çift}$ tam sayılar ve $T = \text{Tek}$ tam sayılardaki işlemler şu şekilde genelleştirilir:

$Ç \pm Ç = Ç$	$Ç \cdot Ç = Ç$	$T^n = T \ (n \in \mathbb{Z}^+)$
$T \pm T = Ç$	$T \cdot T = T$	$Ç^n = Ç \ (n \in \mathbb{Z}^+)$
$T \pm Ç = T$	$T \cdot Ç = Ç$	

7. ÖRNEK

Aşağıdaki ifadelerin tek ya da çift olma durumlarını belirtiniz.

a) $3^5 - 2 \cdot 7^4 + 1$

b) $4^{17} - 3^2 \cdot 5^{10}$

c) $3^8 \cdot 5^{18} + 2016 \cdot 9^{15} - (-11)^3$

ç) $(24^3 + ((-3)^2)^7 + (-2)^{-1}$

ÇÖZÜM

Kuvvet alma işlemi, sayının çift ya da tek olmasını değiştirmediğinden

a) $3^5 - 2 \cdot 7^4 + 1 \rightarrow T - Ç \cdot T + T = T - Ç + T = T + T = Ç$ olup sayı çifttir.

b) $4^{17} - 3^2 \cdot 5^{10} \rightarrow Ç - T \cdot T = Ç - T = T$ olup sayı tektir.

c) $3^8 \cdot 5^{18} + 2016 \cdot 9^{15} - (-11)^3 \rightarrow T \cdot T + Ç \cdot T - T = T + Ç - T = T - T = Ç$ olup sayı çifttir.

ç) $(24^3 + ((-3)^2)^7 + (-2)^{-1}$ ifadesinde $\frac{-1}{2} \notin \mathbb{Z}$ olduğundan toplamın sonucu tam sayı olmaz.

Bu nedenle $(24^3 + ((-3)^2)^7 + (-2)^{-1}$ sayısı tek ya da çift sayı değildir.

8. ÖRNEK

a, b, $c \in \mathbb{Z}$ ve $c \neq 0$ olmak üzere $\frac{a + 4b}{c} = 3$ ise aşağıdaki ifadelerden hangisi kesinlikle doğrudur?

a) a çift ise b tektir.

b) b çift ise c tektir.

c) a çift ise c tektir.

ç) c tek ise a tektir.

d) b tek ise a tektir.

ÇÖZÜM

$$\frac{a + 4b}{c} = 3 \Rightarrow a + \underbrace{4b}_{\text{çift}} = 3c$$

4b çift tam sayı olduğundan a tek tam sayı ise c de tek tam sayıdır, a çift tam sayı ise c de çift tam sayıdır. Buna göre ç seçeneğindeki bilgiler kesin doğrudur.

Rasyonel Sayılar Kümesi

Tam sayılar kümesi, karşılaşılan tüm durumları ifade etmek için yeterli değildir. Öneğin $2x = 3$ biçimindeki denklemlerin çözümü, $\frac{3}{8}$ gibi iki tam sayının birbirine bölünmesi ile oluşan bazı sayılar, tam sayılar kümesine dâhil değildir. O hâlde bu tür sayıları da içine alan yeni bir sayı kümesine ihtiyaç duyulur.

$a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0$ ve a ile b aralarında asal olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklindeki sayılara rasyonel sayılar denir. Rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ ile gösterilir.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ ve } b \neq 0 \right\}$$

- $\frac{a}{b}$ ifadesinde her $a \in \mathbb{Z}$ için $b = 1$ alınırsa $\frac{a}{1} = a \in \mathbb{Q}$ olduğundan her tam sayı aynı zamanda bir rasyonel sayıdır. Bu durumda $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ olur.
- $\frac{a}{b}$ ifadesinde $a = 0,\ b \neq 0$ alınırsa $\frac{0}{b} = 0 \cdot \frac{1}{b} = 0 \in \mathbb{Q}$ olur.

  Örneğin $\frac{0}{3} = 0$ dır.
- $\frac{a}{b}$ ifadesinde $a \neq 0,\ b = 0$ alınırsa $\frac{a}{0}$ "tanımsız" olur.

  Örneğin $\frac{2}{0} = 0$ tanımsızdır.
- $\frac{a}{b}$ ifadesinde $a = 0,\ b = 0$ olduğunda $\frac{0}{0}$ "belirsiz" olur.

$\mathbb{Q}^+$ pozitif rasyonel sayılar kümesini; $\mathbb{Q}^-$ negatif rasyonel sayılar kümesini göstermek üzere $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$ yazılır.

Bütün rasyonel sayılar, sayı doğrusu üzerinde işaretlendiğinde herhangi iki rasyonel sayı arasında sonsuz çoklukta rasyonel sayı bulunur.

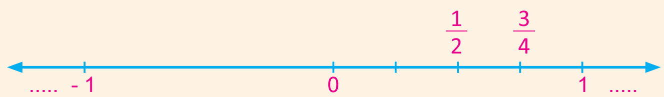
Her $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q};\ b \neq 0,\ d \neq 0$ olsun. İki sayının toplamının yarısı, bu sayıların orta noktasıdır. Bu durumda

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{2} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{2b \cdot d} \in \mathbb{Q} \text{ değeri için } \frac{a}{b} < \frac{a \cdot d + b \cdot c}{2 \cdot b \cdot d} < \frac{c}{d} \text{ yazılır.}$$

Bu işlem ne kadar tekrar edilirse edilsin alınan rasyonel sayılar arasında daima başka bir rasyonel sayı bulunur.

Bu durum "Rasyonel sayılar sayı doğrusunda yoğundur." şeklinde ifade edilir.

Örneğin $\frac{1}{2}$ ve 1 rasyonel sayıları dikkate alındığında $\frac{\frac{1}{2} + 1}{2} = \frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$ vardır.



Bir sayının ondalık açılımında virgülden sonraki bölüm, belli bir kurala göre tekrar ediyorsa bu tür sayılara devirli ondalık sayılar denir. Virgülden sonraki tekrar eden ilk sayı grubunun (devreden kısım) üstüne çizgi çizilerek gösterilir.

$$\frac{1}{3} = 0,3333... = 0,\overline{3}$$

$$\frac{56}{45} = 1,24444... = 1,2\overline{4}$$

$\frac{1}{2} = 0,5000... = 0,5\overline{0} = 0,5$ (Devreden sayı 0 ise devir belirtilmez.)

Bu sayılar, devirli ondalık sayılardır.

9. ÖRNEK

$0,\overline{5}$ devirli ondalık sayısının rasyonel olup olmadığını inceleyiniz.

ÇÖZÜM

$0,\overline{5} = x$ olsun. Bu durumda
$x = 0,5555555....$ demektir. Her iki taraf 10 ile çarpılırsa
$10x = 5,555555....$ olur.

$$\begin{array}{rl} & 10x = 5,555... \\ - & x = 0,555... \\ \hline & 9x = 5 \end{array}$$

olduğundan $x = \frac{5}{9}$ olarak bulunur. O hâlde $0,\overline{5}$ devirli sayısı rasyonel bir sayıdır.

Her devirli ondalık sayı bir rasyonel sayıdır. Devirli ondalık sayının rasyonel sayı karşılığı pratik olarak

$$\frac{\text{Sayının tamamı} - \text{Devretmeyen kısım}}{\text{Devreden basamak sayısı kadar 9, Virgülden sonraki devretmeyen basamak sayısı kadar 0}}$$

formülü ile bulunur.

10. ÖRNEK

$2,0\overline{17}$ sayısının kesirli karşılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Sayının tamamı 2017, devretmeyen kısım 20 dir. Virgülden sonra iki tane devreden, bir tane devretmeyen rakam olduğundan

$2,0\overline{17} = \frac{2017 - 20}{990} = \frac{1997}{990}$ bulunur.

Sıra Sizde

SORU

a ve b birer rakam olmak üzere

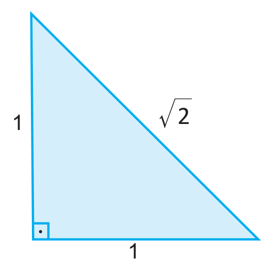
$a,\overline{b} + b,\overline{a} = 10$ şartını sağlayan kaç tane ab iki basamaklı sayısı vardır?

ÇÖZÜM

TARİHÇE

Pisagor (MÖ 570-495), tam sayılar dışında sayının olmadığını düşünmekte ve tüm sayıların 1 sayısından elde edilebileceğine inanmaktaydı. O dönemde Yunan matematiğinde tüm uzunluklar, tam sayılar ya da tam sayıların oranı (rasyonel sayılar) kullanılarak ifade edilmekteydi. Oysa kenar uzunlukları 1 birim olan karenin köşegen uzunluğu $\sqrt{2}$ birimdir ve bu sayı rasyonel değildir. Nihayetinde Pisagor, düşüncesinde yanıldığını ve rasyonel olmayan sayıların da var olduğunu kabul etmiştir. $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel olmadığının ispatı, Aristo (MÖ 384-322) ve Öklid (MÖ 365-300) tarafından yapılmıştır.

Kaynak: Prof. Dr. Ali Dönmez, Matematiğin Öyküsü ve Serüveni-Yunan Matematiği, 4. Cilt, Sayfa:79



11. ÖRNEK

$\sqrt{2}$ sayısının rasyonel bir sayı olmadığını gösteriniz.

ÇÖZÜM

$\sqrt{2}$ sayısının rasyonel olduğunu varsayınız.

O hâlde $\sqrt{2}=\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ $(a,b\in\mathbb{Z}, b\neq 0)$ olacak şekilde aralarında asal (1 den başka ortak böleni olmayan) a ve b tam sayıları vardır.

Her iki tarafın karesi alınırsa

$(\sqrt{2})^2=\left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow 2=\frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2=2b^2$ olup a^2 çift sayıdır.

a^2 çift sayı ise a da çift sayıdır. $a=2k, (k\in\mathbb{Z})$ şeklinde yazılır. Bu değer yerine yazılırsa

$(2k)^2=2b^2 \Rightarrow 4k^2=2b^2 \Rightarrow b^2=2k^2$ bulunur. Benzer düşünceyle b^2 çift sayı olduğundan

b de çifttir. $b=2h, (h\in\mathbb{Z})$ şeklinde yazılır.

Hem a hem de b nin çift tam sayı olması, aralarında asal olmadığı sonucunu verir. Bu durum varsayımla çelişir. O hâlde varsayım yanlıştır. $\sqrt{2}$ rasyonel sayı değildir.

$\sqrt{3}$, $2\sqrt{7}$, $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ gibi sayıların da rasyonel sayı olmadıkları gösterilebilir.

İrrasyonel Sayılar Kümesi

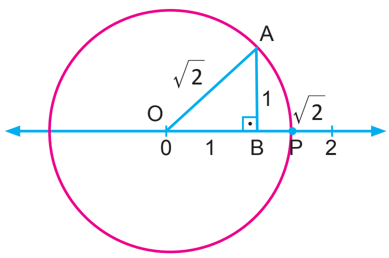
$a,b\in\mathbb{Z}$ ve $b\neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılamayan, başka bir ifadeyle ondalık açılımı sınırsız ve devirsiz olan sayılara irrasyonel sayılar denir. İrrasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}'$ ile gösterilir.

Bir önceki örnekte $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel bir sayı olmadığı gösterilmişti. Bu tanıma göre $\sqrt{2}$ sayısı bir irrasyonel sayıdır. Aynı şekilde π, e ve karekök dışına çıkarılamayan $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$ gibi sayılar da birer irrasyonel sayıdır.

12. ÖRNEK

$\sqrt{2}$ sayısının sayı doğrusu üzerindeki yerini gösteriniz.

ÇÖZÜM

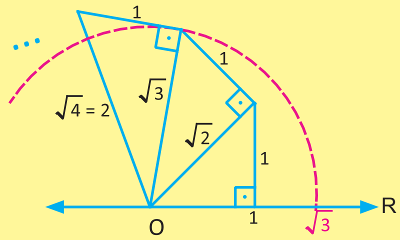


Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi, bir köşesi 0 noktasında bulunan ve dik kenar uzunlukları birer birim olan ikizkenar dik üçgen oluşturunuz. Bu durumda, $|OA|=\sqrt{2}$ olur. O merkezli $|OA|$ yarıçaplı bir çember çizilir ve çemberin sayı doğrusunu kestiği noktaya P denirse

$|OP|=|OA|=\sqrt{2}$ br olup P noktası $\sqrt{2}$ ye karşılık gelir.

$1<\sqrt{2}<2$ olduğu şekilden görülür. $\sqrt{2}=1,41421...$

Doğal sayıların kareköklerini pergel ve cetvel kullanarak çizen ve sayı doğrusu üzerinde gösteren ilk bilim insanı Yunan matematikçisi Archytas'tır [(Arhitas) (MÖ 428-342)]. Kullandığı yönteme "karekök sarmalı" denir.

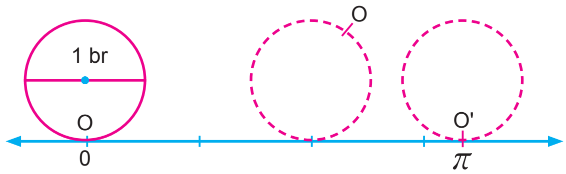


13. ÖRNEK

π sayısının yerini, sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

ÇÖZÜM

Çapı 1 br olan bir çember alınız. Bu çemberi, sayı doğrusuna 0 noktasına teğet olacak şekilde yerleştiriniz. Bu çemberin çevresi π birimdir.



Çember; sayı doğrusu üzerinde döndürüldüğünde çember üzerindeki O noktasının, 1. tur sonunda sayı doğrusunu kestiği nokta O' olsun. Çemberin çevresi π birim olduğundan 1. tur sonunda çemberin aldığı yol π birimdir. Bu durumda O' noktası π sayısına karşılık gelir.

TARİHÇE

π sayısı irrasyonel sayıların çeşitliliğine bir örnektir. Bir dairenin çevresinin çapına oranı daima sabit bir sayıdır. Bu sayı π sembolü ile gösterilir. Arşimet sabiti veya Ludolph sayısı olarak da bilinir. Babillilerden (MÖ 2000) bu yana birçok matematikçi, bu sayıyı rasyonel şekilde yazmaya çalışmış ve bunun için birçok farklı yaklaşık değer kullanmıştır. Son olarak 1761 yılında Lambert (Lambırt), π sayısının irrasyonelliğini ispatlayarak bu tartışmalara nokta koymuştur. Pi sayısı, birçok iki boyutlu şeklin ve üç boyutlu cismin alan ve hacmini hesaplarken kullanılır. Pi sayısının virgülden sonraki 2 trilyon 700 bin civarı basamağı bilgisayar yardımı ile hesaplanabilmektedir.14 Mart "Dünya π Günü" olarak kutlanmaktadır.

$\pi = 3{,}14159265358979323846...$

Üst sınıflarda karşılaşacağınız ve matematikte çok önemli bir yere sahip e sayısı (Euler sayısı) da irrasyonel bir sayıdır. Bu sayının irrasyonelliği Leonhard Euler [Leonırd Oyler (1707-1783)] tarafından kanıtlanmıştır.

$e = 2{,}71828182845904523536...$

Kaynak: Prof. Dr. Ali Dönmez, Matematiğin Öyküsü ve Serüveni-Yunan Matematiği, 4. Cilt, Sayfa:229

Sıra Sizde

SORU

Herhangi iki irrasyonel sayı arasında daima başka bir irrasyonel sayının bulunduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

Gerçek Sayılar Kümesi

Rasyonel sayılar kümesi ile irrasyonel sayılar kümesinin birleşim kümesine gerçek sayılar (reel sayılar ya da gerçel sayılar) kümesi denir. $\mathbb{R}$ ile gösterilir.

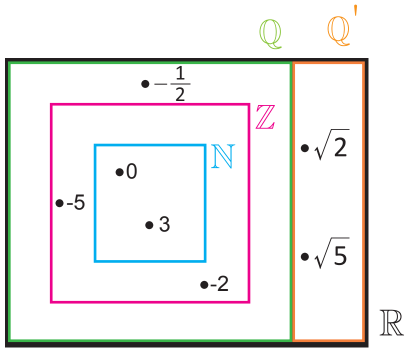
$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

Sayı doğrusundaki rasyonel sayılar arasındaki boşluklar, irrasyonel sayılar tarafından doldurulur. Böylece oluşturulan doğruya gerçek sayı doğrusu denir. Rasyonel sayılar ile irrasyonel sayılar, gerçek sayı doğrusunun tamamını hiç boşluk kalmayacak şekilde doldurur. Bunun tersi de doğrudur. Sayı doğrusundaki her nokta, bir gerçek sayıya karşılık gelir.

Gerçek sayılar kümesi, şu ana kadar tanımlanan bütün sayı kümelerini kapsar.

$$\left.\begin{array}{r} \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \\ \mathbb{Q}' \subset \mathbb{R} \end{array}\right\} \text{ olup } \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' \text{ elde edilir.}$$

Yandaki Venn şeması ile sonsuz elemanlı sayı kümelerinin elemanlarından bir kaç örnek verilmiştir.



Gerçek Sayılar Kümesinde Toplama İşleminin Özellikleri

1. Kapalılık özelliği: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $a + b \in \mathbb{R}$ dır. (Herhangi iki gerçek sayının toplamı, yine bir gerçek sayıdır.)

2. Değişme özelliği: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $a + b = b + a$ tir.

3. Birleşme özelliği: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ için $a + (b + c) = (a + b) + c$ dir.

4. Etkisiz eleman özelliği: $\forall a \in \mathbb{R}$ için $a + 0 = 0 + a = a$ olduğundan toplama işleminin etkisiz elemanı 0 dır.

5. Ters eleman özelliği: $\forall a \in \mathbb{R}$ için $a + (-a) = (-a) + a = 0$ olacak şekilde $-a \in \mathbb{R}$ sayısı vardır.

a sayısının toplama işlemine göre tersi $-a$ sayısıdır.

Gerçek Sayılar Kümesinde Çarpma İşleminin Özellikleri

1. Kapalılık özelliği: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $a \cdot b \in \mathbb{R}$ dır. (Herhangi iki gerçek sayının çarpımı yine bir gerçek sayıdır.)

2. Değişme özelliği: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $a \cdot b = b \cdot a$ dır.

3. Birleşme özelliği: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ için $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ dir.

4. Etkisiz eleman özelliği: $\forall a \in \mathbb{R}$ için $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ olduğundan çarpma işleminin etkisiz elemanı 1 dir.

5. Ters eleman özelliği: $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$ için $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ olacak şekilde $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ sayısı vardır.

$a \in \mathbb{R} - \{0\}$ sayısının çarpma işlemine göre tersi $\frac{1}{a}$ dır.

6. Yutan eleman özelliği: $\forall a \in \mathbb{R}$ için $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ olduğundan gerçek sayılar kümesinin çarpma işlemine göre yutan elemanı 0 dır.

7. Dağılma özelliği: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ için $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

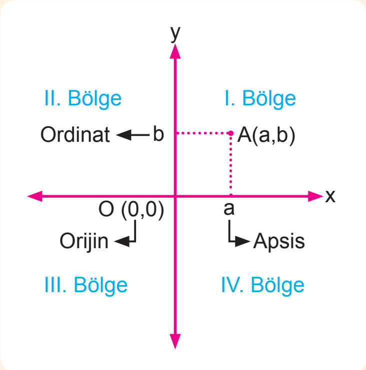
$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c, (b - c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a$ dır.

Çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

İki farklı reel sayı doğrusunun 0 noktasında dik kesişmesiyle oluşan düzlemin analitik düzlem olarak isimlendirildiğini biliyorsunuz. $\mathbb{R}$ de tanımlı

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ ve } y \in \mathbb{R}\}$$

kümesinin elemanları, sıralı ikililerdir. Bu sıralı ikililerden oluşan kümenin geometrik temsili, analitik düzlemdeki tüm noktalardır. Bu yüzden $\mathbb{R}^2$,kartezyen koordinat sistemine ya da dik koordinat sistemine karşılık gelir.



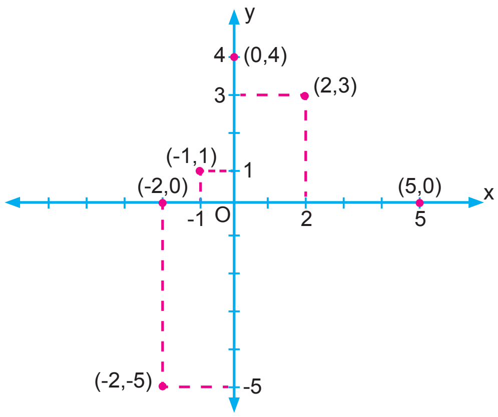
Yatay olan eksene x ekseni (apsisler ekseni), düşey olan eksene y ekseni (ordinatlar ekseni) denir.
Analitik düzlemdeki bir A(a,b) ikilisinde a ya A noktasının apsisi, b ye A noktasının ordinatı denir.

- x ekseni üzerindeki noktalar (a,0) şeklinde olduğundan ordinatları 0 dır.
- y ekseni üzerindeki noktalar (0,b) şeklinde olduğundan apsisleri 0 dır.
- O(0,0) noktası, orijin noktası olarak adlandırılır.

14. ÖRNEK

$(-1,1)$, $(2,3)$, $(5,0)$, $(-2,0)$, $(0,4)$, $(-2,-5)$ noktalarını dik koordinat sisteminde gösteriniz.

ÇÖZÜM



TARİHÇE

Koordinat kavramını ilk kez tarif eden Pierre de Fermat'tır [Piyer Dö Ferma (1601-1665)].

Modern koordinat kavramı ise Fransız Matematikçi ve Filozof Rene Descartes [Rene Dekart (1596-1650)] (Görsel 3.1.2) tarafından verilmiştir. Descartes, cebrin geometriye uygulanması ile ilgili yaptığı çalışmaları ilerleterek kartezyen koordinat sistemini "La Géometrie" adlı eserinde tanıtmıştır. Bu bakımdan Descartes, analitik geometrinin kurucusu olarak kabul edilmektedir.

Görsel 3.1.2
Rene Descartes (1596-1650)

ALIŞTIRMALAR-1

1. Aşağıdaki tabloda verilen sayılardan hangileri rasyonel, hangileri irrasyoneldir?

	-3	$\sqrt{2}$	$1,9\overline{76}$	3π	$\sqrt{36}$	$2\sqrt{5}-1$	$\frac{2}{7}$
Rasyonel							
İrrasyonel							

2. Aşağıdaki tam sayıların tek mi çift mi olduklarını belirtiniz.

a) $2017.3^{24}+27.84$

b) $(2^{15}+9^{2})^{27}-(-1)^{4}+(-6).7^{45}$

c) $(3^{24}-4^{2})^{2}+1923^{124}-401$

3. $[-1-2-(-3-4)+(-1)]^{-2}-\left(-\frac{1}{2}+2\right):\frac{3}{7}$

işleminin sonucunu bulunuz.

4. $\frac{2}{3}, -\frac{5}{8}, \frac{20}{7}$ rasyonel sayılarını, sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

5. $\left(\frac{3}{5}-0,\overline{2}\right)\cdot\dfrac{1}{2+\dfrac{9}{3,\overline{9}}}$

işleminin sonucunu bulunuz.

6. x ile y pozitif tam sayılar olmak üzere $2x+5y=75$ olduğuna göre y nin alabileceği en büyük ve en küçük değerleri bulunuz.

7. ab iki basamaklı sayısının rakamlarının yerleri değiştirildiğinde elde edilen ba iki basamaklı sayısı, ab sayısından 27 fazla olduğuna göre ab sayısının alabileceği değerleri bulunuz.

8. Aşağıdaki sayıların rasyonel sayı olmadıklarını gösteriniz.

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{3}-1$ c) $2\sqrt{3}$

9. Aşağıdaki irrasyonel sayıları, gerçek sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

a) $\sqrt{7}$ b) $-\sqrt{34}$

c) $3\sqrt{2}$ ç) $\sqrt{5}+1$

10. İrrasyonel sayılar kümesinin toplama ve çarpma işlemine göre kapalılık özelliği var mıdır? Açıklayınız.

11. Bir rasyonel sayı ile irrasyonel sayının toplamının irrasyonel olduğunu gösteriniz.

12. Bir rasyonel sayı ile irrasyonel sayının çarpımının irrasyonel olduğunu gösteriniz.

9.3.2. BÖLÜNEBİLME KURALLARI

Etkinlik

- Bir okuldaki öğrenciler, huzurevine yaşlıları ziyarete gideceklerdir. Öğrencilerin üç gruba ayrılarak yaşlılarla görüşmesi planlanmaktadır. Bu gruplarla ilgili aşağıdaki sorulara uygun cevapları veriniz.
- İlk grup; aldığı çiçekleri yaşlılara ikişerli, üçerli veya beşerli şekilde dağıttığında sırayla 1, 2 ve 3 çiçek kaldığını görüyor. Çiçek sayısının alabileceği en küçük üç değeri bulunuz.
- İkinci grup üyeleri, huzurevinde 100 ile 180 arasında yaşlı olduğunu ve yaşlı sayısının 7 ve 11 in katı olduğunu söylüyor. Buna göre huzurevindeki yaşlı sayısını bulunuz.
- Üçüncü grup üyeleri, yaşlıları gruplar hâlinde farklı günlerde ziyaret edecektir. Bu gruptaki öğrenci sayısı 4, 5, 6, 8 ve 9 a bölündüğünde 1 öğrenci artmaktadır. Buna göre bu grupta en az kaç öğrenci vardır?

1. Tam Sayılarda Bölme Algoritması

Bir tam sayının başka bir tam sayıya kalansız (tam) bölünebilmesi, o sayının bölen sayı kadar eşit parçalara ayrıldığını göstermektedir. Bunun yanında kalanlı bölme işlemlerinde bölme işlemi yapmadan kalanın bulunmasını sağlayan bazı kurallar da vardır. Bu kurallardan bölünen, bölüm, bölen ve kalan arasındaki ilişkiler aşağıda gösterilmiştir.

A, B, C, K tam sayılar ve $B \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{array}{r|l} A & B \\ \cline{2-2} & C \\ \cline{1-1} K & \end{array}$$

$A \rightarrow$ bölünen,
$B \rightarrow$ bölen,
$C \rightarrow$ bölüm,
$K \rightarrow$ kalan şeklinde gösterilir.

Bir bölme işleminde

1. $A = B \cdot C + K$
2. $0 \leq K < B$
3. $K < C$ ise bölen ile bölüm yer değiştirebilir.
4. $K = 0$ ise A sayısı B ye tam bölünür ve bu durum $B \mid A$ şeklinde gösterilir.

1. ÖRNEK

Yandaki bölme işlemine göre a nın b türünden ifadesini bulunuz

$$\begin{array}{r|l} 2a-5b & b-3 \\ \cline{2-2} & 4 \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

ÇÖZÜM

Bölünen = Bölen x Bölüm + Kalan eşitliğinden

$2a - 5b = 4(b-3) + 2 \Rightarrow 2a - 5b = 4b - 12 + 2$

$2a - 5b = 4b - 10 \quad \Rightarrow \quad 2a = 9b - 10$

$a = \dfrac{9b-10}{2}$ olur.

2. ÖRNEK

k bir doğal sayı olmak üzere

$$\begin{array}{r|l} A & 20 \\ \cline{2-2} & 3k \\ \cline{1-1} k^2 & \end{array}$$

işleminde A nın alabileceği en büyük değeri bulunuz.

ÇÖZÜM

$k^2 < 20$ olması gerektiğinden k nin alabileceği en büyük doğal sayı değeri 4 olur.

$A = 20 \cdot 3k + k^2$

$k = 4$ için $A = 20 \cdot 12 + 16$

$= 240 + 16$

$= 256$

3. ÖRNEK

Yandaki bölme işlemlerine göre X in Z türünden ifadesini yazınız

$$\begin{array}{r|l} X & Y+1 \\ \cline{2-2} & 2 \\ \hline 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} Y & Z \\ \cline{2-2} & Y-3 \\ \hline 1 & \end{array}$$

ÇÖZÜM

Bölme işleminin sağlamasından

$X = 2(Y+1)+3 \Rightarrow X = 2Y+5 \quad \ldots(1)$

$Y = Z(Y-3)+1 \Rightarrow Y = ZY - 3Z + 1$

$\Rightarrow Y(1-Z) = -3Z+1$

$\Rightarrow Y = \dfrac{-3Z+1}{1-Z} \quad \ldots(2)$

(2) ifadesi (1) de yerine konulduğunda

$X = 2\left(\dfrac{-3Z+1}{1-Z}\right)+5$

$X = \dfrac{-6Z+2}{1-Z} + \dfrac{5}{\underset{(1-Z)}{1}}$

$X = \dfrac{-6Z+2+5-5Z}{1-Z}$

$X = \dfrac{-11Z+7}{1-Z}$ bulunur.

4. ÖRNEK

Yanda verilen bölme işlemine göre x bir tam sayı olmak üzere T nin alabileceği farklı değerler toplamını bulunuz.

$$\begin{array}{r|l} T & x+3 \\ \cline{2-2} & 2 \\ \hline 3x-4 & \end{array}$$

ÇÖZÜM

$\left.\begin{array}{l} \text{Kalan} \geq 0 \Rightarrow 3x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq \dfrac{4}{3} \\ \text{Kalan} < \text{Bölen} \Rightarrow 3x-4 < x+3 \Rightarrow 2x < 7 \Rightarrow x < \dfrac{7}{2} \end{array}\right\}$

$\dfrac{4}{3} \leq x < \dfrac{7}{2} \Rightarrow \quad x \in \{2,3\}$

$T = (x+3)\cdot 2 + 3x - 4 = 5\cdot x + 2$ olur.

$x = 2$ için: $\quad$ $x = 3$ için:

$T_1 = 5\cdot 2 + 2 \quad T_2 = 5\cdot 3 + 2$

$T_1 = 12 \quad T_2 = 17$

$T_1 + T_2 = 12 + 17 = 29$ bulunur.

5. ÖRNEK

$2m-1$ doğal sayısı $n+2$ doğal sayısına bölündüğünde bölüm 9, kalan 2 dir. $m+n=16$ olduğuna göre $m\cdot n$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Bölme işleminin sağlamasından

$2m-1 = (n+2)\cdot 9 + 2$

$2m-1 = 9n+18+2$

$2m = 9n+21$

$\begin{array}{rl} & 2m - 9n = 21 \\ -2/ & m + n = 16 \\ \hline & -11n = -11 \end{array}$ iki bilinmeyenli denklem çözülürse

$n = 1$ ve $m = 15$ olur. Buradan $m\cdot n = 15\cdot 1 = 15$ bulunur.

6. ÖRNEK

Yandaki bölme işleminde ab0ab3 altı basamaklı, ab iki basamaklı sayı ve a ile b birer rakam olmak üzere x ve y değerlerinin toplamını bulunuz.

$$\begin{array}{r|l} ab0ab3 & ab \\ \cline{2-2} & x \\ \underline{-} & \\ y & \end{array}$$

ÇÖZÜM

$$\begin{array}{r|l} ab0ab3 & ab \\ \cline{2-2} -\,ab & 10\,010 \\ \hline 000ab & \\ -\,ab & \\ \hline 003 & \end{array}$$

Bölme işlemine göre $\left.\begin{array}{l} x = 10\,010 \\ y = 3 \end{array}\right\}$ olduğundan

$$\begin{aligned} x + y &= 10\,010 + 3 \\ &= 10\,013 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

7. ÖRNEK

AB iki basamaklı bir sayıdır. Yandaki bölme işlemine göre kaç farklı AB sayısı yazılabileceğini bulunuz.

$$\begin{array}{r|l} AB & A+B \\ \cline{2-2} & 4 \\ \underline{-} & \\ 3 & \end{array}$$

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} AB &= (A+B)\cdot 4 + 3 \\ 10A + B &= 4A + 4B + 3 \\ 6A &= 3B + 3 \\ 6A &= 3(B+1) \\ 2A &= B + 1 \end{aligned}$$

1	1
2	3
3	5
4	7
5	9

(Bölme işleminin tanımından)

$3 < A + B$ olması gerekir. $A = 1$ ve $B = 1$ için $3 < A + B$ sağlanmaz.

$$AB \rightarrow \left.\begin{array}{r} 23 \\ 35 \\ 47 \\ 59 \end{array}\right\}$$ 4 tane AB iki basamaklı sayısı yazılabilir.

8. ÖRNEK

Yandaki bölme işleminde, abc4 dört basamaklı, xy iki basamaklı doğal sayı olmak üzere xy nin alabileceği farklı değerleri bulunuz.

$$\begin{array}{r|l} abc4 & 24 \\ \cline{2-2} & k \\ \underline{-} & \\ xy & \end{array}$$

ÇÖZÜM

Bölme işleminin tanımından

$$\underbrace{abc4}_{\text{çift sayı}} = \underbrace{24 \cdot k}_{\text{çift sayı}} + \underbrace{xy}$$

xy sayısının da çift sayı olması gerekir.

$$\underbrace{xy} < 24$$

24 ten küçük çift sayılar $\searrow$ 22, 20, 18, 16, 14, 12, 10 olur.

Sıra Sizde

SORU

a) Yandaki bölme işleminde $a \in \mathbb{N}$ ve $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere a nın alabileceği en büyük değeri bulunuz.

b) Yandaki bölme işleminde $b \in \mathbb{N}$ ise a nın alabileceği en büyük değeri bulunuz.

$$\begin{array}{r|l} a & 41 \\ \cline{2-2} & b^2 \\ - \quad & \\ \hline b^2 & \end{array}$$

ÇÖZÜM

Bir A sayısının x ile bölümünden kalan m, bir B sayısının x ile bölümünden kalan n olmak üzere

a) $A \pm B$ nin x ile bölümünden kalan $m \pm n$
b) $A \cdot B$ nin x ile bölümünden kalan $m \cdot n$
c) $t \cdot B$ nin x ile bölümünden kalan $t \cdot n$
ç) B^t nin x ile bölümünden kalan n^t dir.

Eğer elde edilen kalanlar, x ten büyük ise kalan sayı tekrar x e bölünerek kalan bulunur.

9. ÖRNEK

K sayısının 6 ile bölümünden kalan 4, M sayısının 6 ile bölümünden kalan 2 ise aşağıdaki ifadelerin 6 ile bölümünden kalanları bulunuz.

a) $K + M$
b) $K - M$
c) $K \cdot M$
ç) M^3
d) $2K^2 + 3M^3$

ÇÖZÜM

$K = 6x + 4$ ve $M = 6y + 2$ olsun.

a) $K + M = 6x + 4 + 6y + 2 = 6(x + y + 1)$ olduğundan $K + M$ nin 6 ile bölümünden kalan 0 dır.

b) K nin 6 ile bölümünden kalan 4 ve M nin 6 ile bölümünden kalan 2 olduğundan $K - M$ nin 6 ile bölümünden kalan $4 - 2 = 2$ dir.

c) K nin 6 ile bölümünden kalan 4 ve M nin 6 ile bölümünden kalan 2 olduğundan $K \cdot M$ nin 6 ile bölümünden kalan $4 \cdot 2 = 8$ bulunur. 8 sayısı, 6 dan büyük olduğundan sayı 6 ya bölünür ve kalan 2 bulunur.

ç) M nin 6 ile bölümünden kalan 2 olduğundan M^3 ün 6 ile bölümünden kalan $2^3 = 8$ dir. 8 sayısı, 6 dan büyük olduğundan 6 ya bölünür ve kalan 2 olarak bulunur.

d) K nin 6 ile bölümünden kalan 4 ve M nin 6 ile bölümünden kalan 2 olduğundan $2K^2 + 3M^3$ ün kalanını bulmak için $K = 4$ ve $M = 2$ yazılırsa $2K^2 + 3M^3 = 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 2^3 = 56$ dır. 56 nın 6 ile bölümünden kalan 2 olur.

ALIŞTIRMALAR-2

1. Yandaki bölme işlemine göre b nin a türünden eşitini bulunuz.

$$\begin{array}{r|l} 2a+b & b \\ \cline{2-2} & 3 \\ - \quad & \\ \hline 2b-1 & \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{r|l} 2x+3y & 3y \\ \cline{2-2} & 7 \\ - \quad & \\ \hline 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x-y+1 & y \\ \cline{2-2} & z \\ - \quad & \\ \hline 3 & \end{array}$$

Yukarıda verilen bölme işlemlerine göre z değerini bulunuz.

3. $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$\begin{array}{r|l} a & b-3 \\ \cline{2-2} & c+4 \\ - \quad & \\ \hline 7 & \end{array}$$

yandaki bölme işlemine göre $a+b+c$ toplamının alabileceği en küçük değerini bulunuz

4.

$$\begin{array}{r|l} x & 8 \\ \cline{2-2} & \\ - \quad & \\ \hline 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} y & 8 \\ \cline{2-2} & \\ - \quad & \\ \hline 6 & \end{array}$$

x, y birer doğal sayıdır. $x \cdot y$ nin 8 ile bölümünden kalanı bulunuz.

5. x doğal sayısının 12 ile bölümünden kalan 6, y doğal sayısının 20 ile bölümünden kalan 7 dir. Buna göre $x \cdot y$ nin 4 ile bölümünden kalanı bulunuz.

6. Bir P sayısının 13 ile bölümünden kalan 3 ise $3P - P^3$ ün 13 ile bölümünden kalanı bulunuz.

7. Dört basamaklı bir sayının yüzler basamağı 4, onlar basamağı 2 arttırıldığında kalan değişmiyor; bölüm 15 artıyor. Bölen sayının rakamları toplamı kaçtır?

8. Yandaki bölme işlemine göre bölünen sayının rakamları toplamını bulunuz.

$$\begin{array}{r|l} \cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \cline{2-2} -\ \cdot\cdot\cdot & 34 \\ \hline \cdot\cdot\cdot & \\ -\ 220 & \\ \hline 7 & \end{array}$$

2. Tam Sayılarda Bölünebilme Kuralları

2 ile Bölünebilme

Birler basamağında $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ olan sayılar 2 ile bölünebilir.
Örneğin 854, 48, 1000 sayıları 2 ile bölünebilir.

1. ÖRNEK

Aşağıdaki sayıların 2 ile bölümünden kalanları bulunuz.

a) 123^{123}

b) $15! - 1$

c) $1! + 2! + 3! + ... + 20!$

ÇÖZÜM

a) 123 sayısı tek sayı olduğundan bütün kuvvetleri tektir. Bu durumda kalan 1 olur.

b) 15! çift sayıdır. $15! - 1$ tek sayı olduğundan kalan 1 dir.

c) 1! dışındaki diğer sayılar 2 nin katı olduğundan kalanları sıfırdır. Bu durumda kalan 1 dir.

3 ile Bölünebilme

Rakamları toplamı 3 ün katı olan sayılar 3 ile bölünebilir. Bir doğal sayının 3 ile bölümünden kalan, sayının rakamları toplamının 3 ile bölümünden kalana eşittir.

Örneğin 57, 102 sayıları 3 ile bölünebilir.

2. ÖRNEK

abc üç basamaklı sayısının 3 ile bölümünden kalanın bu sayının rakamları toplamına eşit olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} abc &= 100a + 10b + c \\ &= 99a + a + 9b + b + c \\ &= \underbrace{3(33a + 3b)}_{\text{3 ün tam katı}} + a + b + c \end{aligned}$$

abc üç basamaklı sayısının 3 ile bölümünden kalan $a + b + c$ olur.
$a + b + c$ sayısı 3 ten büyük ise yeniden 3 ile bölünmelidir.

3. ÖRNEK

5a2b dört basamaklı sayısı, 3 ile bölünebildiğine göre $a \cdot b$ nin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

ÇÖZÜM

5a2b sayısının 3 ile bölünebilmesi için rakamlarının toplamı 3 ün katı olmalıdır.

$$5 + a + 2 + b = 3k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$7 + \underbrace{a + b}_{2, 5, 8, 11, 14, 17} = 3k$$

$a \cdot b$ nin en büyük değerini bulabilmek için $a + b = 17$ alınır. $a \cdot b$ nin en büyük değeri $8 \cdot 9 = 72$ olur.

4 ile Bölünebilme

Bir sayının 4 ile bölünebilmesi için son iki basamağındaki sayının 4 ün katı olması gerekir.
Bir doğal sayının 4 ile bölümünden kalan, sayının son iki basamağının 4 ile bölümünden kalana eşittir.

Örneğin 20, 248, 152, 1400 sayıları 4 ile bölünür.

4. ÖRNEK

abcd dört basamaklı sayısının 4 ile bölümünden kalanın cd nin 4 ile bölümünden kalana eşit olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

abcd dört basamaklı sayısı çözümlendiğinde

$$\begin{aligned} abcd &= 1000a + 100b + 10c + d \\ &= \underbrace{4(250a + 25b)}_{\downarrow} + cd \end{aligned}$$

4 ile bölündüğünden abcd dört basamaklı sayısının 4 ile bölümünden kalan, cd iki basamaklı sayısının 4 ile bölümünden kalana eşittir.

5. ÖRNEK

3x5y dört basamaklı sayısı, 4 ile bölünebildiğine göre $x + y$ toplamının alabileceği en küçük ve en büyük değeri bulunuz.

ÇÖZÜM

3x5y sayısının 4 ile bölünebilmesi için 5y iki basamaklı sayısının 4 ün katı olması gerekir.

52 ve 56 sayıları 4 ile bölündüğünden $y = 2$ ve $y = 6$ olabilir.

x in alabileceği değerler $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ olur.

$x + y$ toplamının en büyük değeri: $x = 9$ ve $y = 6$ için $x + y = 9 + 6 = 15$ olur.

$x + y$ toplamının en küçük değeri: $x = 0$ ve $y = 2$ için $x + y = 0 + 2 = 2$ olur.

6. ÖRNEK

Üç basamaklı x0y sayısı, 3 ile bölünebilmektedir. Bu sayının 4 ile bölümünden kalan 3 olduğuna göre x in alabileceği değerler toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

x0y sayısının 4 ile bölümünden kalan 3 olduğuna göre $y = 3$ veya $y = 7$ olur.

x0y sayısının 3 ile bölünebilmesi için rakamları toplamı 3 ün katı olmalıdır. Buna göre

$y = 3$ için	$y = 7$ için
$x + 0 + 3 = 3k \quad (k \in \mathbb{Z})$	$x + 0 + 7 = 3k \quad (k \in \mathbb{Z})$
$x + 3 = 3k$	$x + 7 = 3k$
$x \in \{3, 6, 9\}$	$x \in \{2, 5, 8\}$

x in alabileceği değerler $\{2, 3, 5, 6, 8, 9\}$ olur. x in değerleri toplamı $2 + 3 + 5 + 6 + 8 + 9 = 33$ bulunur.

5 ile Bölünebilme

Birler basamağındaki rakam 0 veya 5 olan sayılar 5 ile bölünebilir. Bir doğal sayının 5 ile bölümünden kalan, birler basamağındaki rakamın 5 ile bölümünden kalana eşittir.

7. ÖRNEK

Üç basamaklı 7ab sayısı, 4 ve 5 ile bölünebilmektedir. Buna göre a nın alabileceği değerler toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

7ab sayısı, 5 ile bölünebildiğinden birler basamağı 0 veya 5 olmalıdır. Buna göre $b \in \{0,5\}$ tir. 7ab sayısı, 4 ile bölünebildiğinden son iki basamağındaki sayı 4 ün katı olmalıdır. Buna göre $b = 0$ olur.

$b = 0$ için a nın alabileceği değerler $a \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ dir.

a nın alabileceği değerler toplamı $0 + 2 + 4 + 6 + 8 = 20$ olur.

8. ÖRNEK

2xyx dört basamaklı sayısı 3 ile bölünebilmektedir. Bu sayının 5 ile bölümünden kalan 2 ise $x + y$ nin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

ÇÖZÜM

2xyx sayının 5 ile bölümünden kalan 2 ise $x \in \{2, 7\}$ olmalıdır. 2xyx sayısının 3 ile bölünebilmesi için rakamları toplamı 3 ün katı olmalıdır.

$2 + x + y + x = 3k$

$x = 2$ için $2 + 4 + y = 3k$

$6 + y = 3k$

$y \in \{0, 3, 6, 9\}$

$x = 7$ için $2 + 14 + y = 3k$

$16 + y = 3k$

$y \in \{2, 5, 8\}$

$x + y$ en büyük değerini $x = 7$ ve $y = 8$ için alır. Buna göre $x + y = 7 + 8 = 15$ tir.

8 ile Bölünebilme

Verilen sayının son 3 basamağındaki rakamların oluşturduğu sayı, 8 in katı ise sayı 8 ile bölünebilir.

Sayının 8 ile bölümünden kalan, son 3 basamağındaki rakamların oluşturduğu sayının 8 ile bölümünden kalana eşittir.

Örneğin 1000, 224, 25008 sayıları 8 ile bölünür.

9. ÖRNEK

İki basamaklı, 8 ile bölündüğünde 2 kalanını veren kaç sayı olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

İki basamaklı, 8 ile bölündüğünde 2 kalanını veren sayılar $\{10, 18, 26, ..., 98\}$ dir.

$$\text{Terim Sayısı} = \frac{98 - 10}{8} + 1 = \frac{88}{8} + 1 = 12$$

İki basamaklı, 8 ile bölündüğünde 2 kalanını veren 12 tane sayı vardır.

10. ÖRNEK

Tabloda verilen sayıların 2, 4 ve 8 ile bölümünden kalanları bulunuz. Tabloya yazınız.

Sayı	2 ile Bölümünden Kalan	4 ile Bölümünden Kalan	8 ile Bölümünden Kalan
5000			
13 007			
17 083			
185 132			

ÇÖZÜM

Bir sayının 2 ile bölümünden kalanı bulmak için birler basamağındaki sayıya, 4 ile bölümünden kalanı bulmak için son iki basamağındaki sayıya ve 8 ile bölümünden kalanı bulmak için son üç basamağındaki sayıya bakılır.

Sayı	2 ile Bölümünden Kalan	4 ile Bölümünden Kalan	8 ile Bölümünden Kalan
5000	0	0	0
13 007	1	3	7
17 083	1	3	3
185 132	0	0	4

9 ile Bölünebilme

Bir sayının 9 ile bölünebilmesi için sayının rakamları toplamı 9 un katı olmalıdır.

Bir doğal sayının 9 ile bölümünden kalan, sayının rakamları toplamının 9 ile bölümünden kalana eşittir.

Örneğin 54, 27, 1206 sayıları 9 ile bölünür.

11. ÖRNEK

x3x1 dört basamaklı sayısı, 9 ile bölünebildiğine göre x in değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

x3x1 sayısının 9 ile bölünebilmesi için sayının rakamları toplamı 9 un katı olmalıdır.

$x + 3 + x + 1 = 9k \quad (k \in \mathbb{Z})$

$2x + 4 = 9k$ olur. $k = 2$ için $2x + 4 = 18 \Rightarrow x = 7$ bulunur.

12. ÖRNEK

33 basamaklı 444...4 sayısının 9 ile bölümünden kalanı bulunuz.

ÇÖZÜM

Sayının 9 ile bölümünden kalanı bulmak için rakamları toplamı hesaplanır.

$\underbrace{4 + 4 + 4 + ... + 4}_{33 \text{ tane}} = 4 \cdot 33 = 132$ dir.

132 nin 9 ile bölümünden kalan: $1 + 3 + 2 = 6$ dır.

10 ile Bölünebilme

Birler basamağındaki rakamı 0 olan sayılar 10 ile bölünebilir.

Bir sayının birler basamağındaki rakam, o sayının 10 ile bölümünden kalan sayıdır.

13. ÖRNEK

4ab sayısı 10 ile bölünebilmektedir. Bu sayının 9 ile bölümünden kalan, 1 olduğuna göre a sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

4ab sayısı 10 ile bölündüğünden b=0 dır.

4a0 sayısının 9 ile bölümünden kalan 1 ise sayının rakamları toplamının 9 ile bölümünden kalan 1 dir.

$4 + a + 0 = 9k + 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$

$3 + a = 9k$ olur. $k = 1$ için $3 + a = 9 \Rightarrow a = 6$ bulunur.

11 ile Bölünebilme

abcdef sayısının 11 ile bölümünden kalanı bulmak için sayının birler basamağından başlayarak sırasıyla + - + - + - ... işaretleri yazılır ve aşağıdaki işlemler yapılır.

$\underset{-\,+\,-\,+\,-\,+}{a\,b\,c\,d\,e\,f} \longrightarrow (b + d + f) - (a + c + e) = 11k \ (k \in \mathbb{Z})$ oluyorsa sayı 11 ile bölünebilir.

Sayının 11 ile bölümünden kalan, $(b + d + f) - (a + c + e)$ farkının 11 ile bölümünden kalana eşittir.

14. ÖRNEK

Aşağıdaki sayıların 11 ile bölümünden kalanları bulunuz.

a) 14 873

b) 867 501

c) aabbccdd

ÇÖZÜM

11 ile bölünebilme kuralı uygulanırsa

a) $\underset{+-+-+}{14873} \rightarrow (1 + 8 + 3) - (4 + 7) = 12 - 11 = 1$ dir. Kalan 1 olur.

b) $\underset{-+-+-+}{867501} \rightarrow (6 + 5 + 1) - (8 + 7 + 0) = 12 - 15$

$= -3$ tür. Kalan negatif olduğundan 11 eklenerek $-3 + 11 = 8$ bulunur.

c) $\underset{-+-+-+-+}{aabbccdd} \rightarrow (a + b + c + d) - (a + b + c + d) = 0$ Kalan 0 olduğundan 11 ile tam bölünür.

15. ÖRNEK

8x042 sayısının 11 ile bölümünden kalan 2 ise x rakamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\underset{+}{8}\underset{-}{x}\underset{+}{0}\underset{-}{4}\underset{+}{2} \rightarrow (8+0+2)-(x+4)=11k+2 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$6-x=11k+2$$

$$4-x=11k$$

$k=0$ için $x=4$ bulunur. k nin diğer değerleri için x rakamı yoktur.

16. ÖRNEK

Dört basamaklı a86b sayısının 11 ile bölümünden kalan 6 ise kaç farklı (a,b) ikilisi olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\underset{-}{a}\underset{+}{8}\underset{-}{6}\underset{+}{b} \rightarrow (b+8)-(a+6)=11k+6 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$b-a+2=11k+6$$

$$b-a-4=11k \text{ bulunur.}$$

$$\left.\begin{array}{ll} k=0 \text{ için } b-a=4 & \text{ve } k=-1 \text{ için } b-a=-7 \\ \begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ \cancel{4} & \cancel{0} \rightarrow a \neq 0 \\ 5 & 1 \\ 6 & 2 \\ 7 & 3 \\ 8 & 4 \\ 9 & 5 \end{array} & \begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ 0 & 7 \\ 1 & 8 \\ 2 & 9 \end{array} \end{array}\right\} (a,b) \text{ sıralı ikililerinin sayısı } 5+3=8 \text{ tanedir.}$$

Aralarında asal iki sayıdan her birine bölünebilen bir sayı, bu sayıların çarpımına da bölünür.
6 ya bölünebilen bir sayı, 2 ve 3 ile bölünebilir.
12 ye bölünebilen bir sayı, 3 ve 4 ile bölünebilir.
15 e bölünebilen bir sayı, 3 ve 5 ile bölünebilir.
24 e bölünebilen bir sayı, 3 ve 8 ile bölünebilir.
36 ya bölünebilen bir sayı, 4 ve 9 ile bölünebilir.
44 e bölünebilen bir sayı, 4 ve 11 ile bölünebilir.

17. ÖRNEK

Rakamları farklı 23ab sayısı, 15 ile bölünebildiğine göre a nın alabileceği değerleri bulunuz.

ÇÖZÜM

Bir sayının 15 ile bölünebilmesi için 3 ve 5 ile bölünebilmesi gerekir. 23ab sayısı, 5 ile bölünebiliyorsa $b=0$ veya $b=5$ olmalıdır.

b rakamı yerine yazıldığında oluşan sayıların 3 ile bölünebilmesi için sayının toplamı 3 ün katı olmalıdır.

23a0 için

$$2+3+a+0=3k$$

$$a \in \{1,4,7\}$$

23a5 için

$$2+3+a+5=3k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$a \in \{2,5,8\}$$

Rakamları farklı denildiğinden a nın alabileceği değerler 1, 4, 7 ve 8 dir.

18. ÖRNEK

1x0yy sayısının 12 ile bölümünden kalan 2 ise x in alabileceği değerler toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

Sayının 12 ile bölümünden kalan 2 olduğundan 3 ve 4 ile bölümünden kalanlar da 2 olur. 4 ile bölümünden kalanın 2 olması için son iki basamağındaki sayı 22 veya 66 olmalıdır.

1x022 ve 1x066 sayılarının 3 ile bölümünden kalanın 2 olması için rakamları toplamına bakılırsa

1x022 için	1x066 için
$1+x+2+2=3k+2$	$1+x+6+6=3k+2 \quad (k\in\mathbb{Z})$
$3+x=3k$	$x+11=3k$
$x\in\{0,3,6,9\}$	$x\in\{1,4,7\}$

x in alabileceği değerler toplamı $0+1+3+4+6+7+9=30$ olur.

19. ÖRNEK

Yandaki bölme işlemine göre (a,b) sıralı ikilisinin alabileceği farklı değerleri bulunuz.

$$\begin{array}{r|l} ab0ba & 55 \\ \hline - \quad & \\ \hline 24 & \end{array}$$

ÇÖZÜM

55 ile bölünebilmeyi incelemek için 11 ve 5 ile bölünebilme incelenmelidir. Sayının 55 ile bölümünden kalan 24 olduğundan 24 ün 5 ile bölümünden kalan 4 tür. Buna göre $a=4$ veya $a=9$ olur.

24 ün 11 ile bölümünden kalan 2 olacağından

$\underset{+}{a}\underset{-}{b}\underset{+}{0}\underset{-}{b}\underset{+}{a} \rightarrow 2a-2b=11k+2 \quad (k\in\mathbb{Z})$

k = 0 için $a-b=1$

a	b
↓	↓
4	3
9	8

(a,b) sıralı ikilileri $(4,3)$ ve $(9,8)$ dir.

20. ÖRNEK

$\underbrace{3434...343}_{\text{21 basamaklı}}$ sayısının 36 ile bölümünden kalanı bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen sayının 4 ile bölümünden kalanı bulmak için 43 sayısı 4 e bölünür ve kalan 3 bulunur.

Verilen sayının 9 ile bölümünden kalanı bulmak için sayının rakamları toplamı $11\cdot3+10\cdot4=73$ olduğundan 73 ün 9 ile bölümünden kalan 1 dir.

3434...343 sayının 36 ile bölümünden kalan 4 ile bölündüğünde 3 kalanını, 9 ile bölündüğünde 1 kalanını veren en küçük ortak sayıdır.

4 ile bölündüğünde 3 kalanını veren sayılar $\{3,7,11,15,19,23,27,...\}$ dır.

9 ile bölündüğünde 1 kalanını veren sayılar $\{1,10,19,28,37,...\}$ olduğundan sayı 36 ile bölündüğünde kalan 19 olur.

Bir Tam Sayının Asal Çarpanları ve Tam Sayı Bölenleri

x, y birer tam sayı ve $y \neq 0$ olmak üzere $x = k \cdot y$ koşulunu sağlayan bir k doğal sayısı bulunabiliyorsa y sayısı x in bir çarpanıdır. “y böler x” i denir ve $y \mid x$ biçiminde gösterilir.

Örneğin 12 sayısını tam bölen doğal sayılar 1, 2, 3, 4, 6, 12 dir. 12 sayısını tam bölen asal sayılar 2 ve 3 olur.

180 i tam bölen sayıları bulmak zaman alır. Bu nedenle bir yöntem kullanılması gerekir. Bir tam sayının asal sayıların çarpımı biçiminde yazılmasına bu sayının asal çarpanlara ayrılmış hâli denir.

A bir tam sayı; x, y, z asal sayı ve a, b, c doğal sayı olmak üzere A tam sayısının $A = x^a \cdot y^b \cdot z^c$ şeklinde ifade edilmesine asal çarpanların çarpımı ile gösterim denir. x, y, z sayıları A nın asal çarpanlarıdır.

21. ÖRNEK

280 ve 720 sayılarını asal çarpanlarına ayırınız.

ÇÖZÜM

$$\begin{array}{r|l} 280 & 2 \\ 140 & 2 \\ 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad 280 = 2^3 \cdot 5^1 \cdot 7^1$$

$$\begin{array}{r|l} 720 & 2 \\ 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$$

22. ÖRNEK

x ve y pozitif tam sayılardır. $120 \cdot x = y^2$ koşulunu sağlayan en küçük x ve y değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

120 sayısı asal çarpanlarına ayrıldığında

$120 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5$

$\quad = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$dir.

120 yerine asal çarpanları yazılırsa $2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot x = y^2$ olur. y nin tam sayı olabilmesi için asal çarpanların üslerinin 2 nin katı olması gerekir.

x in alabileceği en küçük değer $x = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ olacağından $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = y^2$ olur. Buna göre $2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = y$ bulunur.

$x + y = 30 + 60 = 90$ olur.

A bir tam sayı; x, y, z asal sayı; a, b, c doğal sayı ve $A = x^a \cdot y^b \cdot z^c$ olmak üzere

- A sayısının pozitif tam sayı bölenleri sayısı: $(a+1) \cdot (b+1) \cdot (c+1)$
- A sayısının negatif tam sayı bölenleri sayısı: $(a+1) \cdot (b+1) \cdot (c+1)$
- A sayısının tam sayı bölenleri sayısı: $2 \cdot (a+1) \cdot (b+1) \cdot (c+1)$ tanedir.
- A sayısının asal sayı bölenleri x, y, z olmak üzere 3 tanedir.
- A sayısının tam sayı bölenleri toplamı 0 dır.

23. ÖRNEK

126 sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin ve tam sayı bölenlerinin sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

126 sayısı asal çarpanlarına ayrıldığında $126 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 7^1$ olur.
126 nın pozitif tam sayı bölenleri sayısı: $(1+1)\cdot(2+1)\cdot(1+1) = 2\cdot 3\cdot 2 = 12$,
126 nın tam sayı bölenleri sayısı: $2\cdot(1+1)\cdot(2+1)\cdot(1+1) = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 2 = 24$ olur.

24. ÖRNEK

7! sayısının

a) Pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını,

b) Tam sayı bölenlerinin toplamını,

c) Asal olmayan pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını,

ç) Asal olmayan tam sayı bölenlerinin toplamını,

d) Çift tam sayı bölenlerinin sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

$7! = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 2^4\cdot 3^2\cdot 5^1\cdot 7^1$ asal çarpanlarına ayrılmış hâlidir.

a) Pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı $(4+1)\cdot(2+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1) = 5\cdot 3\cdot 2\cdot 2 = 60$ bulunur.

b) Pozitif tam sayı bölenlerinin toplamaya göre tersleri, negatif tam sayı bölenleri olacağından tam sayı bölenlerinin toplamı 0 dır.

c) 7! sayısının asal olmayan pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını bulmak için pozitif tam sayı bölenlerinin sayısından asal sayı bölenlerinin sayısı çıkarılır. Asal bölenleri 2, 3, 5 ve 7 olmak üzere 4 tanedir. Asal olmayan pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı: $60 - 4 = 56$ dır.

ç) 7! sayısının asal olmayan tam sayı bölenlerinin toplamını bulmak için tüm bölenler yazılır ve asal sayılar çıkartılır.

$$\left.\begin{array}{l} -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -10\ldots \\ \ \ 1, \ \ \cancel{2}, \ \ \cancel{3}, \ \ 4, \ \ \cancel{5}, \ \ 6, \ \ \cancel{7}, \ \ 8, \ \ 10\ldots \end{array}\right\}$$ Pozitif ve negatif bölenlerin toplamı sıfır olduğundan

sayının geriye kalan bölenleri toplandığında $-2-3-5-7=-17$ bulunur.

d) Çift tam sayı bölenleri 2 nin katı olacağından asal çarpanlardan bir tane 2 ayrılır. Geriye kalan asal çarpanların bölenlerinin sayısı hesaplanır.

$7! = \cancel{2}\cdot 2^3\cdot 3^2\cdot 5^1\cdot 7^1$

Pozitif tam sayı bölenleri sayısı: $(3+1)\cdot(2+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 2 = 48$ bulunur.

Tam sayı bölenleri sayısı: $48\cdot 2 = 96$ olur.

Sıra Sizde

SORU

$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ asal sayılar olmak üzere $A = x_1^{a_1}\cdot x_2^{a_2}\cdot x_3^{a_3}\cdot \ldots \cdot x_n^{a_n}$ sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısının $(a_1+1)\cdot(a_2+1)\cdot \ldots \cdot(a_n+1)$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

25. ÖRNEK

$8^4 \cdot 6^7 \cdot 35^3$ sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen sayı asal çarpanlara ayrılırsa $8^4 \cdot 6^7 \cdot 35^3 = (2^3)^4 \cdot (2 \cdot 3)^7 \cdot (5 \cdot 7)^3$

$= 2^{19} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^3$ bulunur.

Pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı $(19+1)\cdot(7+1)\cdot(3+1)\cdot(3+1) = 2560$ olur.

26. ÖRNEK

$15 \cdot 42^x$ sayısının asal olmayan tam sayı bölenlerinin sayısı 140 olduğuna göre x in tam sayı değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Sayı asal çarpanlarına ayrıldığında $15 \cdot 42^x = 3 \cdot 5 \cdot 2^x \cdot 3^x \cdot 7^x = 2^x \cdot 3^{x+1} \cdot 5^1 \cdot 7^x$ olur.

Asal sayı bölenleri 2, 3, 5 ve 7 olmak üzere 4 tanedir. Asal olmayan tam sayı bölenlerinin sayısı 140 ve asal sayı bölenlerinin sayısı 4 olduğundan $140 + 4 = 144$ tam sayı bölenlerinin sayısıdır.

Pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı tam sayı bölenleri sayısının yarısı olacağından 72 dir.

Pozitif tam sayı bölen sayısı: $(x+1)\cdot(x+2)\cdot(1+1)\cdot(x+1) = 72$

$(x+1)^2 \cdot (x+2) = 36$

$x = 2$ dir.

27. ÖRNEK

n bir tam sayı olmak üzere $\dfrac{3n-240}{n}$ ifadesi bir tam sayı ise n nin alabileceği kaç farklı değer olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen ifade yandaki gibi düzenlendiğinde $\dfrac{3n-240}{n} = \dfrac{3n}{n} - \dfrac{240}{n}$

$= 3 - \dfrac{240}{n}$

$3 - \dfrac{240}{n}$ ifadesinin tam sayı olması için n sayısı 240 ın tam böleni olmalıdır.

240 asal çarpanlarına ayrıldığında: $240 = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^1$ olur.

240 sayısının tam sayı bölenlerinin sayısı: $2\cdot(4+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1) = 40$ bulunur.

Sıra Sizde

SORU

60^5 sayısının

a) 6 nın katı olan pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını,

b) Tam kare olan pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

ALIŞTIRMALAR-3

1. Beş basamaklı x201y sayısı, 10 ile bölünebilmektedir. Bu sayının 3 ile bölümünden 1 kalması için x in alabileceği değerleri bulunuz.

2. Rakamları farklı 45ab sayısı, 15 ile bölündüğüne göre $a+b$ nin en büyük değerini bulunuz.

3. Dört basamaklı bir doğal sayının 4 ile bölümünden kalan 3, 11 ile bölümünden kalan 5 ise 44 ile bölümünden kalanı bulunuz.

4. 201ab sayısının 72 ile bölümünden kalan 28 ise a^b sayısını bulunuz.

5. 5abc4 sayısının 13 ile bölümünden kalan 7 ise 4abc5 sayısının 13 ile bölümünden kalanı bulunuz.

6.

$$\begin{array}{r|l} 2ab3 & 36 \\ \cline{2-2} - \quad & \\ \hline 7 & \end{array}$$

Yandaki bölme işlemine göre ab sayısının alabileceği en büyük değeri bulunuz.

7. 4 ile bölündüğünde 3, 3 ile bölündüğünde 1 kalanını veren en büyük 3 basamaklı doğal sayı ile en küçük 4 basamaklı doğal sayının farkının pozitif değerini bulunuz.

8. $2x^2 = y + z$ şartını sağlayan ve 4 ün katı olan xyz üç basamaklı sayılarını bulunuz.

3. Tam Sayılarda EBOB ve EKOK

En Büyük Ortak Bölen (EBOB)

İki veya daha fazla sayıyı aynı anda tam bölebilen sayılara ortak bölenler denir. 1 sayısı bütün sayıları tam böler.

Örneğin 18 ve 24 sayılarının bölenleri incelendiğinde

18 in pozitif tam sayı bölenleri: $18 \rightarrow 1, 2, 3, 6, 9, 18$

24 ün pozitif tam sayı bölenleri: $24 \rightarrow 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$

18 ve 24 ün ortak pozitif tam sayı bölenleri: 1, 2, 3, 6

18 ve 24 ü ortak bölen en büyük tam sayı 6 dır.

Birden fazla sayının ortak bölenlerinin en büyüğüne, bu sayıların en büyük ortak böleni denir.

Bu durum, EBOB ile gösterilir.

En az biri sıfırdan farklı x ve y tamsayıları verildiğinde bu iki sayının EBOB'u $\text{EBOB}(x, y)$ veya $(x, y)_{\text{Ebob}}$ şeklinde gösterilir.

18 ve 24 ün EBOB'u aşağıdaki gibi de bulunabilir.

$$\begin{array}{cc|l} 18 & 24 & 2\,* \\ 9 & 12 & 2 \\ 9 & 6 & 2 \\ 9 & 3 & 3\,* \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & & \end{array}$$

18 ve 24 ü ortak bölen sayıların çarpımı EBOB'u oluşturur. $\text{EBOB}(18, 24) = 2 \cdot 3 = 6$ olur.

$$\left.\begin{array}{l} 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \\ 24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \end{array}\right\}$$ 18 ve 24 ün ortak asal çarpanlarının çarpımı EBOB'u verir. $\text{EBOB}(18, 24) = 2 \cdot 3 = 6$

Sayıların EBOB değeri bulunurken sayılar asal çarpanlarına ayrılır. Ortak olan asal çarpanlardan üssü küçük olanların çarpımı bu sayıların EBOB değerini verir.

1. ÖRNEK

$A = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$
$B = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$ sayılarının en büyük ortak bölenini bulunuz.

ÇÖZÜM

İki sayının ortak asal çarpanlarının en küçük dereceli olanlarının çarpımı, bu sayıların EBOB değerini verir.

$$\left.\begin{array}{l} A = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \\ B = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \end{array}\right\} \text{EBOB}(A, B) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120 \text{ dir.}$$

$x, y, z, k \in \mathbb{Z}$ ve $\text{EBOB}(x, y) = z$ olmak üzere

a) $\text{EBOB}(x, x) = x$

b) $\text{EBOB}(ky, y) = y$

c) $\text{EBOB}(kx, ky) = kz$

ç) $\text{EBOB}\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 1$

2. ÖRNEK

Toplamları 140 olan iki sayının en büyük ortak böleni 5 olduğuna göre bu sayılar arasındaki farkın pozitif değerinin en az kaç olabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Sayılar a ve b olmak üzere toplamları 140 ve en büyük ortak bölenleri 5 olduğundan

$$\left.\begin{array}{l} a+b=140 \\ \text{EBOB}(a,b)=5 \end{array}\right\} a=5x \text{ ve } b=5y \text{ ise}$$

$$5x+5y=140$$

$x+y=28$ Farkın en az olabilmesi için sayılar birbirine yakın seçilmelidir.

$x=15$ ve $y=13$ için $a=75$ ve $b=65$

$$a-b=75-65=10$$

3. ÖRNEK

Yatılı bir okula kırtasiye yardımı yapılacaktır. Her öğrenci için aynı sayıda kırtasiye malzemesi içeren paketler hazırlanacaktır. Her pakette tüm malzeme çeşitlerinden olacak ve aynı malzemeden her pakette eşit sayıda bulunacaktır. Yapılacak kırtasiye yardımı için toplam 126 silgi, 180 defter ve 324 kalem olduğuna göre en fazla kaç öğrenciye kırtasiye yardımı yapılabilir ve bir pakette her malzemeden kaçar tane bulunur?

ÇÖZÜM

En fazla kaç öğrenciye kırtasiye yardımı yapılacağını bulmak için 126, 180 ve 324 sayılarının EBOB'u bulunur.

$$\begin{array}{rrr|l} 126 & 180 & 324 & 2 * \\ 63 & 90 & 162 & 2 \\ 63 & 45 & 81 & 3 * \\ 21 & 15 & 27 & 3 * \\ 7 & 5 & 9 & 3 \\ 7 & 5 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & 1 & 5 \\ 7 & 1 & & 7 \\ 1 & & & \end{array}$$

$\text{EBOB}(126, 180, 324) = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ olduğundan en fazla 18 öğrenciye kırtasiye yardımı yapılabilir.

Bir pakette her malzemeden kaç tane olduğunu bulmak için malzeme sayıları öğrenci sayısına bölünür.

$\dfrac{126}{18} = 7$ silgi

$\dfrac{180}{18} = 10$ defter

$\dfrac{324}{18} = 18$ kalem

Bir pakette 7 silgi, 10 defter ve 18 kalem bulunur.

4. ÖRNEK

Dörtgen şeklinde bir atletizm stadyumunda koşu dalında pist yarışları yapılmaktadır. Sporcular eşit aralıklarla yerleştirilmiş engelleri aşarak koşuyu tamamlamaya çalışmaktadır. Pistin kenar uzunlukları 20 m, 30 m, 40 m ve 50 m dir. Köşelere de engel konulacağına göre en az sayıda engel yerleştirilebilmesi için iki engel arasındaki mesafeyi ve engel sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

En az sayıda engel olabilmesi için engeller arası mesafenin en büyük değeri alması gerekir. Bu nedenle 20, 30, 40 ve 50 nin EBOB değeri hesaplanır.

$$\begin{array}{cccc|l} 20 & 30 & 40 & 50 & 2* \\ 10 & 15 & 20 & 25 & 2 \\ 5 & 15 & 10 & 25 & 2 \\ 5 & 15 & 5 & 25 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 25 & 5* \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 5 \\ & & & 1 & \end{array}$$

$\text{EBOB}(20, 30, 40, 50) = 10$ olduğundan engeller arası mesafe en fazla 10 m olur.

Engel sayısını bulmak için çevre uzunluğunun iki engel arasındaki mesafeye bölünmesi gerekir.

$\dfrac{\text{Çevre}}{10} = \dfrac{140}{10} = 14$ tane engel vardır.

5. ÖRNEK

Uzunlukları 48, 60 ve 84 m olan türdeş tahta bloklar kesilerek birbirine eşit en büyük parçalara ayrılmak isteniyor. Her kesim için 2 dk harcanmaktadır. Buna göre tüm blokların kesim işleminin kaç dakikada tamamlanacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

48, 60 ve 84 sayılarının EBOB'unun bulunması gerekir.

$$\begin{array}{ccc|l} 48 & 60 & 84 & 2* \\ 24 & 30 & 42 & 2* \\ 12 & 15 & 21 & 2 \\ 6 & 15 & 21 & 2 \\ 3 & 15 & 21 & 3* \\ 1 & 5 & 7 & 5 \\ & 1 & 7 & 7 \\ & & 1 & \end{array}$$

$\text{EBOB}(48, 60, 84) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

Kesilen parçaların uzunlukları 12 m olacağından parça adetleri ve kesim işlemi sayıları aşağıdaki gibi bulunur.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{48}{12} = 4 \text{ parça} \rightarrow 4 - 1 = 3 \text{ kesim} \\ \dfrac{60}{12} = 5 \text{ parça} \rightarrow 5 - 1 = 4 \text{ kesim} \\ \dfrac{84}{12} = 7 \text{ parça} \rightarrow 7 - 1 = 6 \text{ kesim} \end{array}\right\} 3 + 4 + 6 = 13$$

Tahta blokların parçalanması için toplam 13 kesim işlemi yapılır. Bir kesim işlemi 2 dakika sürdüğünden $2 \cdot 13 = 26$ dakikada işlem tamamlanır.

6. ÖRNEK

Bir bale salonunun bir duvarı hiç boşluk kalmayacak şekilde eş kare aynalar ile kaplanacaktır. Duvarın boyutlarının 3,3 m ve 15,4 m olduğu bilinmektedir. En az sayıda ayna kullanılabilmesi için aynanın bir kenar uzunluğunun kaç cm olması gerektiğini ve toplam ayna adetini bulunuz.

ÇÖZÜM

$3,3\ \text{m} = 330\ \text{cm}, 15,4\ \text{m} = 1540\ \text{cm}$ dir.

330 ve 1540 ın EBOB'unun bulunması gerekir.

330 cm

1540 cm

$$\left.\begin{array}{cc|l} 330 & 1540 & 2* \\ 165 & 770 & 2 \\ 165 & 385 & 3 \\ 55 & 385 & 5* \\ 11 & 77 & 7 \\ 11 & 11 & 11* \\ 1 & 1 & \end{array}\right\} \text{EBOB}(330,1540) = 110$$ olduğundan kare aynanın bir kenarı 110 cm olur.

$\dfrac{\text{Duvarın alanı}}{\text{Bir aynanın alanı}} = \dfrac{330 \cdot 1540}{110 \cdot 110}$ Kullanılabilecek en az ayna sayısı 42 tanedir.

a) a ve b aralarında asal sayılar olmak üzere $\text{EBOB}(a,b) = 1$ dir.
b) Ardışık tam sayılar aralarında asaldır.
c) Ardışık tek sayılar aralarında asaldır.

7. ÖRNEK

x ve y ardışık doğal sayılar olmak üzere $x \cdot y = x + y + \text{EBOB}(x,y) + 40$ koşulunu sağlayan x ve y değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

x ve y ardışık sayılar olduğundan $y = x + 1$ olsun. x ve y ardışık sayılar olduğundan $\text{EBOB}(x,y) = 1$ dir.

$x \cdot y = x + y + \text{EBOB}(x,y) + 40$

$x \cdot y = x + y + 1 + 40$ olur.

y yerine $x + 1$ yazıldığında $x \cdot (x+1) = x + (x+1) + 41$

$$x^2 + x = 2x + 42$$

$$x^2 - x = 42$$

$$x(x-1) = 42$$

denklemini sağlayan x doğal sayısı 7 dir. $x = 7$ için $y = 8$ bulunur.

Öklid Algoritması

Öklid algoritması iki sayının EBOB'u bulunurken kullanılan bir yöntemdir. Ardışık bölme işlemleri ile sonuca gidilir. Özellikle büyük sayılar verildiğinde asal çarpanlara ayırarak EBOB'u bulmak çok uzayabilir. Bunun yerine Öklid algoritması kullanılır. Öklid algoritmasında büyük sayı, küçük sayıya bölünür. Kalan sıfır değil ise bölen kalana tekrar bölünür. Sıfır kalanı elde edilene kadar bölme işlemi tekrarlanır. Sıfır kalanını veren bölme işleminden önceki kalan, verilen sayıların EBOB'u olur. Bu işlem aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$a, b \in \mathbb{Z}$ ve $a > b \geq 1$ olsun. a sayısı, b sayısına bölünüp ardışık bölme işlemleri kalan sıfır oluncaya kadar aşağıdaki gibi devam ettirilir.

$a = t_1 \cdot b + k_1, \quad 0 \leq k_1 < b$

$b = t_2 \cdot k_1 + k_2, \quad 0 \leq k_2 < k_1$

$k_1 = t_3 \cdot k_2 + k_3, \quad 0 \leq k_3 < k_2$

$\vdots$

$k_{n-1} = t_{n+1} \cdot k_n + 0$

Kalanın sıfır olduğu bölme işlemindeki bölen, a ve b nin EBOB değeridir. $\text{EBOB}(a, b) = k_n$ olur.

$\forall a, b \in \mathbb{Z}^+$ için $ax + by = \text{EBOB}(a, b) = k_n$ olacak şekilde x ve y tamsayıları vardır.

8. ÖRNEK

196 ve 108 sayılarının en büyük ortak bölenini Öklid algoritması ile bulunuz.

ÇÖZÜM

196 ve 108 sayılarının EBOB'unu bulmak için Öklid algoritması uygulandığında

196	108	108	88	88	20	20	8	8	4
−108	1	−88	1	−80	4	−16	2	−8	2
88		20		8		4		0	

$\text{EBOB}(196, 108) = 4$ bulunur.

İki sayının EBOB'unu bulmak için büyük sayıdan küçük sayı çıkarılır. Elde edilen sayı ile küçük sayının EBOB'u hesaplanır. Bu işlem, eşit sayıların EBOB'u alınana kadar devam eder. Çıkarma yöntemi aşağıdaki gibi uygulanabilir.

$x > y$ için $\text{EBOB}(x, y) = \text{EBOB}(x - y, y)$ olur.

9. ÖRNEK

27 ve 36 sayılarının en büyük ortak bölenini çıkarma yöntemi ile bulunuz.

ÇÖZÜM

27 ve 36 sayılarının EBOB'u çıkarma yöntemi ile bulunursa

$$
\begin{aligned}
\text{EBOB}(27, 36) &= \text{EBOB}(36 - 27, 27) \\
&= \text{EBOB}(9, 27) \\
&= \text{EBOB}(27 - 9, 9) \\
&= \text{EBOB}(18, 9) \\
&= \text{EBOB}(18 - 9, 9) \\
&= \text{EBOB}(9, 9) \\
&= 9 \text{ olur.}
\end{aligned}
$$

a ve b sıfırdan farklı tam sayılar ise $EBOB(a,b) = ax + by$ olacak şekilde sonsuz sayıda (x,y) ikilisi vardır.

10. ÖRNEK

$21x + 27y = EBOB(21,27)$ ifadesini sağlayan (x,y) sıralı ikililerinin genel ifadesi ile en küçük iki pozitif x değerinin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

Öklid algoritmasına göre

$27 = 21 \cdot 1 + 6$

$21 = 6 \cdot 3 + 3$

$6 = 3 \cdot 2 + 0 \quad \Rightarrow \quad EBOB(21,27) = 3$

$27 = 21 \cdot 1 + 6 \Rightarrow 6 = 27 - 21 \quad \ldots(1)$

$21 = 6 \cdot 3 + 3 \quad \Rightarrow 3 = 21 - 6 \cdot 3 \ldots(2)$

(2) de 6 yerine (1) ifadesi yazılırsa

$3 = 21 - (27 - 21) \cdot 3$

$3 = 21 - 3 \cdot 27 + 3 \cdot 21$

$3 = 4 \cdot 21 + (-3) \cdot 27$ bulunur.

$3 = 21m + 27n$ ifadesindeki m değeri 4 ve n değeri -3 olur.

(x,y) sıralı ikililerinin genel ifadesini bulmak için $3 = 21m + 27n$ denklemi sadeleştirilirse $1 = 7m + 9n$ elde edilir. Bu denkleme $7 \cdot 9 \cdot k$ ifadesi eklenip çıkartılırsa

$1 = 7m + 9n \Rightarrow 1 = 7m + 9n + 7 \cdot 9 \cdot k - 7 \cdot 9 \cdot k$ ($k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere)

$1 = 7(m + 9k) + 9(n - 7k)$

Buradan $x = m + 9k$ ve $y = n - 7k$ dir.

Buna göre $x = 4 + 9k$ ve $y = -3 - 7k$ bulunur.

$(x,y) = (4 + 9k, -3 - 7k)$ genel ifadesidir.

k nin alabileceği farklı değerler için farklı (x,y) sıralı ikilileri bulunur.

$k = 0$ için $x = 4 + 9 \cdot 0 \Rightarrow x = 4$

$k = 1$ için $x = 4 + 9 \cdot 1 \Rightarrow x = 13$ olmak üzere

x in alabileceği en küçük iki pozitif tam sayı değerinin toplamı $4 + 13 = 17$ bulunur.

Sıra Sizde

SORU

1. 1035 ve 1071 sayılarının en büyük ortak bölenini Öklid algoritması ile bulunuz.
2. Ardışık iki çift sayının en büyük ortak bölenini Öklid algoritması ile bulunuz.

ÇÖZÜM

En Küçük Ortak Kat (EKOK)

Ortak katların en küçüğü, sayıların katlarını alıp belli bir noktada buluşturmak istendiğinde veya parçaları birleştirerek bir bütün elde etmek amaçlandığında kullanılır.

12 ve 18 sayılarının EKOK'unu bulmak için 12 ve 18 in katları alınır.

12 nin pozitif tam katları $12 \rightarrow \{12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, \ldots\}$

18 in pozitif tam katları $18 \rightarrow \{18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, \ldots\}$

12 ve 18 sayılarının pozitif ortak katları 36, 72, 108, 144 ... olduğundan sayının en küçük ortak katı 36 olur.

Birden fazla sayının pozitif ortak katlarının en küçüğüne, bu sayıların en küçük ortak katı denir. EKOK ile gösterilir. x ve y pozitif iki tamsayı olmak üzere bu iki sayının EKOK'u "$\text{EKOK}(x, y)$ veya $(x, y)_{\text{EKOK}}$" şeklinde gösterilir.

$$\begin{array}{cc|c} 12 & 18 & 2 \\ 6 & 9 & 2 \\ 3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ & 1 & \end{array}$$

12 ve 18 in ortak katlarının en küçüğünü bulmak için bölenlerin hepsini çarpmak gerekir.
$\text{EKOK}(12, 18) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$ bulunur.

Sayıların EKOK değeri bulunurken sayılar asal çarpanlarına ayrılır. Ortak olan asal çarpanlardan üssü büyük olanlarla ortak olmayan asal çarpanların çarpımı bu sayıların EKOK değerini verir.

11. ÖRNEK

$K = 20^4 \cdot 12^2,\ M = 18^3 \cdot 35$ ise K ve M sayılarının EKOK ve EBOB'unu bulunuz.

ÇÖZÜM

K ve M sayılarının EKOK'unu bulmak için sayılar asal çarpanlarına ayrılır.

$$K = 20^4 \cdot 12^2 = (2^2 \cdot 5)^4 \cdot (2^2 \cdot 3)^2 = 2^8 \cdot 5^4 \cdot 2^4 \cdot 3^2 = 2^{12} \cdot 3^2 \cdot 5^4$$

$$M = 18^3 \cdot 35 = (2 \cdot 3^2)^3 \cdot 5 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7$$

$\text{EKOK}(K, M) = 2^{12} \cdot 3^6 \cdot 5^4 \cdot 7$ $\quad \text{EBOB}(K, M) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$ bulunur.

12. ÖRNEK

İki öğrencinin bir günde çözdüğü soru sayılarının en küçük ortak katı 120 dir. Buna göre

a) Toplam çözülen soru sayısı en az kaçtır?

b) Toplam çözülen soru sayısı en çok kaçtır?

c) Birbirlerinden farklı sayıda soru çözdükleri biliniyorsa çözülen soru sayısı toplamının en büyük değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Çözülen soru sayısının en az olması için x ve y nin aralarında asal ve birbirine yakın sayılar olması gerekir.
$\text{EKOK}(x, y) = 120$ olmak üzere
$x = 8$ ve $y = 15$ için $x + y = 8 + 15 = 23$ bulunur.

b) Çözülen soru sayısının en çok olması için sayıların EKOK değerine eşit olması gerekir.
$\text{EKOK}(x, y) = 120$ olmak üzere
$x = 120$ ve $y = 120$ için $x + y = 120 + 120 = 240$ bulunur.

c) Çözdükleri soru sayısı birbirinden farklı ise x ve y toplamının en büyük olması için EKOK'u 120 olan iki sayı seçilmelidir.
$\text{EKOK}(x, y) = 120$ olmak üzere
$x = 60$ ve $y = 120$ için $x + y = 60 + 120 = 180$ bulunur.

13. ÖRNEK

Bir akvaryumda bulunan balıklar üçerli satıldığında 1 balık, dörderli satıldığında 2 balık ve beşerli satıldığında 3 balık kalmaktadır. Buna göre

a) Akvaryumdaki balık sayısının en az kaç tane olduğunu bulunuz.

b) Balıkların sayısı 200 den fazla olsaydı akvaryumda en az kaç balık olurdu?

ÇÖZÜM

a) Balıkların sayısı A olsun.

$$A = 3x + 1 = 4y + 2 = 5z + 3$$

$$A + 2 = 3(x+1) = 4(y+1) = 5(z+1)$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \\ & & 1 & \end{array}\right\} \text{EKOK}(3,4,5) = 60$$

Bölen ile kalanlar arası farklar 2 dir.
$A + 2$ sayısı 3, 4 ve 5 in katı olduğundan EKOK değeri hesaplanır.

$A + 2 = k \cdot \text{EKOK}(3,4,5)$

$A + 2 = k \cdot 60$

$k = 1$ için $A + 2 = 60 \Rightarrow A = 58$

b) Balık sayısı 200 den fazla olacağından EKOK değerinin katları alınır.

$A + 2 = k \cdot \text{EKOK}(3,4,5)$

$A + 2 = 60 \cdot k$

$k = 4$ için $A + 2 = 240$

$A = 238$ bulunur.

14. ÖRNEK

Bir fabrikada üretilen dikdörtgen prizma şeklindeki gofret çeşitlerinden birinin boyutları 1 cm, 3 cm ve 7 cm dir. Bu gofretler, boşluk bırakılmadan küp şeklindeki en küçük kutuya konmak isteniyor. Buna göre

a) Bu kutunun hacmi kaç cm^3 olabilir?

b) Bu kutuda kaç gofret vardır?

ÇÖZÜM

a) En küçük kutunun bir kenarı gofret boyutlarının EKOK'u olur. $\text{EKOK}(1,3,7) = 21$ dir. Kutunun hacminin en küçük değeri $21 \cdot 21 \cdot 21 = 9\,261\ cm^3$ olur.

b) Kutudaki gofret sayısını bulmak için kutunun hacmi, bir gofretin hacmine bölünür.

$$\frac{\text{Küpün hacmi}}{\text{Gofretin hacmi}} = \frac{21 \cdot 21 \cdot 21}{1 \cdot 3 \cdot 7} = 441$$

Kutuda 441 adet gofret bulunur.

1. $x, y, z, k \in \mathbb{Z}$ ve $EKOK(x,y) = z$ olmak üzere
   a) $EKOK(x,x) = x$ b) $EKOK(ky,y) = ky$ c) $EKOK(kx,ky) = kz$
2. Her $x, y \in \mathbb{Z}^+$ için $EBOB(x,y) \cdot EKOK(x,y) = x \cdot y$ şeklinde ifade edilir.
3. x ve y aralarında asal sayılar ise EBOB değeri 1 olduğundan EKOK değeri, sayıların çarpımına eşittir.
   $EKOK(x,y) = x \cdot y$
4. İki tam sayının EBOB değeri, bu sayılardan küçüktür ya da küçük sayıya eşittir. Bu sayıların EKOK değeri ise bu sayılardan büyüktür ya da büyük sayıya eşittir.
   Her $x, y \in \mathbb{Z}^+$ için, $x < y$ ise $EBOB(x,y) \le x < y \le EKOK(x,y)$
5. x, y, z ve t pozitif tam sayılar olmak üzere
   $EKOK\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{t}\right) = \frac{EKOK(x,z)}{EBOB(y,t)}$ olur.

15. ÖRNEK

x ve y aralarında asal sayılar olmak üzere

$EKOK(x,y) = 120$

$y = \frac{40}{x} + 10$ şartını sağlayan x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Sayılar aralarında asal ise $EBOB(x,y) = 1$ dir.

$EBOB(x,y) \cdot EKOK(x,y) = x \cdot y$

$1 \cdot 120 = x \cdot y$

Sayıların çarpımı EBOB ve EKOK'ları çarpımına eşittir.

Verilen eşitlik düzenlendiğinde

$y = \frac{40}{x} + 10$

$y = \frac{40 + 10x}{x}$

$xy = 40 + 10x$ ve $x \cdot y = 120$ için $120 = 40 + 10 \cdot x$

$80 = 10 \cdot x$

$x = 8$ olur.

16. ÖRNEK

a ve b pozitif tam sayıdır. $EBOB(a,b) = 14$ ve $EKOK(a,b) = 420$ olduğuna göre $a + b$ nin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

ÇÖZÜM

$EBOB(a,b) = 14 \Rightarrow a = 14x$ ve $b = 14y$ olacak şekilde aralarında asal x ve y sayıları vardır.

$EKOK(14x, 14y) = 420$ ve $EKOK(14x, 14y) = 14xy$ olduğundan $14xy = 420$

$xy = 30$

$a + b$ toplamının en küçük olabilmesi için x ve y sayıları birbirine yakın seçilmelidir.

$x = 5$ ve $y = 6$ için $a = 70$ ve $b = 84$ olur. Buna göre $a + b = 154$ bulunur.

17. ÖRNEK

Farklı büyüklükte olan iki çark, kırık dişleri yan yana olacak şekilde birlikte dönmeye başlıyor. Birincisi bir turu 5/12 saatte, diğeri ise 3/7 saatte tamamlıyor. Buna göre

a) Kaç saat sonra kırık dişlerin tekrar yan yana geleceğini bulunuz.

b) Çarkların kırık dişleri tekrar yan yana gelene kadar attıkları tur sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

a) 5/12 ve 3/7 sayılarının EKOK'unun bulunması gerekir. $\text{EKOK}\left(\frac{5}{12},\frac{3}{7}\right)=\frac{\text{EKOK}(3,5)}{\text{EBOB}(7,12)}=15$ saat sonra kırık dişler yan yana gelir.

b) 1. dişlinin attığı tur sayısı: $\frac{15}{\frac{5}{12}}=15\cdot\frac{12}{5}=36$

2. dişlinin attığı tur sayısı: $\frac{15}{\frac{3}{7}}=15\cdot\frac{7}{3}=35$ bulunur.

18. ÖRNEK

a ve b birbirinden farklı pozitif tam sayılar olmak üzere $\text{EBOB}(a,b)=a$ ve $\text{EKOK}(a,b)=b-a+7$ olduğuna göre $a+b$ nin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

ÇÖZÜM

Sayıların çarpımı EBOB ve EKOK'larının çarpımına eşittir. $\text{EBOB}(a,b)\cdot\text{EKOK}(a,b)=a\cdot b$

$$a\cdot\text{EKOK}(a,b)=a\cdot b$$

$$\text{EKOK}(a,b)=b \text{ olur.}$$

$\text{EKOK}(a,b)=b-a+7$ ifadesinde EKOK değeri yazılırsa $b=b-a+7\Rightarrow a=7$ olur.

a ve b sayıları birbirinden farklı ve $\text{EBOB}(a,b)=7$ olduğundan b nin alabileceği en küçük değer 14 bulunur.

Buna göre $a+b=7+14=21$ olur.

Sıra Sizde

SORU

Bir lisenin mezuniyet töreni için masa düzenlemesi yapılacaktır. Masaları süslemek için aşağıda belirtilen adetlerde çiçek siparişi verilmiştir.

Gül	Karanfil	Papatya
200	240	280

Her çiçek türünden bütün masalarda eşit sayıda olması istenmektedir. Masalar 6 kişilik olduğuna göre hiç artmayacak şekilde bu çiçeklerle en çok kaç kişilik masa ayarlanabilir?

ÇÖZÜM

4. Periyodik Olarak Tekrar Eden Olay Uygulamaları

Günlük hayatta bazı olaylar belli zaman aralıklarında tekrar eder. Bu durum periyodik olarak tekrar eden olay olarak adlandırılır.

Haftanın günlerinin 7 günde bir tekrar etmesi, nöbet tutan bir askerin, hemşirenin ya da doktorun belirli zaman dilimi sonunda tekrar nöbet tutması bu tür olaylara örnek olarak verilebilir.

1. ÖRNEK

Bugün cuma olduğuna göre 155 gün sonra hangi gün olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

Bu tür problemlerde haftanın günleri verilen gün sıfır olmak üzere doğal sayılarla eşleştirilir.
Bir hafta 7 gün olduğundan 155, 7 ye bölünürse kalan sayı 155 gün sonraki günü verir.

Cuma	Cumartesi	Pazar	Pazartesi	Salı	Çarşamba	Perşembe
0	1	2	3	4	5	6

$$\begin{array}{r|l} 155 & 7 \\ \cline{2-2} -154 & 22 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Bu durumda 155 gün sonra cumartesi olur.

2. ÖRNEK

Bugün salı olduğuna göre 25 gün önceki günün hangi gün olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Salı günü, sıfır ile eşleştirilip diğer günler geriye doğru doğal sayılarla eşleştirilir ve 25, 7 ye bölünürse kalan sayı 25 gün önceki günü verir.

Çarşamba	Perşembe	Cuma	Cumartesi	Pazar	Pazartesi	Salı
6	5	4	3	2	1	0

$$\begin{array}{r|l} 25 & 7 \\ \cline{2-2} -21 & 3 \\ \hline 4 & \end{array}$$

Bu durumda 25 gün önceki gün cuma olur.

3. ÖRNEK

Bir sporcu 4 gün antrenman yapıp 1 gün dinlenmektedir. Pazartesi günü antrenmana başlayan sporcunun 13. dinlenmesini hangi gün yapacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

Sporcu 4 gün antrenman yapıp 1 gün dinlendiğinden 5 günde bir döngü oluşur. Bu durumda sporcu 13. dinlenmesini $5 \cdot 13 - 1 = 64$ gün sonra yapar.

Pazartesi	Salı	Çarşamba	Perşembe	Cuma	Cumartesi	Pazar
0	1	2	3	4	5	6

$$\begin{array}{r|l} 64 & 7 \\ \cline{2-2} -63 & 9 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Bu durumda sporcu 13. dinlenmesini salı günü yapar.

4. ÖRNEK

10 günde bir nöbet tutan bir asker ilk nöbetini pazar günü tuttuğuna göre askerin 7. nöbetini hangi gün tutacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen gün salı olduğundan sıfır ile eşleştirilip diğer günler ileriye doğru doğal sayılarla eşleştirilirse

1. nöbet. 10 gün 2. nöbet. 10 gün 3. nöbet. 10 gün .... 9. nöbet. 10 gün 10. nöbet. 10 gün

şeklinde nöbet tutulmaktadır. 1. nöbet tutulduğu için geriye 6 nöbet kalmıştır. Bu durumda asker 7. nöbetini $6 \cdot 10 = 60$ gün sonra tutar.

Pazar	Pazartesi	Salı	Çarşamba	Perşembe	Cuma	Cumartesi
0	1	2	3	4	5	6

$$\begin{array}{r|l} 60 & 7 \\ \cline{2-2} -56 & 8 \\ \hline 4 & \end{array}$$

Buna göre asker pazar gününden 4 gün sonra yani perşembe günü 7. nöbetini tutar.

5. ÖRNEK

Bir hasta kullandığı üç ilaçtan 1. ilacı 2 günde bir, 2. ilacı 3 günde bir, 3. ilacı ise 5 günde bir kullanmaktadır. Üç ilacı birlikte çarşamba günü kullandığına göre hastanın üç ilacı 6. kez hangi gün kullanacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

Hasta 1. ilacı 2 gün ara ile, 2. ilacı 3 gün ara ile ve 3. ilacı 5 gün ara ile kullanıyorsa üçünü birlikte bu sayıların en küçük ortak katı olan gün sonra kullanır.

2, 3 ve 5 aralarında asal olduğundan bu sayıların en küçük ortak katı, bu sayıların çarpımı olur. Buradan $\text{EKOK}(2,3,5) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ bulunur.
Üç ilaç birlikte ilk kez kullanıldığından geriye 5 kez birlikte kullanım kalır. Bu durumda $5 \cdot 30 = 150$ gün sonra 6. kez üç ilacı birlikte kullanır.

Çarşamba	Perşembe	Cuma	Cumartesi	Pazar	Pazartesi	Salı
0	1	2	3	4	5	6

$$\begin{array}{r|l} 150 & 7 \\ \cline{2-2} -147 & 21 \\ \hline 3 & \end{array}$$

Buna göre hasta üç ilacını 6. kez cumartesi alır.

Sıra Sizde

SORU

Onur, ders çalışma programına her pazartesi 1 saat çalışarak başlamış ve bundan sonraki her gün bir önceki gün çalıştığı süreden 1 saat daha fazla çalışarak bir haftalık ders çalışma programını bitirmişir.

Pazar günleri ders çalışmayan ve bundan sonraki haftalarda periyodik olarak aynı sistemle ders çalışan Onur'un ders çalıştığı 432. saat hangi gündür?

ÇÖZÜM

ALIŞTIRMALAR-4

1.

	2	3	4	5	6	9	10	15
A				•	•			
B							•	•
3A								
A^2								
A+B								
$A \cdot B$								

Yukarıdaki tabloda satırlarda bulunan sayıların sütundaki sayılarla tam bölündüğünü göstermek için "•" işareti kullanılmıştır. Siz de tabloyu benzer şekilde doldurunuz.

2.

Zeytin Türleri	Zeytin Miktarı	Yağ Oranı %
A	300 kg	30
B	200 kg	25
C	350 kg	20
D	150 kg	40

Yukarıdaki tabloda bir işletmenin farklı türdeki zeytin miktarları ve zeytinyağı oranları verilmiştir. Zeytinyağları, türlerine göre birbirine karışmayacak şekilde şişelenecektir. Buna göre

a) İşletmenin toplam zeytinyağı üretim miktarını kg cinsinden bulunuz.

b) Zeytinyağı şişeleri en fazla kaç litrelik olabilir?

c) Zeytinyağları için en az kaç şişe gerektiğini bulunuz.

3. Boyutları 25 cm ve 160 cm olan dikdörtgen şeklindeki minderler kullanılarak kare biçiminde bir oyun alanı oluşturulacaktır. Oyun alanı için en az kaç minder kullanılacağını bulunuz.

4. Boyutları 15 cm, 20 cm, 25 cm olan dikdörtgen prizması şeklinde 7000 adet kutu bulunmaktadır. Bu kutular birleştirilerek farklı iki küp yapılmak isteniyor. Bunun için en az kaç kutuya daha ihtiyaç olduğunu bulunuz.

5. 30^{30} ve 42^{20} sayılarının ortak tam sayı bölenlerinin sayısını bulunuz.

6. a ve b doğal sayı olmak üzere $a^b = 16^{16}$ ifadesine göre kaç farklı (a, b) sıralı ikilisi yazılabilir?

7. 180 kişinin katıldığı bir panele en az kaç kişi daha katılmalıdır ki katılımcılar sekizerli ve onarlı gruplara ayrılabilir hâle gelsin?

8. Bir fabrikada bir saatte, dört farklı makinede ve farklı kalitede üretilen kağıt havlu adetleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Makine	A	B	C	D
Üretim Miktarı	48	36	54	60

Farklı kalitedeki havlular, ayrı paketlerde ve eşit sayıda olacak şekilde paketlenecektir. Buna göre

a) Bir pakette en çok kaç tane kağıt havlu olabileceğini bulunuz.

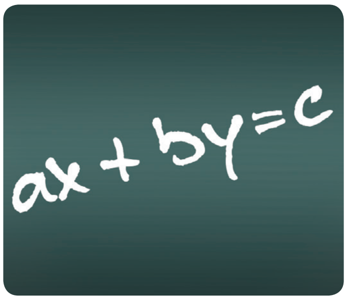
b) Paket sayısı en az kaç tane olabilir?

9. Ayşe 12 günde, Bekir 15 günde bir nöbet tutmaktadır. İkisi birlikte ilk nöbetlerini pazartesi günü tuttuğuna göre birlikte ilk salı günü nöbetlerini kaç gün sonra tutarlar?

9.3.3. BİRİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

TARİHÇE

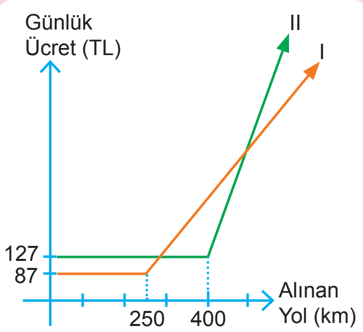
Diophantus (Diyofantus), 3. yy.da yaşadığı tahmin edilen ünlü bir matematikçidir. Çözümleri tam sayı olması istenen cebirsel denklemler üzerinde çalışmalar yapmıştır. Bu yüzden çözüm kümesi tam sayı olan cebirsel denklemlere "Diophantus Denklemleri" adı verilmektedir. En önemli yapıtı, 13 ciltten oluşan "Arithmetica (Aritmetik)" isimli eseridir. Bu eserde MÖ 1650 yılında yazılmış olan "Rhind Papirüsü"nde geçen tek bilinmeyenli cebir problemlerinin çözümlerini ve o güne kadar bilinen cebir üzerine yapılmış çalışmaları bir araya toplamıştır. Matematiksel ifadelerdeki sembolleri ilk kez Diophantus kullanmıştır.



Etkinlik

Bir araç kiralama firmasının farklı iki tipte araca ait ücretlendirme durumları aşağıdaki grafikte gösterilmiştir.

I. aracın günlük kirası 87 TL olup 250 km den sonraki her 1 km için 28 kr. daha ödenmektedir. II. aracın günlük kirası ise 127 TL olup 400 km den sonraki her 1 km için 30 kr. daha ödenmektedir.



Araç	Günlük Sabit Ücret	Sabit Ücrete Dâhil Edilen km	Her 1 km Aşımında km Başına Düşen Ücret
I. Araç	87 TL	250 km	28 kr.
II. Araç	127 TL	400 km	30 kr.

Verilen bilgilerden yararlanarak aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

1. **Bir günde 450 km gidilirse her bir araca ait kiralama ücreti ne kadar olur?**
2. **Günlük 550 km gidecek olan biri için hangi aracı kiralamak daha ekonomik olur?**
3. **Bir günde kaç km gidilirse kiralama ücreti her iki araç için eşit olur?**
4. **Günlük kiralama için en fazla 185 TL ayıran bir kişi I. aracı kiraladığına göre en fazla kaç km gidebilir?**
5. **İkinci aracı kiralayan birinin ödediği günlük kiralama ücreti, 151 TL ile 175 TL arasında olduğuna göre aracın gittiği yolun km si hangi aralıktadır.**

1. Gerçek Sayılarda Aralık Kavramı

Aralık Kavramı

$a, b \in \mathbb{R}$ için $a < b$ olmak üzere

1. Kapalı aralık: a ve b ile birlikte, a ile b arasındaki bütün gerçek sayıları kapsayan kümeye kapalı aralık denir. $[a, b]$ ile gösterilir.

$[a, b] = \{x \mid a \le x \le b, x \in \mathbb{R}\}$

2. Açık aralık: a ve b hâriç, a ile b arasındaki bütün reel sayıları kapsayan kümeye açık aralık denir. (a, b) ile gösterilir.

$(a, b) = \{x \mid a < x < b, x \in \mathbb{R}\}$

3. Yarı açık (yarı kapalı) aralık: (a, b) açık aralığına a ya da b den herhangi birinin dâhil edildiği kümeye yarı açık aralık denir. $[a, b)$ veya $(a, b]$ ile gösterilir.

$[a, b) = \{x \mid a \le x < b, x \in \mathbb{R}\}$

$(a, b] = \{x \mid a < x \le b, x \in \mathbb{R}\}$

4. Üstten sınırsız aralıklar: $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere a dan büyük tüm gerçek sayıların kümesidir.

a dâhil ise $[a, \infty) = \{x \mid a \le x, x \in \mathbb{R}\}$

a dâhil değil ise $(a, \infty) = \{x \mid a < x, x \in \mathbb{R}\}$

5. Alttan sınırsız aralıklar: $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere a dan büyük tüm gerçek sayıların kümesidir.

a dâhil ise $(-\infty, a] = \{x \mid x \le a, x \in \mathbb{R}\}$

a dâhil değil ise $(-\infty, a) = \{x \mid x < a, x \in \mathbb{R}\}$

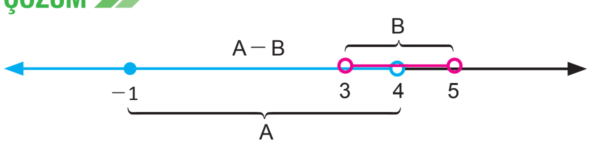
6. $\mathbb{R}$ nin kendisi de aralıktır.

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty) = \{x \mid -\infty < x < \infty, x \in \mathbb{R}\}$

1. ÖRNEK

$A = [-1, 4)$, $B = (3, 5)$ ise $A - B$ ve $A \cap B$ kümelerini bulunuz.

ÇÖZÜM



$A - B = [-1, 3]$ ve $A \cap B = (3, 4)$ olur.

2. ÖRNEK

x ve y gerçek sayıları için

$$\left.\begin{array}{l} -4 \le x < 6 \\ -7 < y < 2 \end{array}\right\} \text{ olduğuna göre}$$

a) $2x + 5y$ ifadesinin değer aralığını bulunuz.

b) $2x - 5y$ ifadesinin değer aralığını bulunuz.

c) $x^3 - y^2$ ifadesinin değer aralığını bulunuz.

ç) xy ifadesinin değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

a) $\begin{array}{l} -4 \le x < 6 \quad /2 \\ -8 \le 2x < 12 \end{array}$ $\quad \left.\begin{array}{l} -7 < y < 2 \quad /5 \\ -35 < 5y < 10 \end{array}\right\}$ $\quad \begin{array}{rl} & -8 \le 2x < 12 \\ + & -35 < 5y < 10 \\ \hline \end{array}$

$-43 < 2x + 5y < 22$ ise $2x + 5y \in (-43, 22)$ dir.

b) $\begin{array}{l} -4 \le x < 6 \quad /2 \\ -8 \le 2x < 12 \end{array}$ $\quad \left.\begin{array}{l} -7 < y < 2 \quad /-5 \\ -10 < -5y < 35 \end{array}\right\}$ $\quad \begin{array}{rl} & -8 \le 2x < 12 \\ + & -10 < -5y < 35 \\ \hline \end{array}$

$-18 < 2x - 5y < 47$ ise $2x - 5y \in (-18, 47)$ dir.

c) $\begin{array}{l} -4 \le x < 6 \\ -64 \le x^3 < 216 \end{array}$ $\quad \left.\begin{array}{l} -7 < y < 2 \\ 0 \le y^2 < 49 \end{array}\right\}$ $\quad \begin{array}{rl} & -64 \le x^3 < 216 \\ + & -49 < -y^2 \le 0 \\ \hline \end{array}$

$-113 < x^3 - y^2 < 216$ ise $x^3 - y^2 \in (-113, 216)$ dır.

ç) $-4 \le x < 6$

$-7 < y < 2$

Sınır değerleri x ve y nin karşılıklı ikişer ikişer çarpımı sonucunda bulunan değerler,

$$\left.\begin{array}{r} (-4)\cdot(-7) = 28 \\ (-4)\cdot 2 = -8 \\ 6\cdot(-7) = -42 \\ 6\cdot 2 = 12 \end{array}\right\}$$

bu değerlerin en küçüğü -42, en büyüğü 28 olduğundan

$-42 < xy < 28$ dir. $xy \in (-42, 28)$

3. ÖRNEK

$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $-2 < x < 6$, $2 < y \le 8$ ise $\dfrac{4x + 5y}{y}$ ifadesinin değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

$\dfrac{4x + 5y}{y} = \dfrac{4x}{y} + 5$ olup $\dfrac{x}{y}$ aralığını bulmak için x ve $\dfrac{1}{y}$ nin sınırları karşılıklı ikişer ikişer çarpılır.

$2 < y \le 8 \Rightarrow \dfrac{1}{8} \le \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{2}$ ve $-2 < x < 6$ olduğuna göre

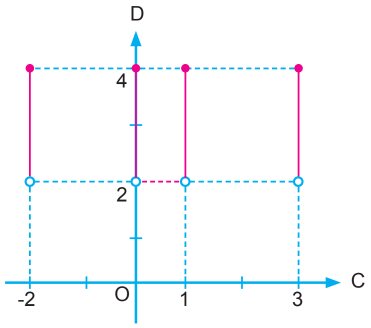
$$\left.\begin{array}{r} \frac{1}{8}(-2) = -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{8}\cdot 6 = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}(-2) = -1 \\ \frac{1}{2}\cdot 6 = 3 \end{array}\right\} -1 < \frac{x}{y} < 3 \Rightarrow -4 < \frac{4x}{y} < 12 \Rightarrow 1 < \frac{4x}{y} + 5 < 17 \Rightarrow \frac{4x + 5y}{y} \in (1, 17) \text{ olur.}$$

4. ÖRNEK

$C = \{-2, 0, 1, 3\}$ ve $D = (2, 4]$ aralıkları verilsin. $C \times D$ kümesini analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM

C kümesi, 4 elemanlı sonlu bir kümedir. D kümesi ise $(2, 4]$ aralığındaki bütün gerçek sayıları içeren sonsuz bir kümedir. Bu durumda $C \times D$ kümesi analitik düzlemde yarı doğru parçalarından oluşur.

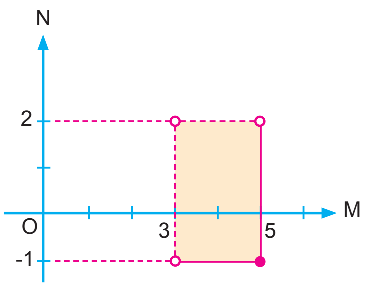


5. ÖRNEK

$M = (3, 5]$ ve $N = [-1, 2)$ ise $M \times N$ kümesini analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM

$M \times N$, düzlemde bir bölge oluşturur. Bu bölgede $y = 2$ ve $x = 3$ doğruları aralıklara dâhil olmadığından bunlar kesikli çizgi ile gösterilir.



Sıra Sizde

SORU

$A = [2, 4]$ ve $B = [1, 5]$ aralıkları verilsin. $A \times B$ kümesini analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM

2. Birinci Dereceden Denklemler ve Eşitsizliklerin Çözümü

Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ için $ax + b = 0$ şeklindeki ifadelere, x değişkenine (bilinmeyen) bağlı birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem denir.

Denklemi sağlayan x değerini bulmaya denklemi çözmek, denklemi sağlayan $x \in \mathbb{R}$ değerine denklemin kökü denir. Denklemin köklerinden oluşan kümeye, denklemin çözüm kümesi adı verilir. Çözüm kümesi genelde Ç harfi ile gösterilir.

$ax + b = 0$ ifadesindeki terimlerde x değişkeninin en büyük üssü 1 olduğundan denklem, birinci dereceden bir denklemdir.

Örneğin $2x + 3 = 0$, $-5x + 1 = 0$, $\frac{x}{2} + 4 = 0$ denklemleri birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerdir. $3x^2 - 4 = 0$, $\sqrt{x} - 1 = 0$ denklemleri birinci dereceden denklem değildir.

> $ax + b = 0$ denkleminde $a \neq 0$ ise denklemin $\mathbb{R}$ de tek kökü vardır. $Ç = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$ dır.

1. ÖRNEK

$x^{m-2} + (n+4)x^2 - 6 = 0$ ifadesi x değişkenine bağlı birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olduğuna göre m ve n değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen ifadede $(n+4)x^2$ teriminde x^2 ikinci dereceden denklem olduğundan x^2 nin katsayısı 0 olmalıdır.

O hâlde $n + 4 = 0$ olup $n = -4$ bulunur. Verilen denklemin birinci dereceden bir denklem olması istendiğinden x in en büyük kuvveti 1 olmalıdır. Bu durumda $m - 2 = 1$ ise $m = 3$ olur.

2. ÖRNEK

$2x - 3(x+5) - 5(2x+1) = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$2x - 3(x+5) - 5(2x+1) = 0$$

$$2x - 3x - 15 - 10x - 5 = 0$$

$$-11x = 20$$

$x = -\frac{20}{11}$ olup denklemin çözüm kümesi $Ç = \left\{-\frac{20}{11}\right\}$

3. ÖRNEK

$\frac{x}{2} + 2x + k = 3x - \frac{x+1}{5}$ denkleminin bir kökü $x = 2$ olduğuna göre k sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

$x = 2$ denklemi sağladığından x yerine 2 yazıldığında

$$\frac{2}{2} + 2 \cdot 2 + k = 3 \cdot 2 - \frac{2+1}{5}$$

$$1 + 4 + k = 6 - \frac{3}{5} \Rightarrow 5 + k = \frac{27}{5} \Rightarrow k = \frac{27}{5} - 5 = \frac{2}{5}$$ bulunur.

4. ÖRNEK

$4+\dfrac{9}{2+\dfrac{5}{1-\dfrac{3}{x}}}=7$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$4+\dfrac{9}{\underbrace{2+\underbrace{\dfrac{5}{\underbrace{1-\dfrac{3}{x}}_{5}}}_{1}}_{3}}=7 \Rightarrow 1-\dfrac{3}{x}=5 \Rightarrow \dfrac{3}{x}=-4 \Rightarrow x=-\dfrac{3}{4}$$

5. ÖRNEK

$\dfrac{3x+2}{x+2}$ ifadesinin tam sayı olması için x in alabileceği tam sayı değerlerinin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$\dfrac{3x+2}{x+2}=\dfrac{3(x+2)-4}{x+2}=3-\dfrac{4}{x+2}$ şeklinde yazılırsa $x+2$ sayısının 4 ün böleni olması gerektiği görülür.

4 ün bölenleri $1, 2, 4, -1, -2, -4$ olduğundan x in alabileceği değerler:

$x+2=1$ ise $x=-1$ $\quad$ $x+2=-1$ ise $x=-3$

$x+2=2$ ise $x=0$ $\quad$ $x+2=-2$ ise $x=-4$

$x+2=4$ ise $x=2$ $\quad$ $x+2=-4$ ise $x=-6$ olur.

x in değerleri toplamı $-1+0+2-3-4-6=-12$ bulunur.

$ax+b=0$ denkleminde çözüm kümesi boş ise $a=0$ ve $b\neq 0$ dır.

6. ÖRNEK

$3x-5(x+1)=2(4-x)+7$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$3x-5(x+1)=2(4-x)+7$

$3x-5x-5=8-2x+7$

$-2x-5=15-2x$

$-5=+15$ yanlış olduğundan denklemin çözümü $Ç=\varnothing$ dir.

7. ÖRNEK:

x değişkenine bağlı $(m+1)x+n-3=5x$ denkleminin $\mathbb{R}$ de çözüm kümesi boş küme ise $m+n$ hangi değeri alamaz?

ÇÖZÜM

$mx+x+n-3-5x=0$ denklemi düzenlendiğinde $(m-4)x+n-3=0$ bulunur. Denklemin $Ç=\varnothing$ olduğundan $m-4=0$ ve $n-3\neq 0$ olmalıdır. Buna göre $m=4$ ve $n\neq 3$ ise $m+n\neq 7$ bulunur.

$ax + b = 0$ denkleminde çözüm kümesi $\mathbb{R}$ ise $a = 0$ ve $b = 0$ dır.

8. ÖRNEK

$5(x-2)+3x+1=8x-9$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Denklemde dağılma özelliği kullanılıp x e göre düzenleme yapılırsa

$$5x-10+3x+1=8x-9$$
$$8x-9=8x-9$$
$0=0$ bulunur. Bu durumda, her $x \in \mathbb{R}$ için denklem sağlanır.

9. ÖRNEK

$(m-1)x-n+3=3(2x-7)-5$ eşitliği x in bütün gerçek sayı değerleri için sağlanıyorsa $m+n$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(m-1)x-n+3=6x-21-5$

$(m-1)x-n+3=6x-26$ bulunur. Buradan $m-1=6$ ve $-n+3=-26$

$m=7$ $\quad$ $n=29$ olur.

Bu durumda $m+n=36$ elde edilir.

10. ÖRNEK

$\dfrac{4}{2-\dfrac{x+1}{x-2}}$ ifadesini $\mathbb{R}$ de tanımsız yapan x değerlerinin çarpımı kaçtır?

ÇÖZÜM

$x-2=0$ için verilen ifade tanımsızdır. Buradan $x=2$ bulunur.

$$\frac{4}{\underset{(x-2)}{\dfrac{2}{1}}-\underset{(1)}{\dfrac{x+1}{x-2}}}=\frac{4}{\dfrac{2x-4-x-1}{x-2}}=\frac{4}{\dfrac{x-5}{x-2}}=\frac{4(x-2)}{x-5}$$

olduğundan son ifade $x=5$ için de tanımsız olur. O hâlde verilen ifadeyi tanımsız yapan x değerlerinin çarpımı $2\cdot5=10$ olur.

11. ÖRNEK

$a<b<c<d$ olmak üzere a, b, c, d tam sayılarının üçerli toplamları 29, 34, 43, 71 olduğuna göre c değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Bu sayıların toplamı x olsun. $a+b+c+d=x$ ise bu sayılar,

$a=x-71,\ b=x-43,\ c=x-34,\ d=x-29$ olduğundan

$(x-71)+(x-43)+(x-34)+(x-29)=x \Rightarrow 4x-177=x \Rightarrow 3x=177 \Rightarrow x=59$ olarak bulunur.

O hâlde bu sayılar $-12, 16, 25, 30$ olup $c=25$ elde edilir.

12. ÖRNEK

$y = \dfrac{x+1}{2x-3}$ eşitliği veriliyor. Buna göre

a) Hangi x değeri için y hesaplanamaz?

b) Hangi y değeri için x hesaplanamaz?

ÇÖZÜM

a) $y = \dfrac{x+1}{2x-3}$ ifadesinde $2x-3=0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$ için y hesaplanamaz.

b) Verilen ifadede x değeri yalnız bırakılırsa

$$y(2x-3) = x+1 \Rightarrow 2xy-3y = x+1 \Rightarrow 2xy - x = 3y+1$$
$$\Rightarrow x(2y-1) = 3y+1$$
$$\Rightarrow x = \frac{3y+1}{2y-1}$$ bulunur. Bu ifadede $2y-1=0 \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}$ için x hesaplanamaz.

13. ÖRNEK

Artan şekilde dizilen 15 ardışık pozitif tam sayının toplamındaki 50. terimi bulunuz.

ÇÖZÜM

x, 15 ardışık tam sayının toplamı olsun. $a \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere x pozitif tam sayısı,

$$x = a+(a+1)+(a+2)+(a+3)+\ldots+(a+14)$$
$$x = 15a+1+2+3+\ldots+14$$
$$x = 15a+\frac{14\cdot 15}{2} = 15a+7\cdot 15$$
$$x = 15(\underbrace{a+7}_{1,2,3,4,\ldots})$$ bulunur.

50. terim: $x = 15\cdot 50 = 750$ olur.

Ardışık doğal sayıların toplam formülü $1+2+3+4+\ldots\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ dir $(n \in \mathbb{Z}^+)$.

Bu bağıntı Gauss formülü olarak bilinir.

Sıra Sizde

SORU

$$\frac{1+\dfrac{2+\dfrac{a-1}{3}}{4}}{2a-1} = -1$$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklemler

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0, b \neq 0$ için $ax + by + c = 0$ şeklindeki ifadelere x ve y değişkenlerine bağlı birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem denir. Denklemin kökleri (x,y) ikililerinden oluşur. Birinci dereceden iki bilinmeyenli bir denklemi gerçek sayılar kümesinde sağlayan sonsuz sayıda (x,y) ikilisi vardır. Bu ikililerin kümesine denklemin çözüm kümesi denir. Çözüm kümesinin analitik düzlemdeki görüntüsü, bir doğru belirtir.

14. ÖRNEK

$2x + y = 4$ denklemini sağlayan (x, y) ikililerinin görüntü kümesini analitik düzlemde gösteriniz. (Grafiğini çiziniz.)

ÇÖZÜM

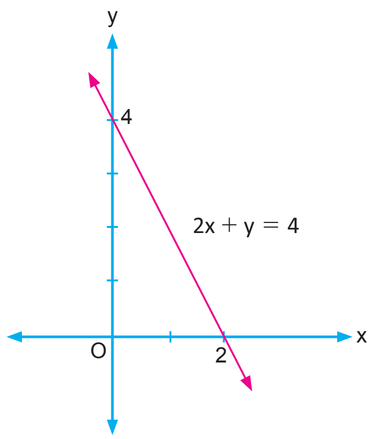
"Düzlemdeki herhangi iki noktadan tek doğru geçer."

Burada bu iki nokta, doğrunun eksenlerinin kestiği noktalar olarak alınırsa grafik çizimi kolaylaşır.

$$\left.\begin{array}{ll} x = 0 \text{ için } & y = 4 \\ y = 0 \text{ için } & x = 2 \end{array}\right\}$$

$2x + y = 4$ doğrusu (0,4) ve (2,0) noktalarından geçer.

Bu doğru şekildeki gibi çizilir.



15. ÖRNEK

$\left(\frac{3m+2}{5}\right)x + my = -2$ denklemini sağlayan ikililerden birisi $(-1, 2)$ ise m sayısı kaç olmalıdır?

ÇÖZÜM

$x = -1$ ve $y = 2$ değerleri, denklemde yerine yazılırsa

$$\left(\frac{3m+2}{5}\right)(-1) + 2m = -2 \Rightarrow \frac{-3m-2}{5} + 2m = -2$$

$$\Rightarrow \frac{-3m-2+10m}{5} = -2$$

$$\Rightarrow -3m - 2 + 10m = -10$$

$$\Rightarrow 7m = -8$$

$$\Rightarrow m = -\frac{8}{7} \text{ bulunur.}$$

16. ÖRNEK

$(3x-6)^2 + (y+5)^4 = 0$ ise $x \cdot y$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(3x-6)^2 \geq 0$ ve $(y+5)^4 \geq 0$ olduğuna göre bu eşitlik sadece $0 + 0 = 0$ olması durumunda sağlanır.

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ y + 5 = 0 \Rightarrow y = -5 \end{array}\right\} x \cdot y = -10 \text{ olarak bulunur.}$$

$ax + by + c = 0$ denkleminde her $x, y \in \mathbb{R}$ için sağlanıyorsa $(Ç = \mathbb{R}^2)$ $a = 0,\ b = 0,\ c = 0$ dır.

17. ÖRNEK

$(m-3)x + (2n+1)y + p - 4 = 0$ denklemi her $x, y \in \mathbb{R}$ için sağlanıyorsa $m + n + p$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Denklemin her $x, y \in \mathbb{R}$ için sağlanıyorsa x ve y nin katsayıları 0 olmalıdır.

$$\left.\begin{aligned} m-3=0 &\Rightarrow m=3 \\ 2n+1=0 &\Rightarrow n=-\frac{1}{2} \\ p-4=0 &\Rightarrow p=4 \end{aligned}\right\} \quad m+n+p = 3 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 = \frac{13}{2}$$

$ax + by + c = 0$ denkleminin çözüm kümesi boş küme ise $a = 0,\ b = 0,\ c \neq 0$ dır.

18. ÖRNEK

$(a+1)x + (b-8)y = c + 3$ denkleminin çözüm kümesi boş küme ise $a + b + c$ toplamının alamayacağı değeri bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\left.\begin{aligned} a+1=0 &\Rightarrow a=-1 \\ b-8=0 &\Rightarrow b=8 \\ c+3\neq 0 &\Rightarrow c\neq -3 \end{aligned}\right\} a+b+c \neq 4 \text{ dir.}$$

Basit Eşitsizlikler

$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $a < b$, $a \leq b$, $a > b$ ya da $a \geq b$ şeklindeki ifadeler, basit eşitsizlikler olarak adlandırılır. Basit eşitsizliklerin özellikleri şunlardır:

$x, y, a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere	
a) $x < y \Leftrightarrow x \mp a < y \mp a$	Bir eşitsizliğin her iki tarafına herhangi bir reel sayı eklenir ya da çıkarılırsa eşitsizlik değişmez.
b) $x < y \Leftrightarrow \begin{cases} xa < ya, & a > 0 \\ xa > ya, & a < 0 \end{cases}$	Bir eşitsizliğin her iki tarafı pozitif bir sayı ile çarpılırsa eşitsizlik yön değiştirmez. Negatif bir sayı ile çarpılırsa eşitsizlik yön değiştirir.
c) $x < y \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{a} < \frac{y}{a}, & a > 0 \\ \frac{x}{a} > \frac{y}{a}, & a < 0 \end{cases}$	Bir eşitsizliğin her iki tarafı pozitif bir sayı ile bölünürse eşitsizlik yön değiştirmez. Negatif bir sayı ile bölünürse eşitsizlik yön değiştirir.
ç) $x < y$ ve $y < z$ ise $x < z$ dir.	"<" işleminin geçişme özelliği vardır.

d) $\begin{array}{r} x<y \\ +\quad a<b \\ \hline x+a<y+b \end{array}$	Aynı yönlü eşitsizlikler, taraf tarafa toplanabilir. Örneğin $3<7$ ve $5<8 \Rightarrow 3+5<7+8$ $8<15$ olur. Not: Eşitsizliklerde taraf tarafa çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri yapılamaz.
e) x ile y aynı işaretli ise $x<y \Leftrightarrow \frac{1}{x}>\frac{1}{y}$ $(x\neq 0,\ y\neq 0)$	Her iki tarafı da aynı işaretli olan eşitsizliklerde iki tarafın çarpmaya göre tersi alınırsa eşitsizlik yön değiştirir. Örneğin $2<3$ ise $\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$, $-5<-4$ ise $-\frac{1}{5}>-\frac{1}{4}$ olur.
f) $n\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere $0<a<b \Rightarrow a^n<b^n$	Pozitif sayılar arasındaki eşitsizliklerde her iki tarafın pozitif doğal sayı kuvveti alınırsa eşitsizlik yön değiştirmez. Örneğin $2<3$ ise $2^2<3^2$, $2^3<3^3$, $2^4<3^4$ olur.
g) $n\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere $a<b<0 \Rightarrow \begin{cases} a^{2n-1}<b^{2n-1}<0 \\ a^{2n}>b^{2n}>0 \end{cases}$	Negatif sayılar arasındaki eşitsizliklerde her iki tarafın tek doğal sayı kuvveti alınırsa eşitsizlik yön değiştirmez. Sıfır dışındaki çift doğal sayı kuvveti alınırsa eşitsizlik yön değiştirir. Örneğin $-3<-2$ ise $(-3)^2>(-2)^2 \Rightarrow 9>4$ $(-3)^3<(-2)^3 \Rightarrow -27<-8$ olur.
ğ) $n\in\mathbb{Z}^+-\{1\}$ • $a>1 \Rightarrow a^n>a$ • $0<a<1 \Rightarrow a^n<a$ • $-1<a<0 \Rightarrow a^n>a$ • $a<-1 \Rightarrow \begin{cases} a^n>a, & n \text{ çift} \\ a^n<a, & n \text{ tek} \end{cases}$	Örneğin $a=3$ ise $9>3$, $27>3$ olur. Örneğin $a=\frac{1}{2}$ ise $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}<\frac{1}{2}$ olur. Örneğin $a=-\frac{1}{2}$ ise $\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}>-\frac{1}{2}$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1}{8}>-\frac{1}{2}$ olur. −1 den küçük sayıların çift kuvveti kendisinden büyüktür, tek kuvveti de kendisinden küçüktür. Örneğin $a=-2$ ise $(-2)^2=4>-2$, $(-2)^4=16>-2$ $(-2)^3=-8<-2$, $(-2)^5=-32<-2$ olur.
h) $a^2<a \Rightarrow 0<a<1$	0 ile 1 arasındaki sayıların karesi, kendisinden küçüktür. Bu ifadenin tersi de doğrudur. Karesi kendisinden küçük olan sayılar 0 ile 1 arasındadır. Örneğin $a=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{2}$ olur. $a=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^2<\frac{2}{3}$ olur.

19. ÖRNEK

$x^2 < x$ ise $5x+7$ nin alabileceği tam sayı değerlerinin sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

$x^2 < x$ ise $0 < x < 1$ olduğundan

$0 < 5x < 5 \Rightarrow 7 < 5x+7 < 12$ olur.

$5x+7$ nin alabileceği değerler 8, 9, 10, 11 olup 4 tanedir.

20. ÖRNEK

$x^4 < x^2$, $xz < 0$, $(z-x)y^2 > 0$ ise aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

A) $y > 1$ B) $-1 < x < 1$ C) $0 < z < 1$ D) $-1 < x < 0$ E) $x + 2z < y$

ÇÖZÜM

$\underbrace{(z-x)}_{+}\underbrace{y^2}_{+} > 0 \Rightarrow z-x > 0 \Rightarrow z > x$

$xz < 0$ ise x ile z zıt işaretlidir. $z > x$ olduğundan z pozitif, x negatif olur.

$x^4 < x^2 \Rightarrow \dfrac{x^4}{x^2} < \dfrac{x^2}{x^2} \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \Rightarrow -1 < x < 0$ elde edilir.

O hâlde D seçeneği kesinlikle doğrudur.

21. ÖRNEK

x ve y tam sayıları için $-9 < x < 5$, $-2 < y \leq 7$ olduğuna göre $3x+4y$ ifadesinin en küçük ve en büyük tam sayı değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

x in alabileceği değerler kümesi: $\{-8,-7,-6,\ldots,2,3,4\}$

y nin alabileceği değerler kümesi: $\{-1,0,1,\ldots,5,6,7\}$

$x=-8$ ve $y=-1$ için $3x+4y$ en küçük değerini alır. $3(-8)+4(-1)=-24-4=-28$ olur.

$x=4$ ve $y=7$ için $3x+4y$ en büyük değerini alır. $3\cdot 4+4\cdot 7=12+28=40$ olur.

Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ için $ax+b \leq 0$, $ax+b < 0$, $ax+b \geq 0$, $ax+b > 0$ şeklindeki ifadelere x değişkenine (bilinmeyen) bağlı birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik denir.

Bu tür eşitsizliklerin çözüm kümesi, reel sayıların bir alt aralığıdır.

22. ÖRNEK

$3x+4 < 2(x-1)+4x$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulup sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

ÇÖZÜM

$3x+4 < 2x-2+4x$

$3x+4 < 6x-2$

$6 < 3x \Rightarrow 2 < x \Rightarrow Ç = (2, \infty)$

23. ÖRNEK

$5x-7<2x+5\leq 4(x-1)+5$ eşitsizliğini sağlamayan x tam sayılarının toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$5x-7<2x+5$ ve $2x+5\leq 4(x-1)+5$

$3x<12$ $\quad$ $2x+5\leq 4x+1$

$x<4$ $\quad$ $4\leq 2x$

$2\leq x$

Buna göre $2\leq x<4$ olarak bulunur. O hâlde eşitsizliğin çözüm kümesi, $Ç=[2,4)$ olur.

Sağlamayan tam sayılar: $\ldots,-\cancel{5},-\cancel{4},-3,-2,-\cancel{1},0,\cancel{1},\cancel{4},\cancel{5},\ldots$ olur.

Bu sayıların toplamı $-3-2=-5$ bulunur.

24. ÖRNEK

a liraya alınan bir ürün $5a-200$ liraya satılmaktadır. Satıcının kâr edebilmesi için a nın alabileceği en küçük tam sayı değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Satış fiyatının alış fiyatından büyük olduğu durumlarda kâr elde edilir. Ürün a liraya alındığından

$5a-200>a \Rightarrow 5a-200-a>0$ yazılır.

$4a-200>0 \Rightarrow 4a>200 \Rightarrow a>50$ dir. a en az 51 lira olmalıdır.

25. ÖRNEK

a, b, c, d tam sayılarının ikişerli toplamları 40, 54, 56, 62, 64, 78 dir. $a<b<c<d$ ise b nin alabileceği değerler toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$b<c<d \Rightarrow a+b<a+c<a+d$ dir.

$a<b<c \Rightarrow a+d<b+d<c+d$ dir.

O hâlde $\underbrace{a+b}_{40}<\underbrace{a+c}_{54}<a+d<\underbrace{b+d}_{64}<\underbrace{c+d}_{78}\ldots(1)$ olarak bulunur.

$a<b<d \Rightarrow a+c<b+c<d+c$ dir.

$a<c<d \Rightarrow a+b<b+c<b+d$ dir.

O hâlde $\underbrace{a+c}_{54}<b+c<\underbrace{b+d}_{64}\ldots(2)$ olarak bulunur.

I. Durum

$b+c=56$ ise $a+d=62$ dir. $(a+b)+(b+d)=104 \Rightarrow a+2b+d=104$

$\Rightarrow 62+2b=104$

$\Rightarrow 2b=42 \Rightarrow b=21$ olur.

II. Durum

$b+c=62$ ise $a+d=56$ dır. $(a+b)+(b+d)=104 \Rightarrow a+2b+d=104$

$\Rightarrow 56+2b=104$

$\Rightarrow 2b=48 \Rightarrow b=24$ olur.

b nin alabileceği değerlerin toplamı $21+24=45$ bulunur.

26. ÖRNEK

$-4 < x < 9$ ise $A = x^2 - 4x + 3$ ise A nın hangi aralıkta değer alacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

$A = x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 4 - 1 = (x-2)^2 - 1$ olarak yazılabilir.

$$-4 < x < 9 \Rightarrow -4-2 < x-2 < 9-2 \Rightarrow -6 < x-2 < 7$$
$$\Rightarrow 0 \le (x-2)^2 < 49$$
$$\Rightarrow -1 \le (x-2)^2 - 1 < 48$$
$$\Rightarrow -1 \le A < 48$$
$$\Rightarrow A \in [-1, 48)$$

27. ÖRNEK

$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 5 \\ -2 < y < 2 \end{array}\right\}$ ise x in en geniş değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

$2y = 5 - 3x \Rightarrow y = \dfrac{5-3x}{2} \ldots (1)$

$-2 < y < 2 \ldots (2)$

(2) eşitsizliğinde (1) yerine yazılırsa

$-2 < \dfrac{5-3x}{2} < 2 \Rightarrow -4 < 5 - 3x < 4 \Rightarrow -9 < -3x < -1 \Rightarrow 3 > x > \dfrac{1}{3}$ olarak bulunur.

28. ÖRNEK

$\dfrac{x^4(x-3)}{2^x(x-1)^2} < 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\dfrac{x^4(x-3)}{2^x(x-1)^2} < 0$ eşitsizliğinde $\forall x \in \mathbb{R}$ için $x^4 \ge 0$, $2^x > 0$, ve $(x-1)^2 \ge 0$ olduğundan $x - 3 < 0$ olmalıdır.

$\Rightarrow x < 3$ ve $x \neq 0$, $x \neq 1$ dir.

O hâlde eşitsizliğin çözüm kümesi $Ç = (-\infty, 3) - \{0, 1\}$ dir.

29. ÖRNEK

$a < b < c < 0$ olmak üzere $\dfrac{2}{a} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{2}{c} = -\dfrac{1}{7}$ olduğuna göre a nın alabileceği en büyük tam sayı değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

a, b ve c sayıları ortadaki b değerine eşit olarak alınırsa

$\dfrac{2}{b} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{2}{b} = -\dfrac{1}{7} \Rightarrow \dfrac{6}{b} = -\dfrac{1}{7} \Rightarrow b = -42$ dir.

Buna göre a sayısının en büyük değeri -43 olur.

Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Eşitsizlikler

$a,b \in \mathbb{R}; a,b \neq 0$ olmak üzere $ax+by+c \leq 0$, $ax+by+c<0$, $ax+by+c \geq 0$, $ax+by+c>0$ şeklindeki ifadelere birinci dereceden iki bilinmeyenli eşitsizlik denir. Eşitsizliği sağlayan (x,y) ikililerinin kümesine eşitsizliğin çözüm kümesi denir. Çözüm kümesi analitik düzlemde boyalı bölge şeklinde gösterilir.

$ax+by+c=0$ ifadesinde y, x e bağlı olarak yazılırsa

$by=-ax-c$

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ olur.

$m=-\frac{a}{b}, n=-\frac{c}{b}$ olarak seçilirse denklem $y=mx+n$ olur.

- $y=mx+n$ denkleminin çözüm kümesi, doğru üzerindeki noktaları gösterir.
- $y>mx+n$ eşitsizliğinin çözüm kümesi, $y=mx+n$ doğrusunun üst bölgesidir.
- $y<mx+n$ eşitsizliğinin çözüm kümesi, $y=mx+n$ doğrusunun alt bölgesidir.

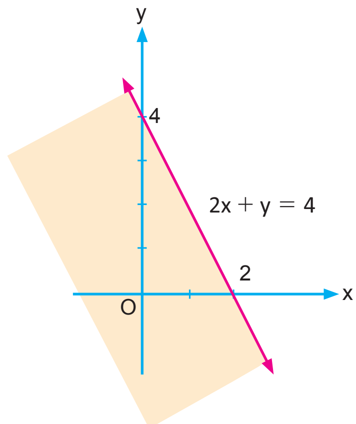
$\leq$ veya $\geq$ durumunda doğru üzerindeki noktalar, çözüm kümesine ait olduğundan doğru, düz çizgi şeklinde çizilir.

$<$ veya $>$ durumunda doğru üzerindeki noktalar çözüm kümesine ait olmadığından doğru kesikli çizgi şeklinde çizilir.

30. ÖRNEK

$2x+y \leq 4$ eşitsizliğinin çözüm kümesini analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM



İlk olarak $2x+y=4$ doğrusunun grafiğini çiziniz.
$x=0$ için $y=4$ ve $y=0$ için $x=2$ olduğundan doğru $(0,4)$ ve $(2,0)$ noktalarından geçer.

I. Yol

$(0,0)$ noktası, eşitsizlikte yerine yazılırsa
$2.0+0 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq 4$ bulunur.
Eşitsizlik doğru olduğundan $(0,0)$ noktasının bulunduğu bölge, çözüm bölgesidir.

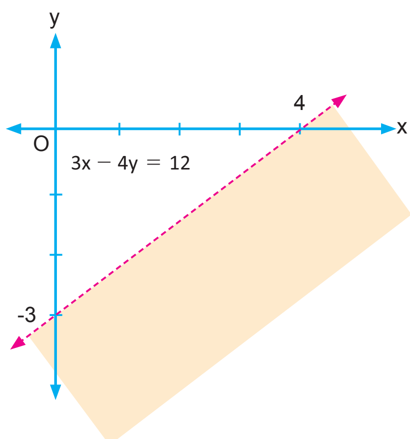
II. Yol

Verilen eşitsizlik düzenlenirse
$2x+y \leq 4 \Rightarrow y \leq 4-2x$
olup eşitsizliğinin çözüm kümesi (bölgesi) $y=4-2x$ doğrusu ve bu doğrunun alt bölgesidir.

31. ÖRNEK

$3x-4y>12$ eşitsizliğinin çözüm kümesini analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM



$3x-4y=12$ doğrusunun grafiği çizilir.
$x=0$ için $y=-3$ ve $y=0$ için $x=4$ olduğundan
$(0,-3)$ ve $(4,0)$ noktaları bulunur.
$3x-4y>12 \Rightarrow 3x-12>4y$
$\Rightarrow \frac{3x-12}{4}>y$
olup eşitsizliğin çözüm kümesi, doğrunun alt bölgesidir.

ALIŞTIRMALAR-5

1. $(3a-6)x^3-(b+1)x^2+(2a+b)x=3a-4$ ifadesi, x değişkenine bağlı birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem ise x değerini bulunuz.

2. $2[x+2-3(2x-5)]+5=1-4(x+1)$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

3. $\dfrac{1}{2-\dfrac{3}{1-\dfrac{x}{x+1}}}$

ifadesinin hangi değerler için tanımsız olduğunu bulunuz.

4. $\dfrac{8}{2+\dfrac{7}{3+\dfrac{2}{x-1}}}=2$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

5. x değişkenine bağlı

$(m+3)x-7(x-1)=2(x-2)+2n+1$

denkleminin sonsuz çözümü varsa $m\cdot n$ değerini bulunuz.

6. $x\in\mathbb{R}$ olmak üzere $\dfrac{1}{5}<\dfrac{4}{3x-7}<\dfrac{1}{2}$

eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

7. $x\in\mathbb{R}$ olmak üzere $\dfrac{x+2}{x-3}+4\leq\dfrac{5x+4}{x-3}$

eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

8. a ve b tam sayıları için

$-2<a\leq 3$

$-4<b-1\leq 7$

olduğuna göre $2a-3b$ ifadesinin alabileceği en küçük ve en büyük değerleri bulunuz.

9. $A=[-1,4)$ ve $B=[0,2)$ ise $A\times B$ kümesini analitik düzlemde gösteriniz.

10. $C=(-2,3)$ ve $D=\{-3,-2,0,1\}$ ise $C\times D$ kümesini analitik düzlemde gösteriniz.

11. $x\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$\dfrac{x+2}{3}-\dfrac{5x+8}{2}+1<\dfrac{x}{2}-5$

eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

12. $x,y\in\mathbb{R}$ için $2<x<8$ ve $\dfrac{1}{3}\leq y<3$

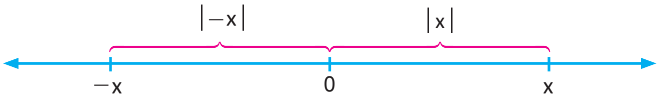
olduğuna göre $\dfrac{x\cdot y}{x+y}$ nin alabileceği tam sayı değerleri toplamını bulunuz.

13. $x\in\mathbb{R}$ olmak üzere $3x-y-6\leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini analitik düzlemde gösteriniz.

3. Birinci Dereceden Mutlak Değerli Denklem ve Eşitsizlikler

Mutlak Değer

Günlük hayatta uzunluk, ağırlık, hacim gibi değerleri ifade ederken kullanılan sayılar pozitif sayılardır. Bir canlı için kullanılacak boyu $-150\,\text{cm}$, ağırlığı $-85\,\text{kg}$ gibi ifadeler, hiçbir değeri ve anlamı olmayan ifadelerdir. Ancak hava koşullarına bağlı olarak meteorolojik tahminler sonucunda hava sıcaklıkları için $26^{\circ}\text{C}, -5^{\circ}\text{C}$ gibi ifadeler kullanılmaktadır. Burada hava sıcaklıklarının sıfırın üstünde (pozitif) veya sıfırın altında (negatif) olduğu düşünüldüğünden eksi ve artı ifadeler bir anlam kazanmaktadır.



İki nokta arasındaki uzaklık en küçük sıfır ya da pozitif bir sayı olur. x pozitif bir gerçek sayı ise sıfıra olan uzaklığı x olur. Eğer x negatif bir gerçek sayı ise x in sıfıra olan uzaklığı $-x$ olur. Bu durum, yukarıdaki sayı doğrusunda gösterilmiştir. Mesela 5 gerçek sayısının sıfıra olan uzaklığı 5 br dir. -5 gerçek sayısının sıfıra olan uzaklığı ise $-(-5)=5\,\text{br}$ olur.

x bir gerçek sayı olmak üzere x in sıfıra olan uzaklığına x in mutlak değeri denir. Mutlak değer, $|x|$ şeklinde gösterilir.

$$|x|=\begin{cases} x, & x>0 \text{ ise} \\ 0, & x=0 \text{ ise} \\ -x, & x<0 \text{ ise} \end{cases} \quad \text{olarak tanımlanır.}$$

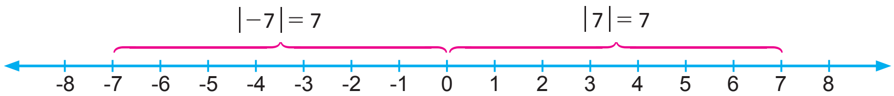
1. ÖRNEK

$-7, -4, 0, \frac{2}{3}$ ve 4 sayılarının mutlak değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Mutlak değeri alınacak sayı pozitif ise olduğu gibi, negatif ise önüne "$-$" işareti konularak mutlak değer dışına çıkarılır.

$|-7|=-(-7)=7,\ (-7<0)$ benzer olarak $|-4|=4;\ |0|=0;\ \left|\frac{2}{3}\right|=\frac{2}{3};\ |4|=4$



İşareti farklı olan sayıların mutlak değerlerinin eşit (sıfıra olan uzaklıkları aynı) olduğuna dikkat ediniz.

2. ÖRNEK

$|\sqrt{3}-2|+|3-\sqrt{3}|-|-2\sqrt{3}|$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Bu tür sorularda önce mutlak değer içindeki ifadenin işareti incelenir. İfadenin işareti pozitif ise ifade olduğu gibi, negatif ise önüne eksi işareti konularak mutlak değer dışına çıkarılır.

$$\left.\begin{matrix}\sqrt{3}-2<0\\ 3-\sqrt{3}>0\end{matrix}\right\} \text{ olduğundan } |\sqrt{3}-2|+|3-\sqrt{3}|-|-2\sqrt{3}| =-(\sqrt{3}-2)+(3-\sqrt{3})-2\sqrt{3}$$
$$=-\sqrt{3}+2+3-\sqrt{3}-2\sqrt{3}$$
$$=-4\sqrt{3}+5 \text{ bulunur.}$$

3. ÖRNEK

$c < 0$ olmak üzere

$|-c|+|2c|+|-3c|$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$c < 0$ ise $-c$ ve $-3c$ ifadeleri pozitif olup mutlak değer dışına olduğu gibi, 2c ifadesi ise negatif olduğundan mutlak değer dışına önüne $(-)$ yazılarak çıkar. Bu durumda işlemin sonucu:

$|-c|+|2c|+|-3c|=(-c)-2c+(-3c)=-6c$ bulunur.

4. ÖRNEK

$3 < x < 5$ olmak üzere

$|2x-11|+|x-3|-|x-5|$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$3 < x < 5$ olduğundan mutlak değer içindeki her bir ifadenin işareti incelenirse

$$|\underset{(-)}{\underline{2x-11}}|+|\underset{(+)}{\underline{x-3}}|-|\underset{(-)}{\underline{x-5}}|=-(2x-11)+(x-3)-[-(x-5)]$$

$$=-2x+11+x-3+x-5=3$$ bulunur.

Özellikler

$x, y \in \mathbb{R}$ için

1	$\|x\| \geq 0$	4	$k > 0$ için $\|k \cdot x\| = k \cdot \|x\|$
2	$\|x\| = \|-x\|$ $\|x-y\| = \|y-x\|$	5	$\|x \cdot y\| = \|x\| \cdot \|y\|$ $\left\|\frac{x}{y}\right\| = \frac{\|x\|}{\|y\|}, (y \neq 0)$
3	$\|x^n\| = \|x\|^n$	6	$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen eşitsizliği)

5. ÖRNEK

$x < 0 < y$ olmak üzere

$|x-2y|+|y-5x|+|x|-|y|$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$x < 0 < y$ verildiğinden x negatif, y pozitif gerçek sayıdır. Her bir mutlak değerli ifadenin işareti incelendiğinde

$$|\underset{(-)}{x-2y}|+|\underset{(+)}{y-5x}|+|\underset{(-)}{x}|-|\underset{(+)}{y}|=-(x-2y)+(y-5x)-x-y$$

$$=-x+2y+y-5x-x-y$$

$$=-7x+2y$$ olur.

6. ÖRNEK

$x < 0$ olmak üzere $\left|-4x-\left|-3x+|x|\right|\right|$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

x negatif olduğundan
$\left|-4x-|-3x+(-x)|\right|=\left|-4x-|-4x|\right|=|-4x-(-4x)|=|-4x+4x|=|0|=0$ olur.

7. ÖRNEK

$-5 \leq x-2 \leq 5$ olmak üzere $y=|2x-3|$ olduğuna göre y nin alabileceği en büyük ve en küçük tam sayı değerlerinin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$-5 \leq x-2 \leq 5 \Rightarrow -5+2 \leq x-2+2 \leq 5+2$

$\Rightarrow -3 \leq x \leq 7$ bu eşitsizlik $2x-3$ ifadesine benzetilirse

$\Rightarrow -9 \leq 2x-3 \leq 11$ bulunur. Mutlak değer alındığında

$\Rightarrow 0 \leq |2x-3| \leq 11$ ifadesinin en küçük değeri 0, en büyük değeri 11 olur.

Bu değerlerin toplamı $0+11=11$ bulunur.

8. ÖRNEK

$x \in \mathbb{R}$ için $|x+3|+|x|+|2x-4|$ ifadesinin en küçük değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Mutlak değerli ifadelerin içerisini sıfır yapan değerlere kritik nokta denir.
Verilen ifadenin kritik noktaları $-3, 0$ ve 2 dir.

$x=-3$ için $|x+3|+|x|+|2x-4|=|-3+3|+|-3|+|-6-4|=13$

$x=0$ için $|x+3|+|x|+|2x-4|=|0+3|+|0|+|0-4|=7$

$x=2$ için $|x+3|+|x|+|2x-4|=|2+3|+|2|+|4-4|=7$ olduğundan $|x+3|+|x|+|2x-4|$ ifadesinin en küçük değeri 7 dir.

Sıra Sizde

SORU

$x \in \mathbb{R}$ için $|x-1|+|x-2|+\ldots+|x-21|$ ifadesinin en küçük değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Mutlak Değerli Denklemler

İçinde bilinmeyen bulunduran ifadeler sıfıra eşitse denklem olarak adlandırılır. Eğer bir denklem, mutlak değerli ifade bulunduruyorsa mutlak değerli denklem olarak adlandırılır.

$2x+3=0$ ve $|-2x|+1=0$ birer denklem örneğidir. Burada ikinci denklem, mutlak değerli ifade bulundurduğundan bir mutlak değerli denklemdir.

Mutlak değerli denklemler, mutlak değer tanımı kullanılarak çözülür. İfade, mutlak değerden kurtarıldıktan sonra denklem çözüm yöntemleri ile denklemin çözüm kümesi bulunur.

Mutlak değerli denklemler, aşağıda verilen yöntemlerle çözülür:

i) $a>0$ olmak üzere $|x|=a$ ise $x=a$ veya $x=-a$

9. ÖRNEK

$|x|=3$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

I. Yol

$|x|=3$ denklemi, başlangıç noktasına uzaklıkları 3 br olan sayıların bulunması demektir. Bu sayıların -3 ve 3 olduğu açıktır. Bu düşünceden yola çıkıldığında çözüm kümesi $Ç=\{-3,3\}$ olur.

II. Yol

$|x|=3 \Rightarrow x=3$ veya $x=-3$ tür. O hâlde denklemin çözüm kümesi $Ç=\{-3,3\}$ olur.

10. ÖRNEK

$||x+2|-3|=4$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$||x+2|-3|=4 \Rightarrow |x+2|-3=4$ veya $|x+2|-3=-4$

$|x+2|=7$ $\qquad$ $|x+2|=-1$

$Ç=\varnothing$

$x+2=7$ veya $x+2=-7$

$x=5$ $\qquad$ $x=-9$

Bu durumda denklemin çözüm kümesi $Ç=\{-9,5\}$ olur.

$a<0$ olmak üzere $|x|=a \Rightarrow Ç=\varnothing$ dir. Neden?

ii) $|x|=|y| \Rightarrow x=y$ veya $x=-y$

11. ÖRNEK

$|4x-9|=|2x+3|$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$|4x-9|=|2x+3| \Rightarrow 4x-9=2x+3$ veya $4x-9=-(2x+3)$

$2x=12$ $\qquad$ $6x=6$

$x=6$ $\qquad$ $x=1$

Bu durumda denklemin çözüm kümesi $Ç=\{1,6\}$ olur.

iii) $|x| = y \Rightarrow x = y$ veya $x = -y$

$x = y$ veya $x = -y$ denklemleri çözüldüğünde bulunan köklerden $y \geq 0$ koşulunu sağlayan kökler, verilen mutlak değerli denklemin çözüm kümesi olarak alınır.

12. ÖRNEK

$|2x - 7| = 6x + 3$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$|2x - 7| = 6x + 3 \Rightarrow 2x - 7 = 6x + 3$ veya $2x - 7 = -(6x + 3)$

$$-10 = 4x \qquad\qquad 8x = 4$$

$$x = -\frac{5}{2} \qquad\qquad x = \frac{1}{2}$$

$x = -\frac{5}{2}$ değeri $6x + 3$ ifadesinde yerine yazılırsa

$6 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) + 3 = -12 < 0$ olduğundan $x = -\frac{5}{2}$ değeri çözüm olarak alınmaz.

$x = \frac{1}{2}$ değeri, $6x + 3$ ifadesinde yerine yazılırsa

$6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 3 = 6 > 0$ olduğundan $x = \frac{1}{2}$ değeri çözüm olarak alınır.

Bu durumda denklemin çözüm kümesi, $Ç = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ olur.

13. ÖRNEK

$|3x + 6| - 2 = |x - 1|$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Denklem, mutlak değer tanımı kullanarak çözüldüğünde

$|3x + 6| = 0 \Rightarrow 3x + 6 = 0$ $\qquad$ $|x - 1| = 0 \Rightarrow x - 1 = 0$

$x = -2$ $\qquad$ $x = 1$ kritik noktaları bulunur.

Bu kritik noktalara göre mutlak değerli ifadeler:

$$|3x + 6| = \begin{cases} -(3x + 6), & x < -2 \text{ ise} \\ 0, & x = -2 \text{ ise} \\ 3x + 6, & x > -2 \text{ ise} \end{cases} \text{ ve } |x - 1| = \begin{cases} -(x - 1), & x < 1 \text{ ise} \\ 0, & x = 1 \text{ ise} \\ x - 1, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$$ olarak yazılır.

$-\infty \qquad -2 \qquad 1 \qquad +\infty$

$x < -2$ için	$-2 \leq x < 1$ için	$x \geq 1$ için
$-(3x + 6) - 2 = -(x - 1)$ $-3x - 6 - 2 = -x + 1$ $-2x = 9$ $x = -\frac{9}{2}$	$(3x + 6) - 2 = -(x - 1)$ $3x + 6 - 2 = -x + 1$ $4x = -3$ $x = -\frac{3}{4}$	$(3x + 6) - 2 = x - 1$ $3x + 6 - 2 = x - 1$ $2x = -5$ $x = -\frac{5}{2}$
$-\frac{9}{2} \in (-\infty, -2)$ olduğundan çözüm kümesine alınır.	$-\frac{3}{4} \in [-2, 1)$ olduğundan çözüm kümesine alınır.	$-\frac{5}{2} \notin [1, \infty)$ olduğundan çözüm kümesine alınmaz.

Bu durumda, denklemin çözüm kümesi $Ç = \left\{-\frac{9}{2}, -\frac{3}{4}\right\}$ olarak bulunur.

14. ÖRNEK

$|2x+4|-|3x+6|+|-5x-10|=4$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$|2x+4|-|3x+6|+|-5x-10|=4$$
$$|2\cdot(x+2)|-|3\cdot(x+2)|+|-5\cdot(x+2)|=4$$
$$2\cdot|x+2|-3\cdot|x+2|+|-5|\cdot|x+2|=4$$
$$2\cdot|x+2|-3\cdot|x+2|+5\cdot|x+2|=4$$
$$4\cdot|x+2|=4$$
$$|x+2|=1 \text{ ise } x+2=1 \text{ veya } x+2=-1$$
$$x=-1 \qquad x=-3$$
$$Ç=\{-3,1\}$$

iv) $|x|+|y|=0 \Rightarrow x=0$ ve $y=0$

15. ÖRNEK

$|3x-9|+|5y+20|+|-4z-12|=0$ olduğuna göre $x\cdot y\cdot z$ çarpımını bulunuz.

ÇÖZÜM

Mutlak değerli ifadelerin toplamlarının sıfıra eşit olabilmesi için mutlak değerli ifadelerin içinin sıfıra eşit olması gerekir.

$$|3x-9|+|5y+20|+|-4z-12|=0 \Rightarrow 3x-9=0, \quad 5y+20=0, \quad -4z-12=0$$
$$x=3 \qquad y=-4 \qquad z=-3$$

Buradan $x\cdot y\cdot z$ çarpımı $3\cdot(-4)\cdot(-3)=36$ bulunur.

16. ÖRNEK

$|x^2-5x+6|-4\cdot|x-3|=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$|x^2-5x+6|-4\cdot|x-3|=|(x-2)\cdot(x-3)|-4\cdot|x-3|$$
$$=|x-2|\cdot|x-3|-4\cdot|x-3|$$
$$=|x-3|\cdot(|x-2|-4) \text{ bulunur.}$$

$$|x-3|\cdot(|x-2|-4)=0 \Rightarrow |x-3|=0 \text{ veya } |x-2|-4=0$$

$$x-3=0 \qquad x-2=4 \text{ veya } x-2=-4$$
$$x=3 \qquad x=6 \qquad x=-2 \text{ olur.}$$

Buna göre çözüm kümesi $Ç=\{-2,3,6\}$ dır.

Mutlak Değerli Eşitsizlikler

Mutlak değerli ifade eşitsizlik şeklinde verilmişse mutlak değerli eşitsizlikler olarak adlandırılır. Mutlak değerli eşitsizliklerin çözümü, mutlak değer tanımı dikkate alınarak çözülür.

i) $a \geq 0$ olmak üzere $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

17. ÖRNEK

$|x| \leq 4$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bularak sayı doğrusunda gösteriniz.

ÇÖZÜM

$|x| \leq 4$ eşitsizliğinin anlamı, mutlak değeri 4 ve 4 ten küçük sayılar demektir. Başka bir ifadeyle sıfıra olan uzaklıkları 4 ve 4 ten küçük olan sayılardır.

$|x| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$ Buradan çözüm kümesi $Ç = [-4, 4]$ olur.

Çözüm kümesi, sayı doğrusu üzerinde aşağıdaki gibi gösterilir:

$a < 0$ olmak üzere $|x| \leq a \Rightarrow Ç = \varnothing$ dir.

18. ÖRNEK

$|-3x + 2| < 6$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} |-3x+2| < 6 &\Rightarrow -6 < -3x + 2 < 6 \\ &\Rightarrow -6 - 2 < -3x < 6 - 2 \\ &\Rightarrow -8 < -3x < 4 \\ &\Rightarrow \frac{8}{3} > x > -\frac{4}{3} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Bu durumda, eşitsizliğin çözüm kümesi $Ç = \left(-\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$ olur.

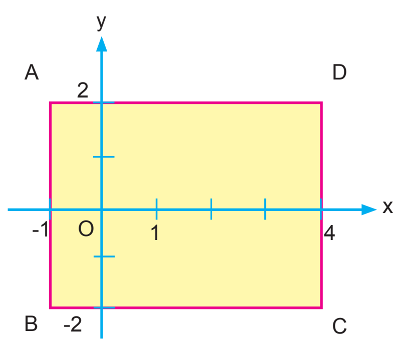
19. ÖRNEK

$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|2x - 3| \leq 5$ ve $|3y| \leq 6$ eşitsizliklerini sağlayan tüm (x, y) sıralı ikililerini kapsayan en küçük kapalı bölgenin alanını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} |2x-3| \leq 5 &\Rightarrow -5 \leq 2x - 3 \leq 5 \\ &\Rightarrow -2 \leq 2x \leq 8 \\ &\Rightarrow -1 \leq x \leq 4 \ldots \mathbf{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |3y| \leq 6 &\Rightarrow -6 \leq 3y \leq 6 \\ &\Rightarrow -\frac{6}{3} \leq y \leq \frac{6}{3} \\ &\Rightarrow -2 \leq y \leq 2 \ldots \mathbf{(2)} \end{aligned}$$



Oluşan şekil bir dikdörtgen olduğundan $A(ABCD) = 5 \cdot 4 = 20\,br^2$ olarak bulunur.

ii) $a \geq 0$ olmak üzere $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a$ veya $x \leq -a$

20. ÖRNEK

$|x| \geq 3$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bularak sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

ÇÖZÜM

$|x| \geq 3$ eşitsizliğinin anlamı, mutlak değeri 3 ve 3 ten büyük sayılar demektir. Başka bir ifadeyle sıfıra olan uzaklıkları 3 ve 3 ten büyük olan sayılardır.

$|x| \geq 3 \Rightarrow x \geq 3$ veya $x \leq -3$ yazılır. Bu durumda eşitsizliğin çözüm kümesi $Ç = (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$ olur.

Sayı doğrusu üzerinde gösterimi aşağıda verilmiştir:

21. ÖRNEK

$|2x+1| > 3$ ve $|4x+5| < 13$ eşitsizliklerini sağlayan x tam sayılarının toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$|2x+1| > 3 \Rightarrow 2x+1 > 3$ veya $2x+1 < -3$

$2x > 2 \qquad 2x < -4$ olduğundan $Ç_1 = (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$ olur.

$x > 1 \qquad x < -2$

Çözüm kümesinin sayı doğrusunda gösterilişi aşağıdaki gibidir.

$|4x+5| < 13 \Rightarrow -13 < 4x+5 < 13$

$\Rightarrow -18 < 4x < 8$

$\Rightarrow -\frac{18}{4} < x < 2$ buradan $-\frac{9}{2} < x < 2$ dir. $Ç_2 = \left(-\frac{9}{2}, 2\right)$ olur.

Çözüm kümesinin sayı doğrusunda gösterilişi aşağıdaki gibidir.

$Ç = Ç_1 \cap Ç_2 = [(-\infty, -2) \cup (1, \infty)] \cap \left(-\frac{9}{2}, 2\right) = \left(-\frac{9}{2}, -2\right) \cup (1, 2)$

Genel çözüm kümesinin sayı doğrusunda gösterilişi aşağıdaki gibidir.

Bu aralıktaki tam sayılar -4 ve -3 olduğundan toplamları $(-4)+(-3) = -7$ olur.

iii) $a \geq 0$, $b \geq 0$ olmak üzere $a \leq |x| \leq b$ ise $|x| \geq a$ ve $|x| \leq b$ veya $a \leq x \leq b, -b \leq x \leq -a$

22. ÖRNEK

$2 < |x| < 5$ eşitsizliğinin çözüm kümesini araştırınız.

ÇÖZÜM

$2 < |x| < 5 \Rightarrow |x| < 5$ ve $|x| > 2$ demektir.

$|x| < 5 \Rightarrow -5 < x < 5 \ldots (1)$ ve

$|x| > 2 \Rightarrow x > 2$ veya $x < -2 \ldots (2)$ yazılır.

Buna göre verilen eşitsizliğin çözüm kümesi (1) ve (2) nin kesişimi alınarak bulunur.

$Ç = (-5, -2) \cup (2, 5)$ tir.

23. ÖRNEK

$4 \leq |3x+7| \leq 8$ eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$4 \leq |3x+7| \leq 8 \Rightarrow 4 \leq 3x+7 \leq 8 \text{ veya } -8 \leq 3x+7 \leq -4$$

$$-3 \leq 3x \leq 1 \qquad -15 \leq 3x \leq -11$$

$$-1 \leq x \leq \frac{1}{3} \qquad -5 \leq x \leq -\frac{11}{3} \text{ yazılır.}$$

Buradan verilen eşitsizliğin çözüm kümesi $Ç = \left[-5, -\frac{11}{3}\right] \cup \left[-1, \frac{1}{3}\right]$ olur.

Bu aralıktaki tam sayıların kümesi $\{-5, -4, -1, 0\}$ olduğundan eşitsizliği sağlayan tam sayıların sayısı 4 tanedir.

iv) $|x| \leq |y| \Rightarrow x^2 \leq y^2$

24. ÖRNEK

$|x+3| < |x-1|$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$|x+3| < |x-1| \Rightarrow (x+3)^2 < (x-1)^2$$

$$\Rightarrow x^2+6x+9 < x^2-2x+1$$

$$\Rightarrow 8x+8 < 0$$

$$\Rightarrow x < -1 \text{ bulunur.}$$

Eşitsizliğin çözüm kümesi $Ç = (-\infty, -1)$ olur.

25. ÖRNEK

$|x-1| \leq 5$ olmak üzere $y = |4x-8|$ ifadesinin alabileceği en büyük ve en küçük tam sayı değerlerinin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$|x-1| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq x-1 \leq 5$$

$$\Rightarrow 4/ \quad -4 \leq x \leq 6$$

$$-16 \leq 4x \leq 24$$

$$-24 \leq 4x-8 \leq 16 \text{ ise } 0 \leq |4x-8| \leq 24 \text{ olur.}$$

Buna göre $y = |4x-8|$ ifadesinin en büyük tam sayı değeri 24, en küçük tam sayı değeri 0 olur.
Buradan $24+0=24$ olur.

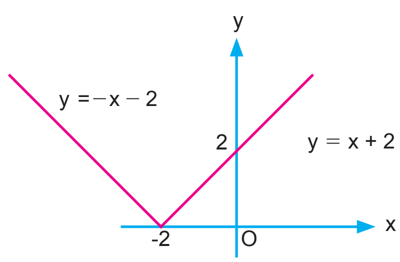
26. ÖRNEK

$y = |x+2|$ denklemini sağlayan (x, y) sıralı ikililerinin kümesini analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM

I. Durum	$x \geq -2$ için	$y = x+2$
II. Durum	$x \leq -2$ için	$y = -x-2$

Bu iki durumun birleşimi $y = |x+2|$ denkleminin düzlemdeki görüntüsüdür.



4. Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem ve Eşitsizlik Sistemleri

Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklem Sistemleri

x, y bilinmeyen ve $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ve a_1, a_2, b_1, b_2 sıfırdan farklı olmak üzere $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ve $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ denklemlerinden oluşan

$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{aligned}\right\}$ sistemine birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi denir.

Her iki denklemi de sağlayan (x,y) sıralı ikililerinin kümesine denklem sisteminin çözüm kümesi denir. Bu tür denklem sistemleri "yok etme, yerine koyma, grafik" yöntemlerinden herhangi biri kullanılarak çözülebilir.

Birinci dereceden iki bilinmeyenli bir denklemin analitik düzlemde bir doğru belirttiğini biliyorsunuz.

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ denkleminin belirttiği doğru, d_1 olsun.

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ denkleminin belirttiği doğru, d_2 olsun.

Buna göre

I. Durum:

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ise bu iki doğru çakışıktır. $d_1 = d_2$ tir. Yani iki doğrunun bütün noktaları ortaktır.

Bu durumda denklem sisteminin çözüm kümesi sonsuz elemanlıdır.

II. Durum:

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ise bu iki doğru paraleldir. $d_1 \parallel d_2$ dir.

Bu durumda denklem sisteminin çözüm kümesi boş kümedir. $Ç = \varnothing$

III. Durum:

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ise bu iki doğru tek noktada kesişir. Ortak nokta, denklem sisteminin çözümüdür.

Bu durumda denklem sisteminin çözüm kümesi tek elemanlıdır.

1. ÖRNEK

$\left.\begin{aligned} 2x - 3y = m \\ x + ky = 4 \end{aligned}\right\}$ denklem sistemini sağlayan sıralı ikili $(-2, 2)$ ise $k \cdot m$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(-2, 2)$ ikilisi her iki denklemi de sağlar. $2 \cdot (-2) - 3 \cdot 2 = m \Rightarrow m = -10$

$-2 + k \cdot 2 = 4 \Rightarrow 2k = 6 \Rightarrow k = 3$ olduğundan $k \cdot m = -30$ olarak bulunur.

2. ÖRNEK

$\left.\begin{aligned} ax - 3y = 4 \\ 2x + y = b \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesi sonsuz elemanlı olduğuna göre a ve b değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Çözüm kümesi, sonsuz elemanlı olduğundan doğrular çakışıktır. Bu durumda

$\frac{a}{2} = \frac{-3}{1} = \frac{4}{b} \Rightarrow a = -6,\ b = -\frac{4}{3}$ olur.

3. ÖRNEK

$\left.\begin{aligned} 5x + (a+1)y = 2 \\ 2x - 4y = 3 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesi boş küme olduğuna göre a nın değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Sistemin çözüm kümesi boş küme ise doğrular paraleldir.

$\frac{5}{2} = \frac{a+1}{-4} \neq \frac{2}{3} \Rightarrow 2a + 2 = -20 \Rightarrow 2a = -22 \Rightarrow a = -11$ bulunur.

4 . ÖRNEK

$\left.\begin{array}{r} x-2y=4 \\ 3x+2y=-12 \end{array}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesinin varlığını inceleyiniz.

ÇÖZÜM

$\frac{1}{3} \neq \frac{-2}{2}$ olduğundan doğrular tek noktada kesişir. Sistemin çözümü ortak noktayı verir. Bunun için yerine koyma, yok etme veya grafikle çözüm yöntemlerinden faydalanılır.

I. Yol: Yerine Koyma Yöntemi

Verilen denklemlerden birinde bilinmeyen yalnız bırakılır. Bulunan değer diğer denklemde kullanılarak bir bilinmeyenli bir denklem bulunur.

$x-2y=4 \Rightarrow x=4+2y$ ifadesi diğer denklemde yerine yazılırsa

$3x+2y=-12 \Rightarrow 3(4+2y)+2y=-12 \Rightarrow 12+6y+2y=-12$

$\Rightarrow 8y=-24$ ise $y=-3$ olur.

Bulunan y değeri $x=4+2y$ ifadesinde yerine yazılırsa $x=4+2\cdot(-3) \Rightarrow x=-2$ olarak bulunur.
Denklem sisteminin çözüm kümesi $Ç=\{(-2,-3)\}$ olur.

II. Yol: Yok Etme Yöntemi

Denklemler alt alta yazılır. Seçilen bilinmeyenlerin katsayıları zıt işaretli olacak şekilde eşitlenir. Taraf tarafa toplama yapılarak bilinmeyenlerden biri yok edilir. Bir bilinmeyenli bir denklem bulunur.
Denklem sisteminde taraf tarafa toplama işlemi yapılırsa

$$\begin{array}{rl} & x-2y=4 \\ + & 3x+2y=-12 \\ \hline & 4x=-8 \end{array} \Rightarrow x=-2 \text{ olarak bulunur.}$$

Dolayısıyla x değeri, bu iki denklemden herhangi birinde yerine yazılırsa

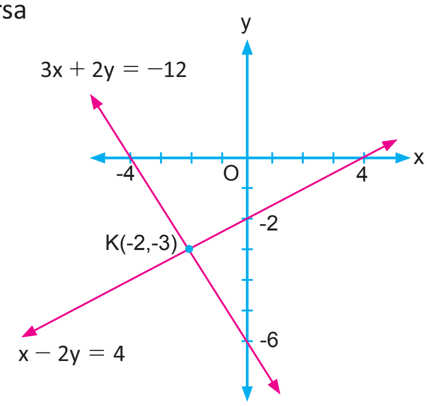
$3(-2)+2y=-12 \Rightarrow 2y=-6 \Rightarrow y=-3$ olur.

O hâlde denklem sisteminin çözüm kümesi $Ç=\{(-2,-3)\}$ olur.

III. Yol: Grafik Çizme Yöntemi

$x-2y=4$ için
$x=0$ için $y=-2 \longrightarrow (0,-2)$
$y=0$ için $x=4 \longrightarrow (4,0)$

$3x+2y=-12$ için
$x=0$ için $y=-6 \longrightarrow (0,-6)$
$y=0$ için $x=-4 \longrightarrow (-4,0)$



Yandaki grafikte iki doğrunun tek noktada kesiştiği görülüyor. Bu noktaya K denir. K noktası, denklem sisteminin çözüm kümesidir.
Denklem sisteminin çözüm kümesi $Ç=\{(-2,-3)\}$ olur.

5. ÖRNEK

$\left.\begin{array}{r} 13x+19y=2 \\ 17x-11y=3 \end{array}\right\}$ denklem sistemine göre $\frac{x}{y}$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{array}{rl} -2/ & 17x-11y=3 \\ 3/ & 13x+19y=2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rl} & -34x+22y=-6 \\ + & 39x+57y=6 \\ \hline & 5x+79y=0 \end{array}$$

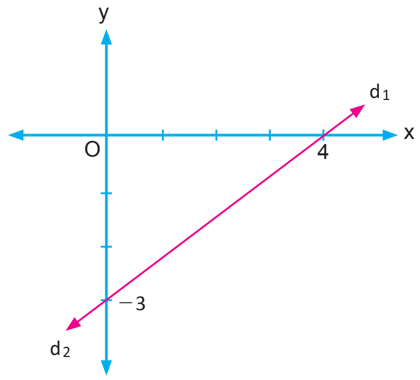
$5x=-79y \Rightarrow \frac{x}{y}=-\frac{79}{5}$ olarak bulunur.

6. ÖRNEK

$\left.\begin{aligned} d_1 &: 3x-4y=12 \\ d_2 &: 6x-8y=24 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesinin varlığını inceleyiniz. Grafik çizerek yorumlayınız.

ÇÖZÜM

$\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{12}{24}$ olduğundan d_1 ve d_2 doğruları çakışıktır.



Yanda görüldüğü gibi doğrular aynı noktalardan geçer. Doğruların bütün noktaları ortaktır. O hâlde denklem sisteminin sonsuz çözümü vardır. Yok etme yöntemiyle de bunu görebilirsiniz.

$$\begin{array}{rr} -2/ & 3x-4y=12 \\ + & 6x-8y=24 \\ \hline & 0=0 \end{array}$$

olup doğru üzerindeki bütün noktalar ortaktır.

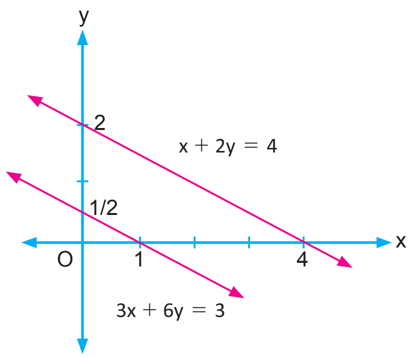
$Ç=\{(x,y)\mid 3x-4y=12, x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}\}$ olup sonsuz elemanlıdır.

7. ÖRNEK

$\left.\begin{aligned} x+2y&=4 \\ 3x+6y&=3 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesinin varlığını inceleyiniz. Grafik çizerek yorumlayınız.

ÇÖZÜM

$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}\neq\frac{4}{3}$ olup doğrular paraleldir. Doğruların grafiklerini çizmek için geçtikleri ikişer nokta bulunursa



$x+2y=4$	$3x+6y=3$
$x=0$ için $y=2$	$x=0$ için $y=\frac{1}{2}$
$y=0$ için $x=4$	$y=0$ için $x=1$

değerleri elde edilir. Noktalar yardımıyla grafik çizildiğinde doğruların paralel olduğu görülür. O hâlde ortak noktaları yoktur.

Bu durumda denklem sisteminin çözümü boş kümedir.

8. ÖRNEK

$\left.\begin{aligned} \frac{2}{x+1}-\frac{3}{y+1}&=5 \\ \frac{-1}{x+1}+\frac{8}{y+1}&=-2 \end{aligned}\right\}$ denklem sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{array}{rr} & \frac{2}{x+1}-\frac{3}{y+1}=5 \\ +\ 2/ & \frac{-1}{x+1}+\frac{8}{y+1}=-2 \\ \hline & \frac{13}{y+1}=1 \Rightarrow y+1=13 \Rightarrow y=12 \end{array}$$

Birinci denklemde $y=12$ yazılırsa

$$\frac{2}{x+1}-\frac{3}{13}=5 \Rightarrow \frac{2}{x+1}=5+\frac{3}{13} \Rightarrow \frac{2}{x+1}=\frac{68}{13}$$

$$\frac{x+1}{2}=\frac{13}{68}$$

$x=-\frac{21}{34}$ bulunur. Çözüm kümesi $Ç=\left\{\left(-\frac{21}{34},12\right)\right\}$ dir.

Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Eşitsizlik Sistemleri

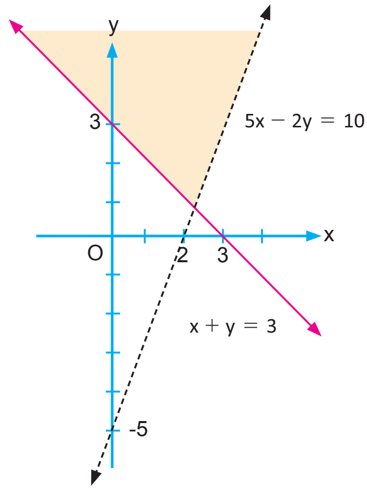
x, y birer bilinmeyen olmak üzere en az iki tane birinci dereceden iki bilinmeyenli eşitsizliğin oluşturduğu sisteme birinci dereceden iki bilinmeyenli eşitsizlik sistemi denir.

Eşitsizlik sisteminin çözümü, sistemi oluşturan eşitsizliklerin çözüm kümelerinin kesişimidir.

9. ÖRNEK

$\left.\begin{aligned} 5x-2y &< 10 \\ x+y &\geq 3 \end{aligned}\right\}$ eşitsizlik sisteminin çözümünü analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM



$5x-2y=10$ için

$x=0$ ise $y=-5 \longrightarrow (0,-5)$

$y=0$ ise $x=2 \longrightarrow (2,0)$

$x+y=3$ için

$x=0$ ise $y=3 \longrightarrow (0,3)$

$y=0$ ise $x=3 \longrightarrow (3,0)$

$5x-2y < 10 \Rightarrow \dfrac{5x-10}{2} < y$ olup doğrunun üst bölgesi alınır.

$x+y \geq 3 \Rightarrow y \geq 3-x$ olup doğrunun üst bölgesi alınır.

Bu iki bölgenin kesişimi çözüm kümesidir.

10. ÖRNEK

$\left.\begin{aligned} y &> x \\ x+2y &\leq 6 \\ x &\geq 1 \end{aligned}\right\}$ eşitsizlik sisteminin çözümünü analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM

Doğruların grafikleri düzlemde çizilip bölgeler boyanırsa istenen çözüm bölgesi bulunur.

$x+2y=6$ için

$x=0$ için $y=3$

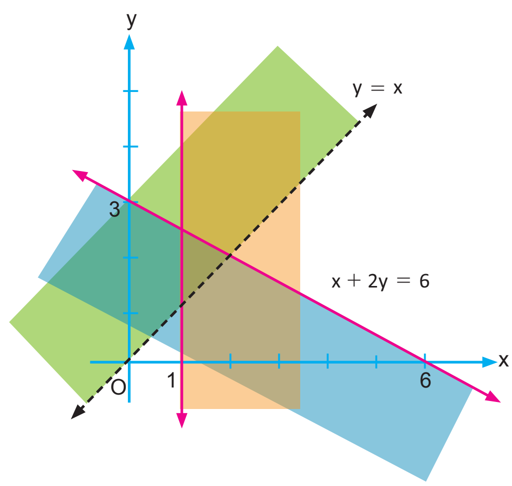
$y=0$ için $x=6$

$x+2y \leq 6$ ise $y \leq \dfrac{6-x}{2}$ olup doğrunun alt bölgesi boyanır.

$y > x$ olduğundan doğrunun üst bölgesi boyanır.

$x \geq 1$ olduğundan $x=1$ doğrusunun sağ tarafı boyanır.

İstenen çözüm bölgesi, bu üç bölgenin kesişimidir.



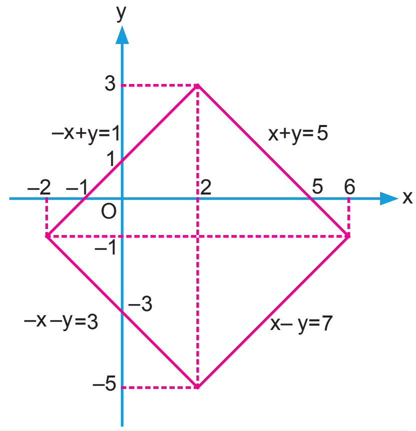
11. ÖRNEK

$|x-2|+|y+1|=4$ denklemini sağlayan (x, y) ikililerinin kümesini analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM

$|x-2|$ nin kritik noktası 2 dir. $|y+1|$ in kritik noktası -1 dir. Bu durumda oluşacak dört farklı durum aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

I. Durum	$x \geq 2,\ y \geq -1$	$x-2+y+1=4$	$x+y=5$
II. Durum	$x \geq 2,\ y \leq -1$	$x-2-y-1=4$	$x-y=7$
III. Durum	$x \leq 2,\ y \leq -1$	$-x+2-y-1=4$	$-x-y=3$
IV. Durum	$x \leq 2,\ y \geq -1$	$-x+2+y+1=4$	$-x+y=1$



Bu durumun birleşimi $|x-2|+|y+1|=4$ denkleminin düzlemdeki görüntüsüdür.

Elde edilen şekil köşegenlerinin kesişim noktası $(2,-1)$ ve bir kenarının uzunluğu $4\sqrt{2}$ birim olan bir karedir.

a) $|x-a|+|y-b|=c,\ (c \geq 0)$ şeklindeki iki bilinmeyenli denklemler analitik düzlemde (a, b) merkezli bir kenarı $c\sqrt{2}$ birim olan bir kare belirtir.

b) $|x-a|+|y-b|<c,\ (c \geq 0)$ şeklindeki iki bilinmeyenli eşitsizlik analitik düzlemde (a, b) merkezli bir kenarı $c\sqrt{2}$ birim olan bir karenin iç bölgesini belirtir.

c) $|x-a|+|y-b|>c,\ (c \geq 0)$ şeklindeki iki bilinmeyenli eşitsizlik analitik düzlemde (a, b) merkezli bir kenarı $c\sqrt{2}$ birim olan bir karenin dış bölgesini belirtir.

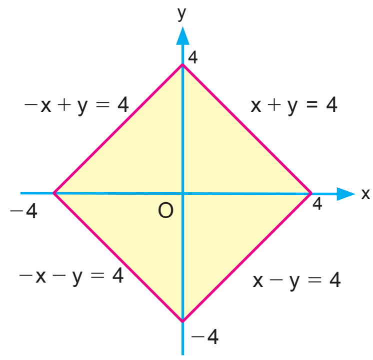
12. ÖRNEK

$\left.\begin{array}{r} |x|+|y| \leq 4 \\ |x+1|<2 \end{array}\right\}$ eşitsizlik sistemini sağlayan (x, y) ikililerinin kümesini analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM

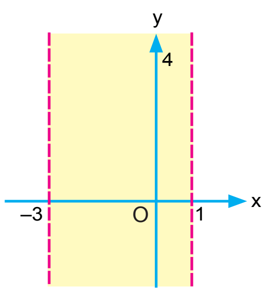
1. $|x|+|y| \leq 4$ eşitsizliğinde mutlak değer tanımına göre aşağıdaki dört durum oluşur:

I. Durum	$x \geq 0,\ y \geq 0$ için	$x+y \leq 4$
II. Durum	$x \leq 0,\ y \geq 0$ için	$-x+y \leq 4$
III. Durum	$x \leq 0,\ y \leq 0$ için	$-x-y \leq 4$
IV. Durum	$x \geq 0,\ y \leq 0$ için	$x-y \leq 4$

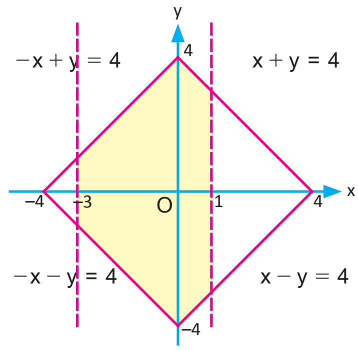


2. $|x+1|<2 \Rightarrow -2<x+1<2 \Rightarrow -3<x<1$

$|x|+|y| \leq 4$ eşitsizliğinin çözüm bölgesi, bu dört durumun birleşimi ile elde edilen karenin sınırı ve iç bölgesidir.



(1) ve (2) bölgelerinin analitik düzlemdeki kesişim bölgesi eşitsizlik sisteminin çözümüdür.



ALIŞTIRMALAR-6

1. $|\sqrt{2}-1|+|\sqrt{2}-\sqrt{3}|-|\sqrt{3}-2|$ işleminin sonucunu bulunuz.

2. Gerçek sayılarda $-2 < x < 4$ olmak üzere $|x-4|-|3x+7|+4x$ ifadesinin değerini bulunuz.

3. $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x < 0 < y < z$ olmak üzere aşağıdaki ifadelerin eşitini bulunuz.

a) $|x-y|+|y-z|-|y-x|$

b) $\dfrac{|x-y|-|y+z|+|-z|}{|x|}$

4. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $||2x-1|+3|=5$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

5. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|x+3|=2x+5$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

6. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|-2x+6|+5=|x+2|$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

7. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|x-2| < 3$ ve $5x-y+2=0$ koşullarını sağlayan en büyük y tam sayı değerini bulunuz.

8. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\left|\dfrac{2x-3}{5}\right| < 1$ eşitsizliğini sağlayan tam sayıların toplamını bulunuz.

9. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|2x-7| \geq 5$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

10. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $2 < |4x-5| < 7$ eşitsizliğini sağlayan x tam sayılarının çarpımını bulunuz.

11. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|x+2| \leq |x+1|$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

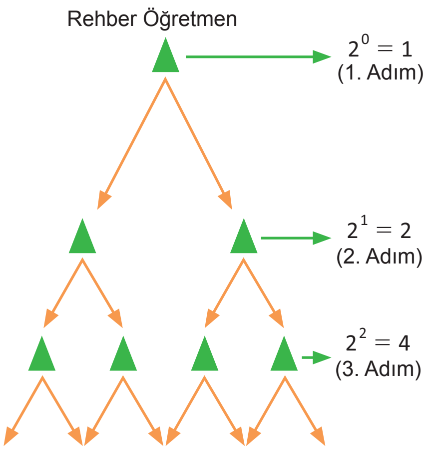
12. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere çözümü $-2 < x < 6$ olan mutlak değerli eşitsizlik $|x-a| < b$ olduğuna göre a^2-b^2 toplamını bulunuz.

13. a ve b birer pozitif tam sayıdır. $(7a-3b)(4a-5b)=19$ olduğuna göre a^2+b^2 değerini bulunuz.

14. $\left.\begin{array}{r} x+3y-6 \leq 0 \\ 2x-5y+10 > 0 \end{array}\right\}$ eşitsizlik sisteminin çözümünü analitik düzlemde gösteriniz.

9.3.4. ÜSLÜ İFADELER VE DENKLEMLER

Etkinlik



Okul Müdürü Fikret Bey, okul adına "Doğa Gönüllüleri Hatıra Ormanı" oluşturmak istemektedir. Bu amaçla okulun Çevre Kulübü'nden bu konuyla ilgili bir proje yapmalarını ister.

Çevre Kulübü rehber öğretmeni başkanlığında öğrencilerle yapılan toplantıda "Bir Meşe Palamudu da Sen Ek" adında bir proje hazırlanmasına karar verilir. Proje kapsamında, İl Orman Müdürlüğünden temin edilen meşe palamutlarının dağıtımında aşağıdaki yöntem belirlenir:

Bir meşe palamudunu eken rehber öğretmen, iki öğrenciye iki adet meşe palamudu tohumu verecektir. Tohumu alan her öğrenci, iki arkadaşının da aynı şekilde meşe palamudu ekmesini sağlayacaktır. Kelebek etkisiyle bu işlemin devam etmesi planlanmaktadır.

Şekilde belirtilen adımlara göre "Bir Meşe Palamudu da Sen Ek" projesine yönelik aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. **5. adımın sonunda toplam kaç palamut dağıtıldığını nasıl ifade edersiniz?**
2. **10. adımda kaç palamut tohumu dağıtılmış olur?**
3. **Rehber öğretmen, projeyi 3 öğrenci ile başlatıp 5. adıma kadar dağıtım yapsaydı kaç palamut tohumu daha dağıtılmış olurdu?**
4. **Siz de belirlediğiniz herhangi bir adımda meşe palamudu dağıtılan kişi sayısını belirtiniz.**
5. **Daha önce de uygulanmış olan benzer projeleri iki hafta süresince araştırarak sonuçlarını tartışınız.**

1. Üslü İfade İçeren Denklemler

Üslü İfadeler

x bir gerçek sayı ve n bir doğal sayı olmak üzere n tane x gerçek sayısının çarpımı

$\underbrace{x.x.x.....x}_{n\ tane} = x^n$ şeklinde gösterilir. x^n sayısı x in n. kuvveti (üssü) şeklinde okunur.

x^n ifadesinde x sayısına taban, n sayısına üs denir. (0^0) tanımsızdır.

Üslü Sayıların Özellikleri

	x, y gerçek sayı ve m, n doğal sayı olmak üzere	
1.	$\forall x \in \mathbb{R}$ için $x^1 = x$ olur.	Tüm gerçek sayıların birinci kuvveti kendisidir. $8^1 = 8,\ (-6)^1 = -6,\ \left(-\frac{1}{3}\right)^1 = -\frac{1}{3},\ 0^1 = 0$
2.	$x \neq 0$ olmak üzere $x^0 = 1$ dir.	Sıfırdan farklı sayıların sıfırıncı kuvveti 1 dir. $3^0 = 1,\ (-1)^0 = 1,\ \left(-\frac{2}{5}\right)^0 = 1$
3.	$x, y \neq 0$ olmak üzere $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ ve $\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n$	Üs negatif ise taban ters çevrilir. $\frac{1}{5^4} = 5^{-4},\ 2^{-1} = \frac{1}{2},\ \left(\frac{3}{7}\right)^{-2} = \frac{49}{9}$
4.	$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ dir.	Tabanları aynı olan iki üslü sayının çarpımında üsler toplanır. $6^3 \cdot 6^5 = (6 \cdot 6 \cdot 6) \cdot (6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6) = 6^{3+5} = 6^8$ $y^3 \cdot y^2 \cdot y^5 = y^{3+2+5} = y^{10}$
5.	$(x^m)^n = (x^n)^m = x^{m \cdot n}$ dir. Üslü sayıların üssü alınırken üsler çarpılır.	$(4^3)^2 = 4^3 \cdot 4^3 = 4^{3+3} = 4^{3 \cdot 2} = 4^6$ veya $(4^2)^3 = 4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2 = 4^{2+2+2} = 4^{2 \cdot 3} = 4^6$
6.	$(-1)^{2n} = 1$ ve $(-1)^{2n+1} = -1$ dir. -1 in çift kuvvetleri 1, tek kuvvetleri -1 dir.	$(-1)^4 = 1, (-1)^7 = -1$
7.	$x \neq 0$ olmak üzere $\frac{x^n}{x^m} = x^n \cdot x^{-m} = x^{n-m}$	Tabanları aynı olan iki üslü sayının bölümünde payın üssünden paydanın üssü çıkarılır. $\frac{7^3}{7^{-5}} = 7^{3-(-5)} = 7^{3+5} = 7^8$
8.	a) $x > 0$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $x^n > 0$ dır.	Pozitif gerçek sayıların tüm kuvvetleri pozitiftir. $3^2 > 0,\quad 5^{-2} = \frac{1}{5^2} > 0$
	b) $x < 0$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\begin{cases} n \text{ tek ise } x^n < 0 \\ n \text{ çift ise } x^n > 0 \end{cases}$	Bu özellikten negatif gerçek sayıların çift kuvvetlerinin pozitif, tek kuvvetlerinin negatif olduğu sonucu elde edilir. $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27 < 0$ $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16 > 0$

9.	$x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$	Üsleri aynı olan üslü sayıların çarpımında tabanlar çarpımına ortak üs yazılır. $5^3 \cdot 3^3 = (5 \cdot 3)^3 = 15^3$ $(x^2)^5 \cdot (y^3)^5 = (x^2 \cdot y^3)^5 = x^{10} \cdot y^{15}$
10.	$\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n, (y \neq 0)$	Üsleri aynı olan üslü sayılar bölünürken tabanlar bölünür. $\frac{20^4}{5^4} = \left(\frac{20}{5}\right)^4 = 4^4$, $\frac{27^5}{3^5} = \left(\frac{27}{3}\right)^5 = 9^5$ olur.
11.	$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $a \cdot x^n \pm b \cdot x^n = x^n \cdot (a \pm b)$ dir.	Üsleri aynı olan ifadeler toplanıp çıkarılabilir. $3 \cdot 5^2 - 2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^2 = 5^2 \cdot (3 - 2 + 4)$ $= 5^2 \cdot 5 = 5^3 = 125$

1. ÖRNEK

$(-3^3) \cdot 3^4 \cdot 3^{-2} \cdot (-3)^2$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$(-3)^2 = 3^2$ ve $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$ olarak yazılır. Bu değerler, yerine yazıldığında

$(-3^3) \cdot 3^4 \cdot 3^{-2} \cdot (-3)^2 = -3^3 \cdot 3^4 \cdot \frac{1}{3^2} \cdot 3^2 = -3^{3+4} = -3^7$ bulunur.

2. ÖRNEK

$x \in \mathbb{R}; x \neq 0$ olmak üzere $\frac{(-x^5) \cdot x^{-2} \cdot (-x)^3 \cdot (-x)^6}{x^3 \cdot x^5 \cdot (-x^4)}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{(-x^5) \cdot x^{-2} \cdot (-x)^3 \cdot (-x)^6}{x^3 \cdot x^5 \cdot (-x^4)} = \frac{-x^5 \cdot x^{-2} \cdot (-x^3) \cdot x^6}{-x^{3+5+4}} = \frac{x^{5-2+3+6}}{-x^{12}} = \frac{x^{12}}{-x^{12}} = -1$$

3. ÖRNEK

$\frac{3^{21} + 3^{23} + 3^{25}}{3^{15} + 3^{17} + 3^{19}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Kesrin payı 3^{21}, paydası 3^{15} parantezine alınırsa

$$\frac{3^{21} + 3^{23} + 3^{25}}{3^{15} + 3^{17} + 3^{19}} = \frac{3^{21} \cdot (1 + 3^2 + 3^4)}{3^{15} \cdot (1 + 3^2 + 3^4)} = \frac{3^{21}}{3^{15}} = 3^{21-15} = 3^6 \text{ olur.}$$

4. ÖRNEK

$\frac{2^{x+4} + 2^{x+3} - 2^{x+2}}{2^{x+2} + 2^{x+1}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Üslü sayı özellikleri kullanılırsa

$$\frac{2^{x+4} + 2^{x+3} - 2^{x+2}}{2^{x+2} + 2^{x+1}} = \frac{2^x \cdot 2^4 + 2^x \cdot 2^3 - 2^x \cdot 2^2}{2^x \cdot 2^2 + 2^x \cdot 2} = \frac{2^x \cdot (2^4 + 2^3 - 2^2)}{2^x \cdot (2^2 + 2)} = \frac{16 + 8 - 4}{4 + 2} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} \text{ olur.}$$

5. ÖRNEK

$3^x = 4$ olduğuna göre 9^{2x+2} işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

9^{2x+2} ifadesi 3^x e göre düzenlenirse
$9^{2x+2} = (3^2)^{2x+2} = 3^{4x+4} = (3^x)^4 \cdot 3^4 = 4^4 \cdot 3^4 = (3 \cdot 4)^4 = 12^4$ olur.

6. ÖRNEK

$64^2 \cdot 125^3$ çarpımının basamak sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

Basamak sayısı hesaplamada, sayıyı 10 un kuvveti şeklinde yazmak işlemi kolaylaştırır.

$$64^2 \cdot 125^3 = (2^6)^2 \cdot (5^3)^3 = 2^{12} \cdot 5^9 = 2^9 \cdot 2^3 \cdot 5^9 = (2^9 \cdot 5^9) \cdot 2^3 = 10^9 \cdot 2^3 = 8\underbrace{000...0}_{9 \text{ tane}}$$

Çarpımın sondan 9 basamağı sıfır olduğundan $64^2 \cdot 125^3$ çarpımı 10 basamaklı olur.

7. ÖRNEK

$2^x = a$, $3^x = b$, $5^x = c$ olduğuna göre 90^x in a, b ve c türünden değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

90 sayısı asal çarpanlarına ayrıldığında

$$\left.\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}\right\} \Rightarrow 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \text{ olur. Buradan } 90^x = (2 \cdot 3^2 \cdot 5)^x = 2^x \cdot (3^x)^2 \cdot 5^x = ab^2c \text{ olur.}$$

8. ÖRNEK

$24^x = n$, $3^x = m$ olduğuna göre 64^{x+1} in n ve m türünden değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\left.\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}\right\} \Rightarrow 24 = 2^3 \cdot 3^1 \text{ olduğundan } n = 24^x = (2^3 \cdot 3^1)^x = 8^x \cdot 3^x,\ 3^x = m \text{ değeri yerine yazılırsa}$$

$$n = 8^x \cdot m \Rightarrow 8^x = \frac{n}{m} \text{ bulunur.}$$

$$64^{x+1} = (8^2)^{x+1} = (8^x)^2 \cdot 8^2 = 8^2 \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^2 = 64 \cdot \frac{n^2}{m^2} \text{ olur.}$$

9. ÖRNEK

$9^2 + 18^2 + 27^2 = a$ olduğuna göre $36^2 + 72^2 + 108^2$ değerini a türünden bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen ifade a türünden yazılırsa

$$\begin{aligned} 36^2 + 72^2 + 108^2 &= (4 \cdot 9)^2 + (4 \cdot 18)^2 + (4 \cdot 27)^2 \\ &= 4^2 \cdot 9^2 + 4^2 \cdot 18^2 + 4^2 \cdot 27^2 \\ &= 4^2 \cdot (9^2 + 18^2 + 27^2) \\ &= 16a \text{ olur.} \end{aligned}$$

Üslü Denklemler

İçinde üslü ifade bulunduran denklemlere üslü denklem adı verilir. Bu tür denklemlerin çözümü belli özellikler kullanılarak yapılır.

1) $a \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ olmak üzere $a^x = a^y \Rightarrow x = y$ dir. (Tabanları eşit, iki üslü sayının üsleri de eşittir.)

10. ÖRNEK

$3^{2x+4} = 3^{3x-1}$ olduğuna göre x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} 3^{2x+4} = 3^{3x-1} &\Rightarrow 2x + 4 = 3x - 1 \\ &\Rightarrow x = 5 \text{ olur.} \end{aligned}$$

11. ÖRNEK

$5^{x+2} + 5^{x+1} = 150$ olduğuna göre x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned} &5^{x+2} + 5^{x+1} = 150 \\ &5^x \cdot 5^2 + 5^x \cdot 5 = 150 \\ &5^x \cdot (5^2 + 5) = 150 \\ &5^x \cdot 30 = 30 \cdot 5 \Rightarrow 5^x = 5^1 \\ &\qquad\qquad\qquad \Rightarrow x = 1 \text{ olur.} \end{aligned}$$

12. ÖRNEK

m ve n birer doğal sayıdır ve $2^m \cdot 5^n$ sayısı 11 basamaklı en küçük doğal sayı olduğuna göre $n \cdot m$ çarpımını bulunuz.

ÇÖZÜM

$2^m \cdot 5^n$ sayısı, 11 basamaklı en küçük doğal sayı ise bu sayı son on basamağı sıfır olan 10 000 000 000 doğal sayısı olur.

$$\begin{aligned} &2^n \cdot 5^m = 10\,000\,000\,000 \\ &2^n \cdot 5^m = 10^{10} \\ &2^n \cdot 5^m = (2 \cdot 5)^{10} \\ &2^n \cdot 5^m = 2^{10} \cdot 5^{10} \Rightarrow m = 10 \text{ ve } n = 10 \ \Rightarrow m \cdot n = 100 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

13. ÖRNEK

$(0,25)^{-x+2} = 8^{2x+1}$ olduğuna göre x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen değerler, tabanları eşit iki üslü ifadeye dönüştürülmeye çalışılırsa

$$(0,25)^{-x+2} = 8^{2x+1} \Rightarrow \left(\frac{25}{100}\right)^{-x+2} = (2^3)^{2x+1}$$
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{-x+2} = 2^{6x+3}$$
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2^2}\right)^{-x+2} = 2^{6x+3}$$
$$\Rightarrow (2^{-2})^{-x+2} = 2^{6x+3} \Rightarrow 2^{2x-4} = 2^{6x+3}$$
$$\Rightarrow 2x-4 = 6x+3$$
$$\Rightarrow -7 = 4x, \quad x = -\frac{7}{4} \text{ olur.}$$

2) $a, b \neq 0; a, b \neq 1$ olmak üzere $a^m = b^m \Rightarrow \begin{cases} a = b\,, & m \text{ tek ise} \\ a = \pm b\,, & m \text{ çift ise} \end{cases}$

(Üsleri aynı olan iki üslü ifade eşit ise üs tek olduğunda tabanlar, üs çift olduğunda tabanların mutlak değerleri eşittir.)

14. ÖRNEK

$(3x-1)^3 = (x+3)^3$ denkleminde x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

İki üslü ifade eşit verilmişse öncelikle üssün tek ya da çift olup olmadığına bakılır. Örnekte, üs tek olduğundan tabanlar eşit olmalıdır.

$$3x-1 = x+3 \Rightarrow 2x = 4$$
$$x = 2 \text{ bulunur.}$$

15. ÖRNEK

$(4x-5)^2 = (x+1)^2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Üs, çift ve eşit olduğundan tabanların mutlak değerleri eşit olmalıdır.

$|4x-5| = |x+1| \Rightarrow 4x-5 = x+1$ veya $4x-5 = -(x+1)$

$3x = 6 \qquad 4x-5 = -x-1$

$x = 2 \qquad 5x = 4$

$x = \frac{4}{5}$

$Ç = \left\{\frac{4}{5}, 2\right\}$ olur.

3) $a^x = 1$ eşitliği üç farklı durumda sağlanır. Bunlar: $\begin{cases} x = 0 \text{ ve } a \neq 0 \text{ ise} \\ a = 1 \text{ ise} \\ a = -1 \text{ ve } x \text{ çift sayı ise} \end{cases}$

16. ÖRNEK

$(x+1)^{3x+7} = 1$ denklemini sağlayan x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\longrightarrow \quad (x+1)^{3x+7} = 1 \Rightarrow 3x+7 = 0$ ise $x = -\frac{7}{3}$

$x = -\frac{7}{3}$ için $\left(-\frac{7}{3} + 1 = -\frac{4}{3} \neq 0\right)$ dır.

$\longrightarrow \quad x+1 = 1$ ise $x = 0$

$\longrightarrow \quad x+1 = -1$ ise $x = -2$ Bu durumda üs çift olmalıdır.

$x = -2$ için $3 \cdot (-2) + 7 = 1$ tek olduğundan çözüm olarak alınmaz.

$Ç = \left\{-\frac{7}{3}, 0\right\}$ olur.

17. ÖRNEK

$(x^2-3)^{x^2-4} = 1$ denklemini sağlayan x değerininin çarpımını bulunuz.

ÇÖZÜM

$(x^2-3)^{x^2-4} = 1$

$\longrightarrow \quad x^2 - 4 = 0$ ise $x^2 = 4, x_{1,2} = \mp 2$ dir. $x_{1,2} = \mp 2$ değeri için $x^2 - 3 \neq 0$ dır.

$\longrightarrow \quad x^2 - 3 = 1$ ise $x^2 = 4, x_{1,2} = \mp 2$

$\longrightarrow \quad x^2 - 3 = -1$ ise $x^2 = 2, x_{3,4} = \mp\sqrt{2}$ bu durumda üs çift olmalıdır.

$x_{3,4} = \mp\sqrt{2}$ için $(\mp\sqrt{2})^2 - 4 = -2$ çift olduğundan çözüm olarak alınır.

$Ç = \{-2, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\}$ bulunur.

x değerlerinin çarpımı $(-2) \cdot (-\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2}) \cdot 2 = (-4) \cdot (-2) = 8$ bulunur.

4) $n, y \neq 0; a, b \neq 0; a, b \neq 1$ olmak üzere $\left.\begin{matrix} a^m = b^x \\ a^n = b^y \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{x}{y}$ dir.

18. ÖRNEK

$3^x = 2$ ve $16^y = 27$ olduğuna göre $x \cdot y$ çarpımını bulunuz.

ÇÖZÜM

I. Yol

$16^y = 27 \Rightarrow (2^4)^y = 3^3$

$\Rightarrow (2)^{4y} = 3^3$ (2 yerine 3^x yazılırsa)

$\Rightarrow (3^x)^{4y} = 3^3$

$\Rightarrow 3^{4xy} = 3^3$

$\Rightarrow xy = \frac{3}{4}$

II. Yol

$\left.\begin{matrix} 3^x = 2 \\ 2^{4y} = 3^3 \end{matrix}\right\} \frac{x}{3} = \frac{1}{4y} \Rightarrow x \cdot y = \frac{3}{4}$

19. ÖRNEK

$2^x = m$
$5^y = n$ olduğuna göre $16^x \cdot 125^y$ ifadesinin m ve n türünden eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$16^x \cdot 125^y = (2^4)^x \cdot (5^3)^y$
$= (2^4)^x \cdot (5^3)^y$, $2^x = m$ ve $5^y = n$ olduğundan
$= m^4 \cdot n^3$ bulunur.

ALIŞTIRMALAR-7

1. $\dfrac{(-x^3) \cdot x^{-5} \cdot (-x)^6 \cdot (-x)^3}{x^2 \cdot x^4}$ işleminin sonucunu bulunuz.

2. $\dfrac{5^{x+2} - 5^{x+3}}{5^{x+3} + 5^{x+2}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

3. $4^4 \cdot 25^3 - 2$ çarpımında oluşan sayının rakamları toplamını bulunuz.

4. $5^x = 2$ olduğuna göre $(25)^{2x+1}$ değerini bulunuz.

5. $15^x = a$, $3^x = b$ olduğuna göre 75^{2x} in a ve b türünden değerini bulunuz.

6. Aşağıda verilen denklemlerdeki x in eşitini bulunuz.

a) $(3x - 2)^3 = (x + 2)^3$

b) $2^{x+2} + 2^{x+3} = 48$

7. $\left(\dfrac{0,027}{0,003}\right)^x = 243$ ise x in eşitini değerini bulunuz.

8. $3^{x+2} = 6^{x-1}$ olduğuna göre 2^x değerini bulunuz.

9. $\left.\begin{array}{l} 2^{x-1} = m \\ 3^{x+2} = n \end{array}\right\}$ olduğuna göre

24^x ifadesinin m ve n cinsinden değerini bulunuz.

10. $(2x - 1)^{x+3} = 1$ denklemini sağlayan x değerlerinin çarpımını bulunuz.

11. $3^{x+1} + 2 \cdot 3^{x+2} + 5 \cdot 3^x = 78$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

2. Köklü İfadeler İçeren Denklemler

Köklü İfadeler

$n \in \mathbb{Z}^+, a \in \mathbb{R}, n \geq 2$ olmak üzere $x^n = a$ denklemini sağlayan x gerçek sayılarına a sayısının n. dereceden kökü denir.

$x^n = a \Rightarrow x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ tir. Benzer şekilde $x^n = a^m \Rightarrow x = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ gösterilir.

- $x^n = a$ ifadesinde n tek tam sayı ise $\forall a \in \mathbb{R}$ için $x = \sqrt[n]{a}$ bir gerçek sayıdır.
- $x^n = a$ ifadesinde n çift tam sayı ise $a \geq 0$ için $x = \sqrt[n]{a}$ bir gerçek sayıdır.

$\sqrt[3]{-3}, \sqrt{2}, \sqrt[5]{-1}, \sqrt[7]{-2}, \sqrt[6]{13}$ sayıları birer gerçek sayıdır. Ancak $\sqrt{-2}, \sqrt[4]{-1}, \sqrt[12]{-5}$ sayıları gerçek sayı değildir.

1. ÖRNEK

$\sqrt{3-x}$ ifadesini gerçek sayı yapan x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\sqrt{3-x}$ ifadesinde kökün derecesi çift (2) olduğundan kök içi büyük eşit sıfır olmalıdır. $3 - x \geq 0$ ise $x \leq 3$ bulunur.

2. ÖRNEK

$\sqrt[4]{8-x} + \sqrt{x-6}$ ifadesi reel sayı olduğuna göre x yerine yazılabilecek tam sayıların toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$\sqrt[4]{8-x} + \sqrt{x-6}$ ifadesinde

$\sqrt[4]{8-x}$ kökün derecesi çift (4) olduğundan kök içi büyük eşit sıfır olmalıdır.

Bu durumda $8 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 8$ olur. ....(1)

$\sqrt{x-6}$ da kökün derecesi çift (2) olduğundan kök içi büyük eşit sıfır olmalıdır.

Bu durumda $x - 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 6$ olur. ....(2)

(1) ve (2) den $x \leq 8$ ve $x \geq 6 \Rightarrow 6 \leq x \leq 8$ bulunur. O hâlde x in alabileceği tam sayı değerleri 6, 7, 8 olup toplamları $6 + 7 + 8 = 21$ bulunur.

$n \in \mathbb{Z}^+, a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & n \text{ tek ise} \\ |a|, & n \text{ çift ise} \end{cases}$

3. ÖRNEK

$\sqrt[4]{(-3)^4} + \sqrt[2]{(-1)^2} - \sqrt[3]{(-2)^3}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\sqrt[4]{(-3)^4} + \sqrt[2]{(-1)^2} - \sqrt[3]{(-2)^3} = |-3| + |-1| - (-2)$$
$$= 3 + 1 + 2 = 6 \text{ bulunur.}$$

4. ÖRNEK

$a > 0 > b$ olmak üzere

$\sqrt[6]{(b-a)^6} + \sqrt[5]{a^5} - \sqrt[4]{(a-b)^4}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\sqrt[6]{(b-a)^6} + \sqrt[5]{a^5} - \sqrt[4]{(a-b)^4} = |\underset{(-)}{b-a}| + a - |\underset{(+)}{a-b}| = -(b-a) + a - (a-b)$$

$$= -b + a + a - a + b$$

$$= a \text{ bulunur.}$$

5. ÖRNEK

$\sqrt[5]{3^{x-2}} = \sqrt[3]{27^{x-1}}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\sqrt[5]{3^{x-2}} = \sqrt[3]{27^{x-1}}$ eşitliği köklü ifade içeren bir denklemdir. Bu ifade, kökten kurtarılıp rasyonel üslü ifadeye dönüştürülürse

$$\sqrt[5]{3^{x-2}} = \sqrt[3]{27^{x-1}} \Rightarrow 3^{\frac{x-2}{5}} = 27^{\frac{x-1}{3}}$$

$$\Rightarrow 3^{\frac{x-2}{5}} = (3^3)^{\frac{x-1}{3}}$$

$$\Rightarrow 3^{\frac{x-2}{5}} = 3^{3\cdot\frac{x-1}{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{5} = x-1$$

$$\Rightarrow x-2 = 5x-5$$

$$\Rightarrow 3 = 4x$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{4} \text{ bulunur. } Ç = \left\{\frac{3}{4}\right\} \text{ olur.}$$

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ eşitliği, köklü sayıların aslında üssü rasyonel olan birer üslü sayı olduğunu gösterir. Bunun sonucu olarak üslü sayılarla ilgili özellikler kullanılarak köklü sayılara ilişkin aşağıdaki özellikler yazılabilir:

1. $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $(\sqrt[n]{a})^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}\cdot n} = a$ olur.

   $(\sqrt{2})^2 = 2,\quad (\sqrt[5]{-2})^5 = -2,\quad (\sqrt[3]{5})^3 = 5$

2. $x \in \mathbb{R}^+; a \geq 0, n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot x^n}$

   $3 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = \sqrt{2 \cdot 9} = \sqrt{18}$ ve $2 \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{5 \cdot 8} = \sqrt[3]{40}$

3. $m, n \in \mathbb{Z}^+; a \geq 0$ olmak üzere $(\sqrt[n]{a})^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ olur.

   $\sqrt{2} = \sqrt[2]{2^1} = 2^{\frac{1}{2}},\quad \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5^1} = 5^{\frac{1}{3}},\quad \sqrt[4]{7^5} = 7^{\frac{5}{4}}$

4. $n \in \mathbb{Z}; a \geq 0; x, y, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x\sqrt[n]{a} + y\sqrt[n]{a} - z\sqrt[n]{a} = (x+y-z)\sqrt[n]{a}$ dir.
   (Köklü sayılarla toplama ve çıkarma)

   $-3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = (-3+5+2)\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

   $2\sqrt[3]{5} - 5\sqrt[3]{5} + 6\sqrt[3]{5} = (2-5+6)\sqrt[3]{5}$

6. ÖRNEK

$\sqrt{18}+\sqrt{72}-\sqrt{98}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Köklü ifadelerde toplama ve çıkarma işlemlerinin yapılabilmesi için kök içinin ve derecesinin aynı olması gerekir. Buna göre sayılar düzenlenirse

$\sqrt{18}=\sqrt{2\cdot 3^2}=3\sqrt{2}$

$\sqrt{72}=\sqrt{2\cdot 6^2}=6\sqrt{2}$

$\sqrt{98}=\sqrt{2\cdot 7^2}=7\sqrt{2}$ olduğundan

$$\begin{aligned}\sqrt{18}+\sqrt{72}-\sqrt{98}&=3\sqrt{2}+6\sqrt{2}-7\sqrt{2}\\&=(3+6-7)\sqrt{2}=2\sqrt{2}\end{aligned}$$ bulunur.

7. ÖRNEK

$\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{128}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{2\cdot 3^3}=3\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2\cdot 2^3}=2\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[3]{128}=\sqrt[3]{2\cdot 4^3}=4\sqrt[3]{2}$ olduğundan

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{128}&=3\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{2}\\&=(3-2+4)\sqrt[3]{2}=5\sqrt[3]{2}\end{aligned}$$ bulunur.

8. ÖRNEK

$\dfrac{5\sqrt{27}+2\sqrt{48}-\sqrt{12}}{\sqrt{75}-\sqrt{3}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{5\sqrt{27}+2\sqrt{48}-\sqrt{12}}{\sqrt{75}-\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3\cdot 9}+2\sqrt{3\cdot 16}-\sqrt{3\cdot 4}}{\sqrt{3\cdot 25}-\sqrt{1\cdot 3}}=\frac{5\sqrt{3\cdot 3^2}+2\sqrt{3\cdot 4^2}-\sqrt{3\cdot 2^2}}{\sqrt{3\cdot 5^2}-\sqrt{1^2\cdot 3}}$$

$$=\frac{5\cdot 3\sqrt{3}+2\cdot 4\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{3}}{5\cdot\sqrt{3}-1\cdot\sqrt{3}}=\frac{(15+8-2)\cdot\sqrt{3}}{(5-1)\cdot\sqrt{3}}=\frac{21}{4}$$ bulunur.

5. $n \in \mathbb{Z}^+; a, b \geq 0$ olmak üzere $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10}$, $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \cdot 3 \cdot 4} = \sqrt[3]{24}$

6. $a, b, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ olur.

7. Köklü ifadede, kökün içerisindeki ifadenin kuvveti ve kök kuvveti pozitif bir tam sayı ile çarpılıp bölünebilir.

a) $m, n \in \mathbb{Z}^+, a \geq 0$ olmak üzere $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ (Üs, $r \in \mathbb{Z}^+$ sayısı ile genişletilirse)

$= a^{\frac{m.r}{n.r}} = \sqrt[n.r]{a^{m.r}}$ olur. (Kökün derecesini genişletme)

$\sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3 \cdot 2]{2^{5 \cdot 2}} = \sqrt[6]{2^{10}}$

b) $m, n \in \mathbb{Z}^+, a \geq 0, r \in \mathbb{Z}^+$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ pay ve payda r ye bölünürse

$= a^{\frac{m\,:\,r}{n\,:\,r}} = \sqrt[\frac{n}{r}]{a^{\frac{m}{r}}}$ olur. (Kökün derecesini sadeleştirme)

$\left(\dfrac{n}{r}\right.$ çift ise $a^{\frac{m}{r}} \geq 0$ olmalıdır.$\left.\right)$

$\sqrt[8]{(-3)^6} \neq \sqrt[8:2]{(-3)^{6:2}}$

$\sqrt[8]{(-3)^6} \neq \sqrt[4]{(-3)^3}$ dir. Çünkü $(-3)^3 < 0$ olur.

9. ÖRNEK

$\sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{7}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$\sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{7}$ köklü sayılarının çarpımını yapabilmek için kök derecelerinin eşit olması gerekir.

$(2, 5)_{EKOK} = 10$ olduğundan

$\sqrt{3} = \sqrt[2.5]{3^{1.5}} = \sqrt[10]{3^5}$ ve $\sqrt[5]{7} = \sqrt[5.2]{7^{1.2}} = \sqrt[10]{7^2}$ yazılır.

Bu durumda

$$\begin{aligned}
\sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{7} &= \sqrt[10]{3^5} \cdot \sqrt[10]{7^2} \\
&= \sqrt[10]{3^5 \cdot 7^2} \\
&= \sqrt[10]{243 \cdot 49} \\
&= \sqrt[10]{11907} \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

10. ÖRNEK

$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{x}$ ise x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{x} \Rightarrow \sqrt[2.3]{2^3} \cdot \sqrt[3.2]{3^2} = \sqrt[6]{x}$$

$$\sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{x}$$

$$\sqrt[6]{2^3 \cdot 3^2} = \sqrt[6]{x}$$

$$2^3 \cdot 3^2 = x$$

$$x = 8 \cdot 9 = 72 \text{ bulunur.}$$

11. ÖRNEK

$\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[6]{\sqrt{3}-1}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[6]{\sqrt{3}-1}}$ işleminde köklerin dereceleri 6 da eşitlenirse

$$\frac{\sqrt{\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[6]{\sqrt{3}-1}}=\frac{\sqrt[2.3]{(\sqrt{3}-1)^{1.3}}\cdot\sqrt[3.2]{(\sqrt{3}+1)^{1.2}}}{\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)}}$$
$$=\frac{\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^3}\cdot\sqrt[6]{(\sqrt{3}+1)^2}}{\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)}}$$
$$=\sqrt[6]{\frac{(\sqrt{3}-1)^3\cdot(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)}}$$
$$=\sqrt[6]{(\sqrt{3}-1)^2\cdot(\sqrt{3}+1)^2}$$
$$=\sqrt[6]{((\sqrt{3})^2-1^2)^2}$$
$$=\sqrt[6]{(3-1)^2}$$
$$=\sqrt[6]{2^2}$$
$$=\sqrt[3]{2}\text{ bulunur.}$$

8. Çarpımları rasyonel olan iki irrasyonel sayıdan her biri, diğerinin eşleniği olarak tanımlanır.

Köklü rasyonel ifadelerde, paydayı kökten kurtarmak için paydadaki sayının eşleniği ile pay ve payda çarpılır.

Aşağıda bazı köklü sayılar ve eşleniği verilmiştir.

Sayı	Eşleniği	Sayı . Eşlenik
$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\sqrt{a}-\sqrt{b}$	$(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b$
$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a$
$\sqrt{a}+b$	$\sqrt{a}-b$	$(\sqrt{a}+b)\cdot(\sqrt{a}-b)=a-b^2$
$\sqrt[n]{x^a}$	$\sqrt[n]{x^b}$	$\sqrt[n]{x^a}\cdot\sqrt[n]{x^b}=\sqrt[n]{x^{a+b}}=x,\ \ (n=a+b)$

12. ÖRNEK

$\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Paydayı rasyonel yapmak için kesir, paydanın eşleniği ile genişletilirse

$$\underset{(\sqrt{3}+1)}{\frac{2}{\sqrt{3}-1}}-\underset{(\sqrt{3}-1)}{\frac{2}{\sqrt{3}+1}}=\frac{2\cdot(\sqrt{3}+1)}{3-1}-\frac{2\cdot(\sqrt{3}-1)}{3-1}$$
$$=\frac{2\cdot\sqrt{3}+2-2\cdot\sqrt{3}+2}{2}$$
$$=\frac{4}{2}=2\text{ bulunur.}$$

13. ÖRNEK

$\frac{1}{2-2\sqrt{3}}-\frac{1}{2+2\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{2}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\underset{(2+2\sqrt{3})}{\frac{1}{2-2\sqrt{3}}}-\underset{(2-2\sqrt{3})}{\frac{1}{2+2\sqrt{3}}}+\underset{(\sqrt{2})}{\frac{3}{\sqrt{2}}}=\frac{2+2\sqrt{3}}{2^2-(2\sqrt{3})^2}-\frac{2-2\sqrt{3}}{2^2-(2\sqrt{3})^2}+\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{2+2\sqrt{3}-2+2\sqrt{3}}{4-4\cdot 3}+\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}=-\frac{4\sqrt{3}}{8}+\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}=\frac{-\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{2} \text{ bulunur.}$$

14. ÖRNEK

$\frac{\sqrt[x+1]{3^x+3^x+3^x}}{\sqrt[y+1]{5^y+5^y+5^y+5^y+5^y}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{\sqrt[x+1]{3^x+3^x+3^x}}{\sqrt[y+1]{5^y+5^y+5^y+5^y+5^y}}=\frac{\sqrt[x+1]{3\cdot 3^x}}{\sqrt[y+1]{5\cdot 5^y}}=\frac{\sqrt[x+1]{3^{x+1}}}{\sqrt[y+1]{5^{y+1}}}=\frac{3}{5}$$

15. ÖRNEK

$\sqrt{2003\cdot 2005+1}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\sqrt{2003\cdot 2005+1}=\sqrt{(2004-1)\cdot(2004+1)+1}=\sqrt{2004^2-1^2+1}=\sqrt{2004^2}=2004 \text{ bulunur.}$$

16. ÖRNEK

$\sqrt{355\cdot 390-354\cdot 391}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$x=354$ ve $y=390$ olsun.

$$\sqrt{355\cdot 390-354\cdot 391}=\sqrt{(x+1)\cdot y-x\cdot(y+1)}=\sqrt{xy+y-xy-x}$$

$$\sqrt{y-x}=\sqrt{390-354}=\sqrt{36}=6 \text{ bulunur.}$$

$\sqrt{x\pm 2\sqrt{y}}$ Şeklindeki İfadeler

$x, y, a, b \in \mathbb{R}-\{0\}$

$\sqrt{x+2\sqrt{y}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ olsun. Her iki tarafın karesi alınırsa

$x+2\sqrt{y}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+2\sqrt{ab}+b=(a+b)+2\sqrt{ab}$ olur. Buradan $x=a+b$ ve $y=a\cdot b$ bulunur.

- $\sqrt{(a+b)+2\sqrt{a\cdot b}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$
- $\sqrt{(a+b)-2\sqrt{a\cdot b}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}, (a>b)$

Örneğin $\sqrt{9-2\sqrt{20}}$ işleminde $9=4+5$ ve $20=4\cdot 5$ olarak yazılırsa

$\sqrt{9-2\sqrt{20}}=\sqrt{(4+5)-2\sqrt{4\cdot 5}}=\sqrt{5}-2$ bulunur.

Örneğin, $\sqrt{4+\sqrt{12}}$ işleminde formülün kullanılabilmesi için içerideki kökün katsayısı 2 olmalıdır.

$\sqrt{4+\sqrt{12}}=\sqrt{4+\sqrt{3\cdot 4}}=\sqrt{4+\sqrt{2^2\cdot 3}}=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ elde edilir.

$4=1+3$ ve $3=1\cdot 3$ olarak yazılırsa $\sqrt{(1+3)+2\sqrt{1\cdot 3}}=\sqrt{3}+\sqrt{1}=\sqrt{3}+1$ bulunur.

17. ÖRNEK

$\sqrt{9+4\sqrt{5}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$\sqrt{9+4\sqrt{5}}$ işleminde kuralı uygulayabilmek için içerideki kökün katsayısı 4 yerine 2 olmalıdır.

$\sqrt{9+4\sqrt{5}}=\sqrt{9+2\cdot 2\sqrt{5}}$

$\sqrt{9+2\sqrt{5\cdot 2^2}}=\sqrt{9+2\cdot\sqrt{5\cdot 4}}=\sqrt{9+2\sqrt{20}}$ elde edilir.

$9=4+5$ ve $20=4\cdot 5$ olarak yazılırsa

$\sqrt{9+4\sqrt{5}}=\sqrt{9+2\sqrt{20}}=\sqrt{(4+5)+2\sqrt{4\cdot 5}}=2+\sqrt{5}$ bulunur.

18. ÖRNEK

$\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

I. Yol

$\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}$ işleminde kuralı uygulayabilmek için içerideki köklerin katsayısı 2 yapılmalı. Bunun için köklerin içindeki ifadeler 2 ile çarpılıp bölünmelidir.

$\sqrt{\frac{2}{2}\cdot(4-\sqrt{7})}-\sqrt{\frac{2}{2}\cdot(4+\sqrt{7})}=\sqrt{\frac{8-2\sqrt{7}}{2}}-\sqrt{\frac{8+2\sqrt{7}}{2}}=\frac{\sqrt{8-2\sqrt{7}}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{8+2\sqrt{7}}}{\sqrt{2}}$ ifadesinde

$8=1+7$ ve $7=1\cdot 7$ olarak yazılırsa

$$\frac{\sqrt{(1+7)-2\sqrt{1\cdot 7}}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{(1+7)+2\sqrt{1\cdot 7}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{7}+\sqrt{1}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{7}-1-(\sqrt{7}+1)}{\sqrt{2}}$$

$=\frac{-2}{\sqrt{2}}$ (Pay ve payda $\sqrt{2}$ nin eşleniği olan $\sqrt{2}$ ile genişletilirse)

$=\frac{-2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{-2\cdot\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$ bulunur.

II. Yol

$\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}=x$ olsun. Her iki tarafın karesi alınırsa

$\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^2=x^2$ ise $4-\sqrt{7}-2\cdot\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)+4+\sqrt{7}=x^2$

$8-2\cdot\left(\sqrt{(4+\sqrt{7})\cdot(4-\sqrt{7})}\right)=x^2$

$8-2(\sqrt{16-7})=x^2$

$8-2\cdot 3=x^2$

$x<0$ olduğundan $x=-\sqrt{2}$ olur.

- $\sqrt[a]{\sqrt[b]{\sqrt[c]{x}}}=\sqrt[a\cdot b\cdot c]{x}$
- $\sqrt[a]{x\cdot\sqrt[b]{y\cdot\sqrt[c]{z}}}=\sqrt[a\cdot b\cdot c]{x^{b\cdot c}\cdot y^{c}\cdot z}$

19. ÖRNEK

$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}}} = \sqrt[2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2]{3} = \sqrt[64]{3} = 3^{\frac{1}{64}}$ bulunur.

20. ÖRNEK

$\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}} = \sqrt[2\cdot2\cdot2\cdot2]{3^{2\cdot2\cdot2}\cdot3^{2\cdot2}\cdot3^{2}\cdot3} = \sqrt[16]{3^{8}\cdot3^{4}\cdot3^{2}\cdot3} = \sqrt[16]{3^{15}} = 3^{\frac{15}{16}}$ bulunur.

21. ÖRNEK

$\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2\sqrt[5]{32}}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2\sqrt[5]{32}}} = \sqrt[3\cdot4\cdot5]{(2^{4})^{5}\cdot2^{5}\cdot2^{5}} = \sqrt[60]{2^{30}} = \sqrt{2}$ bulunur.

22. ÖRNEK

$\sqrt[4]{17+2\sqrt{72}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{17+2\sqrt{72}} &= \sqrt[2]{\sqrt[2]{17+2\sqrt{72}}} && (72 = 9\cdot8 \text{ ve } 17 = 9+8 \text{ olduğundan})\\ &= \sqrt{\sqrt{9}+\sqrt{8}}\\ &= \sqrt{3+2\sqrt{2}} && (2 = 2\cdot1 \text{ ve } 3 = 2+1 \text{ olduğundan})\\ &= \sqrt{2}+1\end{aligned}$$

23. ÖRNEK

$x = \sqrt[60]{6}$

$y = \sqrt[36]{3}$

$z = \sqrt[45]{4}$ olduğuna göre x, y, z sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

ÇÖZÜM

x, y, z sayılarının kök dereceleri eşitlenir.

$x = \sqrt[60]{6} = \sqrt[60\cdot3]{6^{3}} = \sqrt[180]{216}$

$y = \sqrt[36]{3} = \sqrt[36\cdot5]{3^{5}} = \sqrt[180]{243}$

$z = \sqrt[45]{4} = \sqrt[45\cdot4]{4^{4}} = \sqrt[180]{256}$ olduğundan $x < y < z$ olur.

ALIŞTIRMALAR-8

1. $\sqrt[6]{3-x}+\sqrt{x-1}$ ifadesini reel sayı yapan x tam sayılarının toplamını bulunuz.

2. $\sqrt[3]{(-3)^3}-\sqrt[4]{(-4)^4}+\sqrt[5]{(-1)^5}$
işleminin sonucunu bulunuz.

3. $a<0<b$ olmak üzere
$\sqrt[4]{(a-b)^4}-\sqrt[3]{a^3}-\sqrt[5]{(a-b)^5}$
işleminin sonucunu bulunuz.

4. $\sqrt[3]{2^{2x-1}}=\sqrt[3]{16^{x+1}}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

5. Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{5}$

b) $\dfrac{\sqrt[4]{\sqrt{5}+1}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-1}}{\sqrt[12]{\sqrt{5}-1}}$

c) $\sqrt{2016\cdot 2018+1}$

ç) $\sqrt{3+\sqrt{8}}$

6. $\dfrac{2}{5-3\sqrt{2}}+\dfrac{2}{5+3\sqrt{2}}$
işleminin sonucunu bulunuz.

7. $\sqrt{8+\sqrt{60}}+\sqrt{86-18\sqrt{5}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

8. $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

9. $x=\sqrt[5]{128}$
$y=\sqrt[4]{64}$
$z=\sqrt[3]{32}$
olduğuna göre x, y, z sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

10. $x+\sqrt{x}=7$ ise $x+\dfrac{7}{\sqrt{x}}$ ifadesinin değerini bulunuz.

9.3.5. DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLERLE İLGİLİ UYGULAMALAR

Etkinlik

1. **Dünyanın yüz ölçümü 510 milyon km^2dir. Dünyanın yaklaşık $\frac{3}{4}$ ü suyla kaplı olduğuna göre kara ve suyla kaplı alanlar kaçar km^2dir?**
2. **1/30 000 000 ölçekli bir haritada,**
   - **Türkiye'nin doğusu ile batısı arasındaki kuş uçuşu mesafe 1500 km ise bu mesafe haritada kaç cm ile gösterilir?**
   - **Türkiye'nin iz düşüm alanı yaklaşık 780 000 km^2 ise Türkiye haritada ne kadar yer kaplar?**
   - **Van Gölü'nün yüz ölçümü yaklaşık 3700 km^2 ise Van Gölü haritada ne kadar yer kaplar?**
   - **Harita üzerinde Asya Kıtası'nın kapladığı alan 1486 cm^2 olduğuna göre Asya Kıtası'nın gerçek yüz ölçümü kaçtır?**
3. **Haritada 12 cm ile gösterilen iki nokta arasındaki uzaklığın gerçekte 180 km olduğu bilindiğine göre bu haritanın ölçeği nedir?**
4. **Siz de yaşadığınız ilin yüz ölçümünün farklı ölçekli herhangi bir harita kullanarak haritada ne kadar yer kapladığını hesaplayınız.**
5. **Yukarıdaki sorulara cevap vermek için kullandığınız yöntemi arkadaşlarınızla tartışınız.**

1. Oran ve Orantı

Okul hayatınız dışında, tüm hayatınız boyunca sizlere yardımcı olacak olan matematik konularından birisi de oran ve orantı konusudur. Günlük yaşamda, birçok alanda pratik matematik hesapları yapabilmek için bu konudan yararlanılmaktadır.

Örneğin halk dilinde bir buçuk parmak olarak ifade edilen demir borular üzerindeki büyüklükleri belirtmek için kullanılan oranlar, yiyecek içecek ya da ilaçların içeriğini belirten oranlar, Türkiye'deki Genel Ağ kullanımı veya genç yaşlı nüfus oranları gibi karşılaşılan birçok durum bu konuyla ilişkilidir.

Oran

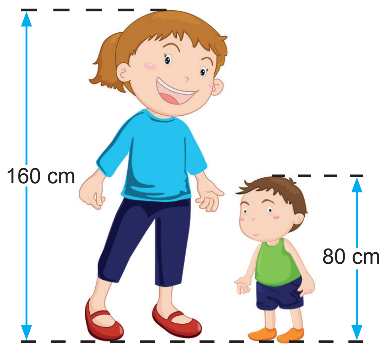
Aynı birimdeki iki çokluğun birbirine bölünmesine oran denir.

En az biri sıfırdan farklı olan a ve b reel sayıları verildiğinde a nın b ye oranı $a:b$ veya $\frac{a}{b}$ şeklinde gösterilir.

- Oranın birimi yoktur.
- Kesirlerde olduğu gibi, verilen oranın payı ve paydası sıfırdan farklı bir sayı ile genişletilip sadeleştirilebilir.

1. ÖRNEK

Ada'nın boyu 160 cm, Atlas'ın boyu 80 cm ise Atlas'ın boyunun Ada'nın boyuna oranını bulunuz.



ÇÖZÜM

Verilen bilgilere göre Atlas'ın boyunun Ada'nın boyuna oranı:

$\frac{80}{160} = \frac{1}{2}$ olur.

2. ÖRNEK

Bir tren vagonunda 24 erkek, 28 kadın yolcu bulunmaktadır. İlk durakta bu vagona 4 evli çift binmiş, 6 kadın ve 8 erkek vagondan inmiştir. Buna göre vagondaki kadın sayısının erkek sayısına oranını bulunuz.

ÇÖZÜM

4 evli çiftin binmesiyle erkek ve kadınların sayısı dörder kişi artar. Vagondaki erkek ve kadın sayısı: $24 + 4 = 28$ erkek ve $28 + 4 = 32$ kadın olur.

İnen yolculardan sonra:

Erkeklerin sayısı: $28 - 8 = 20$

Kadınların sayısı: $32 - 6 = 26$ olur.

Bu durumda, kadınların sayısının erkeklerin sayısına oranı: $\frac{26}{20} = \frac{13}{10}$ olarak bulunur.

3. ÖRNEK

Bilal Bey'in kasım ayı doğal gaz faturasının ilk endeksi 260 m^3, son endeksi 332 m^3 tür. Bilal Bey'in 86,4 TL faturası geldiğine göre $1\,m^3$ doğal gaza kaç TL ödediğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Kasım ayında $332-260=72\,m^3$ doğal gaz kullanımı gerçekleşmiştir. 86,4 TL fatura 72 m^3 doğal gaz kullanımına eşittir. Bu durumda $1\,m^3$ doğal gaz kullanımına denk gelen ücret: $\dfrac{86,4}{72}=1,2$ TL olur.

Orantı

İki veya daha fazla oranın eşitliğine orantı denir. $\dfrac{a}{b}=k$ ve $\dfrac{c}{d}=k$ ise orantı, $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ şeklinde gösterilir.

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ eşitliği $a:c=b:d$ biçiminde de gösterilir. Eşitlikteki konumlarına göre a ve d değerlerine dışlar, b ve c değerlerine içler adı verilir.

Benzer şekilde $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}=k \Rightarrow a:c:e=b:d:f$ olur. k, orantı sabitidir.

$k \in \mathbb{R}-\{0\}$ *olmak üzere*

- $\dfrac{a}{2}=\dfrac{b}{3}$ *veya* $3a=2b$ *olduğunda* $a=2k, b=3k$ *dir.*
- $a:b:c=2:3:5 \Leftrightarrow a=2k, b=3k, c=5k$ *dir.*

4. ÖRNEK

$\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{3}$ ve $\dfrac{ax+y}{y-x}=2$ olduğuna göre a değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x=k$ ve $y=3k$ olduğundan

$$\frac{ax+y}{y-x}=\frac{a\cdot k+3k}{3k-k}=\frac{\cancel{k}\cdot(a+3)}{2\cancel{k}}=\frac{a+3}{2}=2$$

Buradan $a+3=4$ ve $a=1$ bulunur.

5. ÖRNEK

$x:y:z=5:3:2$ ve $x-y+z=16$ olduğuna göre x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$x=5k, y=3k, z=2k$ olduğundan $5k-3k+2k=16 \Rightarrow 4k=16 \Rightarrow k=4$

Buradan $x=5k=5\cdot 4=20$ bulunur.

6. ÖRNEK

$\dfrac{a-2}{3}=\dfrac{b+1}{2}$ ve $3a-b=21$ olduğuna göre a değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\dfrac{a-2}{3}=\dfrac{b+1}{2}=k \Rightarrow a=3k+2$ ve $b=2k-1$ olur.

$9k+6-2k+1=21$

$7k=14$ ise $k=2$ bulunur. O hâlde $a=3\cdot 2+2=8$ bulunur.

Orantının Özellikleri

1. Orantıda içler çarpımı, dışlar çarpımına eşittir.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$ olur.

7. ÖRNEK

$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2}{3}$ olduğuna göre $\frac{a}{b}$ oranını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2(a-b) = 3(a+b)$$
$$2a-2b = 3a+3b$$
$$-3b-2b = 3a-2a$$

$-5b = a \Rightarrow \frac{-5\cancel{b}}{\cancel{b}} = \frac{a}{b}$ olduğundan $\frac{a}{b} = -5$ bulunur.

2. Bir orantıda içler veya dışlar kendi arasında yer değiştirebilir. Bu durumda oranlar değişse bile orantının eşitliği değişmez.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ veya $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ olabilir.

3. Paylar ve paydalar kendi aralarında toplanır ya da çıkarılırsa orantı sabiti değişmez.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} = k$ olur.

8. ÖRNEK

$\frac{2a+b}{b-c} = \frac{2b+c}{a-c} = \frac{a+2c}{3c}$ olduğuna göre $\frac{a}{c}$ oranını bulunuz.

ÇÖZÜM

Özellik 3 kullanıldığında

$$\frac{2a+b}{b-c} = \frac{2b+c}{a-c} = \frac{a+2c}{3c} = k$$

$$\frac{2a+b+2b+c+a+2c}{b-c+a-c+3c} = \frac{3a+3b+3c}{a+b+c} = \frac{3\cancel{(a+b+c)}}{\cancel{a+b+c}} = k \Rightarrow k = 3 \text{ olur.}$$

Buradan $\frac{a+2c}{3c} = 3 \Rightarrow a+2c = 9c \Rightarrow a = 7c \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{7\cancel{c}}{\cancel{c}} = 7$ bulunur.

4. m ve n sıfırdan farklı birer reel sayı olmak üzere

i) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \frac{m \cdot a}{m \cdot b} = \frac{n \cdot c}{n \cdot d} = k$ ve $\frac{m \cdot a \mp n \cdot c}{m \cdot b \mp n \cdot d} = k$ olur.

9. ÖRNEK

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{1}{3}$ olmak üzere $2a - c + 3e = 14$ ve $-d + 3f = -24$ olduğuna göre b değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\underset{(2)}{\frac{a}{b}} = \underset{(-1)}{\frac{c}{d}} = \underset{(3)}{\frac{e}{f}} = \frac{1}{3}$$

Özellik 4-i yardımıyla

$$\frac{2a-c+3e}{2b-d+3f} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{14}{2b-24} = \frac{1}{3} \Rightarrow 42 = 2b - 24$$
$$66 = 2b \Rightarrow b = 33 \text{ bulunur.}$$

ii) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \Rightarrow \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=k^2$ ve $\frac{m\cdot a^2 \mp n\cdot c^2}{m\cdot b^2 \mp n\cdot d^2}=k^2$ dir.

5. a, b, c sayılarının dördüncü orantılısı x ise $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$ olur.
(a: birinci orantılı sayı, b: ikinci orantılı sayı, c: üçüncü orantılı sayıdır.)

10. ÖRNEK

4, 10 ve 16 sayıları ile dördüncü orantılı olan sayıyı bulunuz.

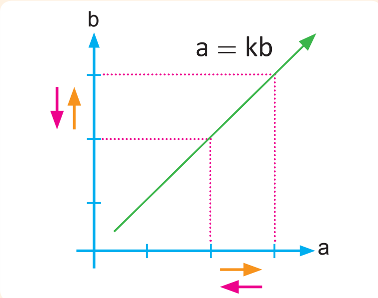
ÇÖZÜM

$\frac{4}{10}=\frac{16}{x}$ ise $4x=160$ bulunur. Buradan $x=\frac{160}{4}=40$ olur.

Orantı Çeşitleri

a) Doğru Orantı

a ve b çokluklarından a artarken b de aynı oranda artıyorsa veya a azalırken b de aynı oranda azalıyorsa a ile b doğru orantılı denir.
a ile b doğru orantılı ise $\frac{a}{b}=k$ veya $a=kb$ dir. $(k\in\mathbb{R}^+)$



a, b ve c sayıları sırasıyla x, y ve z sayıları ile doğru orantılı ise $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=k$ şeklinde yazılır.

11. ÖRNEK

a ile b sayıları doğru orantılıdır. $a=6$ iken $b=4$ ise $b=24$ iken a nın değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

a ile b sayıları doğru orantılı olduğundan $\frac{a}{b}=k$ olmalıdır.

$\frac{6}{4}=k \Rightarrow k=\frac{3}{2}$

$\frac{a}{24}=\frac{3}{2} \Rightarrow 2a=72 \Rightarrow a=36$ olur.

12. ÖRNEK

18, 20 ve 22 yaşlarındaki üç kardeş kestane üreticiliği yapmaktadır. 180 kg kestaneyi yaşlarıyla doğru orantılı olarak paylaştıklarında 20 yaşındaki kardeşin kaç kg kestane alacağını hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$\frac{x}{18}=\frac{y}{20}=\frac{z}{22}=k \Rightarrow x=18k,\ y=20k,\ z=22k$ olur.

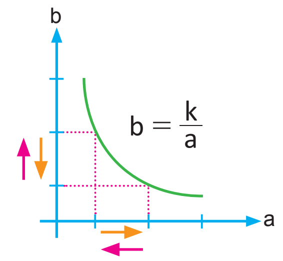
$x+y+z=180 \Rightarrow 18k+20k+22k=180 \Rightarrow 60k=180 \Rightarrow k=3$ bulunur.

Buradan $y=20k=20\cdot 3=60$ kg kestane alır.

b) Ters Orantı

a ve b çokluklarından, a artarken b aynı oranda azalıyor veya a azalırken b aynı oranda artıyorsa a ve b ters orantılıdır denir.

a ile b ters orantılı ise $b = \frac{k}{a}$ veya $a \cdot b = k$ tir. $(k \in \mathbb{R}^{+})$



a, b ve c sayıları sırasıyla x, y ve z sayıları ile ters orantılı ise

$a.x = b.y = c.z = k$ *veya* $\frac{a}{\frac{1}{x}} = \frac{b}{\frac{1}{y}} = \frac{c}{\frac{1}{z}} = k$ *şeklinde yazılır.*

13. ÖRNEK

$2x + 1$ sayısı, $\frac{y}{3}$ sayısı ile ters orantılıdır. $x = 2$ iken $y = 6$ oluyorsa $x = 4$ iken y sayısını bulunuz.

ÇÖZÜM

$(2x+1) \cdot \frac{y}{3} = k$ olduğundan $x = 2$ ve $y = 6$ yazıldığında $k = (2 \cdot 2 + 1) \cdot \frac{6}{3} = 5 \cdot 2 = 10$ bulunur.

$x = 4$ için $(2 \cdot 4 + 1) \cdot \frac{y}{3} = 10 \Rightarrow 9 \cdot \frac{y}{3} = 10$

$\Rightarrow 3y = 10$

$\Rightarrow y = \frac{10}{3}$ olur.

14. ÖRNEK

111 tane bilye; 4, 5 ve 6 yaşlarındaki üç kardeşe yaşlarıyla ters orantılı olarak paylaştırılmak isteniyor. Her bir kardeşe kaçar tane bilye düştüğünü bulunuz.

ÇÖZÜM

$4a = 5b = 6c = k \Rightarrow a = \frac{k}{4},\ b = \frac{k}{5},\ c = \frac{k}{6}$ olur.

$\frac{k}{4} + \frac{k}{5} + \frac{k}{6} = 111 \Rightarrow \frac{15k + 12k + 10k}{60} = 111$

$\Rightarrow \frac{37k}{60} = 111$

$\Rightarrow k = \frac{111 \cdot 60}{37} = 180$

$a = \frac{180}{4} = 45,\ b = \frac{180}{5} = 36,\ c = \frac{180}{6} = 30$ tane bilye alırlar.

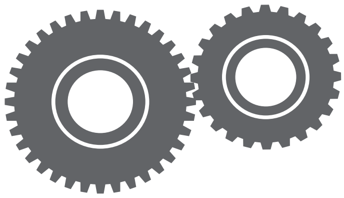
15. ÖRNEK

$a \cdot x = b \cdot y = c \cdot z = 4$ ve $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 12$ olduğuna göre $a + b + c$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\frac{a}{\frac{1}{x}} = \frac{b}{\frac{1}{y}} = \frac{c}{\frac{1}{z}} = 4 \Rightarrow \frac{a+b+c}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} = 4 \Rightarrow \frac{a+b+c}{12} = 4 \Rightarrow a + b + c = 48$ olur.

16. ÖRNEK



Birbirini çeviren iki çarkın birinde 24, diğerinde 36 diş vardır. Küçük çark 9 tur attığında büyük çarkın kaç tur atacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

Dişli sayısı çok olan çark bir tur atarken dişli sayısı az olan çark daha fazla tur atar. Bu sebeple iki çarkın attıkları tur sayıları arasında ters orantı vardır.

24 diş $\longleftrightarrow$ 9 tur

36 diş $\longleftrightarrow$ x tur

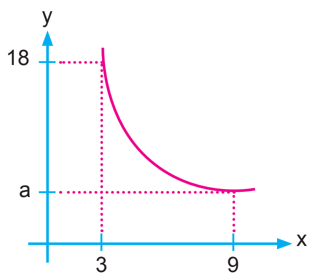
T.O

$24 \cdot 9 = 36 \cdot x$

$x = \dfrac{24 \cdot 9}{36} = 6$ tur atar.

17. ÖRNEK

Aşağıda ters orantılı iki çokluğun grafiği verilmiştir.



Grafiğe göre a değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Grafiğe bakıldığında verilenler arasında ters orantı olduğu görülüyor. Buna göre

$3 \cdot 18 = 9 \cdot a \Rightarrow a = \dfrac{3 \cdot 18}{9} = 6$ olur.

c) Bileşik Orantı

İki veya daha fazla oran bulunduran orantılara bileşik orantı denir.
a sayısı; b ile doğru, c ile ters orantılı ise bu durum $\dfrac{a \cdot c}{b} = k$ şeklinde gösterilir.

18. ÖRNEK

$x-1$ sayısı; $y+1$ sayısı ile ters, z^3 sayısı ile doğru orantılıdır. $x=9, y=3$ iken $z=2$ olduğuna göre $x=5, z=\sqrt[3]{2}$ iken y değerinin kaç olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$\dfrac{(x-1)(y+1)}{z^3} = k \quad \Rightarrow \dfrac{(9-1)(3+1)}{2^3} = \dfrac{8 \cdot 4}{8} = 4 = k$ bulunur.

$\dfrac{(5-1)(y+1)}{(\sqrt[3]{2})^3} = 4 \quad \Rightarrow \dfrac{4 \cdot (y+1)}{2} = 4 \Rightarrow y+1 = 2 \Rightarrow y = 1$ olur.

19. ÖRNEK

a sayısı; b ile doğru, c ile ters orantılıdır. a sayısı 2 kat artırılıp b sayısı üçte iki oranında azaltılırsa orantı sabitinin değişmemesi için c sayısındaki değişimi bulunuz.

ÇÖZÜM

$\frac{a \cdot c}{b} = k$ dir.

a sayısı iki kat artırılırsa $2a + a = 3a$ olur. b sayısı üçte iki oranında azaltılırsa $b - \frac{2b}{3} = \frac{b}{3}$ olur.

c sayısının değişimine x denirse $\frac{3a \cdot x}{\frac{b}{3}} = k \Rightarrow \frac{9a \cdot x}{b} = k \Rightarrow \frac{9\cancel{a} \cdot x}{\cancel{b}} = \frac{\cancel{a} \cdot c}{\cancel{b}} \Rightarrow 9x = c \Rightarrow x = \frac{c}{9}$ bulunur. c sayısı, dokuzda birine düşer.

20. ÖRNEK

Eşit kapasitede çalışan 4 işçi, 8 günde 48 m^2 halı dokuyabildiğine göre aynı nitelikteki 12 işçinin 90 m^2 halıyı kaç günde dokuyacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

I. Yol

4 işçi → 8 gün　　48 m^2

12 işçi → x gün　　90 m^2

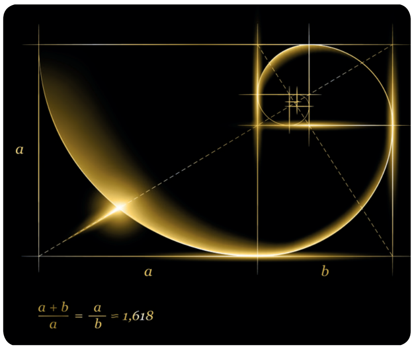
T.O　　D.O

$12 \cdot x \cdot 48 = 4 \cdot 8 \cdot 90 \Rightarrow x = 5$ günde dokur.

II. Yol

$$\frac{\text{Birinci iş}}{\text{İkinci iş}} = \frac{\text{Birinci iş ile ilgili verilenlerin çarpımı}}{\text{İkinci iş ile ilgili verilenlerin çarpımı}} \Rightarrow \frac{48}{90} = \frac{4 \cdot 8}{12 \cdot x} \Rightarrow x = 5 \text{ gün bulunur.}$$

Altın Oran



Görsel 3.4.1: Altın oran

Görsel 3.4.2: Edirne Selimiye Camii

Eski Mısırlılar ve Yunanlılar tarafından keşfedilen, mimaride ve sanatta kullanılmış olan altın oran (Görsel 3.4.1); bir bütünün parçaları arasında gözlemlenen, uyum açısından en yetkin boyutları veren sayısal bir oran bağıntısıdır.

İtalyan Matematikçi Leonardo Fibonacci [L. Fibonasi (1170-1250)] tarafından oluşturulan Fibonacci sayıları arasındaki oran da altın orana eşittir. Fibonacci sayıları, her sayının kendinden önceki sayıyla toplanması sonucu oluşan bir sayı dizisidir. Bu sayı dizisinin bazı elemanları şunlardır: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ... Bu dizide bir sayı kendisinden önceki sayıya bölündüğünde altın orana gittikçe yaklaşan bir dizi elde edilir. Dizide 13. sırada yer alan sayıdan (233) itibaren bu sayı sabitlenir ve 1,618 olarak hesaplanır.

Evrendeki muhteşem düzenle bire bir örtüşen bu sayıları keşfettiği için altın orana da Fibonacci'nin ilk iki harfi olan Fi Φ sayısı denilmiştir. "$(\Phi = 1{,}618033988749894...)$"

Altın oranla birçok alanda karşılaşılmaktadır.
Örneğin Edirne Selimiye Camisi'nin (Görsel 3.4.2) minarelerinde altın oran kullanılmıştır. Dirseğinizin üstünde kalan bölümünün altında kalan bölüme oranı, parmaklarınızın üst boğumunun alt boğumuna oranı, Mısır piramitlerindeki her bir piramidin tabanının yüksekliğine oranı vb. altın orana örnek olarak gösterilebilir.

ALIŞTIRMALAR-9

1. Dorukan 1996 yılında doğmuştur. 2016 yılında Dorukan'ın yaşının Alperen'in yaşına oranı $\frac{5}{3}$ olacağına göre Alperen'in hangi yılda doğduğunu bulunuz.

2. $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ ise $\frac{a^2+b^2}{2ab}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

3. $\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7}$ ve $x \cdot y \cdot z = 1680$ olduğuna göre z değerini bulunuz.

4. $3, \sqrt{3} - \sqrt{2}$ ve $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ sayıları ile dördüncü orantılı olan sayıyı bulunuz.

5. $x + 1$ sayısı, 3y ile doğru orantılıdır. $x = 9$ iken $y = 2$ ise $x = 4$ iken y değeri kaçtır?

6. Bir üçgenin iç açı ölçüleri sırasıyla 3, 4 ve 5 sayıları ile doğru orantılı ise küçük dış açının büyük dış açıya oranını bulunuz.

7. a, b ve c sayıları sırasıyla 3, 4 ve (-2) sayıları ile ters orantılıdır. Bu üç sayının toplamı 4 olduğuna göre $a - b - \frac{c}{2}$ değerini hesaplayınız.

8. Saatte 50 L su akıtan eşit kapasiteli 4 tane musluk, bir havuzu 12 saatte doldurmaktadır. Her birinin kapasitesi saatte 80 L ye çıkartılırsa havuzu 5 saatte doldurması için kaç musluğun ilave edilmesi gerekir?

9. x sayısı y sayısı ile doğru, z sayısı ile ters orantılıdır. $x = 16, y = 4$ iken $z = 3$ olduğuna göre $x = 4, y = 3$ iken z değerinin kaç olduğunu bulunuz.

10. Bir A şehrindeki belediye otobüsleri müşterinin gittiği mesafeye göre ücret almaktadır. Şöyle ki müşteri otobüse bindiğinde otobüs kartını okutmaktadır. İneceği durağa geldiğinde otobüsten inerken kartını tekrar okutarak ücretini ödemektedir. Herhangi iki durak arası en az 500 m, en fazla 1000 m dir.

A şehrinde yaşayan Mehmet, Öznur ve Arda bir otobüse aynı duraktan biniyorlar. Bindikten sonraki ilk durakta Arda inerek 0,80 lira ödeme yapıyor. 3. durakta Öznur iniyor ve 3 lira ödeme yapıyor. Mehmet ise 4. durakta inerek 4,40 lira ödüyor.

Buna göre

a) Mehmet otobüs ile en az kaç km gitmiştir?

b) Bu otobüsün güzergâhı 10 km ise bu güzergâhta en az kaç durak vardır?

2. Problemler

Bir problemi çözebilmek için sözel olarak belirtilen ifadeler matematiksel değişkenlere dönüştürülerek bir denklem kurulmalıdır. Denklemin çözümü, problemin çözümünü verir.

Problemler de kendi içerisinde sayı ve kesir, yaş, yüzde, karışım, hareket, işçi ve havuz gibi alt başlıklara ayrılır.

Problemler çözülürken genellikle şu sıra takip edilir:

a) Problemde kullanılan veri veya veriler belirlenir.

b) Problemde istenen veri veya veriler belirlenir.

c) İstenen veriye uygun bir değişken atanır.

ç) Verilere göre denklem veya eşitsizlik yazılır.

d) Yazılan denklem veya eşitsizlik çözülür.

Sayı ve Kesir Problemleri

Aşağıdaki ifadeleri inceleyiniz.

a) Bir sayının 2 katının 5 fazlası	$2x+5$
b) Bir sayının 3 eksiğinin 4 katı	$(x-3)\cdot 4$
c) Bir sayının beşte üçü	$\frac{3x}{5}$
ç) Bir sayının 2 katının küpünün 3 fazlasının yarısı	$\frac{(2x)^3+3}{2}$
d) Bir sayının 4 katının 3 eksiğinin karekökü	$\sqrt{4x-3}$
e) Bir sayının küpünün 5 fazlası kendisinin yarısına eşitse	$x^3+5=\frac{x}{2}$
f) Ardışık üç çift sayı	$2x, 2x+2, 2x+4$

1. ÖRNEK

Toplamları 60 olan iki sayıdan birisi, diğerinin 3 katının 4 eksiğine eşitse bu sayılardan küçük olanını bulunuz.

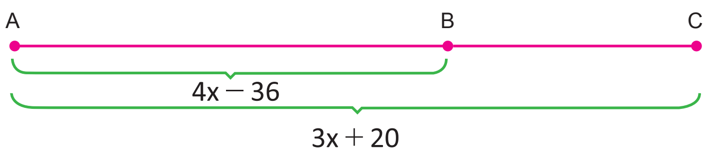
ÇÖZÜM

Küçük sayıya x denirse büyük sayı $3x-4$ olur.

$x+3x-4=60 \Rightarrow 4x=64 \Rightarrow x=16$ olur.

2. ÖRNEK

A, B ve C şehirleri arasındaki uzaklık ilişkisi aşağıda verilmiştir. Buna göre x in değer aralığını bulunuz.



ÇÖZÜM

$0<|AB|<|AC|$ olduğundan $0<4x-36<3x+20$ olur.

$$\left.\begin{array}{ll} 0<4x-36 & 4x-36<3x+20 \\ 36<4x & x<56\ldots(2) \\ 9<x\ldots(1) & \end{array}\right\} \quad (1) \text{ ve } (2) \text{den } 9<x<56 \text{ bulunur.}$$

3. ÖRNEK

Bir demir çubuğun $\frac{1}{9}$ u kesildiğinde orta noktası 4 cm kaymaktadır. Buna göre çubuğun kesilmeden önceki boyunuun kaç cm olduğunu hesaplayınız.

ÇÖZÜM

Çubuk bir ucundan A cm kesilirse orta nokta $\frac{A}{2}$ cm kayar.
Çubuğun uzunluğu x cm olsun. Bu durumda kesilen kısım $\frac{x}{9}$ olur.

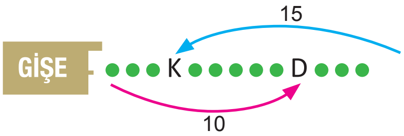
$\frac{x}{9} \cdot \frac{1}{2} = 4 \Rightarrow \frac{x}{18} = 4 \Rightarrow x = 18 \cdot 4 = 72$ cm olur.

4. ÖRNEK

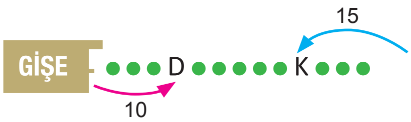
Tiyatro bileti gişesindeki sırada Dila baştan 10, Kerem ise sondan 15. sıradadır. Kerem ile Dila arasında 5 kişi olduğuna göre

a) Bu sırada en az kaç kişi,
b) Bu sırada en çok kaç kişi,
c) Kerem'in Dila'dan önde olması şartıyla sırada kaç kişi olduğunu bulunuz.

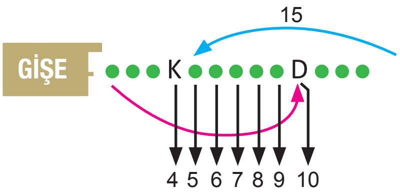
ÇÖZÜM

a) 

Kerem'in gişeye yakın olduğu durumda kişi sayısı en az olacağından $10 + 15 - 5 = 20$ olur.
Kerem ile Dila iki kez sayıldığından kişi sayısı $20 - 2 = 18$ olarak bulunur.

b) 

Dila'nın gişeye yakın olduğu durumda kişi sayısı en çok olacağından $10 + 5 + 15 = 30$ olur.

c) 

Bir kişi bir sırada baştan m, sondan n. ise sıradaki kişi sayısı $(m + n - 1)$ dir. Kerem sondan 15. kişidir. Baştan ise yandaki şekilde görüldüğü gibi 4. kişi olduğundan $4 + 15 - 1 = 18$ kişi vardır.

5. ÖRNEK

Bir gösteri grubu 5 adım ileri, 2 adım geri hareket etmektedir. Bu gösteri grubunun 111 adım attığında kaç adım ilerlemiş olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$5 + 2 = 7$ adım atıldığında 3 adım ilerleme oluyor.

$$\begin{array}{r|l} 111 & 7 \\ -105 & 15 \\ \hline 6 & \end{array}$$

15 defa 7 adım atıldığında $15 \cdot 3 = 45$ adım ilerleme gerçekleşmiş olur. Kalan 6 adımda 5 ileri, 1 geri adım atılacağı için $45 + 5 - 1 = 49$ adım ilerlemiş olur.

6. ÖRNEK

Bir poliklinikte bir doktora 60 hasta, bir hemşireye 30 hasta düşmektedir. Bu poliklinikteki doktor, hemşire ve hasta sayılarının toplamı 378 olduğuna göre doktor sayısını bulunuz.

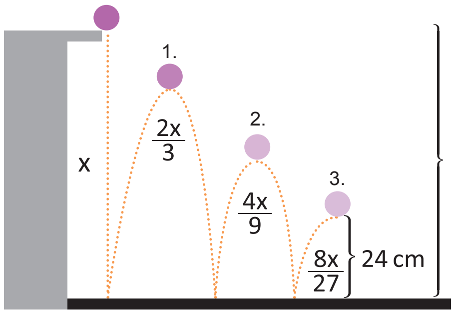
ÇÖZÜM

$$\left.\begin{array}{r} \text{Doktor sayısı}: x \\ \text{Hasta sayısı}: 60x \\ \text{Hemşire sayısı}: \frac{60x}{30} = 2x \end{array}\right\} \begin{array}{l} x + 60x + 2x = 318 \\ 63x = 378 \\ x = 6 \text{ doktor bulunur.} \end{array}$$

7. ÖRNEK

Belirli bir yükseklikten bırakılan bir top yere vuruşundan sonra bir önceki düşüş yüksekliğinin $\frac{2}{3}$ ü kadar yükselmektedir. Top yere üçüncü vuruşundan sonra 24 cm yükseldiğine göre topun başlangıçta kaç cm den bırakıldığını bulunuz.

ÇÖZÜM



$$\frac{8x}{27} = 24 \Rightarrow x = \frac{27 \cdot 24}{8} = 81\,\text{cm}$$

8. ÖRNEK

Bir öğrenci farklı sayfa sayısına sahip iki kitaptan birisini 6 günde, diğerini 4 günde okumaktadır. Bu kitaplar 3 gün okunduktan sonra okunmayan sayfa sayıları birbirine eşit olduğuna göre kitapların sayfa sayılarının birbirine oranını bulunuz.

ÇÖZÜM

1. kitabın sayfa sayısı x ve ikinci kitabın sayfa sayısı y olsun.

3 gün sonra 1. kitabın $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ si okunur. Geriye $x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$ kalır.

3 gün sonra 2. kitabın $\frac{3}{4}$ ü okunur. Geriye $y - \frac{3y}{4} = \frac{y}{4}$ kalır.

Kalan sayfalar birbirine eşit olduğuna $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ olur.

9. ÖRNEK

Seçkin Bey; ürettiği meyve fidanlarının $\frac{1}{8}$ ini 1. ayda, kalanının $\frac{1}{3}$ ünü 2. ayda, daha sonra kalanının $\frac{1}{2}$ sini de 3. ayda satmıştır. Seçkin Bey'in elinde 980 adet meyve fidanı kaldığına göre ürettiği fidan sayısını hesaplayınız.

ÇÖZÜM

Bütün birden çok kesirli parçaya bölündüğünde bu bütünün tamamı kesirlerin paydalarının EKOK u olarak seçilirse işlem kolaylaşır.

$\text{EKOK}(2,3,8) = 24$ tür. O hâlde fidan sayısının tamamına $24x$ denirse

1. ayda sattığı miktar $= \frac{24x}{8} = 3x$ Kalan fidan sayısı $= 24x - 3x = 21x$ olur.

2. ayda sattığı miktar $= \frac{21x}{3} = 7x$ Kalan fidan sayısı $= 21x - 7x = 14x$ olur.

3. ayda sattığı miktar $= \frac{14x}{2} = 7x$ Kalan fidan sayısı $= 14x - 7x = 7x$ olur.

$7x = 980 \Rightarrow x = 140$ olur.

Bu durumda ürettiği fidan sayısının tamamı $= 24x = 24 \cdot 140 = 3360$ olarak bulunur.

Yaş Problemleri

Yaş problemlerinin çözümünde aşağıdaki bağıntılardan yararlanılabilir:

Bir kişinin bugünkü yaşı x olsun.	a yıl sonraki yaşı: $x+a$ olur.
	a yıl önceki yaşı: $x-a$ olur.
İki kişinin yaşları x ve y olsun.	Yaşları toplamı: $x+y$ olur.
	a yıl sonraki yaşları toplamı: $x+a+y+a=x+y+2a$ olur.
	a yıl önceki yaşları toplamı: $x+y-2a$ olur.
İki kişi arasındaki yaş farkı daima sabittir. Yılların değişimi bu farkı etkilemez.	
x kişinin bugünkü yaş ortalaması k olsun.	a yıl sonraki yaş ortalaması: $k+a$ olur.
	a yıl önceki yaş ortalaması: $k-a$ olur.

1. ÖRNEK

Emre ve Bahar'ın şimdiki yaşlarının birbirine oranı $\frac{2}{5}$ tir. 8 yıl sonra bu oran $\frac{2}{3}$ olduğuna göre Bahar ve Emre'nin şimdiki yaşları toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$\frac{\text{Emre}}{\text{Bahar}}=\frac{2}{5} \Rightarrow \text{Emre}=2x,\ \text{Bahar}=5x$ şimdiki yaşları olsun.

8 yıl sonra $\frac{2x+8}{5x+8}=\frac{2}{3}$ olacağından $10x+16=6x+24 \Rightarrow 4x=8 \Rightarrow x=2$ bulunur.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Emre} = 2\cdot 2=4\\ \text{Bahar} = 5\cdot 2=10\end{array}\right\} 4+10=14 \text{ olur.}$$

2. ÖRNEK

Ecem'in yaşı kendisinden küçük olan Nehir'in yaşının 3 katından 30 eksiktir. Buna göre Nehir'in yaşının en az kaç olabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Nehir'in yaşı x olsun. Buna göre Ecem'in yaşı $3x-30$ olur.
Ecem'in yaşı Nehir'in yaşından büyük olduğu için
$3x-30>x$
$2x>30$
$x>15$ olur. x in en küçük değeri istendiği için $x=16$ olur.

3. ÖRNEK

Bir babanın yaşı, iki çocuğunun yaşları toplamından 25 büyüktür. 3 yıl sonra babanın yaşı, çocukların yaşları toplamının 3 katı olacağına göre babanın bugünkü yaşını bulunuz.

ÇÖZÜM

	Baba	2 Çocuk
Bugün	$x+25$	x
3 yıl sonra	$x+28$	$x+6$

$x+28=3(x+6)=3x+18 \Rightarrow 2x=10 \Rightarrow x=5$ olur.
Baba $x+25=5+25=30$ yaşındadır.

4. ÖRNEK

Ender'in yaşı, Başak'ın yaşının 4 katıdır. Başak'ın doğmasına 10 yıl varken Ender şimdiki yaşının üçte biri yaşta ise Başak'ın bugünkü yaşını bulunuz.

ÇÖZÜM

	Başak	Ender
Bugün	x	$4x$
Doğuma 10 yıl varken	-10	$\frac{4x}{3}$

Yaşlar farkı sabit olduğundan

$4x-x=\frac{4x}{3}-(-10)\Rightarrow 3x=\frac{4x+30}{3}\Rightarrow 9x=4x+30\Rightarrow 5x=30\Rightarrow x=6$ olarak bulunur.

5. ÖRNEK

Ali ile Mehmet'in yaşları toplamı, yaşları farkının 3 katıdır. Mehmet, Ali'nin yaşına geldiğinde yaşları toplamı 50 olacağına göre ikisinin yaşları arasındaki farkı bulunuz.

ÇÖZÜM

Ali'nin yaşı x, Mehmet'in yaşı y olsun. Bu durumda

Ali	Mehmet
x	y
$50-x$	x

$x+y=3\cdot(x-y)\Rightarrow x+y=3x-3y\Rightarrow 4y=2x\Rightarrow x=2y$ olur. Yaş farkı değişmediğinden

$x-y=50-x-x$ olur. Buradan

$3x-y=50$ olur. $x=2y$ yerine yazılırsa

$3\cdot 2y-y=50\Rightarrow 5y=50\Rightarrow y=10$ bulunur.

$x=2y=2\cdot 10=20$ olur.

O hâlde yaşları farkı $20-10=10$ olarak bulunur.

6. ÖRNEK

Bir matematik öğretmeni, yaşını soran iki öğrencisine: "Benim yaşım sizin yaşlarınızın toplamının 15 fazlası, farkının 18 katıdır. 8 yıl sonra benim yaşım sizin yaşlarınızın farkının 22 katı olacaktır." demiştir. Buna göre öğretmenin şimdiki yaşının öğrencilerin şimdiki yaşları toplamına oranını bulunuz.

ÇÖZÜM

	Öğretmen	1. Öğrenci	2. Öğrenci
Şimdiki yaş	x	y	z

$x=y+z+15\Rightarrow x-15=y+z$

$\left.\begin{array}{l} x=(y-z)\cdot 18\ldots(1) \\ x+8=(y-z)\cdot 22\ldots(2) \end{array}\right\}$ (2) den (1) çıkarıldığında $8=4\cdot(y-z)\Rightarrow y-z=2$ bulunur.

$x=2\cdot 18=36\Rightarrow y+z=36-15=21$ olur.

$\frac{x}{y+z}=\frac{36}{21}=\frac{12}{7}$ dir.

7. ÖRNEK

Begüm ile Susen'in 2005 yılındaki yaşları oranı $\frac{3}{4}$ ve yaşları toplamı 42 dir. Hangi yılda yaşları oranı $\frac{1}{3}$ olur?

ÇÖZÜM

$\frac{\text{Begüm'ün yaşı}}{\text{Susen'in yaşı}} = \frac{3}{4}$ olduğundan $\text{Begüm} = 3k$ ve $\text{Susen} = 4k$ denilebilir.

$3k + 4k = 42 \Rightarrow 7k = 42 \Rightarrow k = 6$ olur.

Begüm'ün yaşı: $3 \cdot 6 = 18$

Susen'in yaşı: $4 \cdot 6 = 24$ olarak bulunur.

a yıl önceki yaşları oranına $\frac{1}{3}$ denirse

$\frac{18-a}{24-a} = \frac{1}{3} \Rightarrow 54 - 3a = 24 - a \Rightarrow 2a = 30 \Rightarrow a = 15$ yıl olur.

$2005 - 15 = 1990$ yılında yaşları oranı $\frac{1}{3}$ olur.

8. ÖRNEK

Bir babanın yaşı; oğlunun yaşının 3 katı, kızının yaşının 4 katıdır. Kızı şimdiki yaşının 2 katına geldiğinde babanın yaşı oğlunun yaşının $\frac{3}{2}$ sinden 18 fazla oluyor. Bu durumda babanın bugünkü yaşını bulunuz.

ÇÖZÜM

	Baba	Oğul	Kız
Bugün	12k	4k	3k
	15k	7k	6k

3k yıl geçmiş olur.

$15k = 7k \cdot \frac{3}{2} + 18 \Rightarrow 15k - \frac{21k}{2} = 18 \Rightarrow \frac{9k}{2} = 18 \Rightarrow k = 4$ olur.

Babanın bugünkü yaşı: $12 \cdot 4 = 48$ olarak bulunur.

Yüzde Problemleri

Yüzde ifadesi, paydası 100 olan kesirler için kullanılır ve % sembolü ile gösterilir.
%20 yüzde yirmi diye okunur ve $\%20 = \frac{20}{100}$ şeklinde yazılır.

- Bir x sayısının yüzde a sı $\frac{x \cdot a}{100}$ ile hesaplanır.
- Yüzde a sı K olan sayının tamamı y ise $y = K \cdot \frac{100}{a}$ ile hesaplanır.

1. ÖRNEK

36 nın %25 ini bulunuz.

ÇÖZÜM

Bir bütünün istenen kesir değeri, bütün ile kesrin çarpılması sonucu bulunur.

$36 \cdot \frac{25}{100} = \frac{36}{4} = 9$ olur.

2. ÖRNEK

%15 i 45 olan sayıyı bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilen sayı x olsun.

$x \cdot \frac{15}{100} = 45 \Rightarrow x = \frac{4500}{15} = 300$ bulunur.

3. ÖRNEK

%30 u, %40 ından 6 eksik olan sayıyı bulunuz.

ÇÖZÜM

I. Yol

Sayıya x denirse

$x \cdot \frac{30}{100} = x \cdot \frac{40}{100} - 6 \Rightarrow \frac{30x - 40x}{100} = -6 \Rightarrow \frac{-10x}{100} = -6 \Rightarrow x = -6 \cdot -\frac{100}{10} = 60$ olur.

II. Yol

%40 − %30 = %10 olur. %10 u 6 olan sayının, %100 ü istenen değerdir.

%10	6
%100	x

D.O

$x = \frac{6 \cdot 100}{10} = 60$ olarak bulunur

4. ÖRNEK

Bir karenin, bir kenar uzunluğunu %40 artırırsak alanın yüzde kaç artacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

Karenin bir kenarı 10 cm alınırsa karenin alanı $10 \cdot 10 = 100\ cm^2$ olur.

%40 artarsa bir kenarı 14 cm olur ve alanı $14 \cdot 14 = 196\ cm^2$ olur. %96 artmış olur.

5. ÖRNEK

Bir yemek yapımında kullanılacak olan A, B, C ve D malzemelerinin ağırlıkları ile C malzemesinin ağırlıkça yüzde oranı aşağıdaki tabloda verilmiştir.

	A	B	C	D
Yüzde Oranı (%)			24	
Ağırlık		540	480	360

Verilenlere göre A malzemesinin yemeğin yüzde kaçı olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Tüm malzemelerin toplam ağırlığı x olsun.

%24	480 g
%100	x g

D.O

$x = \frac{480 \cdot 100}{24} = 2000$ g olur.

A malzemesinin ağırlığı: $2000 - (480 + 540 + 360) = 620$ g olur. Ağırlıkça yüzdesine a denirse

%24	480 g
%a	620 g

D.O

$a = \frac{620 \cdot 24}{480} = 31$ olur. Ağırlıkça yüzdesi %31 dir.

ALIŞTIRMALAR-10

1. Bir sayının 2 katının 3 eksiği, aynı sayının 3 katının 5 fazlasına eşitse bu sayıyı bulunuz.

2. Şükran Hanım, oğlunun kına gecesinde dağıtmak için 40 g lık karışık çerez paketleri hazırlayacaktır. Kınaya 50 kişi katılacağına göre Şükran Hanım'ın kilosu 16 TL olan karışık çerez için ödeyeceği parayı hesaplayınız.

3. Bir kesrin değeri $\frac{3}{5}$ tir. Bu kesrin payına 3 eklenip paydasından 3 çıkarıldığında kesrin değeri $\frac{3}{4}$ oluyorsa bu kesrin başlangıç payını bulunuz.

4. Gösterime yeni giren bir filmi izlemek için bilet kuyruğuna giren Mehmet; baştan m. sırada, sondan $(3m+5)$. sıradadır. Bilet kuyruğunda 48 kişi olduğuna göre Mehmet'in sondan kaçıncı sırada olduğunu bulunuz.

5. Bir otomobilin yakıt deposu boş iken ağırlığı a kg, $\frac{2}{5}$ i dolu iken b kg dır.
Deponun tamamı doluyken ağırlığının kaç kg olduğunu a ve b cinsinden bulunuz.

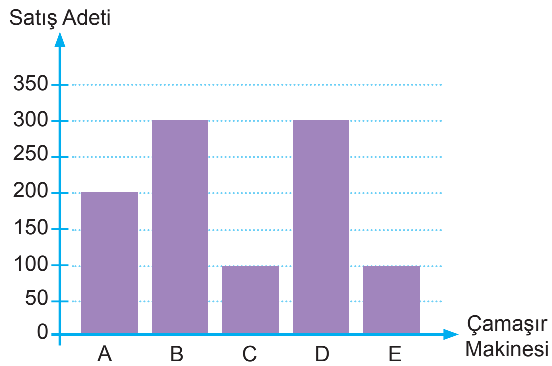
6. Bir anne ile kızının yaşları oranı $\frac{8}{3}$ tür. Kızı doğduğunda anne 30 yaşında olduğuna göre annenin bugünkü yaşını bulunuz.

7. Bir babanın yaşı, iki çocuğunun yaşları farkının 11 katıdır. 2 yıl sonra babanın yaşı çocuklarının yaşları farkının 9 katından 10 fazla olacağına göre babanın şimdiki yaşını bulunuz.

8. Pınar ile Serap'ın bugünkü yaşları toplamı 30 dur. Serap, Pınar'ın bugünkü yaşında iken Pınar 3 yaşında olduğuna göre Serap'ın bugünkü yaşını bulunuz.

9. 10 300 sayısının %15 i ile 5 sayısının %140 ının toplamını bulunuz.

10. Aşağıdaki grafikte, çamaşır makinesi satan bir firmanın 5 çeşit markaya göre bir yıllık satışı gösterilmektedir. Buna göre A marka çamaşır makinesinin toplam satıştaki yüzdesini bulunuz.



11. Bir dikdörtgenin kısa kenarı %25 artırılır, uzun kenarı %20 azaltılırsa dikdörtgenin alanının yüzde olarak ne kadar değişeceğini bulunuz.

Kâr Zarar Problemleri

Kâr zarar problemlerinde aşağıdaki bağıntılardan yararlanılır:

- Kâr $=$ Satış fiyatı – Maliyet fiyatı   Zarar $=$ Maliyet fiyatı – Satış fiyatı
- Kâr yüzdesi $= \dfrac{\text{Kâr}}{\text{Maliyet fiyatı}} \cdot 100$
- A liralık bir ürüne %x indirim yapıldığında ürünün yeni fiyatı:
  $A - A \cdot \dfrac{x}{100} = A \cdot \left(\dfrac{100-x}{100}\right)$ olur.
- %x zam yapıldığında da
  $A + A \cdot \dfrac{x}{100} = A \cdot \left(\dfrac{100+x}{100}\right)$ olur.
- İşlemlerde kolaylık sağlamak amacıyla genellikle bir ürünün alış fiyatına 100x denir.

1. ÖRNEK.

Aşağıdaki tabloda bir ürünün alış fiyatı, alış fiyatı üzerinden yapılan değişiklik ve satış fiyatı gösterilmiştir.

Alış Fiyatı (₺)	300	B	150	140	E	440	256	175	500	200
Yapılan Değişiklik	%30 kâr	%10 kâr	C	%20 zarar	%10 zarar	F	%25 indirim	%20 zam	%50 + %50 indirim	%10 + %10 zam
Satış Fiyatı (₺)	A	198	195	D	126	220	G	H	I	K

Tabloya göre harflerle ifade edilen yerlerde olması gereken sayıları bulunuz.

ÇÖZÜM

A değeri için $300 \cdot \dfrac{30}{100} = 90$ TL kârla $300 + 90 = 390$ TL sonucu bulunur.

B değeri 100x olsun, %10 kârla 110x olur. Buradan $110x = 198 \Rightarrow x = \dfrac{198}{110} \Rightarrow B = 100 \cdot \dfrac{198}{110} = 180$ TL bulunur.

C değeri için $195 - 150 = 45$ TL kâr yapılmıştır. Kâr yüzdesi $\dfrac{45 \cdot 100}{150} = 30$ olduğundan %30 bulunur.

D değeri için $\dfrac{140 \cdot 20}{100} = 28$ TL zararla $140 - 28 = 112$ TL sonucu bulunur.

E değeri 100x olsun. %10 zararla 90x olur. Buradan $90x = 126 \Rightarrow x = \dfrac{126}{90} \Rightarrow 100x = 100 \cdot \dfrac{126}{90} = 140$ TL bulunur.

F değeri için $440 - 220 = 220$ TL zarar vardır. Zarar yüzdesi $\dfrac{220}{440} \cdot 100 = 50$ olur. Cevap %50 olarak bulunur.

G değeri için $256 \cdot \dfrac{25}{100} = 64$ TL indirimle $G = 256 - 64 = 192$ TL bulunur.

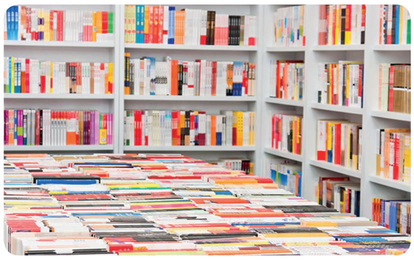
H değeri için $175 \cdot \dfrac{20}{100} = 35$ TL zamla $H = 175 + 35 = 210$ TL bulunur.

I değeri için $500 \cdot \dfrac{50}{100} = 250$ TL indirimle $500 - 250 = 250$ olur. Bu fiyat üzerinden tekrar %50 indirim yapılacağından sonuç:

$250 \cdot \dfrac{50}{100} = 125 \Rightarrow 250 - 125 = 125$ TL olarak bulunur.

K değeri için $200 \cdot \dfrac{10}{100} = 20$ TL zamla $200 + 20 = 220$ olur. Bu fiyat üzerinden tekrar %10 zam yapılacağından sonuç:

$220 \cdot \dfrac{10}{100} = 22 \Rightarrow 220 + 22 = 242$ TL olarak bulunur.



2. ÖRNEK

Bir kitap dağıtım firması, kitapları etiket fiyatının %50 eksiğine alıp etiket fiyatı üzerinden %20 indirim yaparak satmaktadır. Bu firmanın kitap satışındaki kâr yüzdesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Etiket fiyatı 100x olsun. %50 eksiği 50x olur.

100x in 20x indirimli hâli 80x olur.

$80x - 50x = 30x$ kâr edilir.

Kâr yüzdesi $= \dfrac{30\cancel{x}}{5\cancel{0}\cancel{x}} \cdot 10\cancel{0} = 60$ bulunur. Kâr yüzdesi %60 olur.

3. ÖRNEK

Bir malın %40 ını %30 kârla satan bir tüccar, malın geri kalan kısmını % kaç zararla satarsa ne kâr ne de zarar eder? Bulunuz.

ÇÖZÜM

100x denirse %40 ı 40x eder.

40x %30 kârla $40x \cdot \dfrac{30}{100} = 12x$ kâr eder.

100x ten geriye kalan 60x %a zararla 12x e satılmalıdır.

$60x \cdot \dfrac{a}{100} = 12x \Rightarrow a = \dfrac{\cancel{12}x \cdot 100}{\cancel{60}x} = \dfrac{100}{5} = 20$

Bu durumda malın geri kalan kısmını %20 zararla satılmalıdır ki kâr zarar eşitlensin.

4. ÖRNEK

İki yıllık bir toplu sözleşmede memurlara, 1. yılın her altı aylık dilimi için %10, 2. yılın her altı aylık dilimi için 60 TL zam yapılması kararlaştırılmıştır. 2. yıl sonunda memurlar toplamda %25 zam almış olmaktadırlar. Buna göre memurların başlangıçtaki maaşlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

Maaşları 100x olursa

1. altı ay sonunda $100x \cdot \dfrac{10}{100} = 10x$ zam alırlar ve maaşları $100x + 10x = 110x$ olur.

2. altı ayın sonunda $110x \cdot \dfrac{10}{100} = 11x$ zam alırlar.

1. yıl sonunda $11x + 10x = 21x$ zam almış olurlar.

2. yıl $60 + 60 = 120$ TL zam alırlar.

$21x + 120 = 25x \Rightarrow 120 = 4x \Rightarrow x = 30$ olur.

Bu durumda başlangıçtaki maaşları $100x = 100 \cdot 30 = 3000$ TL dir.

5. ÖRNEK

Suat Bey, 10 eşit taksitle televizyon satın alıyor. İlk 2 taksitini ödemesi gereken miktardan %40 fazla ödüyor. Ödediği fazla miktar, kalan 8 taksitten eşit olarak düşülüyor. Buna göre kalan taksitlerin her biri başlangıçtaki durumdan yüzde kaç eksilir, bulunuz.

ÇÖZÜM

Taksit miktarlarına 100 TL denirse ilk iki taksitte $40 + 40 = 80$ TL fazla ödeme yapılmış olur. Bu fazla miktar 8 aya bölüneceğinden $\dfrac{80}{8} = 10$ TL eksik ödeyecektir. Bu durumda %10 azalma olur.

6. ÖRNEK

Bir mağaza "3 Al 2 Öde" kampanyası düzenlemiştir. Kampanya koşullarına göre 3 ürün alan bir kişi en pahalı olan 2 ürünün fiyatını ödeyecektir. 6 farklı ürün alan Mustafa Bey'in 140, 40, 120, 190, 80, 30 liralık 6 ürünü bu kampanya sayesinde en çok yüzde kaç indirimle alacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

30 $\boxed{40 \quad 80}$ 120 $\boxed{140 \quad 190}$ şeklindeki gruplamayla daha fazla indirim olacaktır.

$30 + 40 + 80 + 120 + 140 + 190 = 600$ TL de $30 + 120 = 150$ TL indirim olacağından

600 TL de — 150 TL indirim

100 TL de — x TL indirim

D.O

$x = \dfrac{150 \cdot 100}{600} = 25$ olur. %25 indirimle almıştır.

7. ÖRNEK

Alış fiyatı x TL olan bir ürün $y = 3x - 900$ TL ye satılırsa %20 kâr ediliyor. Buna göre bu ürünün satış fiyatını bulunuz.

ÇÖZÜM

%20 kârlı satış fiyatı:

$x + x \cdot \dfrac{20}{100} = \dfrac{120x}{100}$ olur

$\dfrac{120x}{100} = 3x - 900 \Rightarrow 12x = 30x - 9000 \Rightarrow 9000 = 18x \Rightarrow x = 500$

Satış fiyatı: $y = 3x - 900 = 3 \cdot 500 - 900 = 1500 - 900 = 600$ TL olur.

8. ÖRNEK

Bir mağaza %30 indirim yaptığında satışları %70 artıyorsa bu mağazanın günlük satışındaki artış yüzdesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Tanesi 10 TL den 10 ürün satarsa günlük satışı $10 \cdot 10 = 100$ olur.

%30 indirim yaparsa tanesi $10 - 10 \cdot \dfrac{30}{100} = 7$ TL olur.

Satışlar %70 artarsa $10 + 10 \cdot \dfrac{70}{100} = 17$ tane ürün satılır.

Bu durumda günlük satış $7 \cdot 17 = 119$ TL olur. Sonuç olarak satışlarda %19 artış olmuştur.

9. ÖRNEK

Bir satıcı, 15 tanesini x TL ye aldığı limonların tanesini $\dfrac{x}{6}$ TL ye satıyor. Buna göre satıcının kârının yüzde kaç olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

15 tanesi x ise 30 tanesi 2x olur. 1 tanesinin satışı $\dfrac{x}{6}$ ise 30 tanesinin satışı 5x olur.

30 tanedeki kâr miktarı $5x - 2x = 3x$ olduğundan

2x de — 3x kâr

100 de — a kâr

D.O

$a = \dfrac{100 \cdot 3x}{2x} = 150$ olur. Satıcının kârı %150 dir.

10. ÖRNEK

Yaş üzüm kuruduğunda ağırlığının %20 sini kaybediyor. Kilosu 8 TL den alınan yaş üzüm kuruduğunda satışından %25 kâr edebilmek için kilosunun kaç TL den satıldığını bulunuz.

ÇÖZÜM

	Yaş Üzüm	Kuru Üzüm
Miktar	100x	80x
Fiyat	₺8	₺?

Yaş üzümün tamamının alış fiyatı: $100x \cdot 8 = 800x$ olur. %25 kâr edilecekse

$800x \cdot \dfrac{25}{100} = 200x$ kâr edilir. Satıştan kazanılan miktar $800x + 200x = 1000x$ olur.

$\dfrac{1000x}{80x} = 12,5$ ₺ olarak kuru üzümün fiyatı bulunur.

11. ÖRNEK

Yıllık enflasyon oranının %30 olduğu bir ülkede maaşına %17 zam yapılan bir kişinin alım gücündeki azalma yüzdesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Bir ürünün satış fiyatı 100 TL olursa %30 enflasyonlu fiyatı 130 TL olur

Maaş 100x olursa ve %17 zam yapılırsa maaş 117x olur.

İlk durumdaki ürün alım gücü $\dfrac{100x}{100} = x$ tir.

Son durumdaki alım gücü $\dfrac{117x}{130} = \dfrac{9x}{10}$ dur.

$x - \dfrac{9x}{10} = \dfrac{x}{10}$ luk azalma ile alım gücünde $\dfrac{\frac{x}{10}}{x} \cdot 100 = \dfrac{x}{10} \cdot \dfrac{1}{x} \cdot 100 = 10 \Rightarrow$ %10 azalma olur.

Faiz Problemleri

Bankaya yatırılan anapara: A
faiz oranı: n,
zaman: t,
faiz getirisi: F olsun.

A TL nin yıllık %n faiz oranıyla

- t yılda $F = \dfrac{A \cdot n \cdot t}{100}$
- t ayda $F = \dfrac{A \cdot n \cdot t}{100 \cdot 12}$
- t günde $F = \dfrac{A \cdot n \cdot t}{100 \cdot 360}$ faiz getirisi olur.

1. ÖRNEK

480 TL parası olan bir kişi parasını bankaya yatırıyor. Bu kişinin

a) %35 ten 1 yıllık,

b) %44 ten 10 aylık,

c) %15 ten 20 günlük faiz getirisini bulunuz.

ÇÖZÜM

a) $F = \dfrac{480 \cdot 35 \cdot 1}{100} = 168$ TL dir.

b) $F = \dfrac{480 \cdot 44 \cdot 10}{100 \cdot 12} = 44 \cdot 4 = 156$ TL dir.

c) $F = \dfrac{480 \cdot 15 \cdot 20}{100 \cdot 360} = 4$ TL dir.

2. ÖRNEK

3500 TL si 4 ayda 210 TL faiz getirdiğine göre bu paranın bankaya yıllık yüzde kaç faiz oranı ile yatırıldığını bulunuz.

ÇÖZÜM

$$210 = \frac{35\cancel{00} \cdot n \cdot 4}{1\cancel{00} \cdot 12} \Rightarrow n = \frac{210 \cdot 12}{35 \cdot 4} = 18 \text{ olur. Faiz oranı } \%18 \text{ dir.}$$

3. ÖRNEK

5000 TL si olan bir kişi, parasının bir kısmını yıllık %40, geri kalanını ise yıllık %30 faizle bankaya yatırıyor ve 1 yıl sonunda toplam 1860 TL faiz geliri elde ediyor. Buna göre %30 faiz oranı ile bankaya yatırılan para miktarını bulunuz.

ÇÖZÜM

İlk yatırılan para x TL olarak alınırsa ikinci yatırılan para $(5000 - x)$ TL olur.

$$\frac{(5000 - x) \cdot 40 \cdot 1}{100} + \frac{x \cdot 30 \cdot 1}{100} = 1860$$

$$200\,000 - 40x + 30x = 186\,000$$

$$14\,000 = 10x \Rightarrow x = 1400 \text{ dür.}$$

4. ÖRNEK

12 000 TL önce yıllık %20 faiz oranıyla 1 yıllığına bankaya yatırılıyor. 1. yılın sonunda faiziyle birlikte tekrar 1 yıllığına %15 faiz oranıyla bankaya yatırılıyor. Buna göre 2. yıl sonundaki toplam faiz getirisini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$F_1 = \frac{12\,000 \cdot 20 \cdot 1}{100} = 2400 \text{ TL}$$

$$12\,000 + 2400 = 14\,400 \text{ TL}$$

$$F_2 = \frac{14\,400 \cdot 15 \cdot 1}{100} = 2160 \text{ TL}$$

$F = F_1 + F_2 = 2400 + 2160 = 4560$ TL faiz getirisi olur.

5. ÖRNEK

Umut, parasının %25 ini yıllık %12 , %35 ini yıllık %30 faiz üzerinden 8 aylığına farklı iki bankaya yatırmıştır. Umut, kalan parasını aylık %5 faizle kaç aylığına başka bir bankaya yatırırsa toplamda parasının %29 u kadar faiz geliri elde edeceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Aylık %5 faiz, yıllık %60 faize eşittir.

Umut'un 100A TL si olsun.

$$\frac{25A \cdot 12 \cdot 8}{100 \cdot 12} + \frac{35A \cdot 30 \cdot 8}{100 \cdot 12} + \frac{40A \cdot 60 \cdot t}{100 \cdot 12} = 29A$$

$$2A + 7A + 2At = 29A$$

$$2t = 20 \Rightarrow t = 10 \text{ ay olur.}$$

6. ÖRNEK

Munise, bankaya yatırdığı x TL sinin aylık $\%2,5$ ten 8 aylık faiz getirisinin, y TL sinin yıllık $\%25$ ten 6 aylık faiz getirisine eşit olduğunu görmüştür. Buna göre x ile y arasındaki ilişkiyi bulunuz.

ÇÖZÜM

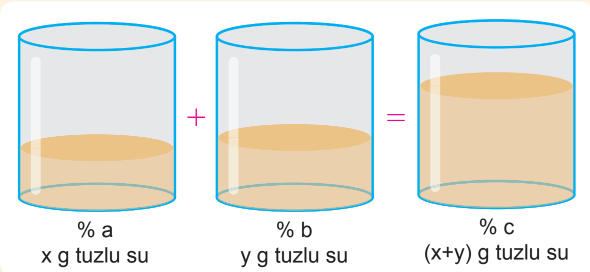
Aylık $\%2,5$ faiz getirisi, yıllık $12 \cdot 2,5 = 30$ olduğundan $\%30$ faiz getirisine eşittir.

$$\frac{x \cdot 30 \cdot 8}{\cancel{100 \cdot 12}} = \frac{y \cdot 25 \cdot 6}{\cancel{100 \cdot 12}} \Rightarrow 240x = 150y \Rightarrow 8x = 5y \text{ olur.}$$

Karışım Problemleri

Karışım problemlerinin çözümünde aşağıdaki bağıntılardan yararlanılır:

- Saf madde oranı $= \dfrac{\text{Saf madde miktarı}}{\text{Karışım miktarı}}$
- Saf madde yüzdesi $= \dfrac{\text{Saf madde miktarı}}{\text{Karışım miktarı}} \cdot 100$



Yeni karışımın tuz yüzdesi:

$$\frac{c}{100} = \frac{\frac{a}{100} \cdot x + \frac{b}{100} \cdot y}{x + y} \Rightarrow c = \frac{a \cdot x + b \cdot y}{x + y} \text{ dir.}$$

Saf suyun tuz yüzdesi 0, tuzun tuz yüzdesi 100 dür.

1. ÖRNEK

Tuz oranı $\%40$ olan 240 g tuzlu sudaki tuz ve su miktarlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

Tuz miktarı $= 240 \cdot \frac{40}{100} = 96$ g ve su miktarı $= 240 - 96 = 144$ g

2. ÖRNEK

Şeker oranı $\%30$ olan 40 g şekerli su ile şeker oranı $\%60$ olan 35 g şekerli su karıştırılıyor. Elde edilen karışımın şeker yüzdesini bulunuz.

ÇÖZÜM

Şeker yüzdesine x denirse $x = \dfrac{30 \cdot 40 + 60 \cdot 35}{40 + 35} = \%44$

3. ÖRNEK

Tuz oranı $\%60$ olan 80 g tuzlu suya kaç g tuz konulursa tuz oranının $\%80$ olacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

x g eklenirse

$$80 = \frac{80 \cdot 60 + x \cdot 100}{80 + x} \Rightarrow 6400 + 80x = 4800 + 100x$$

$$\Rightarrow 6400 - 4800 = 100x - 80x$$

$$\Rightarrow 1600 = 20x \Rightarrow x = 80 \text{ g}$$

4. ÖRNEK

Tuz oranı %18 olan 150 g çözeltiden kaç g su buharlaştığında kalan çözeltinin tuz oranı %25 olur?

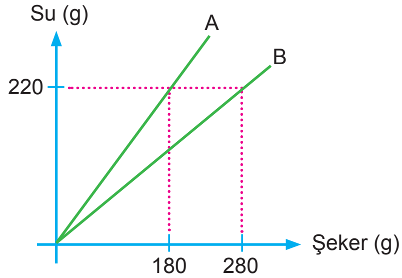
ÇÖZÜM

$25 = \dfrac{18 \cdot 150 - x \cdot 0}{150 - x} \Rightarrow 3750 - 25x = 2700$ olur.

Buradan $x = 42$ g bulunur.

5. ÖRNEK

Aşağıdaki grafikte A ve B karışımlarında bulunan su ve şeker miktarları verilmiştir.



A ve B şekerli su karışımlarının şeker yüzdelerini bulunuz.

ÇÖZÜM

A karışımı $180 + 220 = 400$

400 g — 180 g şeker
100 g — x g şeker

D.O

$x = \dfrac{180 \cdot 100}{400} = 45$

A karışımında %45 şeker vardır.

B karışımı $220 + 280 = 500$

500 g — 280 g şeker
100 g — y g şeker

D.O

$y = \dfrac{280 \cdot 100}{500} = 56$

B karışımında %56 şeker vardır.

6. ÖRNEK

%20 lik 500 g tuzlu suyun $\dfrac{1}{5}$ i alınarak yerine alınan miktar kadar tuz ilave edildiğinde oluşan tuzlu suyun yüzde kaçının tuz olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$500 \cdot \dfrac{1}{5} = 100$ g alındığında $500 - 100 = 400$ g kalır.

$x = \dfrac{400 \cdot 20 + 100 \cdot 100}{400 + 100} = \dfrac{8000 + 10000}{500} = 36$ olur. Buna göre karışımda %36 oranında tuz vardır.

7. ÖRNEK

Funda'nın kahvaltıda ikram etmek üzere hazırladığı tahin pekmez karışımının tahin oranı %40 tır. Karışımın çok şekerli olduğunu fark eden Funda pekmez oranını %40 a indirmek için karışıma 20 g tahin eklediğine göre hazırladığı karışımın miktarını bulunuz.

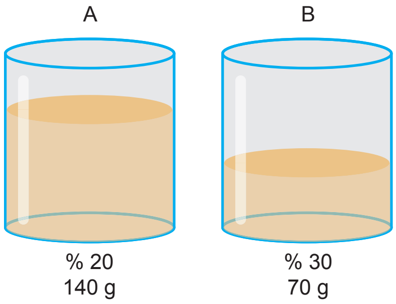
ÇÖZÜM

x g karışımın %40 ı tahin ise %60 ı pekmezdir.

$\dfrac{x \cdot 60 + 20 \cdot 0}{x + 20} = 40 \Rightarrow 60x = 40x + 800 \Rightarrow 20x = 800 \Rightarrow x = 40$ g

8. ÖRNEK

Aşağıda A ve B kaplarındaki karışım miktarları ve karışımdaki tuz yüzdeleri verilmiştir. Buna göre



a) A kabındaki karışımın yarısı alınıp B ye, ardından da B de biriken karışımın yarısı alınıp A ya aktarılıyor. Oluşan karışımın yüzde kaçının tuz olduğunu bulunuz.

b) A kabındaki karışımın $\frac{3}{14}$ ü alınıp B ye, ardından B de oluşan yeni karışımın $\frac{11}{25}$ i alınıp A ya aktarılıyor. Oluşan karışımın yüzde kaçının tuz olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

a) 1. Durum: B kabında $\frac{20\cdot 70+30\cdot 70}{70+70}=\frac{3500}{140}=25$ olup yeni karışımda $\%25$ oranında tuz bulunur.

2. Durum: A kabında $\frac{20\cdot 70+25\cdot 70}{140}=\frac{3150}{140}=22,5$ olup yeni karışımda $\%22,5$ oranında tuz bulunur.

b) 1. Durum: B kabında $\frac{20\cdot 30+30\cdot 70}{30+70}=\frac{2700}{100}=27$ olup yeni karışımda $\%27$ oranında tuz bulunur.

2. Durum: A kabında $\frac{20\cdot 110+27\cdot 44}{110+44}=\frac{3388}{154}=22$ olup yeni karışımda $\%22$ oranında tuz bulunur.

9. ÖRNEK

Alkol oranı $\%x$ olan bir kolonyaya içindeki miktarın $\frac{2}{3}$ ü kadar $\%20$ alkol oranına sahip başka bir kolonya ekleniyor. Yeni kolonyanın alkol oranı $\%56$ olmaktadır. Buna göre x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\%x$ lik karışıma 3a denirse

$3a\cdot\frac{2}{3}=2a(\%20)$ miktarda karışım eklenirse

$56=\frac{x\cdot 3a+20\cdot 2a}{3a+2a}\Rightarrow 56\cdot 5=3x+40\Rightarrow 240=3x\Rightarrow x=80$

bulunur.

10. ÖRNEK

Bir kuyumcu 22 ayar 20 g bileziği, 16 ayar 100 g küpeleri ve saf altını eritip karıştırarak 18 ayar bilezikler yapacaktır. Saf altın 24 ayar olduğuna göre karışıma kaç g saf altın katılması gerektiğini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$20\cdot\frac{22}{24}+100\cdot\frac{16}{24}+x\cdot\frac{24}{24}=(20+100+x)\cdot\frac{18}{24}$$

$$\frac{440+1600+24x}{24}=(120+x)\cdot\frac{18}{24}$$

$$2040+24x=2160+18x$$

$$6x=120$$

$$x=20\text{ g saf altın katılmalıdır.}$$

11. ÖRNEK

Bir havuza %14 lük ve %25 lik tuzlu su akıtan iki musluktan birincisi 12, ikincisi 10 saatte bu havuzu tek başına doldurabilmektedir. İki musluk aynı anda açılıp havuz dolduğunda havuzun içindeki suyun tuz yüzdesini bulunuz.

ÇÖZÜM

İki musluğun havuzu tek başlarına doldurması için geçen süreler ile musluklardan akan tuzlu su miktaları birbiri ile ters orantılıdır.

1. musluk	2. musluk
12 saat	10 saat
10x tuzlu su	12x tuzlu su akar.

$$10x \cdot \frac{14}{100} + 12x \cdot \frac{25}{100} = (10x + 12x) \cdot \frac{A}{100}$$

$$\frac{140x + 300x}{100} = 22x \cdot \frac{A}{100}$$

$$440x = 22x \cdot A$$

$$20 = A \text{ olur.}$$

Bu durumda havuzun içindeki suyun tuz yüzdesi % 20 olur.

Hareket Problemleri

Hız ve hareket problemlerinde aşağıdaki bağıntılardan yararlanılır.

x	V	t
Yol	Hız	Zaman

olmak üzere

$\text{Yol} = \text{Hız} \cdot \text{Zaman} \Rightarrow x = V.t$ olur.

$\text{Hız} = \dfrac{\text{Yol}}{\text{Zaman}} \Rightarrow V = \dfrac{x}{t}$ olur.

$\text{Ortalama hız} = \dfrac{\text{Alınan toplam yol}}{\text{Toplam süre}}$ dir.

V_1 ve V_2 hızları ile alınan yollar eşit ise $V_{ort} = \dfrac{2.V_1.V_2}{V_1 + V_2}$ (Aynı yolu gidip gelme durumunda kullanılır.)

Hız, yol ve zaman arasında daima bir orantı vardır.

- Hız, yol ile doğru; zaman ile ters orantılıdır.
- Yol ile zaman doğru orantılıdır.

1. ÖRNEK

Aralarında 720 km uzaklık bulunan iki şehir arasında çalışan bir otobüs 60 km/sa. ortalama hızla gittiğinde otogara 3 saat geç kalıyor. Bu otobüsün zamanında seferini tamamlaması için hızını kaç km/sa. artırması gerektiğini bulunuz.

ÇÖZÜM

t sürede varması gerekirse

$60 \cdot (t + 3) = 720 \Rightarrow t + 3 = 12 \Rightarrow t = 9$

$V \cdot t = 720 \Rightarrow 9V = 720 \Rightarrow V = 80$ km/sa. olduğundan 20 km/sa. arttırılmalıdır.

- Bir araç bir noktadan geçerken kendi boyu, belli bir uzunluğu geçerken hem kendi boyu hem de geçtiği uzunluğun toplamı kadar yol kat eder.
- $V \text{ km/sa.} = \dfrac{V \cdot 1000}{60} \text{ m/dk.} = \dfrac{V \cdot 1000}{60 \cdot 60} \text{ m/sn.}$

2. ÖRNEK

Ortalama hızı saatte 30 km olan bir aracın 5 dakikada kaç metre yol alacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

$x = V \cdot t \qquad V = 30\,\text{km/sa.} = \dfrac{30 \cdot 1000}{60} = 500\,\text{m/dk.}$

$x = 500 \cdot 5 = 2500\,\text{m}$ dir.

3. ÖRNEK

Ada, evden markete 25 m/dk. hızla gidip eve 15 m/dk. hızla dönmüştür. Gidiş dönüş süresi toplam 16 dk. sürdüğüne göre ev ile market arasının kaç metre olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Ev ile market arası uzaklık x metre olsun. Evden markete gidiş süresi de t olsun.

$x = 25 \cdot t = 15 \cdot (16 - t) \Rightarrow 25t = 15 \cdot 16 - 15t \Rightarrow 40t = 15 \cdot 16 \Rightarrow t = \dfrac{15 \cdot 16}{40} = 6\,\text{dk.}$

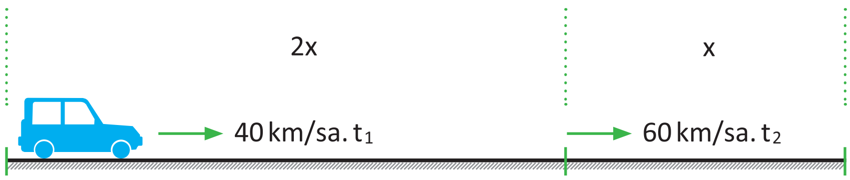
$X = 25 \cdot 6 = 150$ metredir.

4. ÖRNEK

Bir araç, gideceği yolun $\dfrac{2}{3}$ ünü saatte 40 km lik hızla, kalan yolu da 60 km lik hızla gittiğine göre bu aracın tüm yol boyunca yaptığı ortalama hızı bulunuz.

ÇÖZÜM

Yolun tamamı 3x olsun.



$2x = 40 \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \dfrac{2x}{40} = \dfrac{x}{20}$ saat $\qquad x = 60 \cdot t_2 \Rightarrow t_2 = \dfrac{x}{60}$ saat

Ortalama hız $= \dfrac{\text{Alınan toplam yol}}{\text{Toplam süre}} \Rightarrow V_{ort} = \dfrac{2x + x}{\dfrac{x}{20} + \dfrac{x}{60}} = \dfrac{3x}{\dfrac{4x}{60}} = \dfrac{60.3x}{4x} = 45$ km/sa. bulunur.

5. ÖRNEK

Arzu, evinden okula 3 km/sa. hızla giderse 12 dakika geç kalıyor. 4 km/sa. hızla giderse 6 dakika erken varıyor. Arzu'nun evi ile okulu arasındaki mesafeyi metre cinsinden bulunuz.

ÇÖZÜM

Cevap metre olarak istendiği için hızlar m/dk. ya çevrilir. Alınan yollar eşit olduğundan

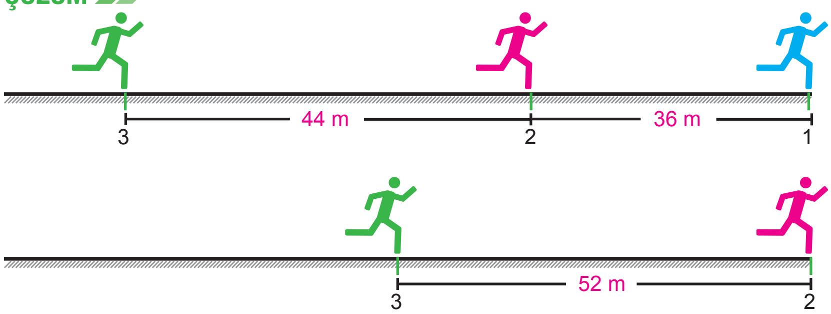
$3 \cdot \dfrac{1000}{60} \cdot (t + 12) = 4 \cdot \dfrac{1000}{60} \cdot (t - 6)$ olur. $3t + 36 = 4t - 24 \Rightarrow t = 60$ olur.

Yol $= 3 \cdot \dfrac{1000}{60} \cdot 72 = 3600$ metredir.

6. ÖRNEK

Bir yarışta birinci olan yarışmacı; yarışı bitirdiğinde ikinci ile arasında 36 m, üçüncü ile de arasında 80 m fark olmuştur. İkinci olan yarışmacı yarışı bitirdiğinde üçüncü ile arasında 52 m olduğuna göre yarışmanın kaç metrelik mesafede yapıldığını bulunuz.

ÇÖZÜM



2. yarışmacı 36 m mesafede 3. ile arasını 8 m daha açmıştır. Bu durumda

36 metrede — 8 metre fark
x metrede — 52 m fark

D.O

$$\frac{8x}{8} = \frac{36 \cdot 52}{8} \Rightarrow x = \frac{36 \cdot 52}{8} = 234 \text{ m}$$

Şekilde görüldüğü gibi A ve B noktalarından karşılıklı olarak aynı anda harekete başlayan iki araç t saat sonra C noktasında karşılaşırsa

$|AB| = (V_1 + V_2).t$

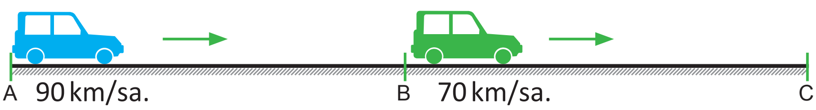
Şekilde görüldüğü gibi A ve B noktalarından aynı anda, aynı yöne doğru harekete başlayan iki araç t saat sonra C noktasında yan yana gelirse $(V_1 > V_2)$

$|AB| = (V_1 - V_2).t$

7. ÖRNEK

İki araç A ve B noktalarından aynı anda, aynı yöne doğru hareket ediyor. A dan hareket edenin hızı 90 km/sa. ve B den hareket edenin hızı 70 km/sa. tır. A dan hareket eden 5 saat sonra C noktasında diğerine yetiştiğine göre $|AB|$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



I. Yol

$|AC| = V \cdot t = 90 \cdot 5 = 450$

$|BC| = 70 \cdot 5 = 350$

$|AB| = 450 - 350 = 100$

II. Yol

$|AB| = (90 - 70) \cdot 5 = 100 \text{ km}$

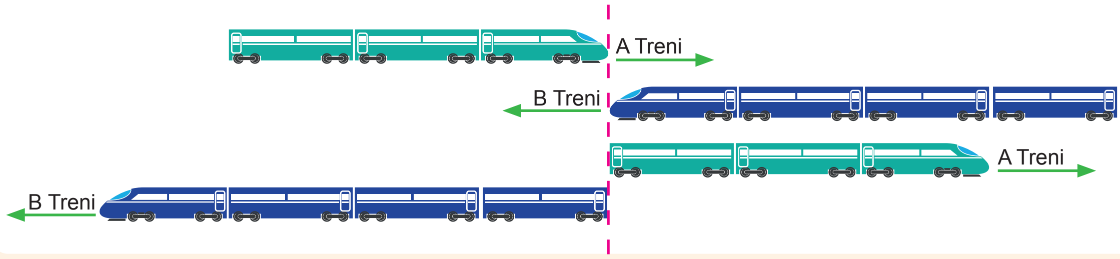
8. ÖRNEK

A ve B kentlerinden birbirine doğru aynı anda harekete başlayan iki aracın saatteki ortalama hızları sırasıyla 70 km ve 100 km dir. Bu iki araç, harekete başladıktan 3 saat sonra karşılaştığına göre A ile B arasındaki mesafenin uzunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$|AB| = (70 + 100) \cdot 3 = 510$ km dir.

İki trenin birbirini geçmesi, ön kısımlarının karşılaştığı andan arka kısımlarının birbirini geçtiği ana kadar geçen süredeki hareketlerini belirtir. Aşağıda verilen A ve B trenlerinin boyları sırasıyla a ve b metre olsun. Birbirlerini t dakikada geçsinler. Bu durumda iki tren, t dakikada aynı yöne doğru giderken hızları farkı, zıt yöne doğru giderken hızları toplamı ile $a + b$ metre yol alır.

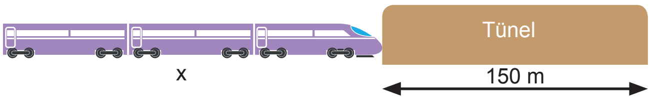


Bir trenin bir tüneli geçmesi, trenin ön kısmının tünele girip arka kısmının tünelden çıktığı ana kadar geçen süredeki hareketini belirtir. Trenin boyu x metre, tünelin boyu y metre olursa tren tüneli geçtiğinde $x + y$ metre yol almış olur.

9. ÖRNEK

150 metre uzunluğundaki bir tüneli saatte ortalama 60 km hızla 30 saniyede geçen trenin boyunu bulunuz.

ÇÖZÜM



$\text{Yol} = 150 + x$

$\text{Hız} = 60\text{km} = 60\,000$ metredir.

$\text{Süre} = 30$ saniye $= \dfrac{30}{60 \cdot 60}$ saattir.

$150 + x = 60\,000 \cdot \dfrac{30}{60 \cdot 60} \Rightarrow 150 + x = 500 \Rightarrow x = 350$ metre olur.

10. ÖRNEK

Saatteki hızları 40 km ve 80 km olan iki tren, karşılıklı hareket ettiğinde birbirlerini 6 saniyede geçtiklerine göre trenlerin boyları toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

Toplam uzunluk x metre olsun.

Zıt yönlü harekette hız $= 40 + 80 = 120\,\text{km} = 120\,000\,\text{m}$

$\text{Süre} = \dfrac{6}{60 \cdot 60}$ saat

$x = 120\,000 \cdot \dfrac{6}{60 \cdot 60} = 200$ m dir.

11. ÖRNEK

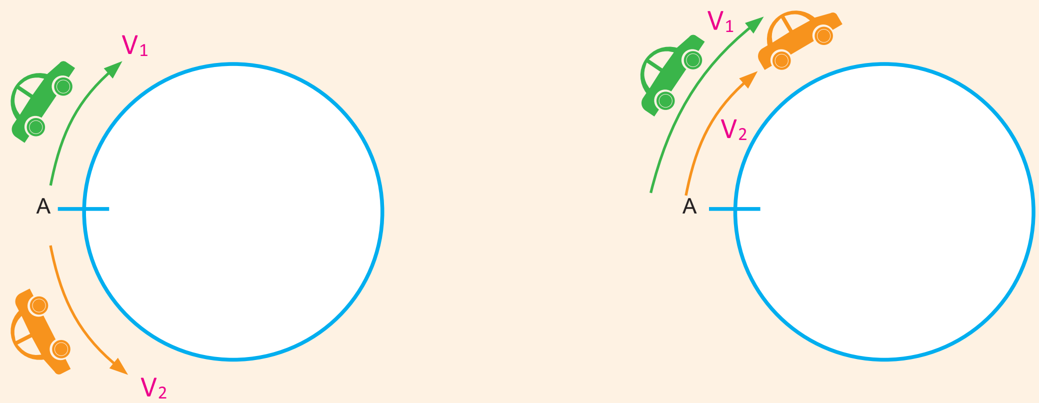
60 m uzunluğundaki bir tren; sabit hızla 1. tüneli 15 saniyede, 200 m uzunluğundaki 2. tüneli 26 saniyede geçtiğine göre 1. tünelin uzunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

1. tünel için yol uzunluğu: $x+60$, 2. tünel için yol uzunluğu: $200+60=260$ olur.

$260=26\cdot V\Rightarrow V=10$ m/sn.

$x+60=15\cdot 10\Rightarrow x=90$ m dir.



- Dairesel bir pistte aynı noktadan zıt yönde harekete başlayan iki araç, karşılaştıklarında dairesel pistin çevresi kadar yol almış olur.
  Pistin çevre uzunluğu $(V_1+V_2)\cdot t$ dir.
- Dairesel bir pistte aynı noktadan, aynı yöne doğru harekete başlayan iki aracın tekrar yan yana gelmesi için hızlı aracın yavaş olandan 1 tur fazla atması gerekir.
  t saatte hızlı olan aracın hızı V_1, yavaş olan aracın hızı V_2 olsun. Yan yana gelebilmeleri için pistin çevre uzunluğu $(V_1-V_2)\cdot t$ olur.

12. ÖRNEK

Dairesel bir pistte zıt yönde, aynı anda 14 m/dk. ve 16 m/dk. hızlarla hareket eden iki bisikletli, 18 dk sonra karşılaştığına göre pistin çevre uzunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Çevre $=(V_1+V_2)\cdot t=(14+16)\cdot 18=30\cdot 18=540$ metredir.

13. ÖRNEK

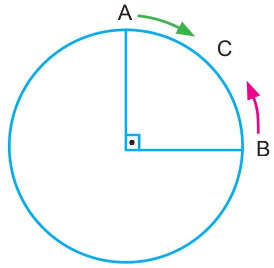
Dairesel bir pistte aynı noktadan aynı yöne 20 m/dk. ve 35 m/dk. hızlarla aynı anda harekete başlayan iki koşucu, 38 dk sonra tekrar yan yana geldiklerine göre pistin çevre uzunluğunu metre cinsinden bulunuz.

ÇÖZÜM

Hızlı koşucunun yavaş koşucuyu yakalayabilmesi için bir tur fazla atması gerekir. Bu durumda

$Ç=(35-20)\cdot 38=15\cdot 38=570$ metredir.

14. ÖRNEK



Şekilde çevresi 200 m olan pistte A dan 15 m/sn. ve B den 10 m/sn. hızla ok yönünde, aynı anda hareket eden iki hareketlinin kaç sn sonra dördüncü kez karşılaşacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

$|\overset{\frown}{AB}|$ değeri çevrenin $\frac{1}{4}$ üne denk geldiğinden 50m dir.

C noktasında karşılaşılırsa alınan toplam yol:

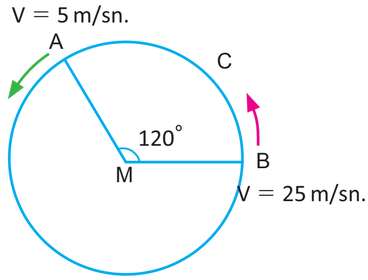
$50 = (15 + 10) \cdot t_1 \Rightarrow 50 = 25 \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = 2$ sn bulunur.

C noktasında ilk karşılaşmadan sonra hareket aynı noktadan zıt yönlü harekete döner. 3 tur atmaları hâlinde ise dördüncü kez karşılaşılır. Bu durumda alınan yol:

$3 \cdot 200 = (15 + 10) \cdot t_2$ olduğundan $\Rightarrow 600 = 25 \cdot t_2 \Rightarrow t_2 = 24$ sn bulunur.

4. kez karşılaşma anına kadar geçen toplam süre: $t_1 + t_2 = 2\,sn + 24\,sn = 26\,sn$ olur.

15. ÖRNEK



Şekilde çevresi 120 m olan pistte A dan 5 m/sn. ve B den 25 m/sn. hızla aynı yönde, aynı anda hareket eden iki yayanın kaç sn sonra üçüncü kez karşılaşacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

$|\overset{\frown}{AB}|$ değeri, pistin çevresinin $\frac{1}{3}$ üne eşit olduğundan 40 m dir.

İlk kez yan yana geldiklerinde alınan yol:

$x = (25 - 5) \cdot t_1$ olduğundan $40 = 20 \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = 2$ sn. sonra ilk kez yan yana gelirler. Geriye 2 kez karşılaşma kalır. Bu durumda 3. kez yan yana gelme süresi:

$2 \cdot 120 = (25 - 5) \cdot t_2 \Rightarrow 240 = 20 \cdot t_2 \Rightarrow t_2 = 12\,sn$ sonra gerçekleşir.

Bu durumda iki hareketlinin 3. kez yan yana gelinceye kadar geçen toplam süre:

$t_1 + t_2 = 2\,sn + 12\,sn = 14\,sn$ olur.

Nehirlerdeki hareket problemlerinde A noktasından B noktasına akıntı yönünde giderken akıntının hızı V_A, yüzücünün ya da nesnenin hızı V_Y olursa $V = V_A + V_Y$ olur.

B den A ya akıntıya ters yönde giderken $V = V_Y - V_A \quad (V_Y > V_A)$ olur.

16. ÖRNEK

Bir tekne, akıntıya karşı 18 dakikada gidebildiği mesafeyi akıntı yönünde 12 dakikada gittiğine göre teknenin hızının akıntının hızına oranını bulunuz.

ÇÖZÜM

V_T Teknenin hızı, V_A Akıntının hızı olsun.

Akıntı yönünde hız: $V_T + V_A$ ve Akıntıya karşı hız: $V_T - V_A$ olur.

$x = (V_T + V_A) \cdot 12 = (V_T - V_A) \cdot 18 \Rightarrow 12V_T + 12V_A = 18V_T - 18V_A \Rightarrow 30V_A = 6V_T \Rightarrow \frac{V_T}{V_A} = 5$ olur.

17. ÖRNEK

Bir helikopterin hızı 240 km/sa. tir. Helikopter, deposunda 12 saat yetecek kadar yakıt varken arkasından 80 km/sa. hızla esen rüzgârlı bir havada helikopterin en fazla kaç km uzağa gidip gelebileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Gidilen yol geri dönüleceğinden

$(240+80)\cdot t=(240-80)\cdot(12-t) \Rightarrow 320t=160\cdot 12-160t \Rightarrow 480t=160\cdot 12 \Rightarrow t=\frac{160\cdot 12}{480}=4$ bulunur.

Yol $=320\cdot 4=1280$ km olur.

İşçi Problemleri

İşçi problemlerinde işlemler, birim zamanda yapılan iş üzerinden gerçekleştirilir.

Bir işçi bir işin tamamını x günde yaparsa

- 1 günde $\frac{1}{x}$ ini,
- a günde $a\cdot\frac{1}{x}$ ini yapar.

1. işçinin a günde, 2. işçinin b günde bitirdiği bir işi ikisi birlikte x günde bitiriyorsa

$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot x=1$ veya $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x}$ olur.

1. ÖRNEK

Bir işi Umut 36 günde bitirebilmektedir. Aynı işi Umut ve Ufuk birlikte 12 günde bitirebildiklerine göre Ufuk'un bu işi tek başına kaç günde bitirebileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Ufuk işi x günde bitirsin. Aynı işi Umut 36, Ufuk x ve ikisi birlikte 12 günde bitiriyorsa

$\frac{1}{36}+\frac{1}{x}=\frac{1}{12}$ eşitliği yazılır. $\frac{1}{x}=\frac{1}{\underset{(3)}{12}}-\frac{1}{\underset{(1)}{36}} \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{2}{36} \Rightarrow x=18$ olur.

2. ÖRNEK

Emel bir işi tek başına 24 günde, Yağmur ise aynı işi 36 günde yapabilmektedir. Emel 8 gün, Yağmur 9 gün çalıştığında işin kaçta kaçının tamamlanacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

Emel tek başına işi 24 günde bitirdiğine göre 8 günde işin $\frac{1}{24}\cdot 8=\frac{1}{3}$ ünü yapar.

Yağmur tek başına işi 36 günde bitirdiğine göre 9 günde işin $\frac{1}{36}\cdot 9=\frac{1}{4}$ ünü yapar.

İkisi birlikte işin $\frac{1}{\underset{(4)}{3}}+\frac{1}{\underset{(3)}{4}}=\frac{7}{12}$ sini tamamlamış olurlar.

3. ÖRNEK

Bir işin tamamını Sıla ile Gülce 18 günde, Mert ile Sıla 9 günde, Gülce ile Mert 12 günde bitirebilmektedir. Üçü birlikte çalıştığında üçünün aynı işi kaç günde bitirebileceklerini bulunuz.

ÇÖZÜM

İşi Sıla x günde, Gülce y günde, Mert z günde bitirsin. Bu durumda

Sıla ve Gülce: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{18}$

Mert ve Sıla: $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{9}$

Gülce ve Mert: $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{12}$ denklemleri yazılır. Bu üç denklem taraf tarafa toplanırsa

$$2\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{\underset{(2)}{18}}+\frac{1}{\underset{(4)}{9}}+\frac{1}{\underset{(3)}{12}}\Rightarrow 2\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{2+4+3}{36}\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{8}\text{ olur.}$$

Üçü birlikte 8 günde bitirir.

4. ÖRNEK

1 usta 3 günde 8 sehpa, 1 çırak 4 günde 4 sehpa yapabilmektedir. Buna göre ikisinin birlikte 220 sehpayı kaç günde yapabileceklerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Günler eşitlenirse

$$\left.\begin{array}{l}\text{1 usta 3 günde 8 sehpa} \rightarrow \text{12 günde 32 sehpa}\\ \text{1 çırak 4 günde 4 sehpa} \rightarrow \text{12 günde 12 sehpa}\end{array}\right\}\text{Birlikte 12 günde } 32+12=44 \text{ sehpa yaparlar.}$$

12 günde   44 sehpa

x günde   220 sehpa

D.O

$220\cdot 12=x\cdot 44\Rightarrow x=60$ günde yapabilirler.

5. ÖRNEK

Bir işi Senem 12 günde, Sinem 18 günde ve Öykü 36 günde bitirebiliyor. Üçü beraber işe başladıktan 2 gün sonra Senem, başlangıçtan 3 gün sonra da Sinem işten ayrılıyor. Öykü'nün kalan işi tek başına kaç günde bitirebileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

Öykü kalan işi t günde bitirsin.

$$\left(\frac{1}{\underset{(3)}{12}}+\frac{1}{\underset{(2)}{18}}+\frac{1}{\underset{(1)}{36}}\right)\cdot 2+\left(\frac{1}{\underset{(2)}{18}}+\frac{1}{\underset{(1)}{36}}\right)\cdot 1+\frac{1}{36}\cdot t=1$$

$$\frac{6}{36}\cdot 2+\frac{3}{36}\cdot 1+\frac{1}{36}\cdot t=1$$

$$12+3+t=36$$

$$t=36-15\Rightarrow t=21\text{ günde bitirir.}$$

6. ÖRNEK

Filiz bir işin $\frac{3}{4}$ ünü 6 günde, Sedef ise aynı işin $\frac{2}{3}$ sini 8 günde tamamlamaktadır. Filiz çalışma hızını 2 katına çıkarıp Sedef çalışma hızını yarıya indirirse ikisi birlikte 3 günde aynı işin ne kadarını yapar?

ÇÖZÜM

Filiz, işin $\frac{3}{4}$ ünü 6 günde yaparsa tamamını 8 günde yapar. Hızını 2 katına çıkarırsa süre yarıya iner ve 4 gün olur.

Sedef, işin $\frac{2}{3}$ sini 8 günde yaparsa tamamını 12 günde yapar. Hızını yarıya indirirse süre 2 katına çıkar ve 24 gün olur.

Filiz 1 günde işin $\frac{1}{4}$ ini

Sedef 1 günde işin $\frac{1}{24}$ ini yapar. İkisi birlikte 3 günde işin

$\left(\underset{(6)}{\frac{1}{4}}+\underset{(1)}{\frac{1}{24}}\right)\cdot 3 = x \Rightarrow \frac{7}{24}\cdot 3 = x \Rightarrow x = \frac{7}{8}$ sini yaparlar.

Havuz Problemleri

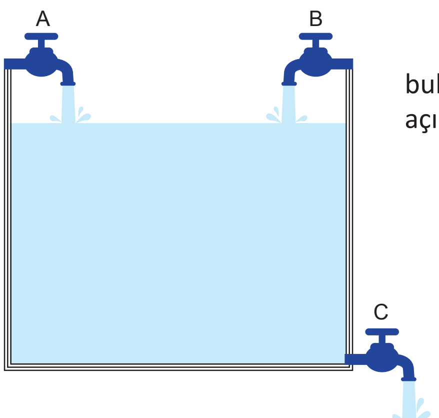
Havuz problemlerinin çözümü de işçi problemlerine benzemektedir.

Bir havuzu bir musluk x saatte doldurursa

- 1 saatte $\frac{1}{x}$ ini,
- a saatte $\frac{a}{x}$ ini doldurur.

1. musluğun a saatte, 2. musluğun b saatte doldurduğu bir havuzu ikisi birlikte x saatte dolduruyorsa bu durum,

$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot x = 1$ veya $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x}$ tir.



Bir havuzu üsteki iki musluk, sırasıyla a ve b saatte doldururken dipte bulunan 3. musluk dolu havuzu c saatte boşaltsın. Üçü birden aynı anda açıldığında boş havuzu x saatte dolduruyorlarsa bu durum

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=\frac{1}{x}$ bağıntısıyla ifade edilir.

1. ÖRNEK

A ve B muslukları, boş bir havuzu sırasıyla 12 ve 18 saatte doldururken havuzun altında bulunan C musluğu, dolu havuzu 36 saatte boşaltmaktadır. Üç musluk aynı anda açıldığında boş havuzun kaç saatte dolacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

Üç musluk, aynı anda açıldığında boş havuzu x saatte doldursun.

$$\underset{(6)}{\frac{1}{12}}+\underset{(4)}{\frac{1}{18}}-\underset{(2)}{\frac{1}{36}}=\frac{1}{x}$$

$$\frac{6+4-2}{72}=\frac{1}{x}$$

$$\frac{8}{72}=\frac{1}{x}\Rightarrow x = 9 \text{ saatte dolar.}$$

2. ÖRNEK

800 litrelik bir havuzu A musluğu 12 saatte, B musluğu 16 saatte dolduruyor. Havuzun dibindeki C musluğu, dolu havuzu 24 saatte boşaltıyor. Havuz boşken 3 musluk birlikte açıldığında havuz dolana kadar C musluğu nun kaç litre su boşaltacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

Üç musluk havuzu t saatte doldursun.

$$\underset{(4)}{\frac{1}{12}}+\underset{(3)}{\frac{1}{16}}-\underset{(2)}{\frac{1}{24}}=\frac{1}{t}$$

$$\frac{4+3-2}{48}=\frac{1}{t}$$

$$\frac{5}{48}=\frac{1}{t}\Rightarrow t=\frac{48}{5}\text{ saatte dolar.}$$

C musluğu,

24 saatte — 800 litre

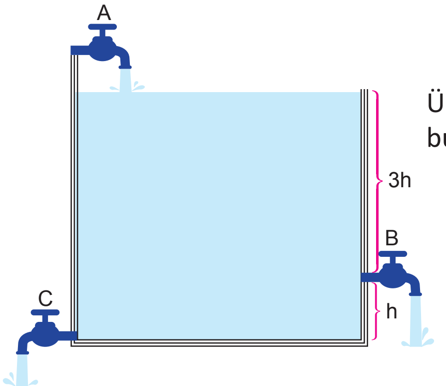
$\frac{48}{5}$ — x litre boşaltır.

D.O

$$24\cdot x=800\cdot\frac{48}{5}\Rightarrow x=320\text{ litre su boşaltmış olur.}$$

3. ÖRNEK

Şekildeki gibi bir depoya üç musluk yerleştiriliyor. A musluğu, depoyu tek başına 6 saatte dolduruyor. C musluğu, tek başına 12 saatte boşaltıyor. B musluğu da kendi seviyesine kadar olan kısmı tek başına 12 saatte boşaltıyor.



Üç musluk aynı anda açıldığında boş deponun kaç saatte dolacağını bulunuz.

ÇÖZÜM

A ve C muslukları açıkken geçen süre t_1 olsun.

$$\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{12}\right)\cdot t_1=\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{12}\cdot t_1=\frac{1}{4}\Rightarrow t_1=3\text{ saat olur.}$$

B musluğu için

12 saatte — $\frac{3}{4}$

x saatte — 1 (tamamı) boşalır.

D.O

$$12\cdot 1=x\cdot\frac{3}{4}\Rightarrow x=16\text{ olur.}$$

Muslukların üçü birden açıkken geçen süre t_2 olsun.

$$\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{16}\right)\cdot t_2=\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{48}\cdot t_2=\frac{3}{4}\Rightarrow t_2=36\text{ saat olur.}$$

$$t_1+t_2=3+36=39\text{ saatte dolar.}$$

ALIŞTIRMALAR-11

1. %20 zararla 240 TL ye satılan bir malın %30 kârla kaç TL ye satılacağını bulunuz.

2. Bir tüccar malının $\frac{1}{4}$ ünü %20 kârla, kalan malın $\frac{1}{5}$ ini %40 zararla ve geri kalanını da %30 kârla satmıştır.
Bu tüccarın tüm satıştan yüzde kaç kâr edeceğini bulunuz.

3. Bir miktar paranın %30 dan 1 yılda getirdiği faizi, 6 ayda getirebilmesi için yıllık yüzde kaçtan faize verilmesi gerektiğini bulunuz.

4. İrfan Bey; parasını yıllık %26 yerine aylık %4 faizle bankaya yatırsaydı 6 ayda 2200 TL daha fazla faiz geliri elde edecekti. Buna göre İrfan Bey'in bankaya yatırdığı para miktarını bulunuz.

5. Güler, biriktirdiği parasını yıllık %40 faizle 3 yıllığına bankaya yatırıyor. 3. yıl sonunda faizi ile 8800 TL si olan Güler'in biriktirdiği para miktarını bulunuz.

6. Şeker oranı %18 olan 40 g şekerli suya kaç g saf su ilave edilirse şeker oranının %6 ya düşeceğini bulunuz.

7. %30 luk 500 g şekerli suya 1000 g saf su ve 300 g şeker eklendiğinde elde edilen yeni karışımın şeker yüzdesini bulunuz.

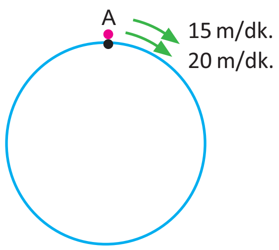
8. Ağırlıkça %30 u şeker olan 70 g lık un ve şeker karışımına 14 g şeker ve 21 g un eklenirse yeni karışımdaki un/şeker oranını bulunuz.

9. Bir araç 4 saatte gittiği yolu, 7 saatte geri dönüyor. Gidiş hızı, geliş hızından 30 km fazla olduğuna göre yolun uzunluğunu bulunuz.

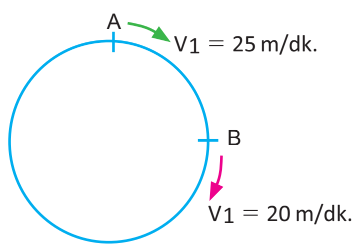
10. Bir araç, A dan B ye (toprak yol) 30 km/sa. B den C ye (asfalt yol) 90 km/sa. hızla gitmiştir. $|AB| = 3 \cdot |BC|$ ise ortalama hızı bulunuz.

11. Aralarında 60 km uzaklık bulunan iki araç aynı anda aynı yöne doğru hareket ediyor. Arkadakinin hızı 80 km/sa., öndekinin hızı 70 km/sa. olduğuna göre arkadaki aracın öndekine kaç saatte yetişeceğini bulunuz.

12. Dairesel pistin çevresi 360 m dir. A dan aynı anda aynı yöne doğru harekete başlayan iki hareketlinin kaç dakika sonra karşılaşacağını bulunuz.



13. $|\widehat{AB}| = 50$ m olup şekilde gösterildiği gibi iki hareketli aynı anda harekete başladıktan 46 dakika sonra ikinci kez karşılaştığına göre pistin çevresini bulunuz.

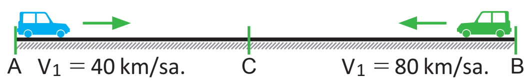


14. Bir yüzücünün durgun sudaki hızı 20 m/dk., akıntılı sudaki hızı 10 m/dk. dır. Bu yüzücü, akıntıya karşı açılıp belli bir süre yüzerek tekrar geri döndüğüne göre yüzücünün ortalama hızını bulunuz.

15. İzmir Mavi Treni, belli bir noktadan 5 sn de ve İzmir'in Buca ilçesi ile Şirinyer semti arasında bulunan 2000 m lik Şirinyer Tüneli'ni 30 sn de geçmektedir. Buna göre

a) Trenin boyunun kaç metre olduğunu bulunuz.
b) Trenin hızının kaç km/sa olduğunu bulunuz.

16.



Şekilde hızları $V_1 = 40$ km/sa., $V_2 = 80$ km/sa. olan iki hareketli aynı anda, zıt yönde birbirlerine doğru hareket ediyor. Aralarındaki mesafe $|AB| = 600$ km olduğuna göre bu iki hareketlinin kaç saat sonra karşılaşacağını bulunuz.

17. Aralarında 180 km mesafe bulunan iki şehirden aynı anda aynı yöne doğru hareket eden iki araçtan hızlı olan, yavaş olana 6 saat sonra yetişiyor. Araçlar zıt yönde hareket ettiğinde ise 2 saat sonra karşılaşıyor. Her bir aracın hızını bulunuz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME-1

A) Aşağıdaki 1-4. cümlelerde boş bırakılan yerlere uygun sözcük ya da değerleri yazınız.

1. $(a-2)x-3=0$ denkleminin çözüm kümesi $\emptyset$ ise $a=$.................... olur.

2. $ax+b=0$ denkleminde $a=0$ ve $b=0$ ise çözüm kümesi .... olur.

3. $|x+2|-1<0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi .... olur.

4. $2^x=3$ olduğuna göre 4^{2x+2} işleminin sonucu .... olur.

B) Aşağıda 5. soruda numaralar ile verilen ifadeleri, harf ile verilen ifadelerle eşleştiriniz.

5.

$5^{3x-2}=5^{2x+3}$	1.	a)	$[3,\infty)$
$\|2x-3\|=1$	2.	b)	$\{1,2\}$
$3x-9\geq 0$	3.	c)	$\{-6\}$
$\|x+5\|=2x-4$	4.	ç)	$\{5\}$
		d)	$\{9\}$

C) Aşağıda 6-9. açık uçlu soruların cevaplarını boş bırakılan yerlere yazınız.

6. $\left.\begin{array}{l} x=4322 \\ y=7328 \end{array}\right\}$ ise $\quad x\cdot y+x^y-x+y$

ifadesinin 11 ile bölümünden kalanı bulunuz.

7. xyz7 dört basamaklı sayısının 18 ile bölümünden oluşabilecek iki basamaklı kalanların toplamını bulunuz.

8. Dört basamaklı abcd sayısının 13 ile bölümünden kalan 5 tir. Bu sayının birler ve yüzler basamağındaki rakamlar 1 azaltılıp onlar ve binler basamağındaki rakamlar 2 arttırılıyor. Oluşan yeni sayının 13 ile bölümünden kalanı bulunuz.

9. $3x-ky=2k-6$

$kx-12y=12$

denklem sisteminin çözümü boş küme ise k değerini bulunuz.

Ç) Aşağıda 10-27. çoktan seçmeli soruları okuyunuz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

10. Ardışık 3 çift doğal sayının çarpımı, aşağıdakilerden hangisine daima <u>bölünmez</u>?

A) 4 B) 6 C) 12 D) 16 E) 18

11. Bölme işlemine göre bölüm ile kalanın toplamı kaçtır?

$$\begin{array}{r|l} ab0ab7 & ab \\ \cline{2-2} & \\ \hline & \end{array}$$

A) 117 B) 1107 C) 10017 D) 10017 E) 10117

12.

$$\begin{array}{r|l} 2x+y & x-3 \\ \cline{2-2} & y-8 \\ \hline 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} y & z+2 \\ \cline{2-2} & 2 \\ \hline 2 & \end{array}$$

Verilen bölme işlemlerine göre z nin x türünden ifadesi, aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{4x-4}{8-2x}$ B) $\frac{2x-2}{x-4}$ C) $\frac{-2x+2}{-x-6}$ D) $\frac{x-6}{2x-8}$ E) $\frac{-x-1}{2x-6}$

13. $(3a+b)x-2(b+1)=x+6+a$ denkleminin çözüm kümesi $\mathbb{R}$ ise $a+b$ değeri kaçtır?

A) -5 B) -3 C) 0 D) 1 E) 2

14. Verilen bölme işleminde 3x iki basamaklı bir sayıdır. Buna göre x aşağıdakilerden hangisi <u>olamaz</u>?

$$\begin{array}{r|l} 67.... & 3x \\ \cline{2-2} & 2 \\ \hline & \end{array}$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

15. Verilen bölme işleminde $a \in \mathbb{Z}^+$, $b \in \mathbb{R}$ dir. Buna göre a nın alabileceği en büyük değer kaçtır?

$$\begin{array}{r|l} a & 41 \\ \cline{2-2} & b^2+4 \\ \hline b^2 & \end{array}$$

A) 1453 B) 1516 C) 1681 D) 1724 E) 1844

16. $A=\frac{3}{17}-\frac{2}{15}+\frac{28}{11}$

$B=\frac{13}{15}-\frac{14}{17}+\frac{6}{11}$ sayısının A sayısı türünden eşiti nedir?

A) $A-2$ B) $A-1$ C) $A+1$ D) 2A E) $A-3$

17. $a,b,c \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$\frac{38}{7}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}$ ise $a+b+c$ değeri kaçtır?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

18. $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}<0,\ x^2<x,\ (y-x)^3\cdot z\geq 0$
olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

A) $y<0$ B) $x+y>1$ C) $-1<x<1$
D) $z>0$ E) $x\cdot y\cdot z\leq 0$

19. x ve y reel sayıları için
$-4<\frac{x-1}{2}<1$
$3\leq 2-y<5$
ise x^2-2y^3 ifadesinin alabileceği en büyük ve en küçük tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 112 B) 104 C) 72 D) 54 E) 26

20. $\frac{1}{x^2+5}<\frac{1}{(x-1)^2}$ eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

A) $(-2,\infty)-\{1\}$
B) $(1,\infty)$
C) $(-\infty,-2)$
D) $(1,4)$
E) $(-\infty,1)$

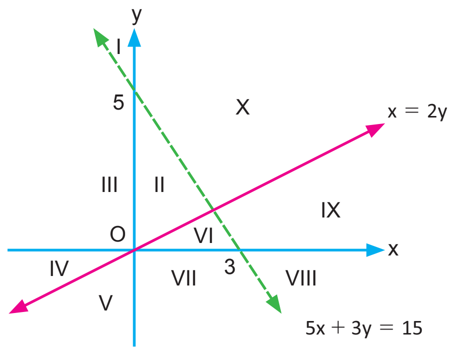
21. $-4\leq a<0$
$1<b\leq 2$
$-5\leq c<3$
olduğuna göre $(a-2b)\cdot c$ sayısı hangi aralıkta değer alır?

A) $(-16,10)$ B) $(-24,40]$ C) $[-6,20)$
D) $[-18,10]$ E) $[-28,36)$

22. $z<0<y<x$ olmak üzere
$\frac{|y-z|-|x-y|+|y-2x|-|-y|}{|x-z|}$ ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{x-z}{x+z}$ B) $\frac{y+z}{x-z}$ C) $2x$
D) 1 E) -1

23. $\left.\begin{array}{r}2y\geq x\\ 5x+3y<15\end{array}\right\}$
eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi aşağıdaki bölgelerden hangilerinin birleşimidir?



A) IX ve VIII
B) V, VI ve VII
C) II, III ve IV
D) II ve IV
E) I ve X

24. $||x+2|+5|=6$
denklemini sağlayan x gerçek sayılarının çarpımı kaçtır?

A) -2 B) -3 C) 0 D) 2 E) 3

25. $|x-3|-2x=10$ eşitliğini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?

A) $\frac{-7}{3}$ B) $\frac{-5}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{7}{3}$

26. $|x-3|+|x+4|=8$ denklemini sağlayan x değerlerinin toplamı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 4 B) $\frac{7}{2}$ C) 3 D) -1 E) -2

27. $|x-3|-|12-4x|>15$ eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-3,8)$ B) $(-3,10)$ C) $\varnothing$
D) $(3,8)$ E) $(3,10)$

E) 28. soruyu aşağıda verilen metne göre cevaplandırınız.

28. Tarımla geçimini sağlayan bir kişi, yaşadığı bölge tarıma uygun olmasına rağmen iklim şartlarından dolayı istediği ürünü yetiştirememektedir. Bu sebeple bir sera kurmaya karar verir.

Bu seranın gelir gider ve maliyet bilgileri yaklaşık aşağıdaki gibidir.

- Seranın kurulum maliyeti: 52 500 TL
- Yıllık yaklaşık gelir: 45 000 TL
- Kurulacak seranın 12 ay boyunca aylık gideri: 500 TL
- Verimlilik: Bir yılın yaklaşık %75 inde üretim yapılabilmektedir.

Verilen bilgilere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Sera bir yılın kaç ayı tam kapasiteyle çalışır?
b) Seranın çalıştığı zamandaki üç aylık geliri en fazla kaç TL dir?
c) Bu seradan kâr edilebilmesi için en az kaç ay üretim yapılması gerekir?

F) 29. soruyu aşağıda verilen metne göre cevaplandırınız.

29. Likya Yolu; Fethiye'den başlayıp Antalya'ya kadar devam eden, Antik Likya kalıntılarının olduğu, etrafında dağ köyleri ve şelalelerin bulunduğu tarihi bir yürüyüş yoludur. Likya Yolu'nda her yıl yaklaşık 30 bin kişi yürümektedir.

Buna göre

a) Likya Yolu'nda günde ortalama kaç kişi yürüyüş yapmaktadır?
b) Furkan, gece karanlığına kalmadan saat 18.00 e kadar Mavikent-Gelidonya Feneri-Adrasan etabını yürümeyi düşünüyor. Furkan'ın ortalama hızı saatte 5 km dir. ve 40 km lik bu etapta 2 saat yürüyüp 30 dk dinlenmeyi planlamaktadır. Furkan, en geç saat kaçta yürüyüşe başlamalıdır?
c) Furkan'ın 40 km lik yürüyüşünde kaç adım atmış olabileceğini tahmin ediniz.
(Dinlenme zamanındaki adımlar hesaplamaya katılmayacaktır.)

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME-2

1. Rakamları çarpımı 32 olan en büyük 4 basamaklı doğal sayının 11 ile bölümünden kalan kaçtır?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

2. Üç basamaklı, rakamları farklı bir doğal sayının 5 ile bölümünden kalan 3 tür. Bu sayı 36 ile bölünebildiğine göre yüzler basamağındaki rakam en çok kaç olabilir?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

3. 7 ile bölünebilen üç basamaklı kaç tane çift sayı vardır?

A) 64 B) 65 C) 66 D) 67 E) 68

4. $x = 2y$ olmak üzere beş basamaklı x613y sayısı 2 ile bölünebilmektedir. Bu sayının 3 ile bölümünden kalan 1 ise x değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

5. Bir mimar tanesini 45 TL den aldığı lambalar için ödeme yapıyor. Faturada toplam tutarın 1□5□ TL şeklinde silik çıktığını görüyor. Tek sayıda lamba alındığı bilindiğine göre silik çıkan rakamların çarpımı kaçtır?

A) 0 B) 15 C) 25 D) 35 E) 45

6.

	3	4	5	11
3AB4	•	•		
B10A			•	•

Tabloda satırda bulunan dört basamaklı sayıların 3, 4, 5 ve 11 sayılarından hangileri ile tam bölündükleri işaretlenmiştir. Buna göre B sayısı kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 4 D) 6 E) 8

7. 168 ile en küçük hangi doğal sayı çarpılırsa sonuç, bir doğal sayının tam karesi olur?

A) 42 B) 56 C) 72 D) 84 E) 168

8. 1500...0 sayısının asal olmayan tam sayı bölenlerinin sayısı 285 olduğuna göre bu sayının sondan kaç basamağı sıfırdır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

9. x ve y tam sayı olmak üzere $y = \dfrac{2x + 152}{x + 1}$ eşitliğini sağlayan kaç farklı x değeri vardır?

A) 8 B) 12 C) 18 D) 24 E) 30

10. $8^3 \cdot 9^3 \cdot 125^5$ sayısının kaç tane tam kare olan pozitif tam sayı böleni vardır?

A) 64 B) 160 C) 320 D) 480 E) 810

11. $12^x = 3^{x+2}$ olduğuna göre 16^x ifadesinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 36 B) 49 C) 64 D) 81 E) 111

12. $5^{-x+2} - 2 \cdot 5^{1-x} + 3 \cdot 5^{-x} = 90$ denklemini sağlayan x değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) -2 B) -1 C) 1 D) 2 E) 3

13. $(x+1)^{1-x^2} = 1$ denkleminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-1, 1\}$
B) $\{-2, -1, 0\}$
C) $\{-2, 1\}$
D) $\{-2, -1, 1\}$
E) $\{1, 0\}$

14. $\dfrac{(-x)^{-4} \cdot (-x)^{-3}}{(-x)^{+2} \cdot (-x)^{-1} \cdot (-x^{-4})}$
işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir.

A) $-x^{-5}$
B) $-x^{-4}$
C) x^4
D) $(-x)^{-4}$
E) x^2

15. $x - 5 = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ ise $x - 2\sqrt{x}$ değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

16. $\dfrac{\sqrt{10} - \sqrt{5}}{\sqrt{3 - \sqrt{8}}}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{2}$ D) 1 E) -1

17. $\dfrac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{11} + 1} = x$ olduğuna göre $\dfrac{\sqrt{11} - 1}{\sqrt{5} + 1}$ ifadesinin x türünden eşiti, aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\dfrac{3x}{5}$ B) $\dfrac{2x}{3}$ C) $\dfrac{3x}{2}$ D) $\dfrac{5x}{2}$ E) $\dfrac{x}{3}$

18. $A = \sqrt[64]{2} - 1$ olduğuna göre $(\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt[4]{2} + 1) \ldots (\sqrt[64]{2} + 1)$ ifadesinin A türünden eşitini bulunuz.

A) A B) 2A C) A^2 D) $A + 2$ E) $\dfrac{1}{A}$

19. x, y, z sayıları sırasıyla 2, 4 ve (-3) sayılarıyla doğru orantılıdır. $x + y + z = 12$ olduğuna göre $x^2 + 4z - y$ değeri kaçtır?

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

20. 420 tane badem 7, 9, 12 yaşlarındaki üç çocuğa yaşları ile doğru orantılı olarak paylaştırılıyor. Bu paylaşım, 3 yıl sonra yaşları ile ters orantılı olarak yapılsaydı büyük kardeşin alacağı badem sayısı ilk duruma göre ne kadar azalırdı?

A) 43 B) 52 C) 57 D) 68 E) 72

21. Bir izci grubundaki 80 izciye 37 gün yetecek kadar yiyecek vardır. 7 gün sonra izcilerden 20 tanesi kamptan ayrılıyor. Kalan izcilerin her birinin günlük yiyeceği $\dfrac{1}{4}$ oranında artırılırsa kalan yiyecek izcilere kaç gün yeter?

A) 25 B) 30 C) 32 D) 40 E) 54

22. Bir aracın duruş mesafesi, frene bastığı andaki hızının karesi ile doğru orantılıdır. Araç, saatte 80 km hızla giderken 40 m de durabiliyorsa saatte 120 km hızla giderken frene basıldığında kaç metrede durabilir?

A) 60 B) 80 C) 90 D) 100 E) 110

23. Bir merdivenin basamaklarını ikişer ikişer çıkıp üçer üçer inen bir kişinin çıkarken attığı adım sayısı, inerken attığı adım sayısından 8 fazladır. Buna göre merdivenin basamak sayısı kaçtır?

A) 44 B) 45 C) 46 D) 47 E) 48

24. Bir manavda satılan üç çeşit biberin kg satış fiyatının ortalaması 5 TL olup satışlardan elde edilen kazanç sırasıyla 53 TL, 65 TL ve 70 TL dir. Biberlerin kg satış fiyatları ve satış miktarları birer doğal sayı olduğuna göre toplam satış yapılan biber kaç kg dır?

A)115 B) 128 C) 90 D) 75 E) 46

25. Bir gezi grubundaki erkeklerin sayısı, bayanların sayısının %60 ıdır. Bu grupta bulunan erkeklerin sayısı 60 tan fazla olduğuna göre gruptaki bayanların sayısı en az kaçtır?

A) 100 B) 101 C) 103 D) 105 E) 110

26. Bir benzin tankının içinde bir miktar benzin vardır. Tanka 400 litre benzin ilave edilirse tankın $\frac{4}{7}$ si doluyor. Oysa tanka benzin ilave etmeyip 200 litre benzin boşaltılsaydı tankın $\frac{1}{7}$ si dolu olarak kalacaktı. Buna göre tankın tamamı kaç litre benzin alır?

A) 600 B) 980 C) 1240 D) 1300 E) 1400

27. Bir alışveriş merkezinde 3 döner menü alana 1 adet sinema bileti hediye edilmektedir. 1 adet sinema biletinin fiyatı 1 adet döner menü fiyatından 8 TL fazladır. Birlikte sinemaya giden 6 arkadaş, 6 adet döner menü alarak 2 hediye bilet kazanmıştır. Geriye kalan 4 bileti de sinema gişesinden satın almışlardır. Bu 6 arkadaş, toplam 132 TL harcadığına göre 1 adet sinema biletinin fiyatı kaç TL dir?

A) 18 B) 20 C) 22 D) 24 E) 26

28. Bir annenin yaşı, üçer yıl arayla doğmuş 3 çocuğunun yaşları toplamından 6 eksiktir. En küçük çocuk doğduğunda anne 39 yaşında olduğuna göre en büyük çocuğun şimdiki yaşı kaçtır?

A) 18 B) 20 C) 21 D) 23 E) 24

29. Azime ve Elif'in yaşları toplamı 20 dir. Azime Elif'in şimdiki yaşında iken Elif'in doğmasına 2 yıl vardı. Elif şimdi kaç yaşındadır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

30. Ayşe kardeşine "Ben senin yaşındayken sene 2000 yılıydı. Sen babamın yaşına geldiğinde sene 2040 yılı olacak." diyor. Ayşe, kardeşinden 6 yaş büyük olduğuna göre Ayşe'nin babası kardeşinden kaç yaş büyüktür?

A) 34 B) 30 C) 28 D) 25 E) 23

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME-3

1. $A = \{0, 1, 2, ..., 20\}$ kümesinin 2 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde elemanlar toplamı 3 ün katıdır?

A) 49 B) 61 C) 70 D) 82 E) 94

2. Bir lise, öğrencilerinin sosyal faaliyetlerdeki fotoğraflarından oluşacak kare bir pano yaptıracaktır.

Bir fotoğrafın boyutu 10 cm ve 15 cm olduğuna göre panonun alanı en az kaç cm^2 olabilir?

A) 500 B) 600 C) 700 D) 800 E) 900

3. Rakamları farklı 31x5y sayısı 12 ve 18 ile bölünebilmektedir. Buna göre x in alabileceği değer kaçtır?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

4. Bir pasta atölyesinde boyutları 24 cm, 42 cm ve 54 cm olan dikdörtgen prizması şeklinde kek üretilmektedir. Bu kek küp biçiminde eşit parçalara ayrılarak şeker hamuru ile kaplanacaktır. Kaplama için az miktarda şeker hamuru kullanılmak isteniyor. Buna göre oluşacak küp şeklinde pasta sayısı kaçtır?

A) 240 B) 252 C) 264 D) 275 E) 286

5. Bir sempozyumda 3 farklı oturum şekli planlanmıştır.

Oturum	Çalışma	Dinlenme
A	20 dk.	10 dk.
B	50 dk.	10 dk.
C	80 dk.	10 dk.

09.00 da başlayan sempozyumda 12.00 den sonra öğle yemeği verilecektir. Tüm grupların aynı anda katılabileceği öğle yemeği en erken saat kaçta başlayabilir?

A) 12.00 B) 12.10 C) 13.20 D) 13.30 E)13.40

6. $EBOB(a, 28, 36) = 4$
$EKOK(a, 28, 36) = 1260$

koşulunu sağlayan a nın alabileceği kaç doğal sayı değeri vardır?

A) 6 B) 8 C) 12 D) 15 E) 16

7. $A = a^3 \cdot b^3 \cdot c$
$B = a^2 \cdot b^4 \cdot c^3$ verilenlere göre $\dfrac{EKOK(A, B)}{EBOB(A, B)} = ?$

A) $a \cdot b^2 \cdot c$ B) $a \cdot b \cdot c^2$ C) $a^2 \cdot b \cdot c$ D) $a^2 \cdot b^2 \cdot c$ E) $a \cdot b \cdot c$

8. Ebru, 160 sorunun olduğu bir sınavda 85 sorudan 82 sini cevaplayabilmiştir. Tüm soruların %70 ini cevaplayabilmesi için geriye kalan soruların yüzde kaçını cevaplaması gerekir?

A) 70 B) 60 C) 50 D) 40 E) 30

9. Bir miktar para, yıllık %25 ten 1 yıllığına bankaya yatırılmıştır. Aynı paranın %30 dan aynı faizi getirmesi için kaç aylığına bankaya yatırılması gerekir?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

10. Bir ürün x TL ye satıldığında %50 kâr, y TL ye satıldığında %40 zarar ediliyor. Buna göre $\frac{x}{y}$ oranı kaçtır?

A) $\frac{3}{2}$ B) 2 C) $\frac{5}{2}$ D) 3 E) $\frac{7}{2}$

11. Kilogramı 22 liradan alınan bir miktar kabuklu ceviz, kabuklarından temizlenirse %45 fire vermektedir. Ceviz içinin kilosu 50 liradan satılırsa kâr % kaç olur?

A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 40

12. Etiket fiyatının %25 eksiğine alınmış olan bir mal, zam yapılarak etiket fiyatının %20 fazlasına satıldığına göre bu satışta kâr yüzdesi kaçtır?

A) 45 B) 48 C) 50 D) 55 E) 60

13. %20 si tuz olan 140 g ve %60 ı su olan 60 g tuz-su karışımları bir kapta karıştırılıyor. Oluşan karışımın %20 si buharlaştırılırsa son durumdaki tuz oranının yüzdesi kaç olur?

A) 32,5 B) 33,5 C) 34,5 D) 35,5 E) 36,5

14. %25 tuz oranı ile su akıtan I. musluk boş bir havuzu 8 saatte, %30 tuz oranı olan II. musluk boş havuzu 12 saatte doldurmaktadır. Havuz boş iken iki musluk aynı anda açılırsa dolan havuzun tuz oranı % kaç olur?

A) 26 B) 27 C) 27,5 D) 28 E) 28,5

15. Bir otomobil, A şehrinden B şehrine saatte 60 km hızla gitmiş ve saatte V km hızla dönmüştür. Otomobilin gidiş dönüşteki ortalama hızı saatte 40 km olduğuna göre V değeri kaçtır?

A) 20 B) 25 C) 27 D) 28 E) 30

16. Bir araç; 320 km lik bir yolun yarısını 80 km/sa., $\frac{1}{8}$ lik kısmını 60 km/sa., kalan yolu 90 km/sa. hızla gitmiştir. Bu aracın ortalama hızı saatte kaç km dir?

A) 60 B) 70 C) 80 D) 90 E) 100

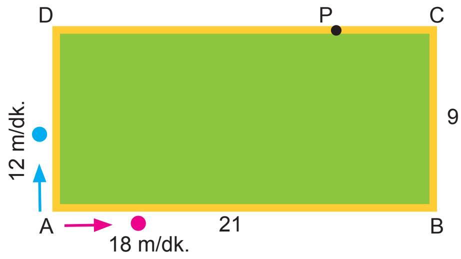
17. Eş güçteki 2 usta ve 3 çırağın 12 saatte yaptığı bir işi, 1 usta ve 3 çırak birlikte 18 saatte bitirmektedir. Buna göre aynı işi 1 çırak kaç saatte bitirir?

A) 100 B) 102 C) 105 D) 108 E) 110

18. 200 m uzunluğundaki bir trenin hızı saniyede 40 m dir. Bu trenin önüne geçmeyi planlayan bir motosikletlinin trene uzaklığı 5 km olduğuna göre motorsiklet saatte kaç km hızla giderse 12 dakika sonra trenin önüne geçer? (Motorsikletin uzunluğu ihmal edilecektir.)

A) 170 B) 180 C) 185 D) 190 E) 195

19. Şekildeki dikdörtgenin A noktasından, aynı anda belirtilen yönlerde harekete başlayan iki koşucunun dakikadaki hızları 12 m/dk. ve 18 m/dk. dır.



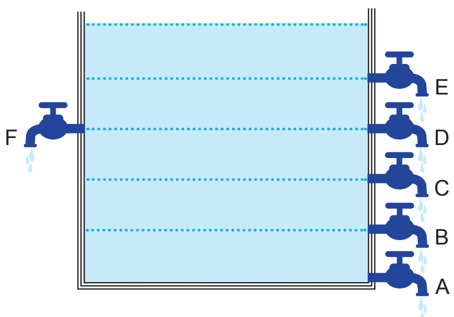
Bu iki koşucu, P de karşılaştıklarına göre |PC| kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

20. Aynı güçteki 3 çırak bir işi birlikte 12 günde, aynı güçteki 3 usta ise aynı işi 8 günde bitiriyor. 6 çırak ve 4 usta bu işi kaç günde bitirebilir?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

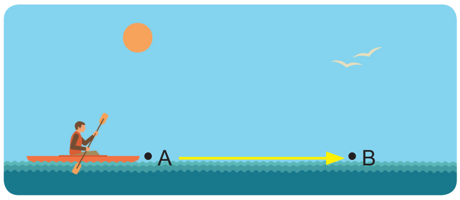
21. Şekilde verilen özdeş 6 musluk birlikte açıldığında dolu havuzu 33 saatte boşaltmaktadır.



Buna göre A musluğu tek başına havuzun tamamını kaç saatte boşaltır?

A) 70 B) 72 C) 75 D) 80 E) 85

22.



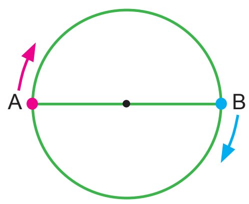
Akıntı hızı 8 km/sa. olan bir nehirde durgun sudaki hızı 24 km/sa. olan bir kayık A noktasından B noktasına gidiş ve dönüşünü toplam 12 saatte tamamlıyor. Kayığın aldığı yol kaç km dir?

A) 124 B) 188 C) 200 D) 250 E) 256

23. A musluğu boş havuzu 8 saatte, B musluğu aynı boş havuzu 12 saatte doldurmaktadır. A musluğundan birim zamanda akan su miktarı %60 arttırılıp B den akan su miktarı %20 azaltılıyor. İki musluk aynı anda açılırsa boş havuz kaç saatte dolar?

A) $\frac{25}{4}$ B) $\frac{15}{4}$ C) $\frac{20}{3}$ D) $\frac{28}{5}$ E) $\frac{24}{5}$

24. [AB] çaplı dairesel pistin yarıçapı $\frac{40}{\pi}$ m dir. A dan 10 m/dk. B den 8 m/dk. hız ile iki cisim aynı anda harekete başlıyor.



Harekete başladıktan kaç dakika sonra hızlı olan diğeriyle üçüncü kez karşılaşır?

A) 90 B) 100 C) 110 D) 120 E) 130

GEOMETRİ

9.4. ÜÇGENLER

Neler Öğreneceksiniz?

- Üçgende açı özelliklerini kullanarak uygulamalar yapabilmeyi,
- Üçgenin kenar uzunlukları ile bu kenarları gören açılar arasındaki ilişkilendirmeyi,
- Üçgen eşitsizliğini,
- Üçgenin iç ve dış açıortayları ile bunların özelliklerini, iç ve dış açıortay uzunluklarını hesaplayabilmeyi,
- Üçgende kenarortay ve özellikleri ile kenarortay uzunluğunu hesaplayabilmeyi,
- Üçgende kenarortayı,
- Farklı üçgen çeşitlerine göre kenarlara ait yükseklikleri çizebilmeyi,
- İki üçgenin eş olması için gerekli asgari koşullar ile üçgende eşlik kurallarını,
- İki üçgenin benzer olması için gerekli asgari koşullar ile üçgendeki temel benzerlik kurallarını (Menelaus, Seva, Stewart, Carnot ve Thales teoremleri),
- Dik üçgendeki Pisagor ve Öklid teoremleri, bu teoremlerin uygulamaları ile dar açıların trigonometrik oranlarını,
- Yükseklikleri aynı olan üçgenlerin alanları ile tabanları arasındaki ilişkiyi,
- Benzer üçgenlerin alanları ile benzerlik oranı arasındaki ilişkiyi öğreneceksiniz.

Üçgenleri Öğrenmek Neden Önemlidir?

- Açılar ve üçgenler, geometrinin en temel konularıdır. Karşılaşılan şekillerin çevre, yükseklik, açıortay, kenarortay ve alanını bulmak gerekebilir. Mesela inşaatçılık, haritacılık, mobilyacılık, arazi ölçümü ve süslemecilik gibi alanlarda açıların ve üçgenlerin bu özellikleri ve hesaplamaları kullanılmaktadır.
- Üçgenler konusu ne kadar iyi öğrenilip uygulanabilirse dörtgenler, beşgenler vb. konuların öğrenilmesi de o ölçüde kolaylaşır. Bu da günlük hayatta karşılaşılan karmaşık şekillerin üçgenlere bölünerek daha iyi anlaşılmasını sağlar.
- Ayrıca günlük hayatta karşılaşılan hesaplaması zor bazı uzunlukların (örneğin bir ağacın boyu, bir binanın ya da dağın yüksekliği, bir deniz aracının kıyıya uzaklığı, çok uzak mesafedeki uzunluklar vb.) bulunmasında geometri teoremlerinden yararlanılır.
- Geometri, bazı matematik problemlerine farklı açılardan bakılmasını sağlayarak yeni çözüm yöntemlerinin geliştirilmesine olanak sağlar.

(Mustafa Kemal Atatürk 1881-1938)

İnsanoğlu, çok eski çağlardan bugüne kadar geometriye ve geometrik hesaplamalara ihtiyaç duymuştur.

Günlük yaşantı ihtiyaçları geometriye gereksinim duyulmasının ana sebebidir. Örneğin Eski Mısır'da Nil Nehri'nin taşması sonucu kaybolan arazilerin ölçümlerinde ve piramitlerin yapımında geometri bilimi kullanılmıştır.

Sümerler, Babiller ve Akadlara ait kil tabletlerde de geometrik hesaplamalara rastlanmıştır. Yunan Matematikçi Thales (Tales) piramitlerin ve dağların yüksekliklerini, nehirlerin genişliklerini ve denizdeki bir geminin kıyıya olan uzaklığını benzerlik teoremlerini kullanarak hesaplamıştır. Ayrıca Yunan matematikçilerden Pisagor, Euclides (Öklid), Apollonius (Apolyonus) ve Archimedes (Arşimet) de geometrinin gelişiminde katkıları olan önemli bilim insanlarındandır. Yunan matematikçilerin geometri bilimi için ortaya attığı bu teoremler; Arap ve Türk matematikçileri Harezmî, Ömer Hayyam, Sabit Bin Kurra, Beyrûni ve Nasîrûddin Tûsî'nin yazdıkları şerhler ve ortaya koydukları görüşler neticesinde gelişerek yeni boyutlar kazanmıştır.

Tûsî'nin Öklid'in elementleri için yazdığı "Tahrîru Öklidis (Tahrirü'l usûl)" adlı eser, asırlarca kendi alanında en önemli çalışmalardan biri olarak ün yapmıştır. Tûsî, Öklid dışındaki geometri çalışmalarının ortaya çıkmasında öncülük etmiştir.

Sabit Bin Kurra, iki geometrik problemin cebir yöntemiyle çözülmesini sağlamıştır. Bu açıdan matematik tarihinde cebrin geometrik problemlere uygulanışını açık şekilde gösteren ilk bilim insanı Sabit Bin Kurra'dır.

Ebu'l Vefa, pergelin bir tek açıklığıyla daire içine kare çizimini ve verilen bir kare içine eşkenar üçgen çizimini ilk kez yapan bilim insanıdır.

Cahit Arf ise cebir konusundaki çalışmaları ile ün kazanmıştır. Sentetik geometri problemleri ile uğraşmıştır. Arf değişmezi, Arf halkaları, Arf kapanışı gibi çalışmaları yanında "Hasse-Arf Teoremi"ni de ispatlamıştır. Matematiğe yapmış olduğu köklü katkılardan dolayı 1974'te de TÜBİTAK Bilim Ödülü'ne layık görülmüştür.

Atatürk'ün iyi bir asker, politikacı ve vatansever olmasının yanında matematik bilimine de katkıları olmuştur. Atatürk'ün hazırladığı geometri kitabı 1937 yılında Kültür Bakanlığınca kılavuz kitap olarak yayımlanmıştır. Bu geometri kitabında yer alan pek çok terim ilk kez kullanılmıştır. Sivas Lisesinde bizzat kendisi geometri dersi anlatmıştır. Türkçeye kazandırdığı terimlerden bazıları aşağıda örnek olarak verilmiştir.

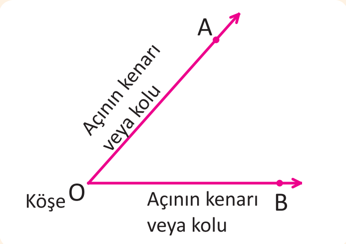
Hendese	Geometri	Murabba	Kare
Zaviye	Açı	Muhit-i daire	Çember
Müselles	Üçgen	Kutur	Çap
Mustatil	Dikdörtgen	Mesaha-ı sathiyye	Alan

9.4.1 ÜÇGENLERDE TEMEL KAVRAMLAR

1. Üçgende Açı Özellikleri

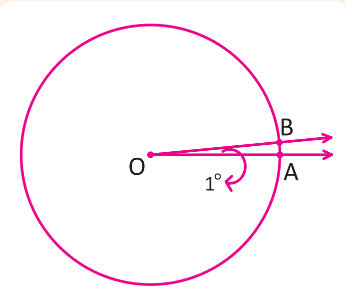
Düzlemde Açılar

Düzlemde başlangıç noktaları ortak olan iki ışının birleşiminin oluşturduğu açıklığa açı denir. Buradaki ışınlara açının kolları, ortak noktaya da açının köşesi adı verilir. Açılar adlandırılırken açının köşe ve kolları üzerindeki noktalar kullanılır.



Örneğin şekildeki açı $\widehat{AOB}, \widehat{BOA}$ veya $\widehat{O}$ şeklinde adlandırılır.
$[OA$ ve $[OB$ ışınlarına açının kolları, O noktasına açının köşesi denir.

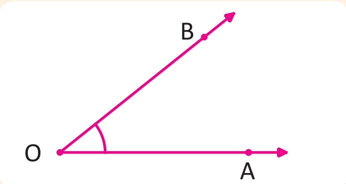
Açının Ölçüsü



Tam çember yayının (çevresinin) 360 eş parçasından birini gören merkez açının ölçüsüne 1 derecelik açı denir ve 1° ile gösterilir.

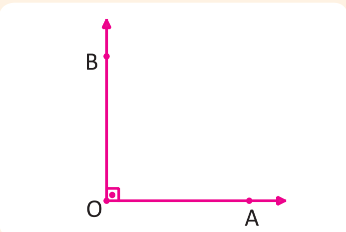
AB yayı, çemberin çevresinin 360 ta biri ise $m(\widehat{AOB}) = 1^\circ$ olur.

Açı Çeşitleri



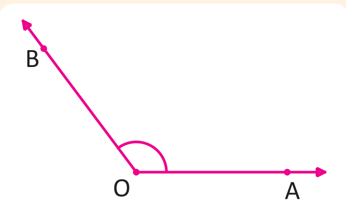
- Dar Açı

Ölçüsü $0^\circ < m(\widehat{AOB}) < 90^\circ$ olan açılardır.



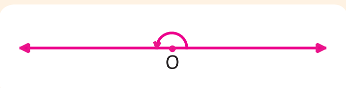
- Dik Açı

Ölçüsü 90° olan açılardır.



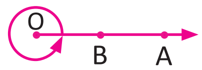
- Geniş Açı

Ölçüsü 90° den büyük, 180° den küçük olan açılardır.
$90^\circ < m(\widehat{AOB}) < 180^\circ$



- Doğru Açı

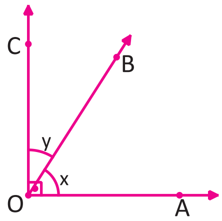
Ölçüsü 180° olan açılardır.



- **Tam Açı**

Ölçüsü 360° olan açılardır.

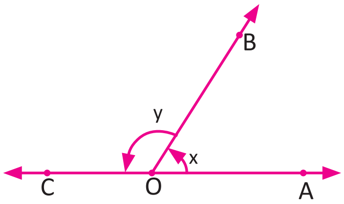
$m(\widehat{AOB}) = 360^\circ$



- **Tümler Açılar**

Ölçüleri toplamı 90° olan açılardır.

$[OA \perp [OC$ ve $m(\widehat{AOB}) = x, m(\widehat{BOC}) = y$ ise $x + y = 90^\circ$ tir. Buna göre x ile y birbirinin tümleridir.



- **Bütünler Açılar**

Ölçüleri toplamı 180° olan açılardır. A, O ve C noktaları doğrusal olmak üzere

$m(\widehat{AOB}) = x, m(\widehat{BOC}) = y$ ise $x + y = 180^\circ$ olur.

x ile y birbirinin bütünleridir.

1. ÖRNEK

Tümler iki açının farkı 20° olduğuna göre büyük açının ölçüsünü bulunuz.

ÇÖZÜM

Tümler açılar a ve b olsun. O zaman

$$\begin{array}{r} a + b = 90^\circ \\ + \quad a - b = 20^\circ \\ \hline 2a = 110^\circ \end{array}$$

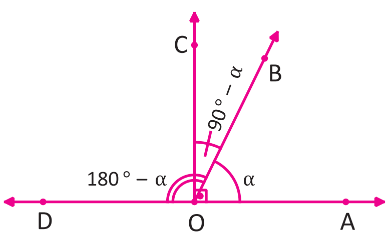
$2a = 110^\circ \Rightarrow a = 55^\circ$ olur. $55^\circ - b = 20^\circ \Rightarrow b = 35^\circ$ bulunur.

Büyük açının ölçüsü 55° olur.

2. ÖRNEK

Bir açının tümleri ile bütünlerinin toplamı 130° olduğuna göre bu açının ölçüsünü bulunuz.

ÇÖZÜM



Açı α ise tümleri $90^\circ - \alpha$, bütünleri $180^\circ - \alpha$ olur.

Buradan

$(90^\circ - \alpha) + (180^\circ - \alpha) = 130^\circ$ yazılır.

$$270^\circ - 2\alpha = 130^\circ$$

$$270^\circ - 130^\circ = 2\alpha$$

$140^\circ = 2\alpha$ ise $\alpha = 70^\circ$ bulunur.

3. ÖRNEK

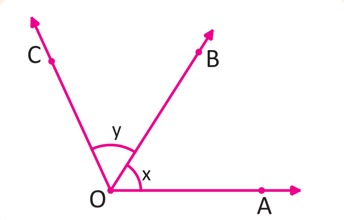
Bir açının tümlerinin bütünleri, bu açının bütünlerinden 20° fazla olduğuna göre bu açının ölçüsünü bulunuz.

ÇÖZÜM

Açı a ise tümleri $90^\circ - a$, bütünleri $180^\circ - a$, tümlerinin bütünleri $180^\circ - (90^\circ - a)$ olur.

Buradan $180^\circ - (90^\circ - a) = 180^\circ - a + 20^\circ$ yazılır.

$a - 90^\circ = 20^\circ - a$ ise $2a = 110^\circ \Rightarrow a = 55^\circ$ bulunur.



- Komşu Açılar

İç bölgeleri ayrık ve birer ışını ortak olan açılara komşu açılar denir.

AOB açısının kolları: [OA ve [OB

BOC açısının kolları: [OB ve [OC olup [OB ışını ortaktır.

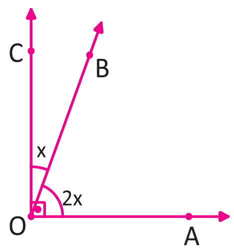
Bu durumda $\widehat{AOB}$ ve $\widehat{BOC}$ komşu açılardır.

4. ÖRNEK

Komşu tümler iki açıdan birinin ölçüsü, diğerinin ölçüsünün iki katı olduğuna göre büyük açının ölçüsünü bulunuz.

ÇÖZÜM

Hem komşu hem de tümler olan açılara komşu tümler açılar denir. Şekilde,



$\widehat{AOB}$ ile $\widehat{BOC}$ komşu açılar ve

$m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) = 90^\circ$ olduğundan komşu tümler açılardır.

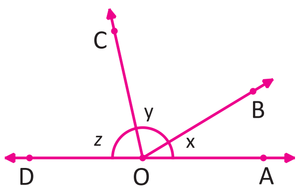
$m(\widehat{AOB}) = 2x$ alınırsa $m(\widehat{BOC}) = x$ olur.

$$m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) = 2x + x = 90^\circ$$

$$3x = 90^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$$

$m(\widehat{AOB}) = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$ bulunur.

5. ÖRNEK



Şekilde A, O ve D noktaları doğrusaldır. x, y ve z açıları sırasıyla 2, 3 ve 5 sayıları ile doğru orantılı olduğuna göre x açısının tümlerinin ölçüsünü bulunuz.

ÇÖZÜM

x, y ve z açıları sırasıyla 2, 3 ve 5 sayıları ile doğru orantılı ise

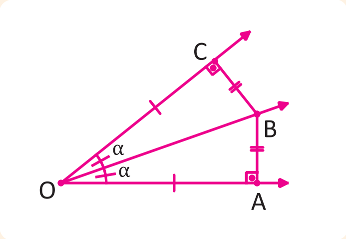
$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = k$ dir. $x = 2k, y = 3k, z = 5k$ ve $x + y + z = 180^\circ$ olduğundan

$2k + 3k + 5k = 180^\circ$

$10k = 180^\circ \Rightarrow k = 18^\circ$ bulunur.

$x = 2k$ olduğundan $x = 2 \cdot 18^\circ = 36^\circ$ olur. Tümleri ise $90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$ bulunur.

Açıortay



Bir açıyı iki eş açıya bölen ışına açıortay denir.

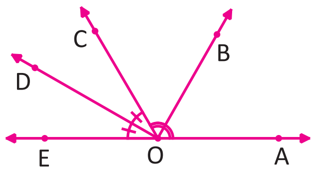
Şekilde [OB ışını, AOC açısını iki eş açıya böldüğünden açıortaydır.

$m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{BOC})$

Bir açının açıortayı üzerinde alınan herhangi bir noktadan açının kollarına çizilen dik uzunluklar birbirine eşittir.

Şekilde $|AB| = |BC|$ ve $|OA| = |OC|$ tir.

6.ÖRNEK



Şekilde A, O ve E noktaları doğrusal ve [OB ve [OD açıortay olduğuna göre BOD açısının ölçüsünü bulunuz.

ÇÖZÜM

AOC ve COE komşu bütünler açılardır.

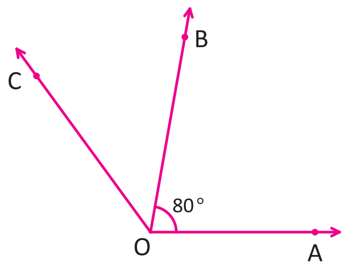
[OB açıortay ise $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{BOC}) = x$ ve [OD açıortay ise $m(\widehat{COD}) = m(\widehat{EOD}) = y$ alınırsa

$x + x + y + y = 180^\circ$ yazılır. Buradan

$x + y = 90^\circ = m(\widehat{BOD})$ olur.

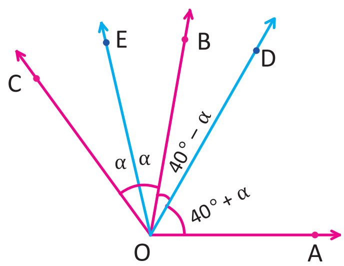
Komşu bütünler iki açının açıortayları arasındaki açı 90° dir.

7. ÖRNEK



Şekilde $m(\widehat{AOB}) = 80^\circ$ dir. Buna göre BOC ve AOC açılarının açıortayları arasındaki açıyı bulunuz.

ÇÖZÜM



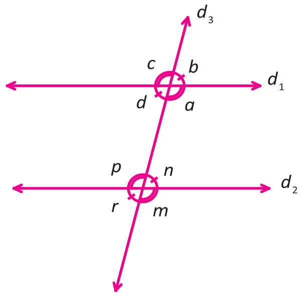
[OE, $\widehat{BOC}$ nın ve [OD, $\widehat{AOC}$ nın açıortayı olsun. O zaman $m(\widehat{BOC}) = 2\alpha$ seçilirse

$m(\widehat{AOC}) = 80^\circ + 2\alpha$, $m(\widehat{AOD}) = 40^\circ + \alpha$ ve $m(\widehat{BOD}) = 40^\circ - \alpha$ olur.

Buradan BOC ve AOC açılarının açıortayı arasındaki DOE açısının ölçüsü

$m(\widehat{DOE}) = 40^\circ - \alpha + \alpha = 40^\circ$ bulunur.

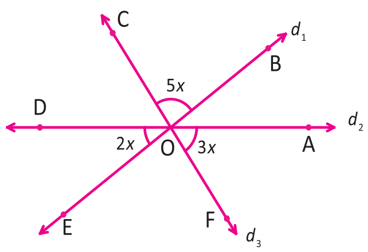
Paralel İki Doğrunun Bir Kesenle Yaptığı Açılar



$d_1 \parallel d_2$ ve d_3 doğrusu bu doğruların kesenidir.

Ters Açılar	Kesişen iki doğrunun oluşturduğu açılardan komşu olmayanlarına ters açılar denir.	$\left.\begin{array}{l}\text{a ile c, b ile d}\\ \text{p ile m, n ile r}\end{array}\right\}$ ters açılar olup ölçüleri eşittir.
İç Ters Açılar	Birer ışınları paralel zıt yönlü, diğer ışınları ortak olan zıt yönlü açılara iç ters açılar denir.	$\left.\begin{array}{l}\text{a ile p}\\ \text{d ile n}\end{array}\right\}$ iç ters açılar olup ölçüleri eşittir.
Dış Ters Açılar	Birer ışınları aynı doğru üzerinde zıt yönlü, diğer ışınları farklı doğru üzerinde paralel olan zıt yönlü açılara dış ters açılar denir.	$\left.\begin{array}{l}\text{c ile m}\\ \text{b ile r}\end{array}\right\}$ dış ters açılar olup ölçüleri eşittir.
Yöndeş Açılar	Birer ışınları aynı doğru üzerinde aynı yönlü, diğer ışınları farklı doğru üzerinde paralel olan aynı yönlü açılara yöndeş açılar denir.	$\left.\begin{array}{l}\text{n ile b}\\ \text{m ile a}\\ \text{p ile c}\\ \text{r ile d}\end{array}\right\}$ yöndeş açılar olup ölçüleri eşittir.
Karşı Durumlu Açılar	Birer ışınları aynı doğru üzerinde zıt yönlü, diğer ışınları farklı doğru üzerinde paralel olan aynı yönlü açılara karşı durumlu açılar denir.	n ile a karşı durumlu açılardır. Ölçüleri toplamı 180° dir. $n + a = 180^\circ$ d ile p karşı durumlu açılardır. Ölçüleri toplamı 180° dir. $d + p = 180^\circ$

8. ÖRNEK



$d_1 \cap d_2 \cap d_3 = \{O\}$

$m(\widehat{BOC}) = 5x$

$m(\widehat{DOE}) = 2x$

$m(\widehat{AOF}) = 3x$

Şekilde verilenlere göre x açısının değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Şekle göre $\widehat{BOC}$ ile $\widehat{EOF}$, $\widehat{DOE}$ ile $\widehat{AOB}$ ve $\widehat{AOF}$ ile $\widehat{COD}$ ters açılardır. Ters açıların ölçüleri eşit olduğundan

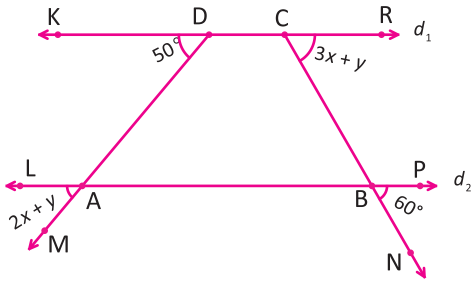
$m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{EOF}) = 5x$ dir. $\widehat{AOD}$ doğru açı olup ölçüsü 180° olduğundan

$m(\widehat{AOD}) = m(\widehat{AOF}) + m(\widehat{EOF}) + m(\widehat{DOE}) = 180^\circ$ tir.

$3x + 5x + 2x = 180^\circ$

$10x = 180^\circ \Rightarrow x = 18^\circ$ bulunur.

9. ÖRNEK



Şekilde
$d_1 \parallel d_2$
$m(\widehat{RCN}) = 3x + y$
$m(\widehat{PBN}) = 60^\circ$
$m(\widehat{MAL}) = 2x + y$
$m(\widehat{MDK}) = 50^\circ$
Yukarıdaki değerlere göre $x + y$ toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$\widehat{RCN}$ ile $\widehat{PBN}$ ve $\widehat{MDK}$ ile $\widehat{MAL}$ açıları yöndeş olduğundan bu açıların ölçüleri eşittir.

$m(\widehat{RCN}) = m(\widehat{PBN}) \Rightarrow 3x + y = 60^\circ \ldots(1)$

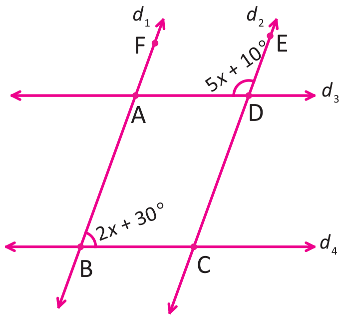
$m(\widehat{MDK}) = m(\widehat{MAL}) \Rightarrow 2x + y = 50^\circ \ldots(2)$

$\left.\begin{array}{l} 3x + y = 60^\circ \\ 2x + y = 50^\circ \end{array}\right\}$ sistemi çözülürse

$x = 10^\circ, y = 30^\circ$ bulunur.

Bu durumda $x + y = 10^\circ + 30^\circ = 40^\circ$ olur.

10. ÖRNEK



Şekilde
$d_1 \parallel d_2$ ve $d_3 \parallel d_4$
$m(\widehat{ABC}) = 2x + 30^\circ$
$m(\widehat{ADE}) = 5x + 10^\circ$
olduğuna göre x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Şekilde verilenlere göre

$m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{BCE}) = 5x + 10^\circ$ (Yöndeş açılar)

$m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{BCE}) = 180^\circ$ (Karşı durumlu açılar)

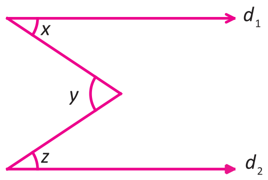
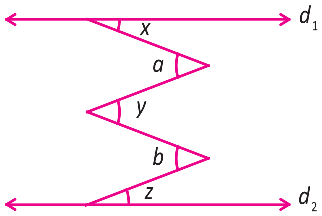
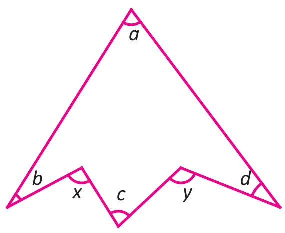
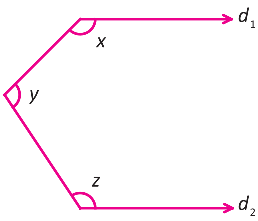
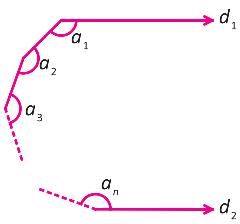
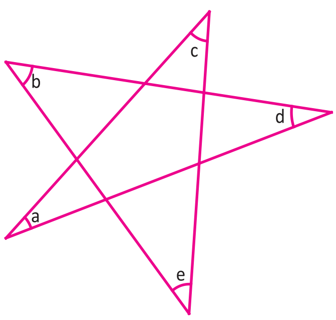
$2x + 30^\circ + 5x + 10^\circ = 180^\circ$

$7x + 40^\circ = 180^\circ$

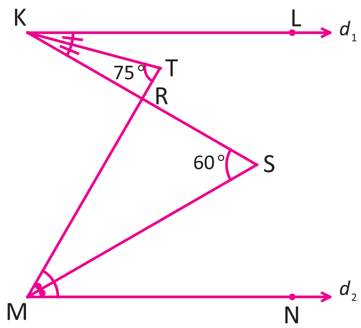
$7x = 140^\circ$

$x = 20^\circ$ bulunur.

Sonuçlar

	$d_1 \parallel d_2 \Rightarrow y = x + z$
	$d_1 \parallel d_2 \Rightarrow$ Sağa bakan açılar: x, y, z Sola bakan açılar: a, b Sağa bakan açıların toplamı, sola bakan açıların toplamına eşittir. Bu durumda $x + y + z = a + b$ olur.
	$x + y = a + b + c + d$
	$d_1 \parallel d_2 \Rightarrow x + y + z = 360^\circ$
	$d_1 \parallel d_2$ ise $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = (n - 1) \cdot 180^\circ$
	$a + b + c + d + e = 180^\circ$

11. ÖRNEK

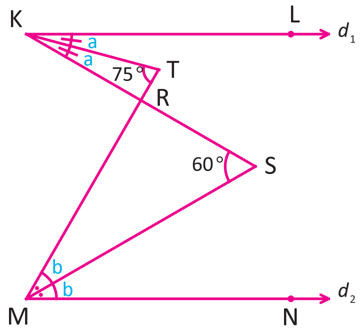


Şekilde $[KT]$, $[MS]$ açıortay ve $d_1 \parallel d_2$ dir.

$m(\widehat{KTM}) = 75^\circ$, $m(\widehat{KSM}) = 60^\circ$ olduğuna göre

$m(\widehat{KRM})$ nın değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



$[KT$ ve $[MS$ açıortay olduğundan $m(\widehat{SKL}) = 2a$ ve $m(\widehat{NMT}) = 2b$ yazılır.

Ayrıca $75^\circ = a + 2b$ ve

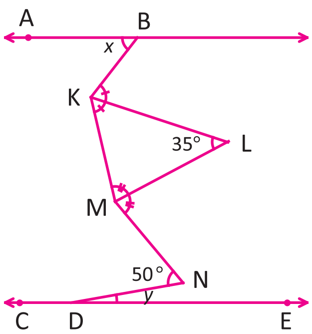
$60^\circ = b + 2a$ olur.

Taraf tarafa toplama yapılırsa $135^\circ = 3 \cdot (a + b)$

$a + b = 45^\circ$ bulunur.

$m(\widehat{KRM}) = 2a + 2b = 2 \cdot (a + b)$ olduğundan $m(\widehat{KRM}) = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$ olur.

12. ÖRNEK



$AB \parallel DC$

$[KL]$ ve $[ML]$ açıortay

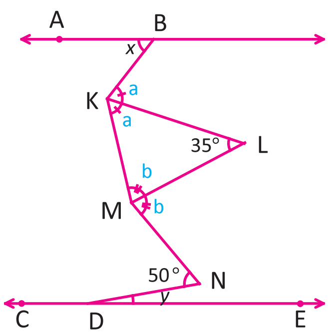
$m(\widehat{KLM}) = 35^\circ$

$m(\widehat{MND}) = 50^\circ$

$m(\widehat{ABK}) = x$

$m(\widehat{NDE}) = y$ olduğuna göre $x - y$ farkının kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



$AB \parallel DC$ olduğundan sağa bakan açılar toplamı, sola bakan açılar toplamına eşittir. $m(\widehat{BKM}) = 2a$, $m(\widehat{KMN}) = 2b$ alınırsa

$x + 35^\circ + 50^\circ = a + b + y \ldots (1)$ yazılır.

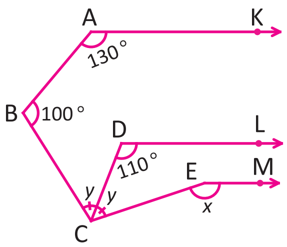
$\widehat{KLM}$ de $a + b + 35^\circ = 180^\circ$ eşitliğinden

$a + b = 180^\circ - 35^\circ = 145^\circ \ldots (2)$ bulunur.

(2), (1) de yerine yazıldığında $x + 35^\circ + 50^\circ = 145^\circ + y$

$x - y = 145^\circ - 85^\circ = 60^\circ$ olur.

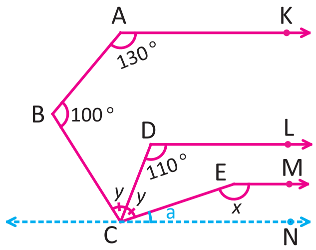
13. ÖRNEK



Şekilde $[AK \mathbin{/\!/} [DL \mathbin{/\!/} [EM$ ve $[CD]$ açıortaydır.

$m(\widehat{KAB}) = 130^\circ$, $m(\widehat{ABC}) = 100^\circ$, $m(\widehat{CDL}) = 110^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{CEM}) = x$ açısının kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



C köşesinden $[DL \mathbin{/\!/} CN$ olacak şekilde CN doğrusu çizilir ve $m(\widehat{ECN}) = a$

$[CD]$ açıortay olduğundan $m(\widehat{ECB}) = 2y$ alındığında

$130^\circ + 100^\circ + y + y + a = 360^\circ \ (*)$ yazılır.

$m(\widehat{LDC}) + m(\widehat{NCD}) = 180^\circ$ (Karşı durumlu açılar)

$110^\circ + y + a = 180^\circ \Rightarrow a + y = 70^\circ$ bulunur.

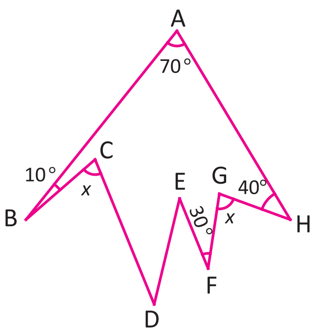
Bu değer $(*)$ eşitliğinde yerine yazıldığında

$130^\circ + 100^\circ + y + 70^\circ = 360^\circ \Rightarrow y = 60^\circ$ bulunur. Bu durumda $a = 10^\circ$ olur.

$x + a = 180^\circ$(karşı durumlu açılar)

$x + 10^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 170^\circ$ olarak bulunur.

14. ÖRNEK



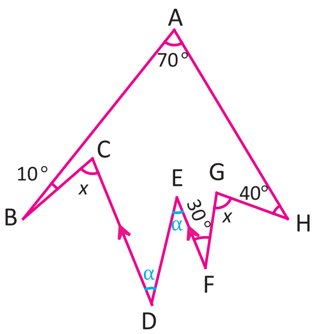
Şekilde $[DC] \mathbin{/\!/} [FE]$

$m(\widehat{BAH}) = 70^\circ$, $m(\widehat{ABC}) = 10^\circ$

$m(\widehat{EFG}) = 30^\circ$, $m(\widehat{GHA}) = 40^\circ$

olduğuna göre $m(\widehat{BCD}) = x$ açısının değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

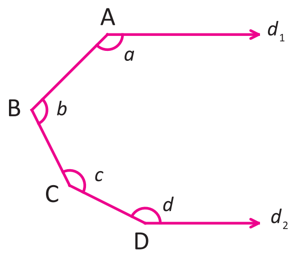


$[DC] \mathbin{/\!/} [FE] \Rightarrow m(\widehat{DEF}) = m(\widehat{EDC}) = \alpha$ olur.

$x + \alpha + x = 70^\circ + 40^\circ + 30^\circ + \alpha + 10^\circ$ olduğundan

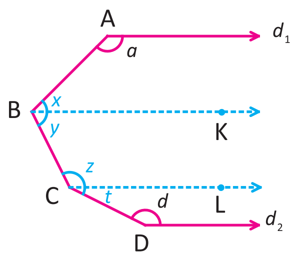
$2x = 150^\circ \Rightarrow x = 75^\circ$ olur.

15. ÖRNEK



Şekilde $d_1 \parallel d_2$ olduğuna göre $a+b+c+d$ toplamını bulunuz.

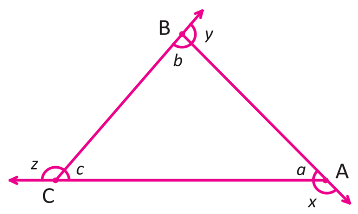
ÇÖZÜM



B ve C köşelerinden $d_1 \parallel [BK \parallel [CL \parallel d_2$ olacak şekilde $[BK$ ve $[CL$ çizildiğinde

$$\left.\begin{aligned} a+x &= 180^\circ \\ y+z &= 180^\circ \\ t+d &= 180^\circ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &a+\underbrace{(x+y)}_{b}+\underbrace{(z+t)}_{c}+d = 3\cdot 180^\circ \\ &\qquad a+b+c+d = 540^\circ \text{ tir.} \end{aligned}\right.$$

Üçgende Açı

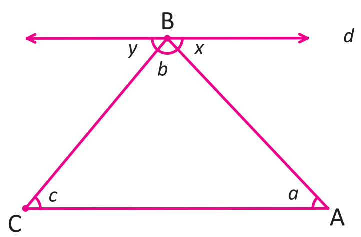


Düzlemde doğrusal olmayan üç noktanın ikişer ikişer birleştirilmesi ile elde edilen geometrik şekle üçgen adı verilir.

- $[AB] \cup [BC] \cup [AC] = \widehat{ABC}$
- A, B, C noktaları üçgenin köşeleridir.
- $[AB]$, $[BC]$ ve $[AC]$ üçgenin kenarlarıdır.
- a, b ve c üçgenin iç açıları; x, y ve z üçgenin dış açılarıdır.
- Bir üçgende açıortay, kenarortay, yükseklik ve kenar orta dikme üçgenin yardımcı elemanlarıdır.

Üçgende Açı Özellikleri

1. Bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° dir. Bu ifadenin doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilir.



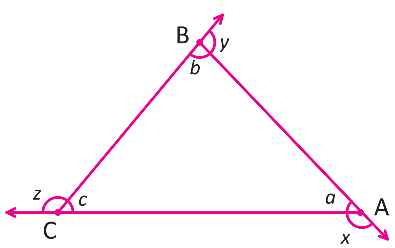
B köşesinden $[AC]$ kenarına paralel d doğrusu çizildiğinde $a = x$ (İç ters açılar)

$c = y$ (İç ters açılar)

$x+b+y = 180^\circ$ (Doğru açı)

$a+b+c = 180^\circ$ elde edilir.

2. Bir üçgenin dış açılarının ölçüleri toplamı 360° dir. Bu ifadenin doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilir.



$a+x = 180^\circ$ (Doğru açı)

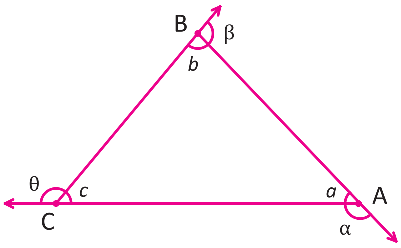
$b+y = 180^\circ$ (Doğru açı)

$c+z = 180^\circ$ (Doğru açı)

$\underbrace{a+b+c}_{180^\circ}+x+y+z = 540^\circ$ bulunur. Buradan

$x+y+z = 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ$ elde edilir.

3. Bir üçgende bir dış açının ölçüsü, kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşittir.



$a+b+c=180^\circ$ olduğundan

$a=180^\circ-(b+c)\ldots(1)$

$a+\alpha=180^\circ$ (Doğru açı)$\ldots(2)$

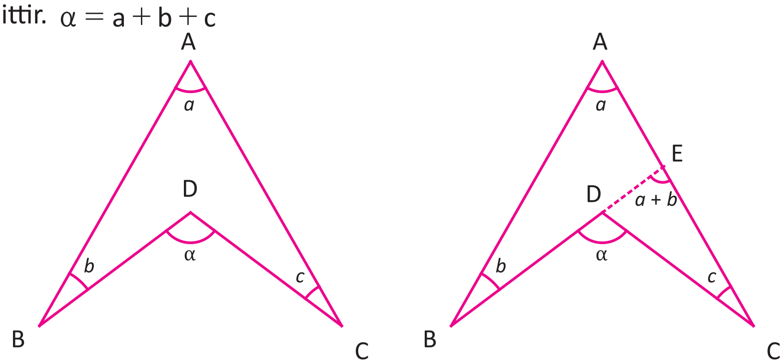
(1) eşitliği (2) eşitliğinde yerine yazılırsa

$180^\circ-(b+c)+\alpha=180^\circ$

$\alpha=b+c$ elde edilir.

Benzer düşünceyle $\beta=a+c$ ve $\theta=a+b$ olduğu görülür.

4. Bir içbükey (konkav) dörtgende içbükey köşenin dıştaki açısının ölçüsü, içteki açıların ölçüleri toplamına eşittir. $\alpha=a+b+c$



$[BD]$ uzatılıp $[AC]$ kestiği noktaya E denirse

$\widehat{ABE}$ de $m(\widehat{BEC})=a+b$ olur. (Üçgende dış açı özelliği)

$\widehat{DEC}$ de $\alpha=a+b+c$ elde edilir. (Üçgende dış açı özelliği)

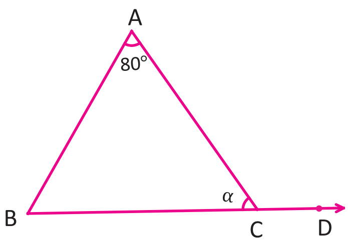
16. ÖRNEK

Bir üçgenin dış açıları 2, 3 ve 7 sayıları ile doğru orantılı ise en büyük dış açının ölçüsünü bulunuz.

ÇÖZÜM

ABC üçgeninin dış açıları x, y ve z olsun. x, y ve z sırasıyla 2, 3 ve 7 ile doğru orantılı olduğundan
$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{7}=k$ eşitliğinden $x=2k, y=3k, z=7k$ yazılır.
Dış açıların ölçüleri toplamı $x+y+z=360^\circ$ olduğundan
$2k+3k+7k=360^\circ \Rightarrow 12k=360^\circ \Rightarrow k=30^\circ$ bulunur.
En büyük dış açının ölçüsü $z=7k, z=7\cdot 30^\circ=210^\circ$ olarak bulunur.

17. ÖRNEK



ABC bir üçgen. B, C ve D doğrusal.
$m(\widehat{ACD})=5\cdot m(\widehat{ABC}), m(\widehat{CAB})=80^\circ$ olduğuna göre
$m(\widehat{ACB})=\alpha$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$m(\widehat{ABC})=x$ alınırsa $m(\widehat{ACD})=5x$ olur.

$m(\widehat{ACD})=m(\widehat{ABC})+m(\widehat{CAB})$ (Üçgende dış açı özelliği)

$5x=x+80^\circ$

$4x=80^\circ \Rightarrow x=20^\circ$ olur.

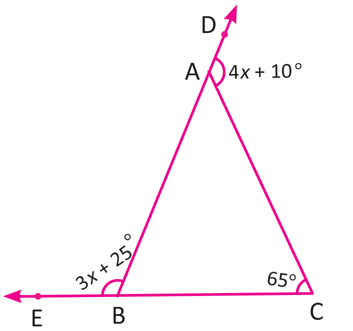
$m(\widehat{BCD})=m(\widehat{ACB})+m(\widehat{ACD})=180^\circ$(Doğru açı)

$\alpha+5x=180^\circ$

$\alpha+5\cdot 20^\circ=180^\circ$

$\alpha=80^\circ$ dir.

18. ÖRNEK



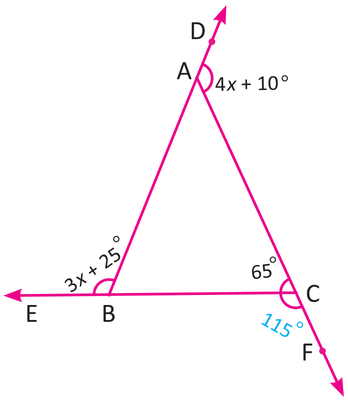
ABC bir üçgen,

$m(\widehat{ACB}) = 65^\circ$

$m(\widehat{ABE}) = 3x + 25^\circ$

$m(\widehat{CAD}) = 4x + 10^\circ$ olduğuna göre x in değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



ABC üçgeninde

$m(\widehat{ACB}) + m(\widehat{BCF}) = 180^\circ$

$65^\circ + m(\widehat{BCF}) = 180^\circ$

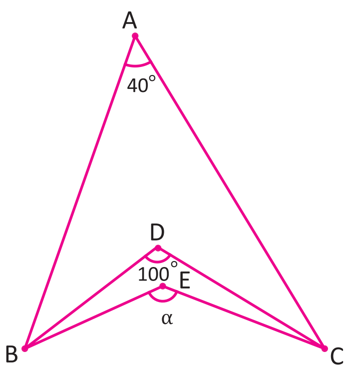
$m(\widehat{BCF}) = 115^\circ$ tir.

$m(\widehat{ABE}) + m(\widehat{BCF}) + m(\widehat{CAD}) = 360^\circ$

$3x + 25^\circ + 115^\circ + 4x + 10^\circ = 360^\circ$

$7x + 150^\circ = 360^\circ \Rightarrow 7x = 210^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$ olur.

19. ÖRNEK



Yandaki şekilde

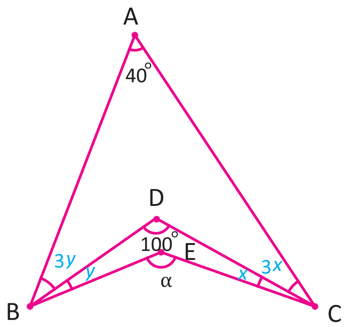
$m(\widehat{CAB}) = 40^\circ$

$m(\widehat{BDC}) = 100^\circ$

$m(\widehat{ACD}) = 3 \cdot m(\widehat{DCE})$

$m(\widehat{ABD}) = 3 \cdot m(\widehat{DBE})$ olduğuna göre $m(\widehat{BEC}) = \alpha$ açısını bulunuz.

ÇÖZÜM



ABDC içbükey dörtgeninde

$100^\circ = 3x + 3y + 40^\circ$

$60^\circ = 3x + 3y \Rightarrow 3 \cdot (x + y) = 60^\circ$

$\Rightarrow x + y = 20^\circ$

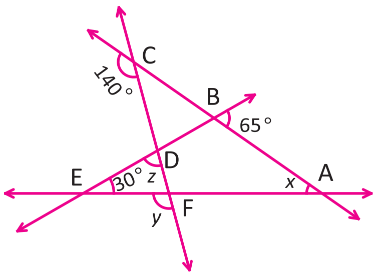
DBEC içbükey dörtgeninde

$m(\widehat{BEC}) = \alpha = 100^\circ + x + y$

$\alpha = 100^\circ + 20^\circ$

$\alpha = 120^\circ$ bulunur.

20. ÖRNEK



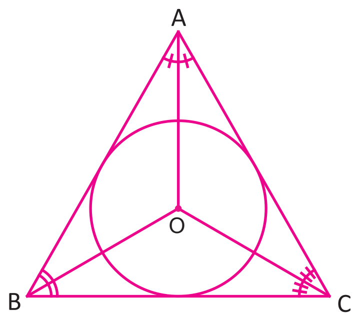
Şekilde verilen değerlere göre $x+y+z$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

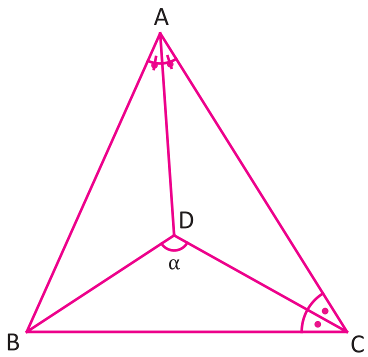
ABE üçgeninde $65^\circ = x+30^\circ$ eşitliğinden $x=35^\circ$
ACF üçgeninde $140^\circ = 35^\circ + y$ eşitliğinden $y=105^\circ$
DEF üçgeninde $105^\circ = z+30^\circ$ eşitliğinden $z=75^\circ$ bulunur.
Buradan $x+y+z = 35^\circ + 105^\circ + 75^\circ = 215^\circ$ olur.

Üçgende Açıortay Özellikleri

1. Bir üçgende iç açıortaylar bir noktada kesişir. Bu nokta, üçgenin iç teğet çemberinin merkezidir.

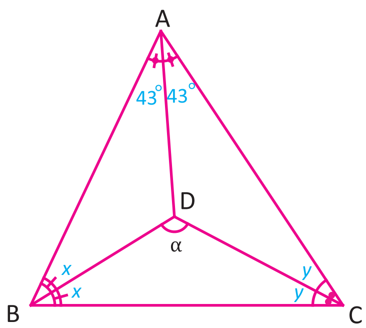


21. ÖRNEK



ABC bir üçgen,
[AD], [CD] iç açıortay,
$m(\widehat{BAC}) = 86^\circ$ olduğuna göre
$m(\widehat{BDC}) = \alpha$ açısını bulunuz.

ÇÖZÜM



[AD] ve [CD] iç açıortaylarının kesişimi $[AD] \cap [CD] = \{D\}$ ise bu nokta, ABC üçgeninin iç açıortaylarının kesişme noktası olur. Bu durumda [BD] de iç açıortay olur.

$m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{CBD}) = x$ ve $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{BCD}) = y$ alındığında

$43^\circ + 43^\circ + 2x + 2y = 180^\circ$ eşitliğinden

$2 \cdot (x+y) = 180^\circ - 86^\circ = 94^\circ$

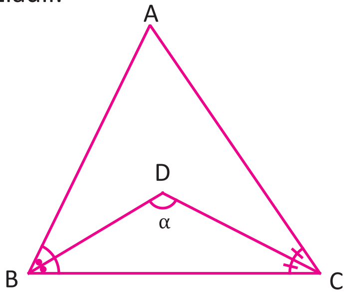
$x+y = 47^\circ$ bulunur.

$x+y+\alpha = 180^\circ$

$47^\circ + \alpha = 180^\circ$

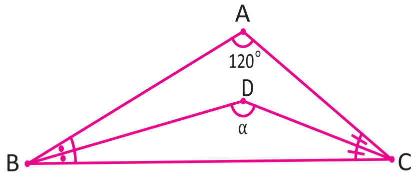
$\alpha = 133^\circ$ bulunur.

2. Bir üçgende iki iç açıortay arasındaki açının ölçüsü, açıortayı çizilmeyen açı ölçüsünün yarısından 90° fazladır.



$$\alpha = 90^\circ + \frac{m(\widehat{A})}{2}$$

22. ÖRNEK



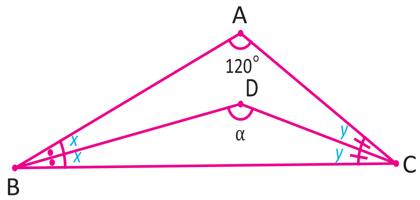
ABC bir üçgen,

$[BD]$, $[CD]$ iç açıortay,

$m(\widehat{BAC}) = 120^\circ$ olduğuna göre

$m(\widehat{BDC}) = \alpha$ açısının ölçüsünü bulunuz.

ÇÖZÜM



I. Yol

$$\alpha = 90^\circ + \frac{m(\widehat{A})}{2}$$

$$\alpha = 90^\circ + \frac{120^\circ}{2}$$

$\alpha = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$ bulunur.

II. Yol

$\widehat{ABC}$ de

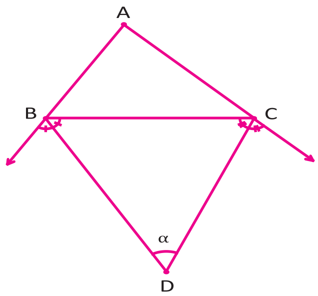
$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ$ olduğundan $2x + 2y + 120^\circ = 180^\circ$

$$2 \cdot (x + y) = 60^\circ$$

$$x + y = 30^\circ$$

$\widehat{BDC}$ de $\alpha + x + y = 180^\circ$ dir. $\alpha + 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 150^\circ$ bulunur.

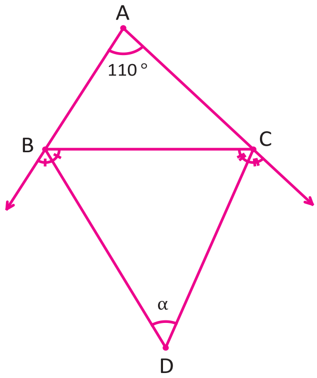
3. Bir üçgende iki dış açıortay arasındaki açının ölçüsü ile açıortayı çizilmeyen iç açı ölçüsünün yarısı, birbirinin tümleridir.



$\alpha + \dfrac{m(\widehat{A})}{2} = 90^\circ$ veya

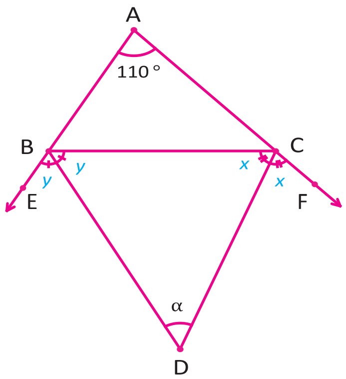
$\alpha = 90^\circ - \dfrac{m(\widehat{A})}{2}$ olur.

23. ÖRNEK



ABC bir üçgen, $[BD]$ ve $[CD]$ dış açıortay, $m(\widehat{BAC}) = 110^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{BDC}) = \alpha$ nın değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



I. Yol

Formül kullanılırsa

$$\alpha = 90^\circ - \frac{m(\widehat{A})}{2}$$

$$\alpha = 90^\circ - \frac{110^\circ}{2} = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ \text{ olarak bulunur.}$$

II. Yol

EBC açısının bütünleri $\rightarrow 180^\circ - 2y$

FCB açısının bütünleri $\rightarrow 180^\circ - 2x$ olduğundan

$\overset{\frown}{ABC}$ de

$$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ$$

$$110^\circ + 180^\circ - 2y + 180^\circ - 2x = 180^\circ$$

$$470^\circ - 2\cdot(x+y) = 180^\circ$$

$$470^\circ - 180^\circ = 2\cdot(x+y)$$

$$145^\circ = x + y \text{ bulunur.}$$

$\overset{\frown}{BCD}$ de

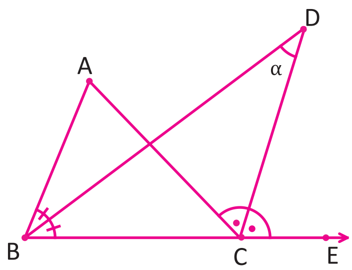
$$m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 180^\circ$$

$$y + x + \alpha = 180^\circ$$

$$145^\circ + \alpha = 180^\circ$$

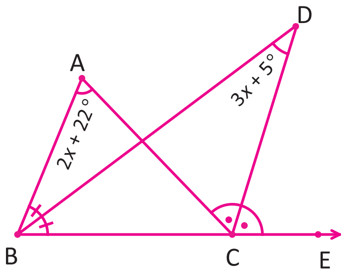
$$\alpha = 180^\circ - 145^\circ = 35^\circ \text{ bulunur.}$$

4. Bir üçgende bir köşenin iç açıortayı ile diğer bir köşenin dış açıortayı arasındaki açının ölçüsü, açıortayı çizilmeyen köşenin iç açı ölçüsünün yarısıdır.



$$\alpha = \frac{m(\widehat{BAC})}{2} = \frac{m(\widehat{A})}{2}$$

24. ÖRNEK

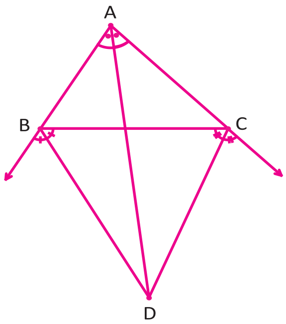


ABC bir üçgen,
[BD] iç açıortay, [CD] dış açıortay,
$m(\widehat{A}) = 2x + 22^\circ$
$m(\widehat{BDC}) = 3x + 5^\circ$ olduğuna göre x değerini bulunuz.

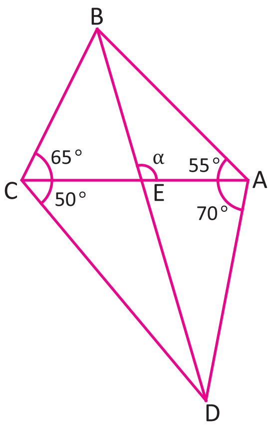
ÇÖZÜM

$m(\widehat{D}) = \dfrac{m(\widehat{A})}{2}$ olduğundan $3x + 5^\circ = \dfrac{2x + 22^\circ}{2} \Rightarrow 6x + 10^\circ = 2x + 22^\circ \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3^\circ$ bulunur.

5. Bir üçgende farklı köşelerdeki iki dış açıortay ile bir iç açıortay bir noktada kesişir.

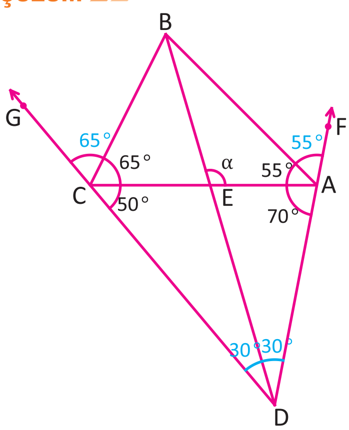


25. ÖRNEK



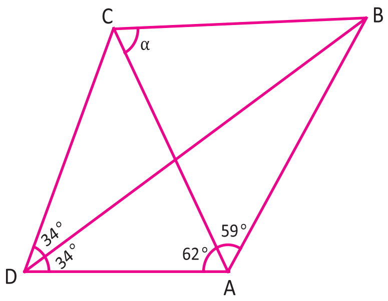
Yanda ABCD bir dörtgendir. Şekilde verilenlere göre $m(\widehat{AEB}) = \alpha$ nın değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



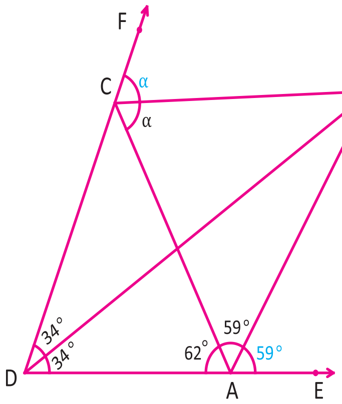
Şekilde [DA] ve [DC] kenarları uzatıldığında
$m(\widehat{FAB}) = 55^\circ$ ve $m(\widehat{BCG}) = 65^\circ$ bulunur. Bu durumda
$\overset{\frown}{ADC}$ de [AB] ve [CB] dış açıortay olduğundan [DB] iç açıortay olur.
$m(\widehat{D}) = 180^\circ - (50^\circ + 70^\circ) = 60^\circ$ olduğundan
$m(\widehat{CDE}) = m(\widehat{EDA}) = 30^\circ$ olur. Buradan
$m(\widehat{AEB}) = m(\widehat{ADB}) + m(\widehat{EAD})$
$= 70^\circ + 30^\circ$
$= 100^\circ$ bulunur.

26. ÖRNEK



Şekilde verilenlere göre $m(\widehat{ACB}) = \alpha$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

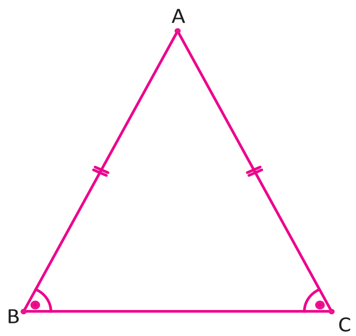


$[DA]$ ve $[DC]$ şekildeki gibi uzatıldığında

$m(\widehat{BAE}) = 180^\circ - (62^\circ + 59^\circ) = 59^\circ$ olduğundan $[AB]$, $\widehat{CDA}$ nin dış açıortayı olur. Ayrıca $\widehat{ADC}$ de $[AB] \cap [DB] = \{B\}$ olduğundan $[CB]$ dış açıortaydır.

$2 \cdot m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ACF}) = 62^\circ + 68^\circ = 130^\circ \Rightarrow m(\widehat{ACB}) = 65^\circ$ olur.

İkizkenar ve Eşkenar Üçgen



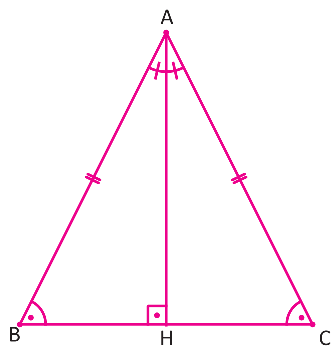
İki kenarının uzunluğu, eşit olan üçgenlere ikizkenar üçgen denir.

$\widehat{ABC}$ de $[BC]$ taban, $[AB]$ ve $[AC]$ yan kenarlardır.

$\widehat{A}$ tepe açısı, $\widehat{B}$ ve $\widehat{C}$ taban açılarıdır.

$|AB| = |AC|$

$m(\widehat{B}) = m(\widehat{C})$

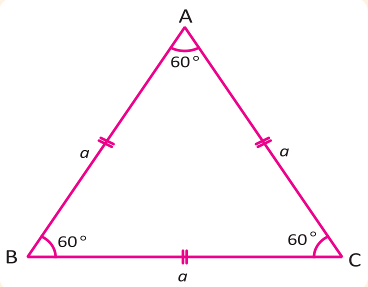


İkizkenar üçgende tabana ait yükseklik, hem açıortay hem de kenarortaydır.

$[AH] \perp [BC]$ ise

$m(\widehat{BAH}) = m(\widehat{CAH})$

$|BH| = |CH|$



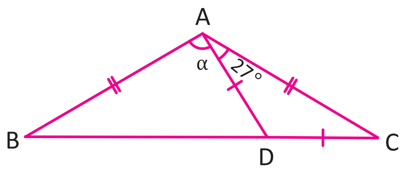
Üç kenarının uzunluğu, eşit olan üçgenlere **eşkenar üçgen** denir.

$|AB| = |AC| = |BC|$

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 60^\circ$

Eşkenar üçgen ikizkenar üçgenin özelliklerini sağlar.

27. ÖRNEK



ABC ve ADC birer ikizkenar üçgen,

$|AB| = |AC|$ ve $|AD| = |DC|$

$m(\widehat{CAD}) = 27^\circ$ olduğuna göre

$m(\widehat{DAB}) = \alpha$ açısını bulunuz.

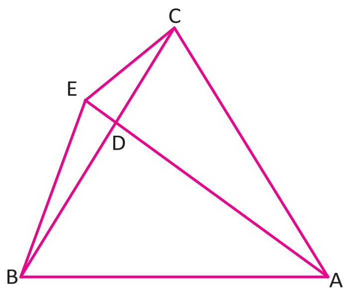
ÇÖZÜM

ABC ve ADC ikizkenar üçgen olduğundan $m(\widehat{B}) = m(\widehat{C})$ ve $m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{C})$ tir.

$m(\widehat{C}) = m(\widehat{CAD}) = 27^\circ$ olduğundan $m(\widehat{B}) = 27^\circ$ olur.

$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ \Rightarrow \alpha + 27^\circ + 27^\circ + 27^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha + 81^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 99^\circ$ bulunur.

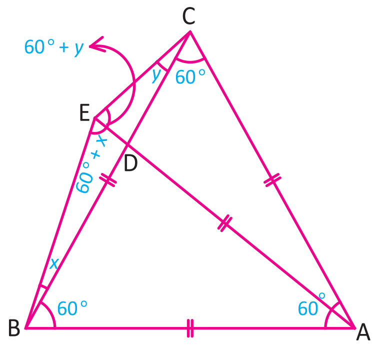
28. ÖRNEK



ABC eşkenar üçgen,

A, D ve E doğrusaldır. $|AC| = |AE|$ olduğuna göre $m(\widehat{CBE}) + m(\widehat{BCE})$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



ABC eşkenar üçgen olduğundan $|AB| = |AC| = |BC|$ tir.

$|AC| = |AE|$ ise ACE ve ABE ikizkenar üçgen olur.

O hâlde $m(\widehat{ACE}) = m(\widehat{AEC})$ ve $m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{AEB})$ tir.

$m(\widehat{BCE}) = y$ alınırsa $m(\widehat{AEC}) = y + 60^\circ$

$m(\widehat{CBE}) = x$ alınırsa $m(\widehat{AEB}) = x + 60^\circ$ olur.

$\overset{\frown}{BCE}$ de iç açılar toplamından

$$y + x + (60^\circ + x) + (60^\circ + y) = 180^\circ$$

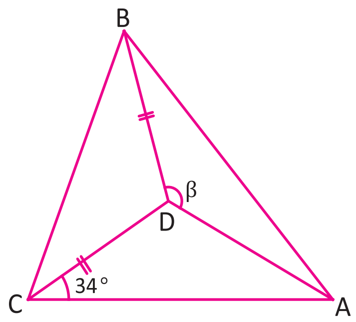
$$120^\circ + 2 \cdot (x + y) = 180^\circ$$

$$2 \cdot (x + y) = 180^\circ - 120^\circ$$

$$x + y = 30^\circ \text{ olur.}$$

$m(\widehat{CBE}) + m(\widehat{BCE}) = x + y = 30^\circ$ bulunur.

29. ÖRNEK



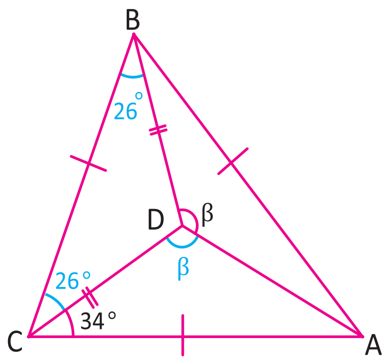
ABC eşkenar üçgen,

$|BD| = |CD|$

$m(\widehat{ACD}) = 34^\circ$ olduğuna göre

$m(\widehat{ADB}) = \beta$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



ABC eşkenar üçgen olduğundan her bir açısı 60° dir.

$|BD| = |CD|$ olduğundan ikizkenar üçgen olur.

$m(\widehat{DCB}) = m(\widehat{DBC}) = x$ alınırsa

$m(\widehat{C}) = x + 34^\circ = 60^\circ \Rightarrow x = 26^\circ$ bulunur.

$\overset{\frown}{BDC}$ de $m(\widehat{BDC}) = 180^\circ - 52^\circ$

$= 128^\circ$ olur.

$m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{ADC}) = \beta$ tır.

$128^\circ + \beta + \beta = 360^\circ$

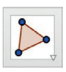
$2\beta = 232^\circ$

$\beta = 116^\circ$ bulunur.

2. Üçgende Açı Kenar Bağıntıları

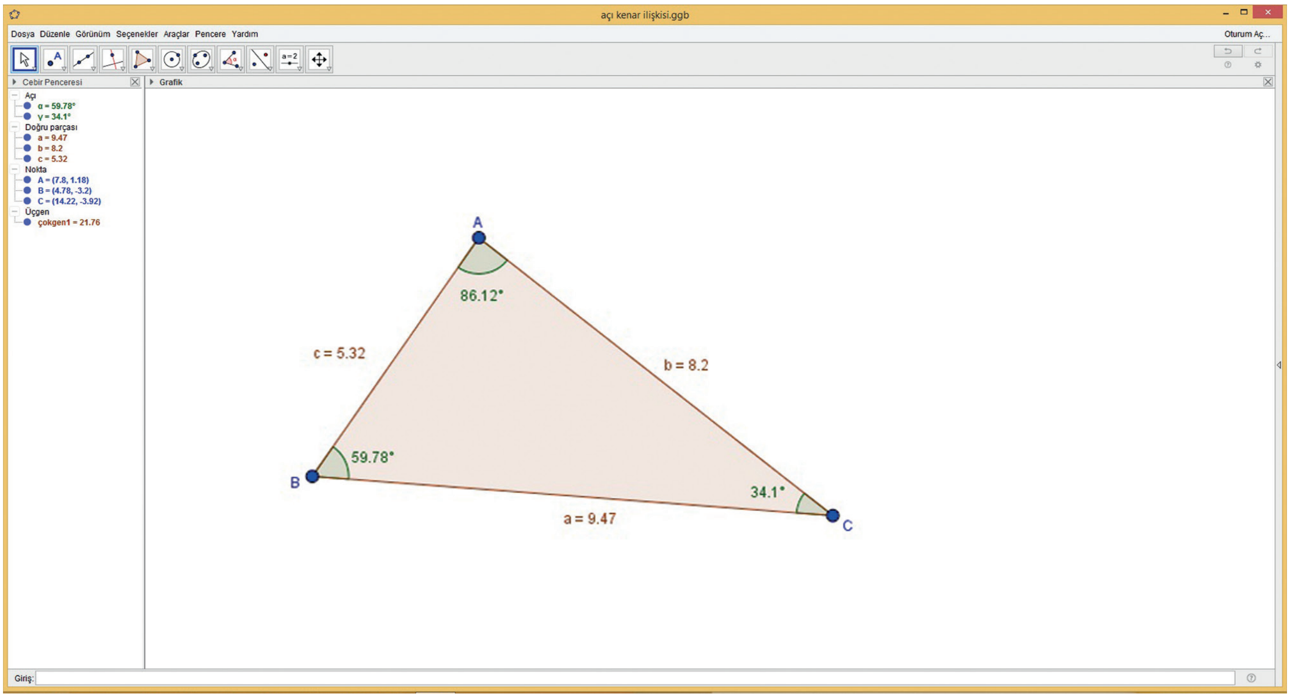
Teknoloji Uygulaması

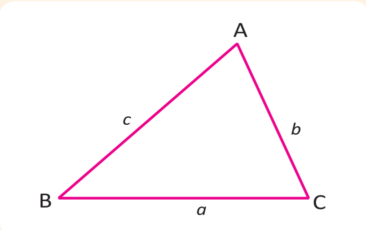
Dinamik Geometri Yazılımı GeoGebra ile aşağıdaki yönergelerden yararlanarak bir üçgen çiziniz. Çizdiğiniz üçgenin kenar uzunluklarını ve iç açı ölçülerini hesaplayınız.

	Çokgen aracını etkinleştiriniz. ABC üçgeni oluşturmak için A, B ve C noktalarını art arda seçiniz. (A noktasından başlayıp yine en son A noktasına tıklayınız.)
	Açı aracını etkinleştiriniz. Üçgenin iç açı ölçülerini belirlemek için sırasıyla köşeleri seçiniz.
	Uzunluk aracını etkinleştiriniz. Üçgenin kenar uzunluklarını ölçmek için kenarları seçiniz.
	Taşı aracını etkinleştiriniz. Üçgenin köşelerini hareket ettirerek farklı üçgenler oluşturunuz.

- Üçgenin kenar uzunluklarını ve iç açı ölçülerini kendi aralarında küçükten büyüğe sıralayınız.
- Elde ettiğiniz verilere göre üçgenin kenar uzunlukları ile açılarının ölçüleri arasında küçüklük büyüklük bakımından bir ilişki var mı? Bu ilişkiyi inceleyiniz.
- Ulaştığınız sonucu köşeleri hareket ettirerek elde edeceğiniz yeni birkaç üçgen için test ediniz.

Üçgenin açı ve kenarları arasındaki ilişkiyi inceleyebileceğiniz GeoGebra programında çizilmiş benzer bir örnek aşağıda verilmiştir.

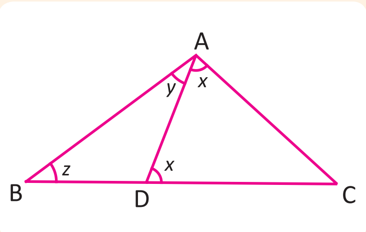




Bir üçgende büyük kenar karşısında büyük açı, küçük kenar karşında küçük açı bulunur. Başka bir ifadeyle büyük açı karşısında büyük kenar, küçük açı karşısında küçük kenar bulunur.

$\widehat{ABC}$ de, $a > b > c \Rightarrow m(\widehat{A}) > m(\widehat{B}) > m(\widehat{C})$ veya

$m(\widehat{A}) > m(\widehat{B}) > m(\widehat{C}) \Rightarrow a > b > c$ tür.



Bu ifadenin doğruluğu aşağıda gösterilmiştir:

Şekilde $|AC| < |BC|$ olsun. Bu durumda $m(\widehat{ABC}) < m(\widehat{CAB})$ olduğu gösterilmelidir.

$|AC| = |DC|$ olacak şekilde $D \in [BC]$ olsun.

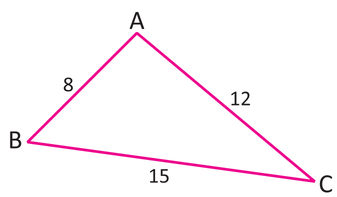
Buna göre $m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{CDA}) = x$ olur.

O zaman $m(\widehat{ABC}) < m(\widehat{CDA}), z < x$ tür.

Aynı zamanda $x < x + y$ olduğundan $z < x < x + y$ yazılır.

Bu durumda $z < y + x$ olduğundan $m(\widehat{ABC}) < m(\widehat{CAB})$ elde edilir.

1. ÖRNEK



Yandaki şekilde kenar uzunlukları verilen ABC üçgeninin açıları arasındaki sıralamayı bulunuz.

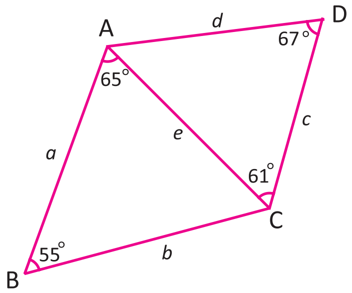
ÇÖZÜM

Verilenlere göre $|AC| = 12$ cm, $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 15$ cm olduğundan $|AB| < |AC| < |BC|$ yazılır.

Küçük kenar karşısında küçük açı bulunduğundan

$|AB| < |AC| < |BC| \Rightarrow m(\widehat{C}) < m(\widehat{B}) < m(\widehat{A})$ elde edilir.

2. ÖRNEK



Şekilde verilenlere göre en uzun ve en kısa kenarı bulunuz.

ÇÖZÜM

ABC üçgeninde

$m(\widehat{A}) = 65^\circ, m(\widehat{B}) = 55^\circ$ ise $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ$

$65^\circ + 55^\circ + m(\widehat{C}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{C}) = 180^\circ - 120^\circ$

$\Rightarrow m(\widehat{C}) = 60^\circ$ bulunur.

Bu durumda $m(\widehat{B}) < m(\widehat{C}) < m(\widehat{A}) \Rightarrow e < a < b \ldots (1)$

ACD üçgeninde $m(\widehat{C}) = 61^\circ, m(\widehat{D}) = 67^\circ$ ise $m(\widehat{A}) + m(\widehat{C}) + m(\widehat{D}) = 180^\circ$

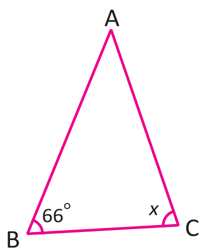
$m(\widehat{A}) + 61^\circ + 67^\circ = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{A}) = 180^\circ - 128^\circ$

$\Rightarrow m(\widehat{A}) = 52^\circ$ bulunur.

Bu durumda $m(\widehat{A}) < m(\widehat{C}) < m(\widehat{D}) \Rightarrow c < d < e \ldots (2)$

(1) ve (2) sıralamaları karşılaştırılırsa $c < d < e < a < b$ kenar sıralaması elde edilir. Bu durumda en uzun kenar b, en kısa kenar c olur.

3. ÖRNEK



ABC bir üçgendir. $m(\widehat{B}) = 66^\circ, |BC| < |AB|$ olduğuna göre $m(\widehat{ACB}) = x$ in alabileceği en küçük tam sayı değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$|BC| < |AB| \Rightarrow m(\widehat{A}) < m(\widehat{C})$

$\Rightarrow m(\widehat{A}) < x \ldots (1)$

$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ$ olduğundan

$m(\widehat{A}) + 66^\circ + x = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{A}) = 114^\circ - x \ldots (2)$

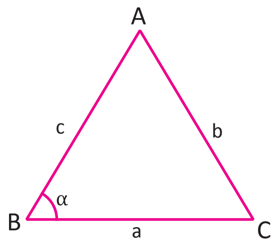
(2) ifadesi (1) de yerine yazıldığında

$114^\circ - x < x \Rightarrow 114^\circ < 2x$

$\Rightarrow 57^\circ < x$ olur.

Bu durumda x in değer aralığı: $57^\circ < x < 114^\circ$ bulunur.

En küçük değeri: $m(\widehat{ACB}) = 58^\circ$ olur.



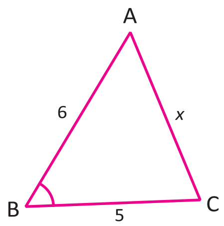
ABC üçgeninde

$\alpha < 90^\circ$ ise $b^2 < a^2 + c^2$

$\alpha = 90^\circ$ ise $b^2 = a^2 + c^2$

$\alpha > 90^\circ$ ise $b^2 > a^2 + c^2$ olur.

4. ÖRNEK



ABC bir üçgendir. $m(\widehat{B}) < 90^\circ$ ve $|AB| = 6, |BC| = 5$ olduğuna göre $|AC| = x$ in alabileceği en büyük tam sayı değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$m(\widehat{B}) < 90^\circ \Rightarrow x^2 < 6^2 + 5^2$$
$$\Rightarrow x^2 < 61$$
$$\Rightarrow x < \sqrt{61}, (\sqrt{61} \approx 7{,}81)$$
$$\Rightarrow x = 7 \text{ olur.}$$

3. Üçgen Eşitsizliği

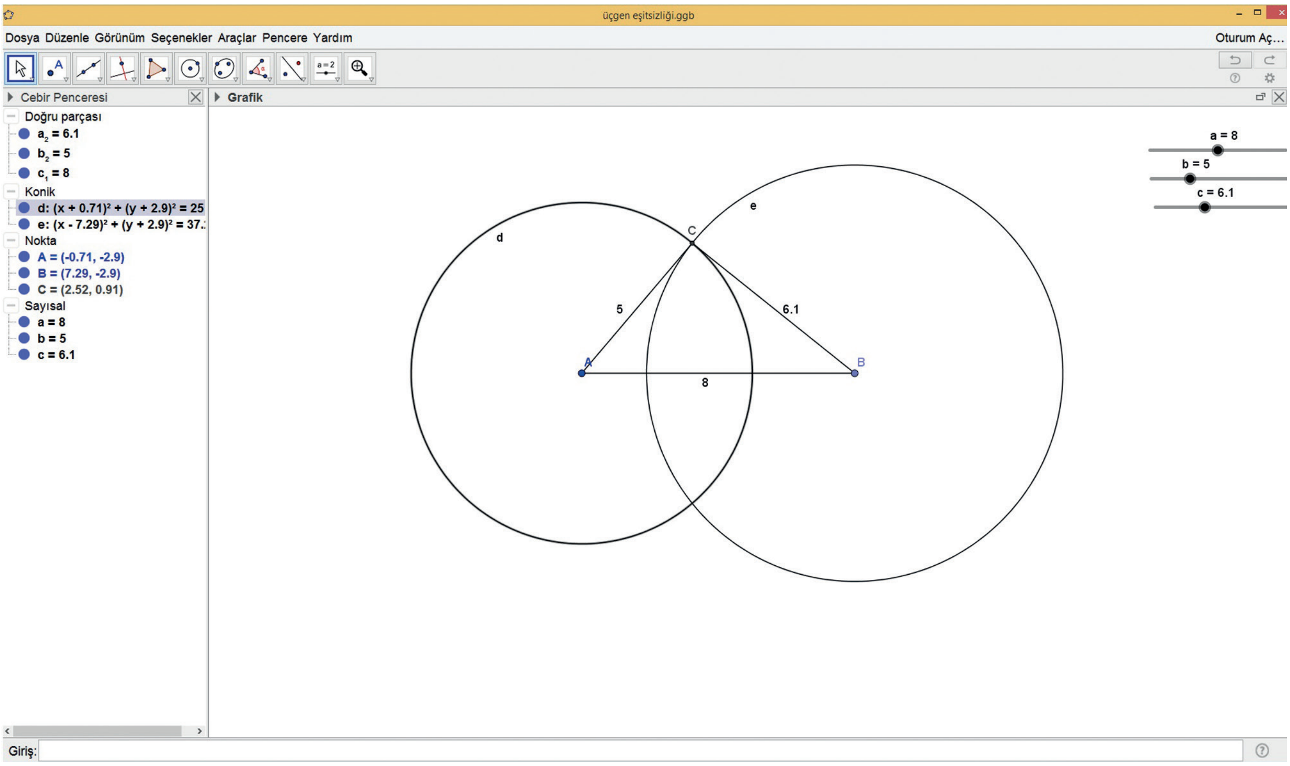
Teknoloji Uygulaması

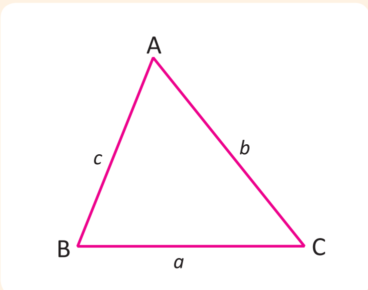
Aşağıda GeoGebra programı kullanılarak uzunluğu verilen üç doğru parçasının hangi durumlarda üçgen oluşturduğu incelenmiştir.

	Sürgü aracını etkinleştiriniz. En küçük değeri 1 en büyük değeri 10 olacak şekilde a, b, c sürgülerini oluşturunuz.
	Verilen uzunlukta doğru parçası aracını etkinleştiriniz. A noktasını seçiniz ve doğru parçasının uzunluğunu a olarak belirleyiniz. Bu şekilde AB doğru parçasını oluşturunuz.
	Merkez ve yarıçapla çember aracını etkinleştiriniz. A noktası merkez olarak işaretleyiniz ve yarıçapı b olan çemberi çiziniz. B noktasını merkez olarak işaretleyiniz ve yarıçapı c olan çemberi çiziniz.
	Nokta aracını etkinleştiriniz. Oluşturduğunuz iki çemberin kesiştikleri noktayı C noktası olarak belirleyiniz.
	Doğru parçası aracını etkinleştiriniz. A ve C noktalarını seçerek AC doğru parçasını oluşturunuz. B ve C noktalarını seçerek BC doğru parçasını oluşturunuz.

- Sürgüleri hareket ettirerek oluşan şekilleri inceleyiniz.
- a, b ve c uzunluklarından herhangi ikisi sabit tutulduğunda, üçüncü uzunluk hangi aralıkta değer alırsa bir üçgen oluşur? Bu durumu açıklayınız.

GeoGebra programında çizilmiş benzer bir örnek aşağıda verilmiştir.





Bir üçgende iki kenar uzunluğunun toplamı, üçüncü kenarın uzunluğundan büyüktür.

ABC üçgeninde

$a < b + c$

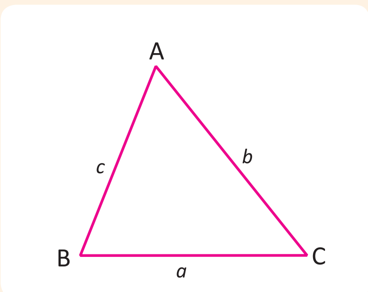
$b < a + c$

$c < a + b$ tür.

$a < b + c$ ...(1)

$$\left.\begin{array}{l} b < a + c \Rightarrow b - c < a \\ c < a + b \Rightarrow c - b < a \end{array}\right\} |b - c| < a \ldots(2)$$

(1) ve (2) den $|b - c| < a < b + c$ elde edilir.



ABC üçgeninde herhangi bir kenar uzunluğu, diğer iki kenar uzunluğu toplamından küçük; farklarının mutlak değerinden büyüktür. Bu bağıntıya üçgen eşitsizliği denir.

$|b - c| < a < b + c$

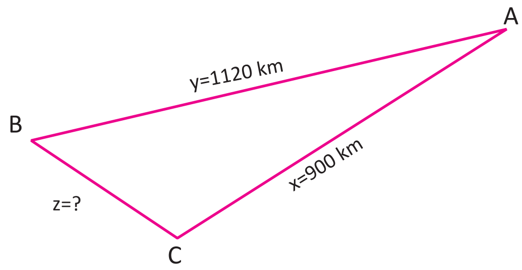
$|a - c| < b < a + c$

$|a - b| < c < a + b$ olur.

1. ÖRNEK

Temel, A şehrinden hava yolu ile C şehrine gitmek istiyor. A şehri ile C şehri arasındaki hava yolculuğu ancak B şehrine uğrayarak mümkün olmaktadır. A, B ve C şehirlerinin birbirine göre konumları bir üçgen oluşturmaktadır. A şehri ile C şehri arası hava yolu ile 900 km, A şehri ile B şehri arası hava yolu ile 1120 km olduğuna göre B ile C şehri arası hava yolu tam sayı değeri olarak en az kaç kilometredir?

ÇÖZÜM



Üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$|1120-900| < z < 1120+900$

$220 < z < 2020$

B ile C şehri arası hava yolu en az 221 km dir.

2. ÖRNEK

Aşağıda uzunlukları verilen doğru parçaları ile bir üçgen oluşturulup oluşturulamayacağını inceleyiniz.

a) $|AB| = 5\text{ cm}, |CD| = 10\text{ cm}, |EF| = 17\text{ cm}$ b) $|AB| = 12\text{ cm}, |CD| = 8\text{ cm}, |EF| = 15\text{ cm}$

ÇÖZÜM

a) $|AB| = 5\text{ cm}$

$|CD| = 10\text{ cm} \Rightarrow |10-5| < 17 < 10+5$

$|EF| = 17\text{ cm}$

Üçgen eşitsizliği sağlanmadığından verilen ölçülerle bir üçgen çizilemez.

b) $|AB| = 12\text{ cm}, |CD| = 8\text{ cm}, |EF| = 15\text{ cm}$

$|12-8| < 15 < 12+8 \Rightarrow 4 < 15 < 20$

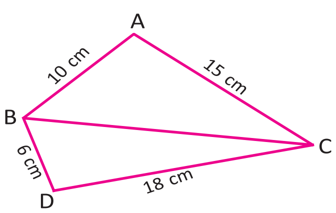
$|15-8| < 12 < 15+8 \Rightarrow 7 < 12 < 23$

$|15-12| < 8 < 15+12 \Rightarrow 3 < 8 < 27$

Üçgen eşitsizliği sağlandığından verilen ölçülerle bir üçgen çizilebilir.

Üç doğru parçasının uzunlukları üçgen eşitsizliklerinden birini sağlıyorsa, bu doğruları kenar kabul eden üçgen çizilebilir.

3. ÖRNEK



Şekilde verilenlere göre BC kenar uzunluğunun alabileceği en küçük ve en büyük tam sayı değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\widehat{ABC}$ de $\rightarrow |15-10| < |BC| < 15+10 \Rightarrow 5 < |BC| < 25 \ldots(1)$

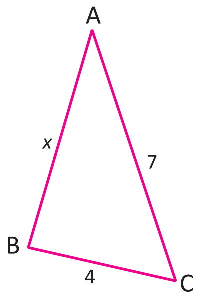
$\widehat{BCD}$ de $\rightarrow |18-6| < |BC| < 18+6 \Rightarrow 12 < |BC| < 24 \ldots(2)$

(1) ve (2) den $12 < |BC| < 24$ yazılır. Bu durumda BC kenarının alabileceği tam sayı değerleri,

$|BC| = 13$ (en küçük)

$|BC| = 23$ (en büyük) olarak bulunur.

4. ÖRNEK



ABC bir üçgen,

$m(\widehat{C}) > m(\widehat{A})$

$|AC| = 7$

$|BC| = 4$ olduğuna göre

$|AB| = x$ in kaç farklı tam sayı değeri olabileceğini bulunuz.

ÇÖZÜM

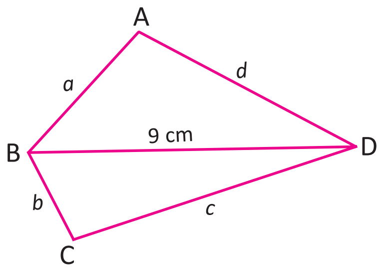
$\overset{\frown}{ABC}$ de üçgen eşitsizliğinden

$|7 - 4| < x < 7 + 4 \Rightarrow 3 < x < 11$ bulunur.

$m(\widehat{C}) > m(\widehat{A})$ olduğundan $4 < x < 11$ olur.

Bu durumda x in alabileceği tam sayı değerleri 5, 6, 7, 8, 9, 10 olup 6 tanedir.

5. ÖRNEK



Yandaki ABCD dörtgeninde $|BD| = 9$ cm olduğuna göre $Ç(ABCD)$ nin alabileceği en küçük tam sayı değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

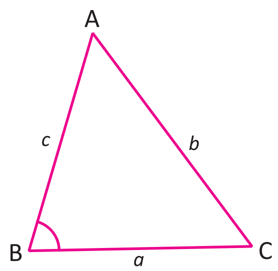
Üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$\overset{\frown}{ABD}$ de $\rightarrow a + d > 9$

$\overset{\frown}{BCD}$ de $\rightarrow b + c > 9$ eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa

$Ç(ABCD) = a + b + c + d > 18$ bulunur. Buradan $Ç(ABCD) = 19$ olur.

Dar açılı, dik açılı ve geniş açılı üçgenlerde açı ve kenarlar arasındaki ilişkiler şunlardır:



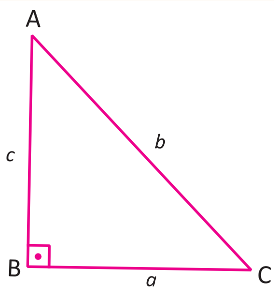
a) ABC dar açılı üçgen ise

$m(\widehat{B}) < 90^\circ$ olduğundan

$b^2 < a^2 + c^2$ tir.

$b < \sqrt{a^2 + c^2}$

$\Rightarrow |a - c| < b < \sqrt{a^2 + c^2}$ tir.

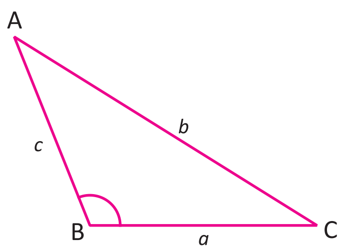


b) ABC dik açılı üçgen ise

$m(\widehat{B}) = 90^\circ$ olduğunda

$b^2 = a^2 + c^2$ tir.

(Pisagor bağıntısı)



c) ABC geniş açılı üçgen ise

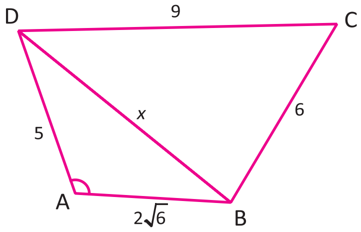
$m(\widehat{B}) > 90^\circ$ olduğundan

$b^2 > a^2 + c^2$ tir.

$b > \sqrt{a^2 + c^2}$

$\Rightarrow a + c > b > \sqrt{a^2 + c^2}$

6. ÖRNEK



$m(\widehat{A}) > 90^\circ$ olduğuna göre

$|DB| = x$ in alabileceği tam sayı değerlerinin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

$\overset{\frown}{ABD}$ de $m(\widehat{A}) > 90^\circ \Rightarrow x^2 > 5^2 + (2\sqrt{6})^2$

$\Rightarrow x^2 > 49$

$\Rightarrow x > 7$ olur. ...(1)

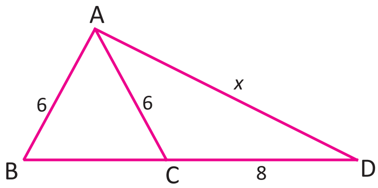
$\overset{\frown}{BCD}$ de üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$|9-6| < x < 9+6 \Rightarrow 3 < x < 15$ ...(2)

(1) ve (2) den $x = 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$ bulunur.

Bu durumda x değerleri toplamı $8+9+10+11+12+13+14 = 77$ olur.

7. ÖRNEK



ABC ikizkenar üçgen $|DC| = 8$ olduğuna göre

$|AD| = x$ in alabileceği tam sayı değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\overset{\frown}{ABC}$ ikizkenar üçgen olduğundan $\overset{\frown}{ACD}$ geniş açı olur.

$m(\overset{\frown}{ACD}) > 90^\circ \Rightarrow x^2 > 8^2 + 6^2$

$\Rightarrow x^2 > 100$

$\Rightarrow x > 10$ olur. ...(1)

$\overset{\frown}{ACD}$ de üçgen eşitsizliği kullanılırsa

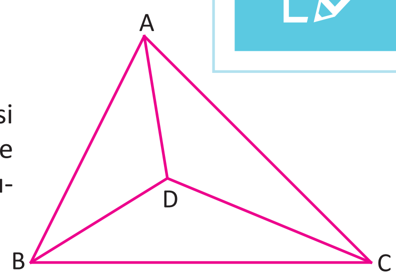
$|8-6| < x < 8+6 \Rightarrow 2 < x < 14$ ...(2)

(1) ve (2) den $|AD| = x$ in alabileceği tam sayı değerleri 11, 12, 13 olarak bulunur.

Sıra Sizde

SORU:

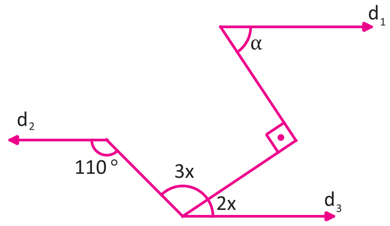
$x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere yandaki şekilde verilen ABC üçgeninin çevresi 24 cm, $|AD| = x$, $|BD| = y$, $|DC| = z$ dir. $(x+y+z) \in \mathbb{N}$ olduğuna göre $x+y+z$ nin alabileceği en küçük ve en büyük değerlerin toplamını bulunuz.



ÇÖZÜM:

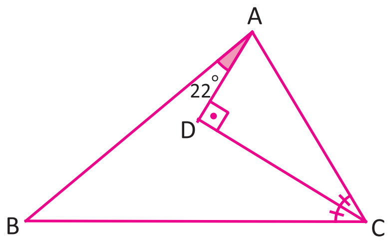
ALIŞTIRMALAR-1

1.



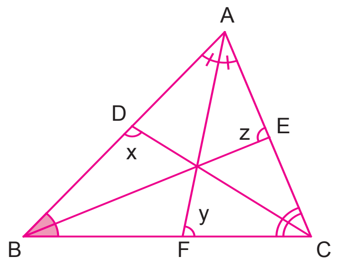
$d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$ ise α açısının ölçüsünü bulunuz.

2.



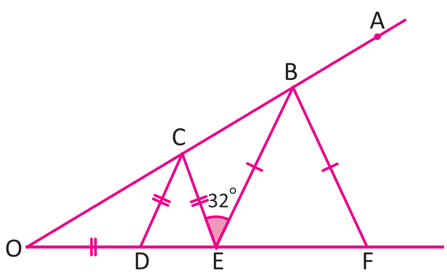
ABC bir üçgen, $|AB| = 2|DC|$ ise $m(\widehat{DAC})$ açısını bulunuz.

3.



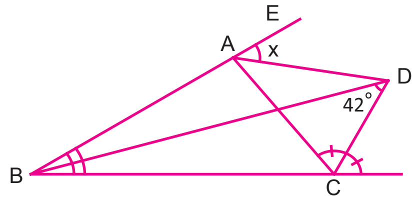
ABC üçgeninde $[AF]$, $[BE]$ ve $[CD]$ iç açıortaylar, $m(\widehat{BDC}) = x$, $m(\widehat{AFC}) = y$, $m(\widehat{BEA}) = z$ olmak üzere $x + y + z = 270^\circ$ olduğunu gösteriniz.

4.



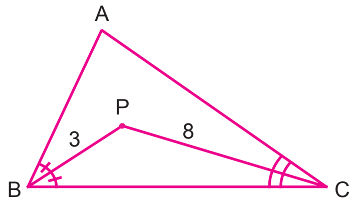
Yukarıdaki şekilde $|OD| = |DC| = |CE|$,
$|OE| = |EB| = |BF|$, $m(\widehat{CEB}) = 32^\circ$
olduğuna göre FBA açısının ölçüsünü bulunuz.

5.



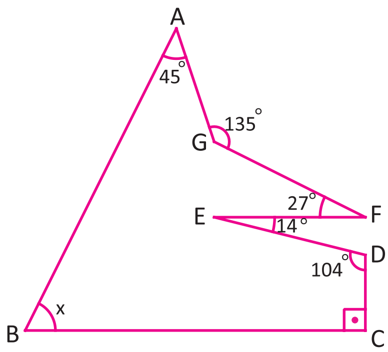
ABC üçgeninde, $[CD]$ ve $[BD]$ açıortaylar, $m(\widehat{BDC}) = 42^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{DAE}) = x$ açısının ölçüsünü bulunuz.

6.



ABC bir üçgen, $[BP]$ ve $[CP]$ iç açıortaylar, $|BP| = 3$ br, $|CP| = 8$ br olduğuna göre $|BC|$ nun alabileceği tam sayı değerlerini bulunuz.

7.



Şekilde verilenlere göre $m(\widehat{ABC}) = x$ değerini bulunuz.

8. Kenar uzunlukları tam sayı olan bir çeşitkenar üçgenin çevresinin alabileceği en küçük tam sayı değerini bulunuz.

9.4.2. ÜÇGENLERDE EŞLİK VE BENZERLİK

1. Üçgenlerin Eşliği

Eşlik Kavramı

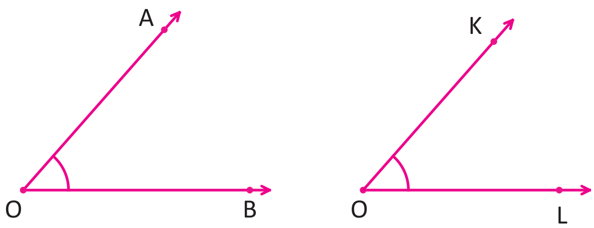
Sanayi, hizmet sektörü, sağlık vb. alanlarda yapılan üretimler belli bir standart ölçüsünde yapılmaktadır. Belirlenen standarttan olumsuz bir sapma olduğunda yapılan bu üretimler, defolu ürünler kategorisine girer. Bu doğrultuda, kullanılan bir ürün ya da parçanın bozulması ve yedeğinin ürüne uymaması hâlinde bu ürünlerin eşliği hakkında düşüncelerinizi matematik diliyle nasıl ifade edersiniz? Bir ürünün yedeğinden beklediğinizözellikler nelerdir? Belirtiniz.

Günlük hayatta eş parçalar olduğu gibi geometride de birbirine eş olan üçgen ve kare gibi şekiller bulunur. Eş şekillerde karşılıklı noktalar, kenarlar ve açılar birbirine eştir. Eşlik " $\cong$ " sembolü ile gösterilir.

- İki doğru parçasının uzunluğu eşit ise bu doğru parçaları eştir.

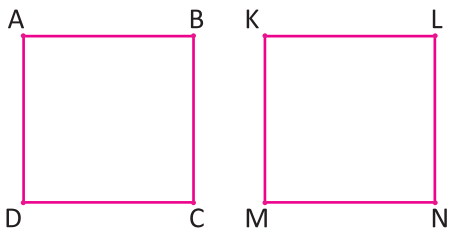
$|AB| = |CD|$ ise $[AB] \cong [CD]$ yazılır.

- Ölçüleri eşit olan iki açı eş açıdır.

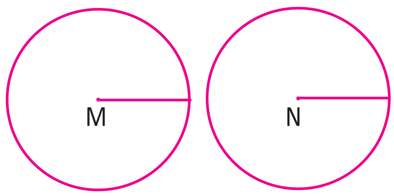


$m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{KOL})$ ise $\widehat{AOB} \cong \widehat{KOL}$ yazılır.

- Kenar uzunlukları eşit olan iki kare ya da yarıçapları eşit olan iki çember ise aynı şekillerdir.



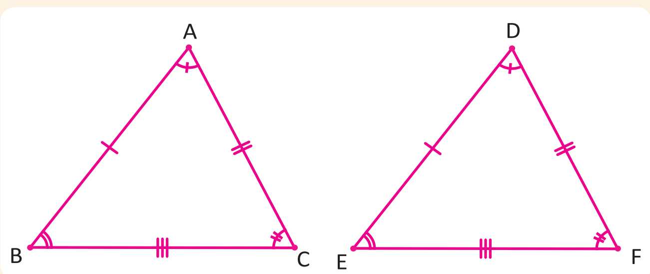
$|AB| = |KL|$ ise $ABCD \cong KLNM$



M ve N merkezli çemberlerin yarıçapları eşit olduğundan bu çemberler aynı çemberlerdir.

Üçgenlerde Eşlik

Karşılıklı kenarlarının uzunlukları ve karşılıklı açılarının ölçüleri eşit olan üçgenlere eş üçgenler denir.



$\widehat{ABC}$ ve $\widehat{DEF}$ için

$$\begin{cases} |AB| = |DE| \\ |BC| = |EF| \\ |AC| = |DF| \end{cases} \text{ ve } \begin{cases} m(\widehat{C}) = m(\widehat{F}) \\ m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) \\ m(\widehat{B}) = m(\widehat{E}) \end{cases}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ yazılır.

Tersine $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF} \Rightarrow \begin{cases} |AB| = |DE| \\ |BC| = |EF| \\ |AC| = |DF| \end{cases}$ ve $\begin{cases} m(\widehat{C}) = m(\widehat{F}) \\ m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) \\ m(\widehat{B}) = m(\widehat{E}) \end{cases}$ eşitlikleri yazılır.

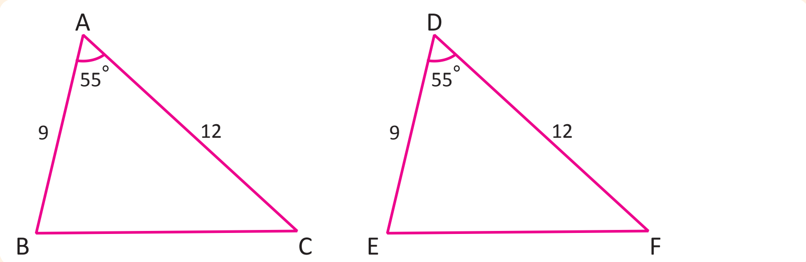
$\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ nin gösteriminde, karşılıklı açı ve kenarlar eşleştirildiğinden harflerin yazılış sırası önemlidir.

Üçgenlerde Eşlik Kuralları

İki üçgenin eş olması için karşılıklı bütün açılarının ölçüleri ve karşılıklı bütün kenarlarının uzunlukları eşit olmalıdır. Verilen üçgenlerde en az biri kenar olmak üzere üçer elemanın eş olması üçgenlerin eşliği için yeterlidir.

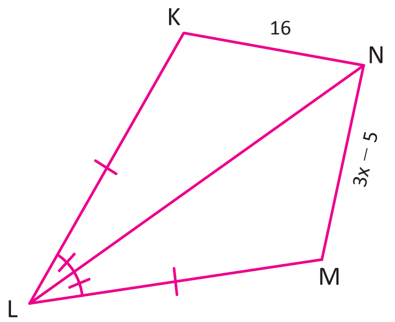
a) Kenar-Açı-Kenar (K.A.K.) Eşlik Kuralı

İki üçgen arasında yapılan bire bir eşlemede karşılıklı ikişer kenar uzunlukları ve bu kenarlar arasında kalan açı ölçüleri eşit ise bu üçgenler eş üçgenler olur. Örneğin



Şekildeki ABC ve DEF üçgenlerinde
$|AB| = |DE| = 9$ birim, $|AC| = |DF| = 12$ birim ve $m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) = 55^\circ$ olduğundan $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ dir.

1. ÖRNEK

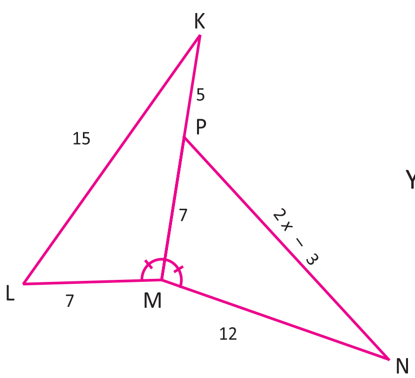


Yandaki şekilde $[LN]$ açıortay olduğuna göre x uzunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$|KL| = |LM|$, $|LN| = |LN|$ ve $m(\widehat{KLN}) = m(\widehat{MLN})$ olduğundan K.A.K. eşlik kuralına göre $\widehat{KLN} \cong \widehat{MLN}$ dir.
Bu durumda $|KN| = |NM|$ olur. Buradan $16 = 3x - 5 \Rightarrow 21 = 3x \Rightarrow x = 7$ br bulunur.

2. ÖRNEK



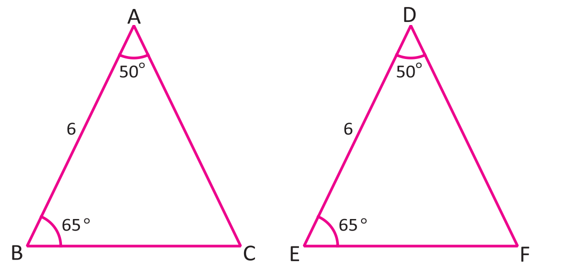
Yandaki şekilde verilenlere göre $|DE| = x$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$|ML| = |MP| = 7$ birim, $|MN| = |MK| = 12$ birim ve $m(\widehat{LMK}) = m(\widehat{PMN})$ olduğundan K.A.K. eşlik kuralına göre $\widehat{KML} \cong \widehat{NMP}$ dir. Bu durumda $|KL| = |NP|$ olur. Buradan $15 = 2x - 3 \Rightarrow 18 = 2x \Rightarrow x = 9$ br bulunur.

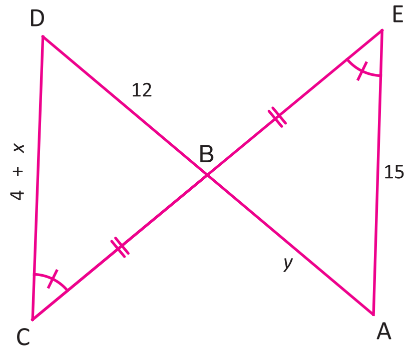
b) Açı-Kenar-Açı (A.K.A.) Eşlik Kuralı

İki üçgen arasında yapılan bire bir eşlemede karşılıklı ikişer açının ölçüleri ve bu açılar arasında kalan kenar uzunlukları eşit ise bu üçgenler eş üçgenler olur. Örneğin



Şekildeki ABC ve DEF üçgenlerinde
$m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) = 50^\circ, m(\widehat{B}) = m(\widehat{E}) = 65^\circ$ ve
$|AB| = |DE| = 6$ cm olduğundan $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ dir.

3. ÖRNEK



Yandaki şekilde $|BC| = |EB|$, $m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{AEB})$
$|AE| = 15$ cm, $|CD| = x + 4$, $|BD| = 12$ cm, $|AB| = y$
olduğuna göre $x + y$ değerini bulunuz

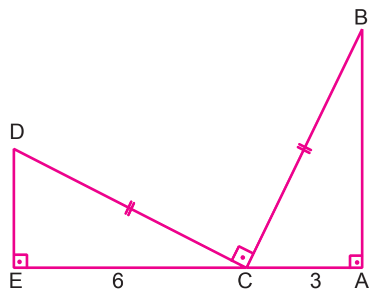
ÇÖZÜM

$m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{BEA}), m(\widehat{CBD}) = m(\widehat{EBA})$ ve $|BC| = |BE|$ olduğundan
A.K.A. eşlik kuralına göre $\widehat{ABE} \cong \widehat{DBC}$ dir.

Bu durumda $|AB| = |DB|$ olduğundan $y = 12$ cm ve $|AE| = |DC|$ olduğundan $15 = x + 4 \Rightarrow x = 11$ cm bulunur.

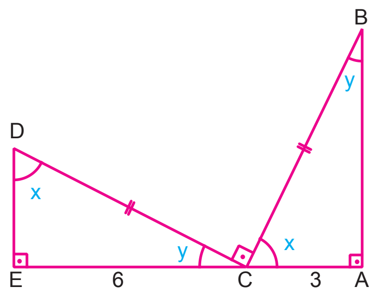
Buradan $x + y = 11 + 12 = 23$ cm bulunur.

4. ÖRNEK



Yandaki şekilde
$[AB] \perp [AC], [DE] \perp [EC], [DC] \perp [CB], |DC| = |CB|$ ve
$|CE| = 6$ cm, $|AC| = 3$ cm olduğuna göre $|AB| + |ED|$ değerini bulunuz.

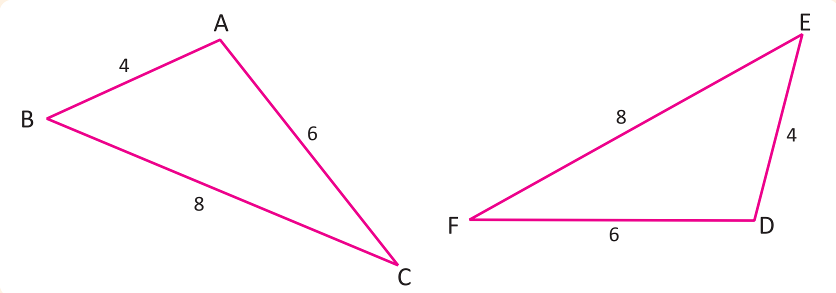
ÇÖZÜM



$m(\widehat{ACB}) = x$ ve $m(\widehat{DCE}) = y$ olsun. $m(\widehat{ACB}) + m(\widehat{DCE}) = 90^\circ$
olduğundan $\widehat{ACB}$ ve $\widehat{DCE}$ tümler açılardır.
$m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{CDE}) = x$ ve $m(\widehat{DCE}) = m(\widehat{ABC}) = y$, $|DC| = |BC|$
olduğundan (A.K.A.) eşlik kuralına göre $\widehat{ABC} \cong \widehat{ECD}$ olur.
Bu durumda $|EC| = |AB| = 6$ ve $|AC| = |ED| = 3$ bulunur.
Buradan $|AB| + |ED| = 6 + 3 = 9$ cm olur.

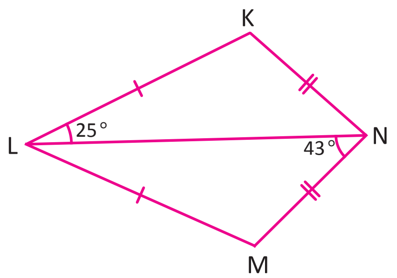
c) Kenar-Kenar-Kenar (K.K.K.) Eşlik Kuralı

İki üçgen arasında yapılan bire bir eşlemede karşılıklı bütün kenar uzunlukları eşit ise bu üçgenler eş üçgenlerdir. Bu durumda üçgenlerin karşılıklı açıları da eştir. Örneğin



Şekildeki ABC ve DEF üçgenlerinde kenar uzunlukları eşit olduğundan bu üçgenler eş üçgenlerdir. $|AB|=|DE|=4, |BC|=|EF|=8, |AC|=|DF|=6$ olduğundan bu eşlik $\overset{\frown}{ABC} \cong \overset{\frown}{DEF}$ şeklinde gösterilir. Bu durumda $m(\widehat{A})=m(\widehat{D}), m(\widehat{B})=m(\widehat{E}), m(\widehat{C})=m(\widehat{F})$ olur.

5. ÖRNEK



Yandaki şekilde $m(\widehat{KLN})=25^\circ$, $m(\widehat{MNL})=43^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{M})$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Şekilde $|KL|=|ML|, |KN|=|MN|, |NL|=|NL|$ olduğundan

K.K.K. eşlik kuralına $\overset{\frown}{KLN} \cong \overset{\frown}{MLN}$ olur.

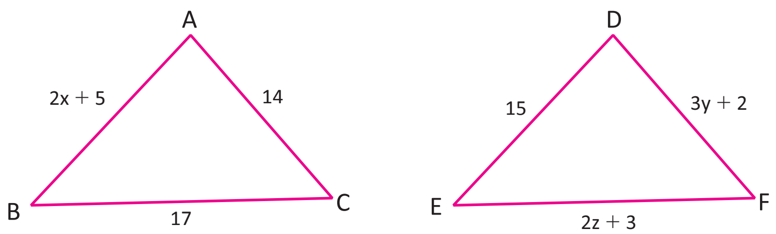
$m(\widehat{KLN})=m(\widehat{MLN})=25^\circ$, $m(\widehat{MNL})=m(\widehat{KNL})=43^\circ$ olur.

$\overset{\frown}{LMN}$ de $m(\widehat{L})+m(\widehat{M})+m(\widehat{N})=180^\circ$

$25^\circ+m(\widehat{M})+43^\circ=180^\circ$

$m(\widehat{M})=180^\circ-68^\circ=112^\circ$ olur.

6. ÖRNEK



Yandaki şekilde $\overset{\frown}{ABC} \cong \overset{\frown}{DEF}$ dir. Verilenlere göre $x \cdot y \cdot z$ çarpımını bulunuz.

ÇÖZÜM

$\overset{\frown}{ABC} \cong \overset{\frown}{DEF} \Rightarrow |AB|=|DE|, |AC|=|DF|, |BC|=|EF|$ olur. Buna göre

$|AB|=|DE| \Rightarrow 2x+5=15$ $\quad |AC|=|DF| \Rightarrow 3y+2=14$ $\quad |BC|=|EF| \Rightarrow 2z+3=17$

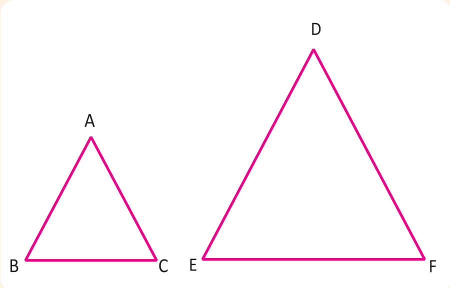
$\Rightarrow x=5$ $\quad \Rightarrow y=4$ $\quad \Rightarrow z=7$ bulunur.

O hâlde $x \cdot y \cdot z = 5 \cdot 4 \cdot 7 = 140$ bulunur.

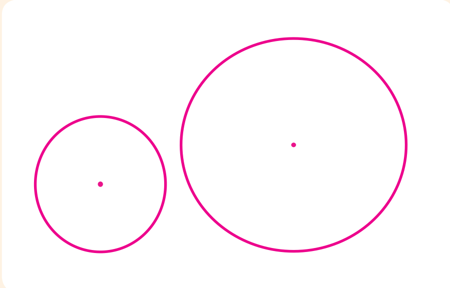
2. Üçgenlerin Benzerliği

Benzerlik Kavramı

Belli oranda büyültülmüş veya küçültülmüş şekillere benzer şekiller adı verilir.



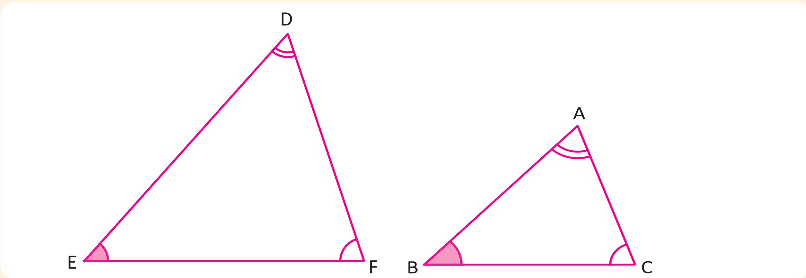
Herhangi iki eşkenar üçgen birbirine benzerdir.



Herhangi iki çember birbirine benzerdir.

Üçgenlerde Benzerlik

İki üçgen arasında kurulan bire bir eşlemede, karşılıklı açıları eş veya karşılıklı kenarlarının uzunlukları orantılı olan üçgenlere benzer üçgenler denir. Benzerlik durumu " ~ " sembolü ile gösterilir.



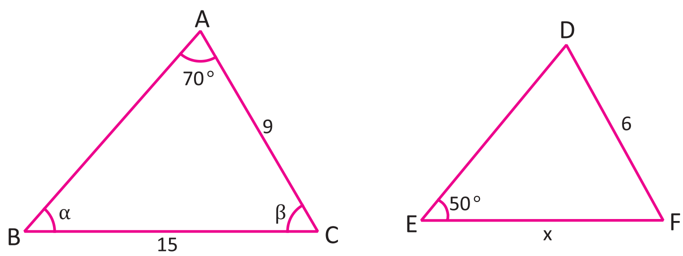
$$\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{DEF} \text{ ise } \begin{cases} m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) \\ m(\widehat{B}) = m(\widehat{E}) \\ m(\widehat{C}) = m(\widehat{F}) \end{cases}$$

$\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{DEF}$ şeklinde gösterilir. Bu durumda üçgenlerin karşılıklı kenarları orantılıdır.

$\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|BC|}{|EF|} = \dfrac{|AC|}{|DF|} = k$ ise k ye benzerlik oranı denir.

- $k = 1$ ise üçgenler eştir.

1. ÖRNEK



$\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{DEF}$
$|BC| = 15$ cm, $|AC| = 9$ cm
$|DF| = 6$ cm
$m(\widehat{A}) = 70°$,
$m(\widehat{E}) = 50°$ ise x, α ve β değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{DEF}$ olduğundan $m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) = 70°$, $\alpha = m(\widehat{B}) = m(\widehat{E}) = 50°$ ve $\beta = m(\widehat{C}) = m(\widehat{F})$ olur.

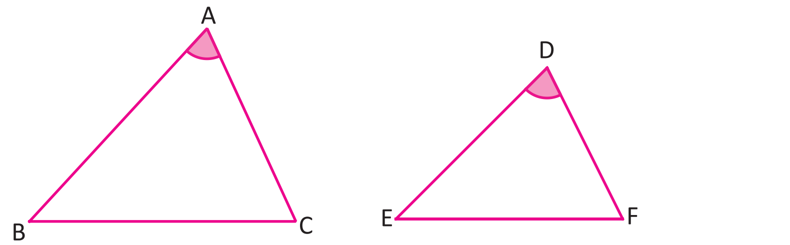
Bu durumda $50° + 70° + \beta = 180°$ olduğundan $\beta = 60°$ bulunur.

$\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|BC|}{|EF|} = \dfrac{|AC|}{|DF|}$ olduğundan $\dfrac{9}{6} = \dfrac{15}{x} \Rightarrow x = 10$ cm olur.

Üçgenlerde Benzerlik Teoremleri

a) Kenar-Açı-Kenar (K.A.K.) Benzerlik Teoremi

İki üçgenin karşılıklı ikişer kenarlarının uzunlukları orantılı ve bu orantılı kenarlar arasındaki açıları eş ise bu iki üçgen benzerdir. Bu benzerliğe Kenar-Açı-Kenar (K.A.K.) benzerliği denir.

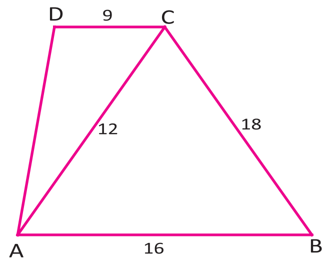


$$\left.\begin{array}{l} m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}) \\ \dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|AC|}{|DF|} \end{array}\right\} \text{ise } \overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{DEF}$$

veya

$$\frac{|AB|}{|DF|} = \frac{|AC|}{|DE|} \text{ ise } \overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{DFE}$$

2. ÖRNEK



Yandaki şekilde $[AB] \mathbin{/\!/} [DC]$, $|AB| = 16$ cm, $|AC| = 12$ cm, $|BC| = 18$ cm, $|DC| = 9$ cm ise $|AD|$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$[AB] \mathbin{/\!/} [DC]$ olduğundan $m(\overset{\frown}{DCA}) = m(\overset{\frown}{CAB})$ dır.

Bu açıları oluşturan kenarların karşılıklı oranları

$\dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$ ve $\dfrac{12}{16} = \dfrac{3}{4}$ olarak bulunur.

O hâlde K.A.K. benzerlik teoreminden $\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{CAD}$ dir.

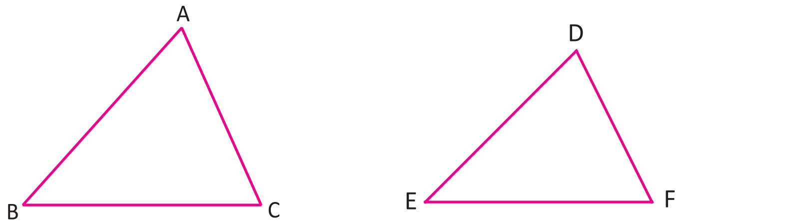
Dolayısıyla orantılı kenarların karşısındaki açılar da eşittir.

Benzerlik oranı $\dfrac{3}{4}$ tür. $|AD| = x$ denildiğinde

$\dfrac{x}{18} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow x = \dfrac{54}{4} = \dfrac{27}{2}$ cm olur.

b) Kenar-Kenar-Kenar (K.K.K.) Benzerlik Teoremi

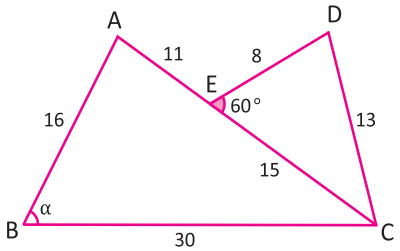
İki üçgenin karşılıklı kenar uzunlukları orantılı ise bu iki üçgen benzerdir. Bu benzerliğe Kenar-Kenar-Kenar (K.K.K.) benzerliği denir.



$\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|AC|}{|DF|} = \dfrac{|BC|}{|EF|}$ ise $\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{DEF}$ dir.

Bu durumda $m(\widehat{A}) = m(\widehat{D})$, $m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$ ve $m(\widehat{C}) = m(\widehat{F})$ olur.

3. ÖRNEK



$|AB| = 16$ cm, $|BC| = 30$ cm, $|DE| = 8$ cm, $|DC| = 13$ cm, $|EC| = 15$ cm, $|AE| = 11$ cm, $m(\widehat{DEC}) = 60^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{ABC}) = \alpha$ açısının ölçüsünü bulunuz.

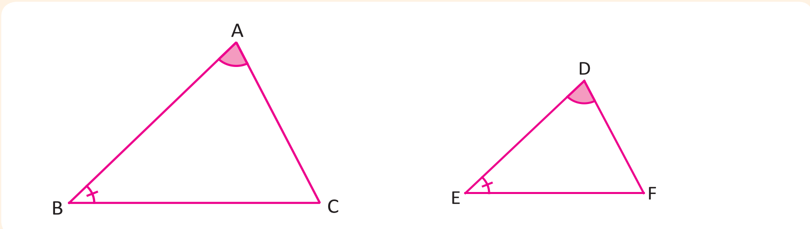
ÇÖZÜM

$\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}, \frac{|DC|}{|AC|} = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}, \frac{|EC|}{|BC|} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$ olup üçgenlerin kenarları orantılıdır. O hâlde K.K.K. benzerlik teoreminden $\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{DEC}$ dir. Bu durumda orantılı olan kenarların karşısındaki açılar eşittir.

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{D}), m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{ECD}), m(\widehat{B}) = m(\widehat{E}) \Rightarrow \alpha = 60^\circ$ olur.

c) Açı-Açı (A.A.) Benzerlik Teoremi

İki üçgen arasında yapılan bire bir eşlemede karşılıklı ikişer açısı eş ise üçgenler benzerdir. Bu benzerliğe Açı-Açı (A.A.) benzerliği denir.

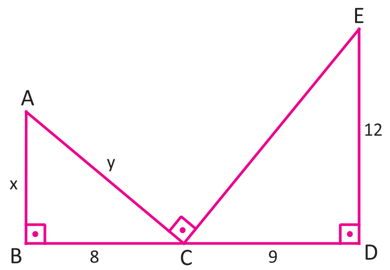


$m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$ ve $m(\widehat{A}) = m(\widehat{D})$ ise $\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{DEF}$ dir.

Dolayısıyla, k orantı sabiti ise

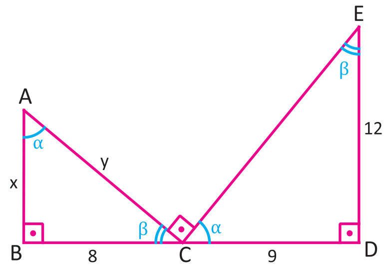
$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|} = k$ tır.

4. ÖRNEK



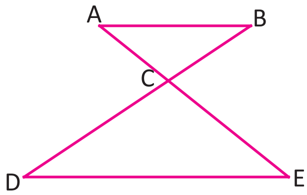
$[AB] \perp [BD], [ED] \perp [BD], [AC] \perp [EC]$,
$|BC| = 8$ cm, $|CD| = 9$ cm, $|ED| = 12$ cm,
$|AB| = x, |AC| = y$ ise $x + y$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



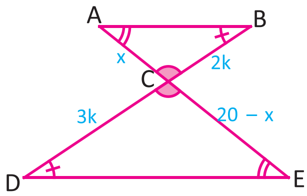
$\alpha + \beta = 90^\circ$ olmak üzere
$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{ECD}) = \alpha$ ise
$m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{CED}) = \beta$ olur.
O hâlde A.A. benzerlik teoreminden $\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{CDE}$ dir.
$\frac{x}{9} = \frac{8}{12} \Rightarrow x = 9 \cdot \frac{8}{12} = 6$ cm olur.
Pisagor teoreminden
$x^2 + 8^2 = y^2 \Rightarrow 6^2 + 8^2 = y^2 \Rightarrow y^2 = 100 \Rightarrow y = 10 \Rightarrow x + y = 16$ tır.

5. ÖRNEK



$[AB] \parallel [DE]$, $3|BC| = 2|CD|$, $|AE| = 20$ cm ise $|AC|$ nu bulunuz.

ÇÖZÜM

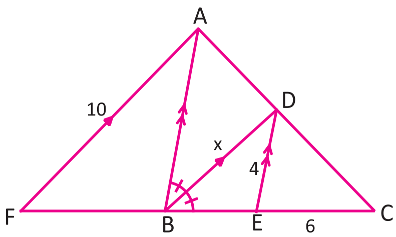


$[AB] \parallel [DE]$ olduğundan A.A. benzerliğinden $\widehat{ABC} \sim \widehat{EDC}$ olur. Bu benzerliğe kelebek benzerliği denir.

$|AC| = x$ denirse

$$\frac{|BC|}{|CD|} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{x}{20-x} = \frac{2}{3} \Rightarrow 40 - 2x = 3x \Rightarrow 5x = 40 \text{ olup } x = 8 \text{ olur.}$$

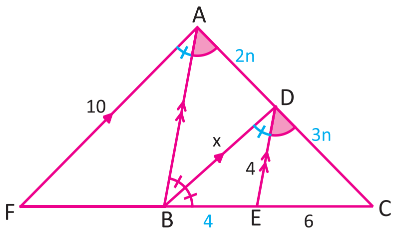
6. ÖRNEK



AFC bir üçgen

$[AB] \parallel [DE]$, $[BD] \parallel [FA]$, $m(\widehat{DBA}) = m(\widehat{DBE})$, $|DE| = 4$ cm, $|EC| = 6$ cm, $|AF| = 10$ cm, $|DB| = x$ uzunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Verilenlerden BED üçgeni ikizkenar üçgendir.

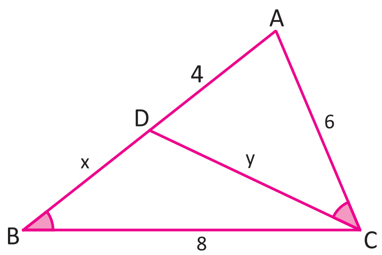
$|BE| = 4$ cm dir. $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEC}$ olduğundan

$$\frac{|EC|}{|EB|} = \frac{|CD|}{|DA|} \text{ olup } \frac{|CD|}{|DA|} = \frac{3}{2} \text{ bulunur.}$$

A.A. benzerliğinden $\widehat{CDB} \sim \widehat{CAF}$ olduğundan

$$\frac{|DB|}{|AF|} = \frac{|CD|}{|CA|} = \frac{|CB|}{|CF|} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow x = 6 \text{ cm olur.}$$

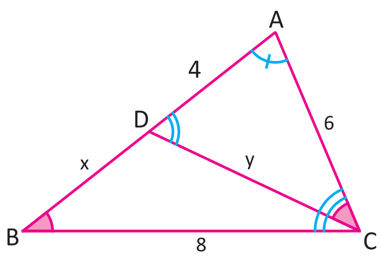
7. ÖRNEK



ABC bir üçgen

$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACD})$, $|AD| = 4$ cm, $|BC| = 8$ cm, $|AC| = 6$ cm olduğuna göre $|BD| = x$ ve $|CD| = y$ değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM



ABC ve ACD üçgenlerinin birer açıları eşittir. A açısı da ortak açı olduğundan A.A. benzerlik teoreminden yola çıkıldığında bu iki üçgen benzerdir. Bu durumda $\widehat{ABC} \sim \widehat{ACD}$ olur.

Dolayısıyla üçüncü açılar da birbirine eşit olup $m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{ACB})$ olur.

O hâlde benzerlik oranı:

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|BC|} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{6}{x+4} = \frac{y}{8}$$

$$\Rightarrow 4x + 16 = 36 \Rightarrow x = 5 \text{ olur.}$$

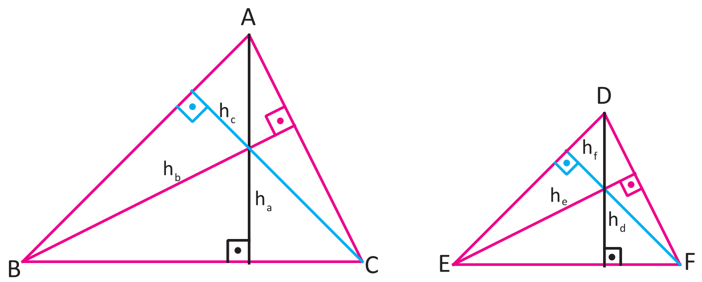
$$\Rightarrow y = \frac{32}{6} = \frac{16}{3} \text{ cm olarak bulunur.}$$

Benzerlik Özellikleri

$\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{DEF}$ ve benzerlik oranı k olmak üzere

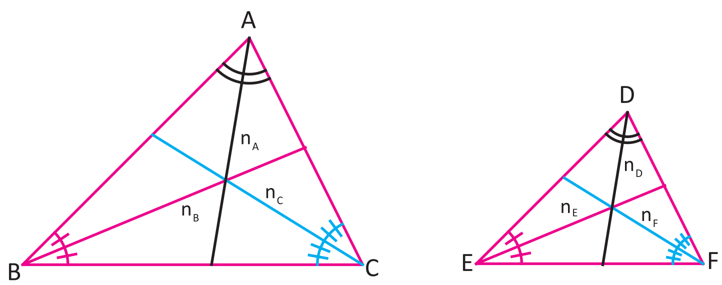
a) Benzer üçgenlerin karşılıklı kenarlara ait yükseklikleri, kenarortayları ve açıortayları orantılıdır. Bu oran benzerlik oranına eşittir.

Benzer üçgenlerin karşılıklı kenarlara ait yükseklikleri orantılıdır.



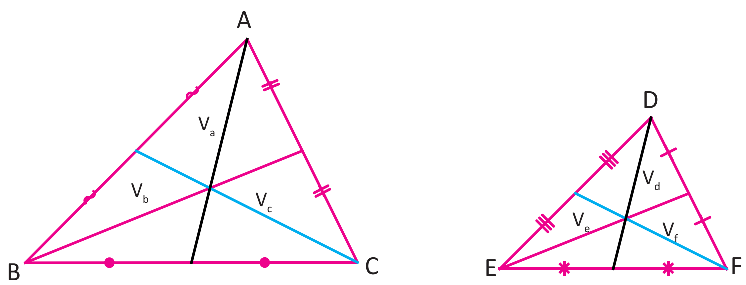
$$\frac{h_a}{h_d} = \frac{h_b}{h_e} = \frac{h_c}{h_f} = k \text{ olur.}$$

Benzer üçgenlerin karşılıklı kenarlara ait açıortayları orantılıdır.



$$\frac{n_A}{n_D} = \frac{n_B}{n_E} = \frac{n_C}{n_F} = k \text{ olur.}$$

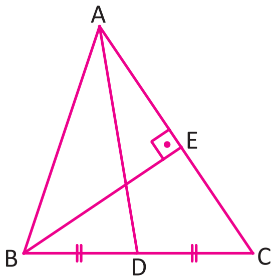
Benzer üçgenlerin karşılıklı kenarlara ait kenarortayları orantılıdır.

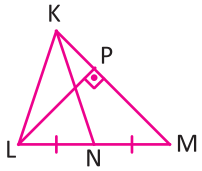


$$\frac{V_a}{V_d} = \frac{V_b}{V_e} = \frac{V_c}{V_f} = k \text{ olur.}$$

b) Benzer üçgenlerin çevreleri oranı, benzerlik oranına eşittir. $\dfrac{Ç(\overset{\frown}{ABC})}{Ç(\overset{\frown}{DEF})} = k$ olur.

8. ÖRNEK





$\widehat{ABC} \sim \widehat{KLM}$, $3|BE| = 4|LP|$,
$|LN| = 2$ cm, $|KN| = 9$ cm
olduğuna göre $|AD|$ ve $|BC|$ değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

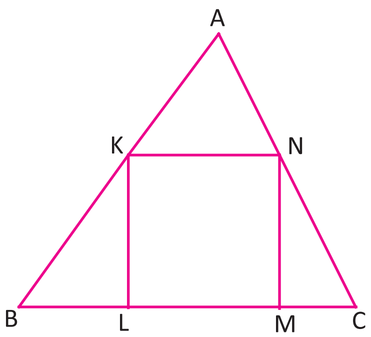
Üçgenler benzer ve $|AC|$ ile $|KM|$ kenarları orantılı olduğundan bu kenarlara ait yüksekliklerin oranı da benzerlik oranına eşittir. O hâlde $\dfrac{|LP|}{|BE|} = \dfrac{3}{4}$ benzerlik oranıdır.

Bu durumda $\dfrac{|LM|}{|BC|} = \dfrac{4}{|BC|} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow |BC| = \dfrac{16}{3}$ cm olur.

Benzer şekilde, $|BC|$ ile $|LM|$ kenarları orantılı olduğundan bu kenarlara ait kenarortayların oranı da benzerlik oranına eşittir.

$\dfrac{|KN|}{|AD|} = \dfrac{9}{|AD|} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow |AD| = \dfrac{36}{3} = 12$ cm olarak bulunur.

9. ÖRNEK

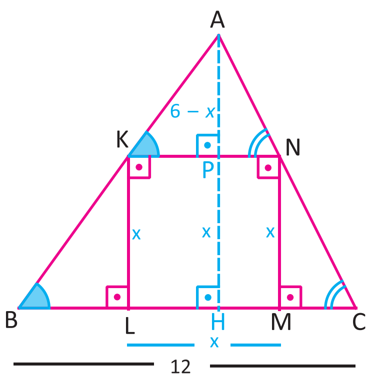


ABC üçgeninde KLMN karesinin $[ML]$ kenarı üçgenin $[BC]$ kenarı üzerind

$|BC| = 12$ cm, $A(\widehat{ABC}) = 36$ cm^2 olduğuna

göre KLMN karesinin alanını bulunuz.

ÇÖZÜM



Karenin bir kenarının uzunluğuna x denirse

$|KN| = |KL| = |MN| = |LM| = x$ dir. $|AH| = h$ olmak üzere

$A(\widehat{ABC}) = \dfrac{h \cdot 12}{2} = 36 \Rightarrow 6h = 36 \Rightarrow h = 6$ cm olur.

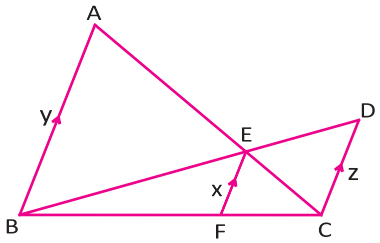
$[KN] \mathbin{/\!/} [BC]$ olduğundan $\widehat{AKN} \sim \widehat{ABC}$ dir.

Benzer üçgenlerin yükseklikleri oranı da benzerlik oranına eşit olduğundan

$\dfrac{|AP|}{|AH|} = \dfrac{|KN|}{|BC|} \Rightarrow \dfrac{6-x}{6} = \dfrac{x}{12} \Rightarrow 6 - x = \dfrac{x}{2} \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$ cm dir.

O hâlde $A(KLMN) = x^2 = 4^2 = 16$ cm^2 olarak bulunur.

10. ÖRNEK



$[AB] \parallel [EF] \parallel [DC], |AB| = y, |EF| = x, |DC| = z$ ise $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

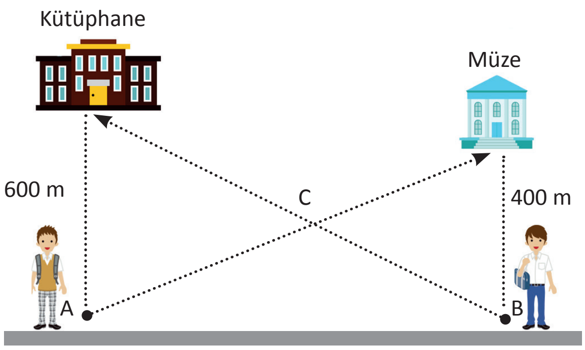
$\widehat{CEF} \sim \widehat{CAB}$ olduğundan $\frac{x}{y} = \frac{|CF|}{|CB|} = \frac{|CE|}{|CA|}$ ve

$\widehat{EBF} \sim \widehat{DBC}$ olduğundan $\frac{x}{z} = \frac{|BE|}{|BD|} = \frac{|BF|}{|BC|}$ olur.

$\frac{x}{y} + \frac{x}{z} = \frac{|CF|}{|CB|} + \frac{|BF|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|BC|} = 1 \Rightarrow x \cdot \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x}$ bulunur.

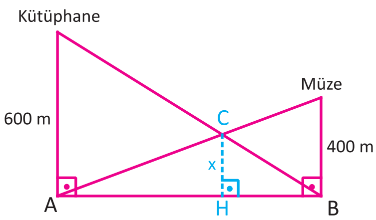
11.ÖRNEK

Aşağıdaki şekilde A noktasında bulunan Serhat müzeye, B noktasında bulunan Serkan ise kütüphaneye en kısa yoldan gitmek istemektedir. Kütüphanenin yola uzaklığı 600 m, müzenin yola uzaklığı 400 m dir.



Serkan ve Serhat C noktasında karşılaştıklarına göre bu noktanın yola uzaklığını bulunuz.

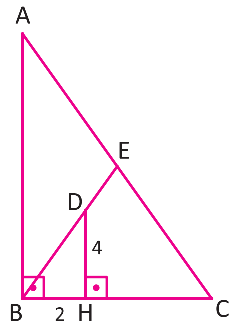
ÇÖZÜM



Problemde verilenleri gösteren temsili bir şekil çizildiğinde istenen uzaklık:

$\frac{1}{x} = \underset{(2)}{\frac{1}{600}} + \underset{(3)}{\frac{1}{400}} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{5}{1200} \Rightarrow x = 240\,\text{m}$ olur.

12. ÖRNEK

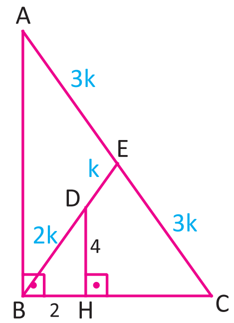


Şekilde $[AB] \perp [BC]$, $[DH] \perp [BC]$

E, D ve B doğrusal $|DH| = 2|BH| = 4$ cm

$\frac{|AE|}{3} = |DE| = \frac{|AC|}{6}$ olduğuna göre $|AB| + |HC|$ toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM



$\frac{|AE|}{3} = |DE| = \frac{|AC|}{6} = k$ olsun. $|AE| = 3k$, $|DE| = k$ ve $|AC| = 6k$ olduğundan

$|AE| = |EB| = |EC| = 3k$ elde edilir. Bu durumda $\overset{\frown}{EBA}$ ve $\overset{\frown}{BEC}$ ikizkenar üçgen olur.

$m(\widehat{EBA}) = m(\widehat{EAB}) = \alpha$, $m(\widehat{EBC}) = m(\widehat{ECB}) = \theta$ alınırsa

$m(\widehat{BDH}) = \alpha$ olduğundan

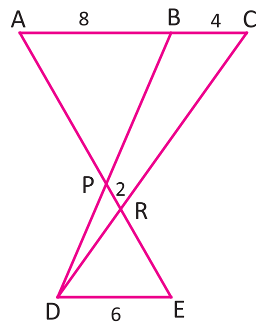
$\overset{\frown}{BHD} \sim \overset{\frown}{CBA}$ olur.

$\frac{|BH|}{|BC|} = \frac{|HD|}{|BA|} = \frac{|BD|}{|CA|} \Rightarrow \frac{2}{|BC|} = \frac{4}{|BA|} = \frac{2k}{6k}$

$\Rightarrow |BC| = 6$ cm, $|HC| = 6$ cm $- 2$ cm $= 4$ cm, $|AB| = 12$ cm olur.

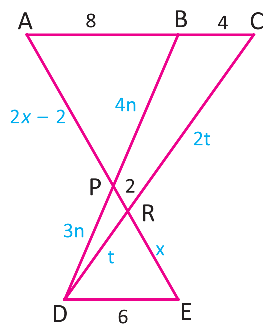
Buradan $|AB| + |HC| = 12 + 4 = 16$ cm bulunur.

13. ÖRNEK



$[AC] \mathbin{/\mkern-5mu/} [DE]$, $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 4$ cm, $|DE| = 6$ cm, $|PR| = 2$ cm olduğuna göre, $|AP|$ uzunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Kelebek benzerliğinden $\overset{\frown}{ABP} \sim \overset{\frown}{EDP}$ ve $\overset{\frown}{ACR} \sim \overset{\frown}{EDR}$ dir. Dolayısıyla

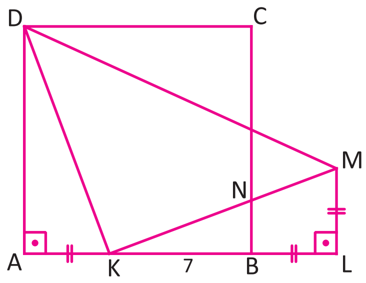
$\frac{|DR|}{|RC|} = \frac{|ER|}{|RA|} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ ve $\frac{|DP|}{|PB|} = \frac{|EP|}{|PA|} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ olur.

$|RE| = x$ denirse $|AR| = 2x$ olup $|AP| = 2x - 2$ dir. Benzerlik oranından

$\frac{x+2}{2x-2} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4x + 8 = 6x - 6 \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7$ olur.

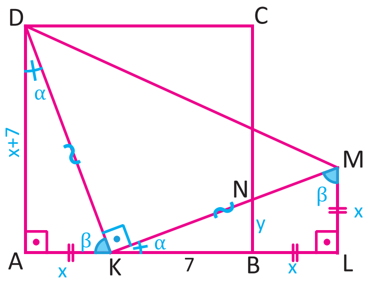
$|AP| = 2x - 2 = 14 - 2 = 12$ cm olarak bulunur.

14. ÖRNEK



ABCD kare, $|AK| = |BL| = |LM|$, $|KB| = 7$ cm, $|DM| = 13\sqrt{2}$ cm olmak üzere $|BN|$ uzunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



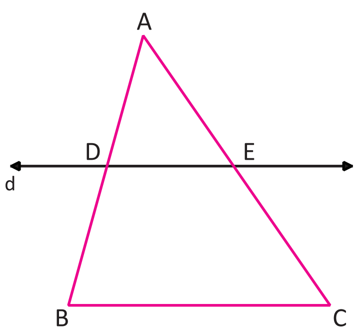
$|AK| = |BL| = |LM| = x$, $|BN| = y$ olsun.
$|AD| = |AB| = |KL| = x + 7$ olur. $m(\widehat{DAK}) = m(\widehat{KLM}) = 90^\circ$ olduğundan K.A.K. eşlik teoreminden dolayı DAK ve KLM üçgenleri eştir. $\overset{\triangle}{DAK} \cong \overset{\triangle}{KLM}$ dir. Dolayısıyla $|DK| = |KM|$ dir.
Bulunan eşitlikler şekil üzerinde aşağıdaki gibi gösterilirse $\alpha + \beta = 90^\circ$ olduğundan $m(\widehat{DKM}) = 90^\circ$ dir. O hâlde DKM ikizkenar dik üçgendir. Pisagor teoreminden $|DK| = |KM| = 13$ cm olur. Ayrıca

$$x^2 + (x+7)^2 = 13^2 \Rightarrow 2x^2 + 14x + 49 = 169 \Rightarrow 2x^2 + 14x - 120 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 + 7x - 60 = 0 \Rightarrow (x+12)(x-5) = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ olur.}$$

$[BN] \parallel [LM]$ olduğundan $\overset{\triangle}{KBN} \sim \overset{\triangle}{KLM}$ dir. O hâlde

$$\frac{|KB|}{|KL|} = \frac{|BN|}{|LM|} \Rightarrow \frac{7}{x+7} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{7}{12} = \frac{y}{5} \Rightarrow y = \frac{35}{12} \text{ cm olarak bulunur.}$$

Temel Orantı Teoremi

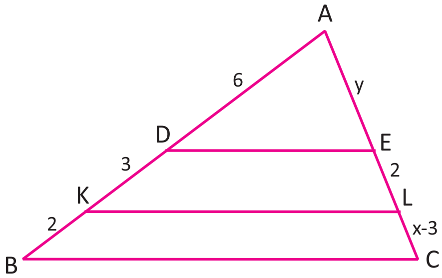


Bir üçgenin bir kenarına paralel olan ve diğer iki kenarını kesen bir doğru, kestiği kenarları orantılı olarak böler.

$d \parallel [BC]$ ise $\dfrac{|AD|}{|DB|} = \dfrac{|AE|}{|EC|}$ olur.

Bu teoremin karşıtı da doğrudur. ABC üçgeninde, $D \in [AB]$ ve $E \in [AC]$ *olmak üzere* $\dfrac{|AD|}{|DB|} = \dfrac{|AE|}{|EC|}$ ise $[DE] \parallel [BC]$ *dir.*

15. ÖRNEK



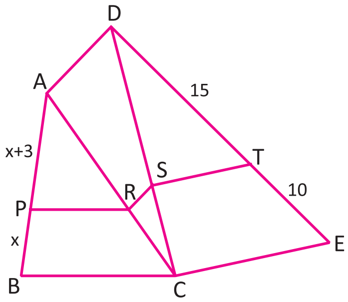
$[DE] \parallel [KL] \parallel [BC], |AD| = 6$ cm, $|DK| = 3$ cm, $|KB| = |EL| = 2$ cm, $|LC| = x - 3, |AE| = y$ olduğuna göre x ve y değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Temel orantı teoreminden

$\frac{6}{3} = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 4$ olup $\frac{9}{2} = \frac{y+2}{x-3} \Rightarrow \frac{9}{2} = \frac{6}{x-3} \Rightarrow x - 3 = \frac{12}{9} \Rightarrow x = \frac{4}{3} + 3 = \frac{13}{3}$ cm olarak bulunur.

16. ÖRNEK



$[PR] \parallel [BC], [RS] \parallel [AD], [ST] \parallel [CE]$

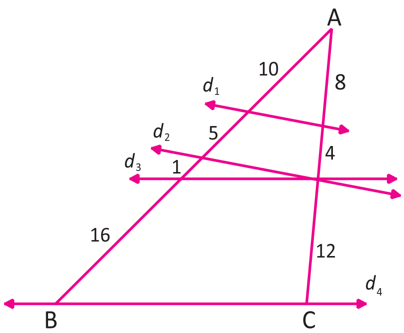
$|DT| = 15$ cm, $|TE| = 10$ cm, $|AP| = x + 3$ cm, $|PB| = x$ cm olduğuna göre x i bulunuz.

ÇÖZÜM

Temel orantı teoreminden

$\frac{x+3}{x} = \frac{|AR|}{|RC|} = \frac{|DS|}{|SC|} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2x + 6 = 3x \Rightarrow x = 6$ cm olur.

17. ÖRNEK



Yandaki şekilde ABC üçgenini kesen farklı doğrular ile bu doğruların üçgenin kenarlarında ayırdığı uzunluk birimleri gösterilmiştir.

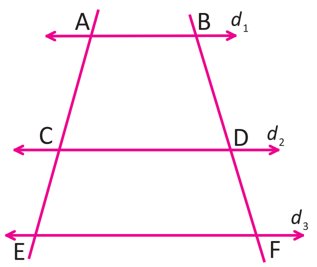
Buna göre verilen şekilde birbirine paralel olan doğrular olup olmadığını inceleyiniz.

ÇÖZÜM

d_1 ve d_2 için $\frac{10}{5} = \frac{8}{4}$ olduğundan $d_1 \parallel d_2$ dir.	d_1 ve d_3 için $\frac{10}{6} \neq \frac{8}{4}$ olduğundan d_1 ve d_3 paralel değildir.	d_1 ve d_4 için $\frac{10}{22} \neq \frac{8}{16}$ olduğundan d_1 ile d_4 paralel değildir.
d_2 ve d_4 için $\frac{15}{17} \neq \frac{12}{12}$ olduğundan d_2 ile d_4 paralel değildir.	d_2 ile d_3 doğrularının ortak bir noktaları olduğundan d_2 ile d_3 paralel değildir.	d_3 ve d_4 için $\frac{16}{16} = \frac{12}{12}$ olduğundan $d_3 \parallel d_4$ dir.

3. Thales Teoremi

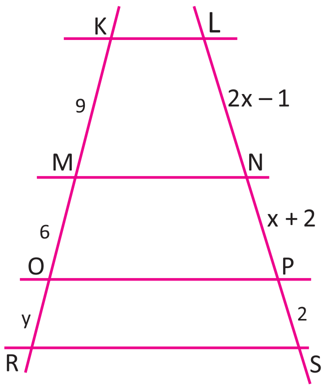
I. Thales Teoremi



İki farklı doğru, en az üç paralel doğru ile kesildiğinde orantılı parçalara ayrılır.

$d_1 \mathbin{/\!/} d_2 \mathbin{/\!/} d_3$ ise $\dfrac{|AC|}{|CE|} = \dfrac{|BD|}{|DF|}$ olur.

1. ÖRNEK



$[KL] \mathbin{/\!/} [MN] \mathbin{/\!/} [OP] \mathbin{/\!/} [RS]$
$|KM| = 9$ cm, $|MO| = 6$ cm, $|LN| = (2x - 1)$ cm,
$|NP| = (x + 2)$ cm, $|PS| = 2$ cm, $|OR| = y$ cm olduğuna göre x ve y değerlerini bulunuz.

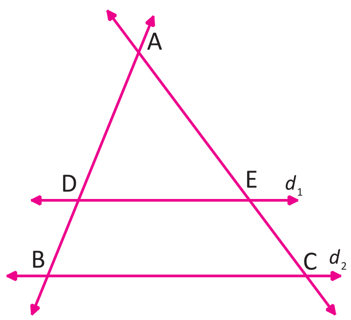
ÇÖZÜM

I. Thales teoremine göre $\dfrac{9}{6} = \dfrac{2x-1}{x+2} \Rightarrow 3x + 6 = 4x - 2 \Rightarrow x = 8$ cm olur.

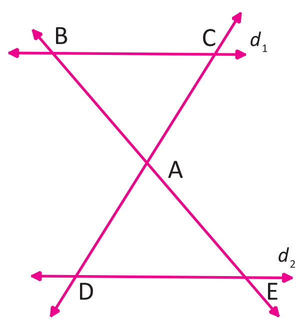
$\dfrac{6}{y} = \dfrac{x+2}{2} \Rightarrow \dfrac{6}{y} = \dfrac{10}{2} \Rightarrow y = \dfrac{6}{5}$ cm olur.

II. Thales Teoremi

Kesişen iki doğrunun, paralel iki doğru tarafından kesilmesiyle oluşan üçgenlerin kenarları orantılıdır.



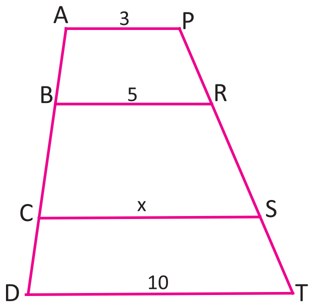
$d_1 \mathbin{/\!/} d_2$



$\dfrac{|AD|}{|AB|} = \dfrac{|AE|}{|AC|} = \dfrac{|DE|}{|BC|}$

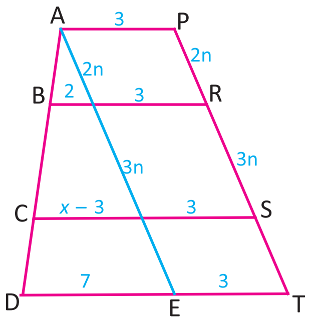
$\dfrac{|AB|}{|AE|} = \dfrac{|AC|}{|AD|} = \dfrac{|BC|}{|DE|}$

2. ÖRNEK



$[AP] \parallel [BR] \parallel [CS] \parallel [DT]$, $3|PR| = 2|RS|$, $|AP| = 3$ cm, $|BR| = 5$ cm, $|CS| = x$ cm, $|DT| = 10$ cm ise $\frac{|RS|}{|ST|}$ oranını bulunuz.

ÇÖZÜM



$\frac{|PR|}{|RS|} = \frac{2}{3} = \frac{2n}{3n}$ dir. $[AE] \parallel [PT]$ doğru parçası çizilsin.

AETP bir paralelkenar olacağından $|AE| = |PT|$ olur.

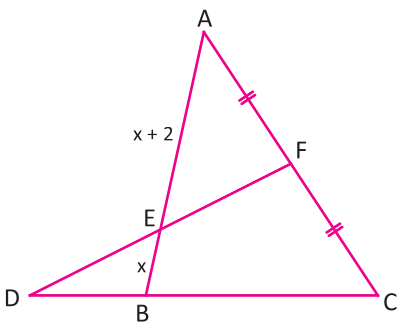
Thales teoremlerinden

$\frac{2}{x-3} = \frac{2n}{5n} \Rightarrow x - 3 = 5 \Rightarrow x = 8$ ve $\frac{2}{7} = \frac{2n}{|AE|} \Rightarrow |AE| = 7n$ bulunur.

Buradan $|PT| = 7n$ ve $|ST| = 2n$ olur.

O hâlde $\frac{|RS|}{|ST|} = \frac{3}{2}$ olarak bulunur.

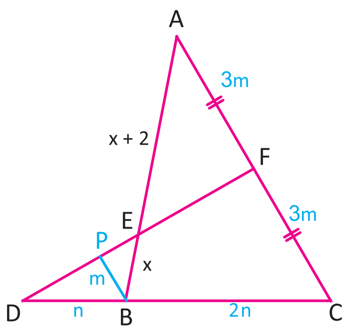
3. ÖRNEK



Şekilde verilen ABC üçgeninde

$|AF| = |FC|$, $|BC| = 2|BD|$, $|AE| = x + 2$, $|EB| = x$ olduğuna göre x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



B den $[AC]$ ye çizilen paralel doğru $[DF]$ yi P de kessin.

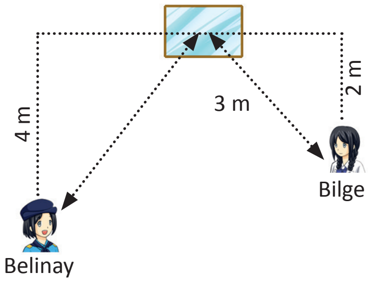
$|DB| = n$, $|PB| = m$ ise $|BC| = 2n$ ve $|FC| = 3m$ olur.

$\widehat{EPB} \sim \widehat{EFA}$ olduğundan

$\frac{|PB|}{|AF|} = \frac{|EB|}{|AE|} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{x}{x+2} \Rightarrow 3x = x + 2 \Rightarrow x = 1$ bulunur.

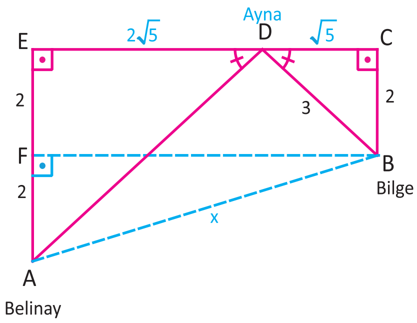
4. Benzerlik Uygulamaları

1. ÖRNEK



Bilge ile Belinay duvardaki aynaya baktıklarında birbirlerini görebilmektedirler. Bilge'nin duvara uzaklığı 2 m, aynaya uzaklığı 3 m dir. Belinay'ın duvara uzaklığı 4 m olduğuna göre Bilge ile Belinay'ın aralarındaki uzaklığı bulunuz. (Işığın ayna yüzeyine geliş açısı, yansıma açısına eşittir.)

ÇÖZÜM



Buna göre verilen probleme karşılık gelen temsili şekil çizildiğinde ve A.A. benzerlik teoreminden yola çıkıldığında $\widehat{ADE} \sim \widehat{BDC}$ dir.

Benzerlik oranı:

$\frac{|BC|}{|AE|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ dir.

Pisagor teoreminden

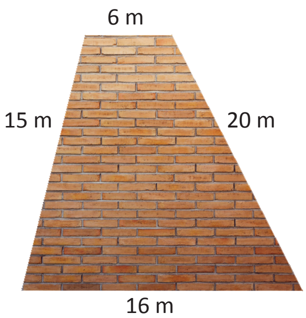
$|DC| = \sqrt{5}$ m olup $|ED| = 2\sqrt{5}$ m olur.

Bu durumda

$|EC| = |FB| = 3\sqrt{5}$ m $\Rightarrow x^2 = 2^2 + (3\sqrt{5})^2$

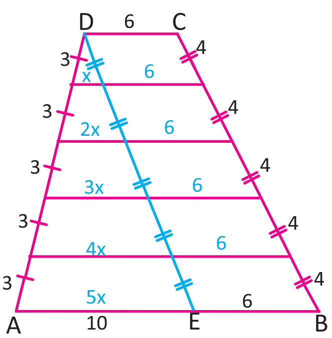
$= 4 + 45 = 49 \Rightarrow x = 7$ m olarak bulunur.

2. ÖRNEK



Boyutları yandaki şekilde görüldüğü gibi olan bir duvarın alt tabanı üst tabanına paraleldir. Tabanlara paralel olacak şekilde eşit aralıklarla 4 sıra hâlinde renkli şerit yapıştırılacaktır. Kaç metre şeride gereksinim olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



[AB] ve [DC] na paralel çizilen 4 doğru parçası yapıştırılacak olan şeritlerin yerlerini belirtsin. [CB] ye paralel olacak şekilde [DE] çizildiğinde ADE üçgeninde karşılıklı kenarlar aynı sayıda eşit parçalara ayrılırsa elde edilen üçgenler benzerdir.

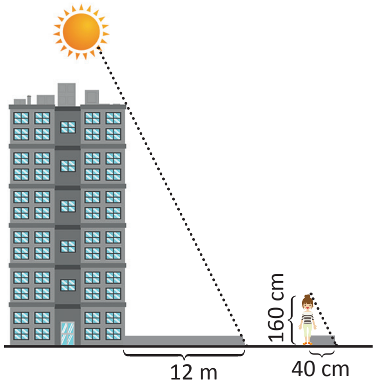
En üstteki küçük üçgenin diğer üçgenler ile olan benzerlik oranları sırasıyla $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ olur. Bu durumda üçgeni bölen doğru parçalarının uzunlukları sırasıyla x, 2x, 3x, 4x, 5x olur.

$5x = 10 \Rightarrow x = 2$ olur.

Toplam şerit uzunluğu:

$(x+6)+(2x+6)+(3x+6)+(4x+6) = 10x + 24 = 44$ m olur.

3. ÖRNEK

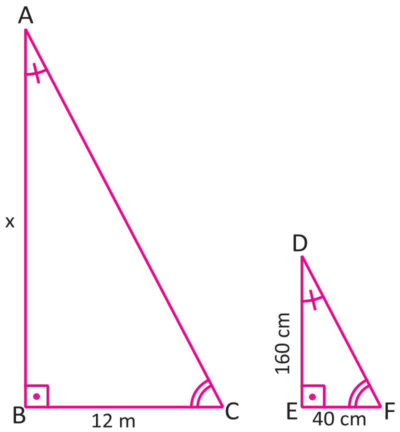


Aybige, güneşli bir günde bir binanın boyunu hesaplamak istiyor. Aybige'nin boyu 160 cm, gölgesi ise 40 cm dir.

Binanın gölgesinin uzunluğu 12 m olduğuna göre binanın boyunu hesaplayınız.

ÇÖZÜM

İlk olarak problemde verilenlere karşılık gelen temsili şekiller çizilirse

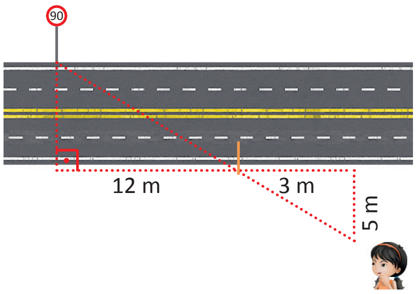


12 m = 1200 cm

$\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ olduğundan

$\frac{x}{160} = \frac{1200}{40} \Rightarrow x = 1200 \cdot 4 = 4800$ cm $= 48$ m olarak bulunur.

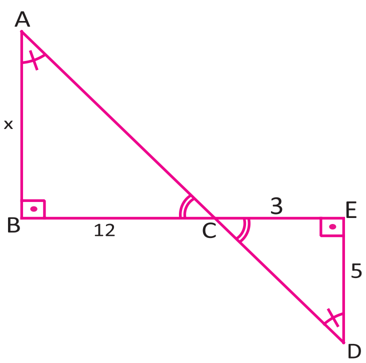
4. ÖRNEK



Sena, bir otoyolun genişliğini hesaplamak istiyor. Bunun için yolun karşı tarafında bir tabela seçiyor. Tabelanın hizasından başlayarak yolun kenarında 12 m yürüyor ve geldiği noktayı bir çubuk ile sabitliyor. Yolun kenarında 3 m daha ilerledikten sonra yola dik olarak dönüp çubuk, tabela ve kendisi aynı hizaya gelinceye kadar 5 m daha yürüyor. Buna göre otoyolun genişliğinin kaç m olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Problemde verilenleri gösteren temsili bir şekil çizilirse

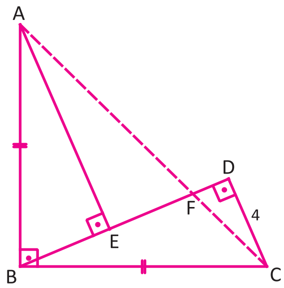


Otoyolun genişliği x olmak üzere A.A. benzerliğinden yola çıkıldığında

$\widehat{DEC} \sim \widehat{ABC}$ olduğundan $\frac{3}{12} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = 20$ m olarak bulunur.

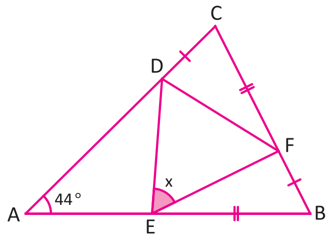
ALIŞTIRMALAR-2

1.



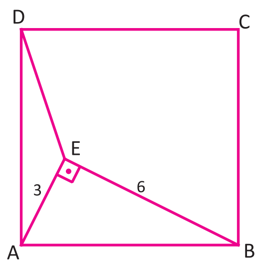
Yukarıdaki şekilde $|AB| = |BC|$, $[AB] \perp [BC]$, $[AE] \perp [BD]$, $[BD] \perp [DC]$, $|DC| = 4$ cm, $|DE| = 8$ cm olduğuna göre $|AF| - |FC|$ değerini cm cinsinden bulunuz.

2.



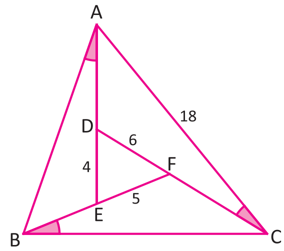
ABC bir üçgen, $|AC| = |AB|$, $|CF| = |EB|$, $|CD| = |FB|$, $m(\widehat{CAB}) = 44°$ olduğuna göre $m(\widehat{DEF}) = x$ değerini bulunuz.

3.



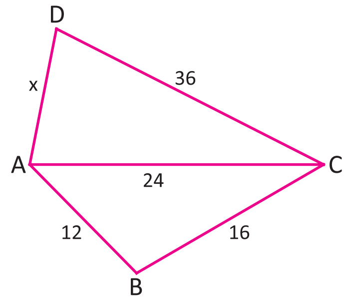
ABCD karesinde
$|AE| = 3$ cm, $|EB| = 6$ cm, $[AE] \perp [EB]$ ise AED açısının ölçüsünü bulunuz.

4.



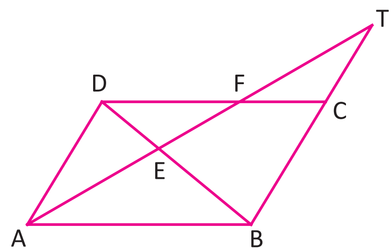
ABC bir üçgen, $m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{CBF}) = m(\widehat{ACD})$
$|DE| = 4$ cm, $|DF| = 6$ cm, $|EF| = 5$ cm, $|AC| = 18$ cm olduğuna göre $|AB| + |BC|$ toplamını cm cinsinden bulunuz.

5.



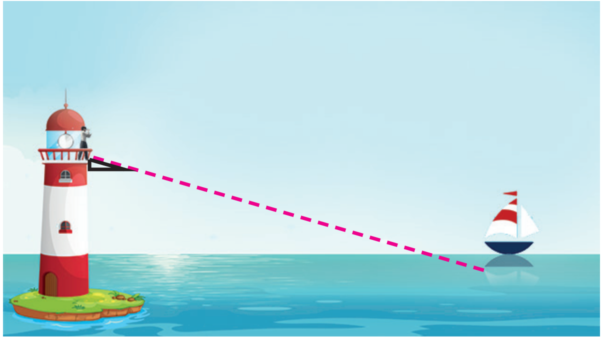
ABCD bir dörtgen, $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{BCA})$
$|AB| = 12$ cm, $|BC| = 16$ cm, $|AC| = 24$ cm, $|DC| = 36$ cm olduğuna göre $|AD| = x$ değerini cm cinsinden bulunuz.

6.



ABCD bir paralelkenar olmak üzere,
$|AE|^2 = |EF| \cdot |ET|$ olduğunu gösteriniz.

7.



Mustafa, deniz fenerine çıkarak denizdeki bir geminin kıyıya uzaklığını gönye kullanarak ölçmek istiyor. Gönyenin dik kenar uzunlukları 20 cm-60 cm dir. Gönyenin şekilde görüldüğü gibi uzun dik kenarı zemine paraleldir. Gönye, üst köşesinden gemi göz hizasında olacak şekilde tutulmaktadır. Gönyenin zemine olan uzaklığı 70 m olduğuna göre geminin fenere olan uzaklığının kaç m olduğunu bulunuz.

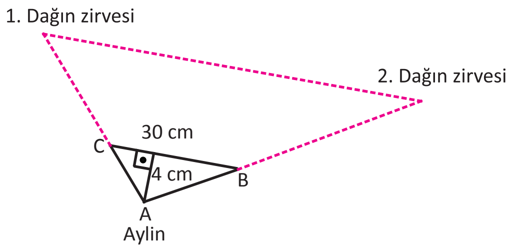
8. Aylin, iki dağın zirvesi arasındaki yaklaşık mesafeyi ölçmek için sırasıyla şu adımları izlemektedir.

I. Adım

Bulunduğu A noktasından kulelere baktığında iki çubuğu uç noktaları dağların zirvesi ile aynı hizaya gelecek şekilde göz hizasında tutuyor.

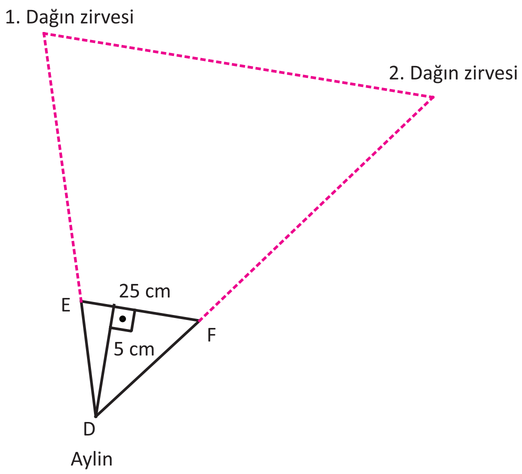
II. Adım

Bu şekilde elde ettiği üçgenin resmini, tabanı dağların zirvelerinin bulunduğu hatta paralel olacak şekilde karton üzerine çiziyor. Çizdiği üçgenin taban uzunluğunu 30 cm, yüksekliğini ise 4 cm olarak ölçüyor.



III. Adım

Bulunduğu noktadan 100 m geriye giderek (dağların zirvelerinin bulunduğu hatta dik olacak şekilde) D noktasına geldiğinde de aynı şekilde bir üçgen daha oluşturuyor. Yeni elde ettiği üçgenin taban uzunluğunu 25 cm, yüksekliğini ise 5 cm olarak ölçüyor.



Verilenlere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

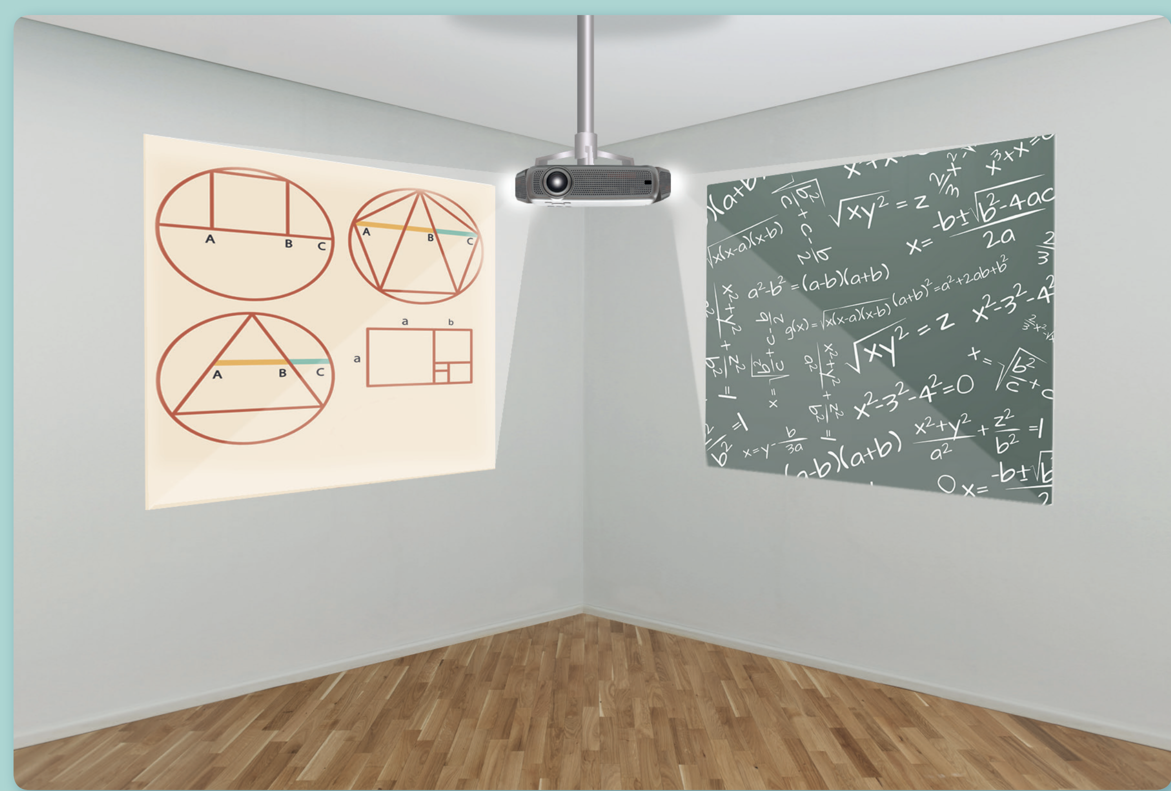
a) Dağların zirveleri arasındaki mesafe yaklaşık kaç metredir?

b) Aylin'in bulunduğu A noktasından 150 m geriye giderek geldiği K noktasında oluşturacağı temsili bir KLM üçgeninin taban ve yükseklik uzunluğunu bulunuz.

c) Bu şekildeki benzer soruların daha kolay hesaplanabilmesi için bir genelleme yapılabilir mi? Açıklayınız.

9.4.3. ÜÇGENİN YARDIMCI ELEMANLARI

Etkinlik



Üçgen şeklindeki bir salonun tavanına duvarlara eşit uzaklıkta olacak şekilde bir çubuk sabitlenecek ve bu çubuğa 3 tane projeksiyon cihazı takılacaktır. Bu cihazların her biri farklı bir duvara yansıtılacağına göre çubuğun takıldığı noktayı üçgen geometrisi yönünden inceleyiniz. Bu nokta ile üçgenin köşe açıları ve kenarları arasında nasıl bir bağıntı vardır?

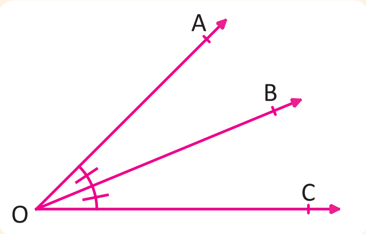
a) Eğer bu salon, bir kenarı 24 m olan bir eşkenar üçgen şeklinde ise çubuğun yerini hesaplayınız.

b) Boyutları 20-20-24 m olan ikizkenar üçgen bir salonda çubuk nereye takılmalıdır? Hesaplayınız.

c) Boyutları 30-40-50 m olan dik üçgen bir salonda çubuğun yerini hesaplayınız

1. Üçgende Açıortay

Açıortay



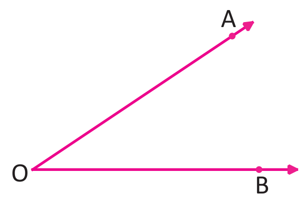
Bir açıyı iki eş açıya ayıran ışına açıortay denir.

$m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{BOC})$ ise $[OB$ $\widehat{AOC}$ nın açıortayıdır.

Verilen bir açı cetvel ve pergel kullanılarak şu şekilde iki eş açıya ayrılabilir.

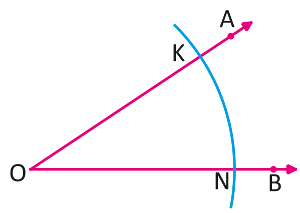
I. Adım

Cetvel yardımıyla AOB açısı çiziniz.



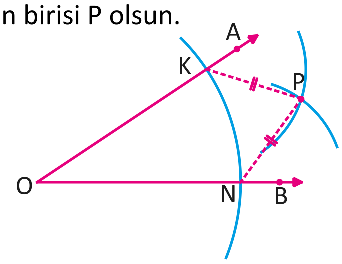
II. Adım

Pergel yardımıyla O merkezli bir çember yayı çiziniz. Bu çember yayının açının kollarını kestiği noktalar K ve N olsun.



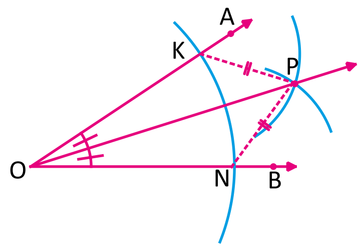
III. Adım

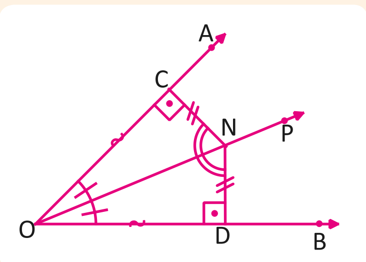
Pergel yardımıyla K ve N merkezli iki eş çember yayını kesişecek şekilde çiziniz. Bu çemberlerin kesiştiği noktalardan birisi P olsun.



IV. Adım

Son olarak O ve P noktaları birleştirildiğinde elde edilen [OP AOB açısının açıortayıdır.





Açıortay doğrusu üzerindeki herhangi bir noktanın açının kollarına olan uzaklıkları eşittir.

$[OP$ ışını, AOB açısının açıortayı ve herhangi bir $N \in [OP$ olsun.

N noktasından $[OA$ ve $[OB$ ye indirilen dikmeler sırasıyla $[NC]$ ve $[ND]$ olsun.

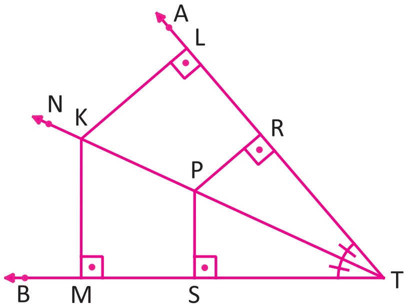
Elde edilen üçgenlerin ortak doğru parçası, $[ON]$ olduğundan A.K.A. eşlik teoreminden

$\widehat{NCO} \cong \widehat{NDO}$ olur.

O hâlde $|NC| = |ND|$ ve $|OC| = |OD|$ dir.

Bu ifadenin karşıtı da doğrudur. “Bir açının iç bölgesinde alınan bir noktanın açının kollarına olan uzaklıkları eşit ise bu nokta, açının açıortay doğrusu üzerindedir.”

1. ÖRNEK



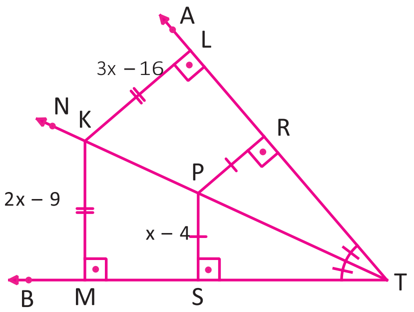
$m(\widehat{BTN}) = m(\widehat{ATN})$, $m(\widehat{TRP}) = m(\widehat{TLK}) = m(\widehat{TSP}) = m(\widehat{TMK}) = 90^\circ$

$[KL] \perp [TA$, $[KM] \perp [TB$, $[PR] \perp [TA$, $[PS] \perp [TB$

$|KL| = 3x - 16$, $|KM| = 2x - 9$, $|PS| = x - 4$

olduğuna göre $\dfrac{|TR|}{|RL|}$ oranını bulunuz.

ÇÖZÜM



$|KL| = |KM| \Rightarrow 3x - 16 = 2x - 9 \Rightarrow x = 7$ olur.

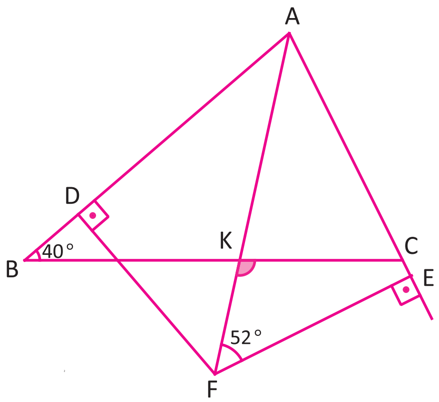
$|PR| = |PS| = x - 4 = 3$ ve $|KL| = 3x - 16 = 5$ olarak bulunur.

$\overset{\frown}{TRP} \sim \overset{\frown}{TLK}$ olduğundan

$\dfrac{|PR|}{|KL|} = \dfrac{|TR|}{|TL|} = \dfrac{3}{5}$ olur.

O hâlde $\dfrac{|TR|}{|RL|} = \dfrac{3}{2}$ olur.

2 . ÖRNEK

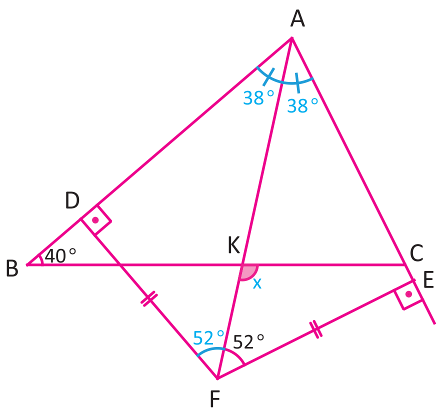


Yandaki şekilde

$|FD| = |FE|$, $m(\widehat{ABC}) = 40^\circ$, $m(\widehat{AFE}) = 52^\circ$

olduğuna göre $m(\widehat{FKC})$ nin kaç derece olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



$|FD| = |FE|$ olduğundan $[AF]$, BAC açısının açıortayıdır.

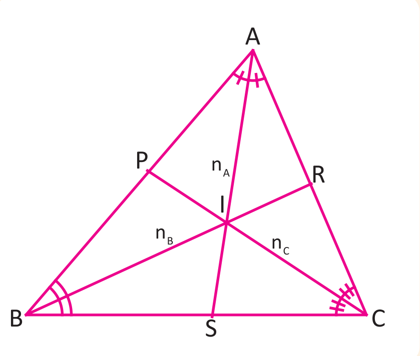
Bu durumda $m(\widehat{AFE}) = m(\widehat{AFD}) = 52^\circ$ olur.

$m(\widehat{DAF}) = m(\widehat{FAE}) = 90^\circ - 52^\circ = 38^\circ$ olur.

$m(\widehat{AKC}) = 40^\circ + 38^\circ = 78^\circ \Rightarrow x = 180^\circ - 78^\circ = 102^\circ$ tir.

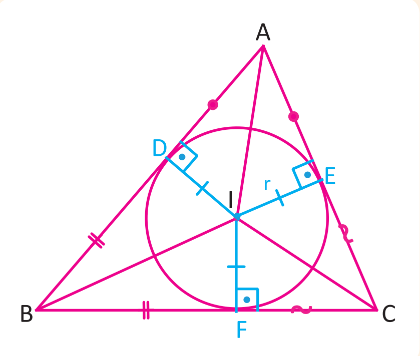
Üçgende İç Açıortay

Bir üçgenin bir iç açısını iki eş açıya ayıran ışına o üçgenin iç açıortayı denir. Bir üçgende iç açıortaylar tek noktada kesişir.



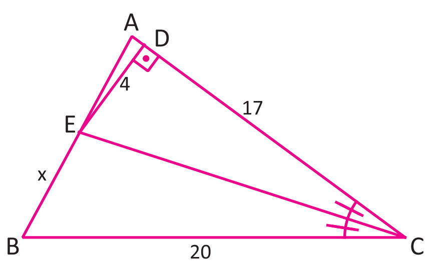
$[AS]$, A açısına ait açıortay olmak üzere $|AS| = n_A$
$[BR]$, B açısına ait açıortay olmak üzere $|BR| = n_B$
$[CP]$, C açısına ait açıortay olmak üzere $|CP| = n_C$ ile gösterilir.
I noktası, iç açıortayların kesişim noktasıdır.

Bir üçgende iç açıortayların kesişim noktası üçgenin iç teğet çemberinin merkezidir.



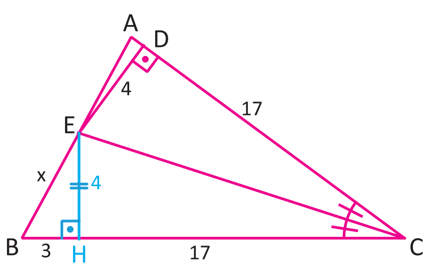
I noktası iç açıortayların kesişim noktası ve üçgenin iç teğet çemberinin merkezdir.
D, E, F noktaları çemberin üçgene teğet noktaları olmak üzere
$|IE| = |ID| = |IF| = r$ iç teğet çemberinin yarıçapıdır.
$|AD| = |AE|$, $|BD| = |BF|$, $|CF| = |CE|$ dir.

3. ÖRNEK



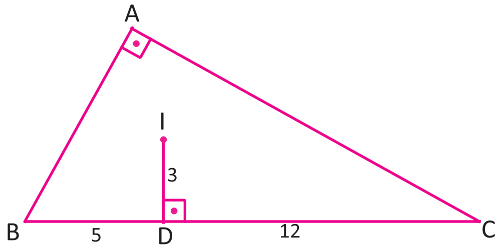
ABC üçgeninde
$[CE]$ iç açıortay, $|DC| = 17$ cm
$|BC| = 20$ cm, $|ED| = 4$ cm olduğuna göre $|BE| = x$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



E noktasından $[BC]$ na indirilen dikmenin kestiği nokta H olsun.
$[CE]$ iç açıortay olduğundan $|ED| = |EH| = 4$ cm dir.
Bu durumda $|DC| = |HC| = 17$ cm ve $|BH| = 20 - 17 = 3$ cm olur.
EBH üçgeninde Pisagor teoremi uygulandığında $x = 5$ cm olarak bulunur.

4. ÖRNEK



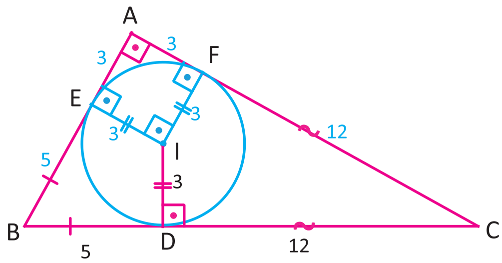
ABC üçgeninde

I noktası üçgenin iç açıortaylarının kesişim noktasıdır.

$m(\widehat{CDI}) = 90°$, $|ID| = 3$ cm, $|BD| = 5$ cm, $|DC| = 12$ cm

olduğuna göre ABC üçgeninin çevresini bulunuz.

ÇÖZÜM



I noktası üçgenin iç teğet çemberinin merkezidir.

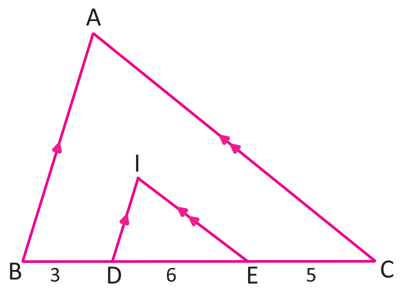
Çember çizilirse AEIF dörtgeninin kare olduğu görülür.

Dolayısıyla $|AE| = |AF| = 3$ cm dir.

Bu durumda $|BE| = |BD| = 5$ cm, $|CF| = |CD| = 12$ cm olur.

$Ç(\widehat{ABC}) = 8 + 15 + 17 = 40$ cm dir.

5. ÖRNEK



ABC üçgeninde

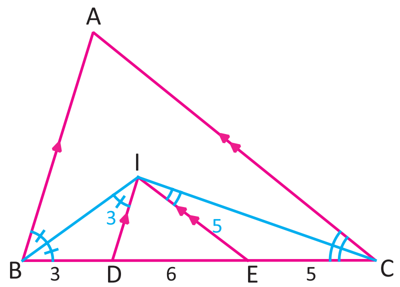
I noktası üçgenin iç teğet çemberinin merkezidir.

$[ID] // [AB]$, $[IE] // [AC]$,

$|BD| = 3$ cm, $|DE| = 6$ cm, $|EC| = 5$ cm

olduğuna göre IDE üçgeninin çevresini bulunuz.

ÇÖZÜM



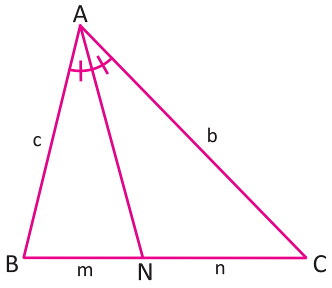
I noktası üçgenin iç açıortaylarının kesişim noktasıdır.

O hâlde $[IB]$ ve $[IC]$ iç açıortaylardır.

$|ID| = |BD| = 3$ cm, $|IE| = |EC| = 5$ cm dir.

Bu durumda $Ç(\widehat{IDE}) = 14$ cm olarak bulunur.

Üçgende İç Açıortay Teoremi



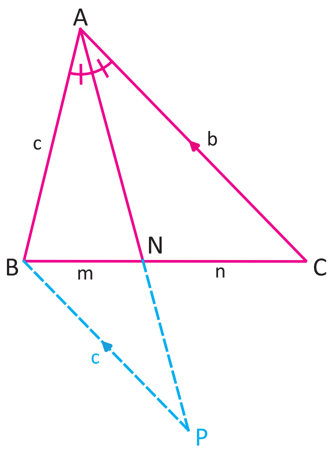
ABC üçgeninde

A açısına ait açıortay doğrusunun $[BC]$ nı kestiği nokta N olsun.

$|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BN| = m$, $|NC| = n$ olmak üzere

$\frac{c}{b} = \frac{m}{n}$ dir.

İspat



B noktasından AC kenarına paralel çizilen doğru AN yi P noktasında kesiyor.

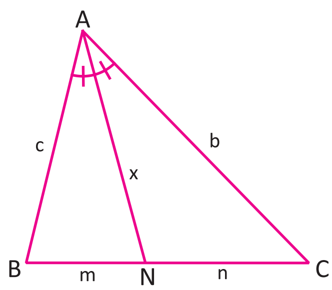
İç ters açılardan $m(\widehat{CAN}) = m(\widehat{BPA})$ olduğundan

ABP üçgeni ikizkenar olur.

Dolayısıyla $|AB| = |BP| = c$ dir.

$\widehat{BPN} \sim \widehat{CAN}$ kelebek benzerliğinden

$\frac{|BP|}{|AC|} = \frac{|BN|}{|NC|} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{m}{n}$ olarak bulunur.

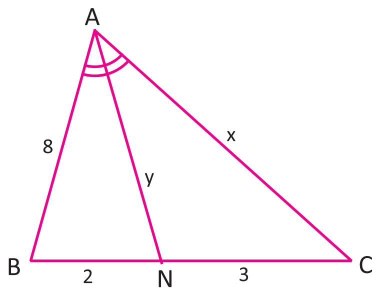


ABC üçgeninde $[AN]$ iç açıortay ve $|AN| = x$ olsun.

$|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BN| = m$, $|NC| = n$ olmak üzere

$x^2 = bc - mn$ dir.

6. ÖRNEK



ABC üçgeninde

$|AB| = 8$ cm, $|BN| = 2$ cm, $|NC| = 3$ cm

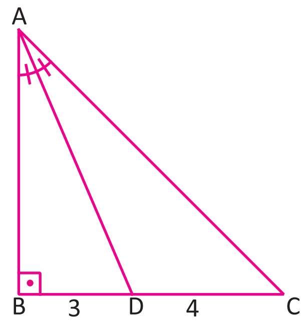
olduğuna göre $|AC| = x$ ve $|AN| = y$ değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

İç açıortay teoreminden $\frac{8}{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 12$ cm dir.

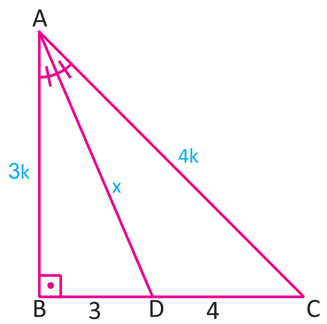
$y^2 = 8 \cdot 12 - 2 \cdot 3 = 96 - 6 = 90 \Rightarrow y = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$ cm olarak bulunur.

7. ÖRNEK



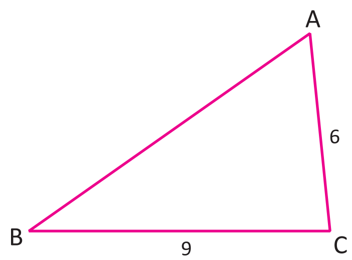
ABC dik üçgeninde $[AD]$ iç açıortay,
$m(\widehat{ABC}) = 90^\circ$, $|BD| = 3$ cm, $|DC| = 4$ cm ise
$|AD|$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



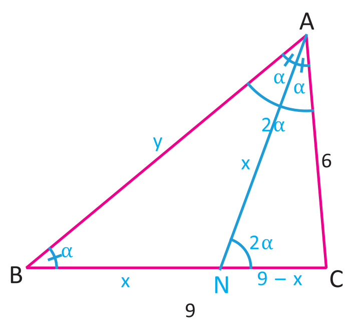
İç açıortay teoreminden $\dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{3}{4}$ olduğundan
$|AB| = 3k$ ise $|AC| = 4k$ dir.
Pisagor teoreminden
$(4k)^2 = (3k)^2 + 7^2 \Rightarrow 7k^2 = 49 \Rightarrow k = \sqrt{7}$ cm olur.
$|AB| = 3\sqrt{7}$ cm ve $|AC| = 4\sqrt{7}$ cm dir.
Bu durumda
$x^2 = 12k^2 - 12 = 12 \cdot 7 - 12 = 72$
$x = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ cm olarak bulunur.

8. ÖRNEK



ABC üçgeninde
$m(\widehat{BAC}) = 2 \cdot m(\widehat{CBA})$,
$|BC| = 9$ cm, $|AC| = 6$ cm
olduğuna göre $|AB|$ değerini bulunuz.

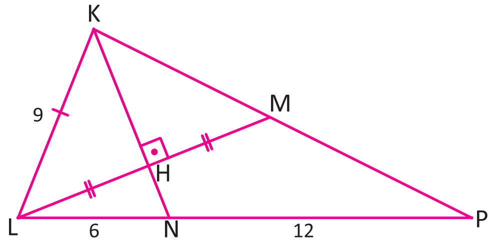
ÇÖZÜM



$[AN]$, BAC açısının açıortayı olmak üzere
$m(\widehat{ABC}) = \alpha$ denirse $m(\widehat{BAC}) = 2\alpha$ olur.
BAC açısının açıortayı olmak üzere
$|BN| = x$, $|AB| = y \Rightarrow |AN| = x$ ve $|NC| = 9 - x$ olur.
Bu durumda üçgende iç açıortay bağıntılarından
$x^2 = 6y - x(9 - x) \Rightarrow x^2 = 6y - 9x + x^2 \Rightarrow 6y = 9x \Rightarrow \dfrac{y}{x} = \dfrac{3}{2}$ ... **(1)**
$\dfrac{y}{6} = \dfrac{x}{9 - x} \Rightarrow \dfrac{y}{x} = \dfrac{6}{9 - x}$ ... **(2)** dir.

(1) ve **(2)** den
$\dfrac{6}{9 - x} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow 27 - 3x = 12 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow y = |AB| = \dfrac{15}{2}$ cm olarak bulunur.

9. ÖRNEK



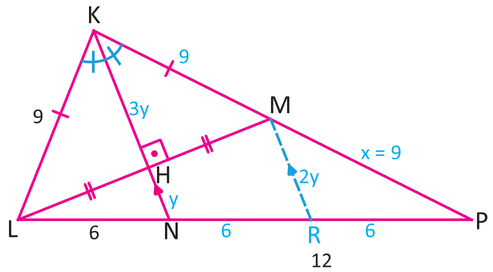
KLP üçgeninde

$|LH| = |HM|$, $[KH] \perp [LM]$,

$|KL| = 9$ cm, $|LN| = 6$ cm, $|NP| = 12$ cm

olduğuna göre $|HN|$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



$[KH]$ hem yükseklik hem de kenarortay olduğuna göre KLM üçgeni ikizkenar üçgendir.

Dolayısıyla $[KH]$ açıortay ve $|KL| = |KM| = 9$ cm olur.

$|MP| = x$ olsun.

KLP üçgeninde $[KN]$ iç açıortaydır.

O hâlde iç açıortay teoreminden

$\dfrac{6}{12} = \dfrac{9}{9+x} \Rightarrow x = 9$ olur.

$[MR] \mathbin{/\!/} [KN]$ olacak şekilde $R \in [LP]$

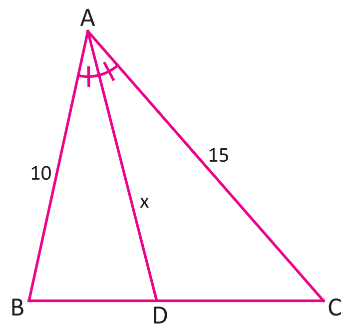
Bu durumda

$|HN| = y$ ise $|MR| = 2y$ ve $|KN| = 4y$ olur.

$|KN|^2 = |KL| \cdot |KP| - |LN| \cdot |NP| \Rightarrow |KN|^2 = 9 \cdot 18 - 6 \cdot 12 = 90 \Rightarrow |KN| = 3\sqrt{10}$ cm dir.

O hâlde $4y = 3\sqrt{10} \Rightarrow y = \dfrac{3\sqrt{10}}{4}$ cm olarak bulunur.

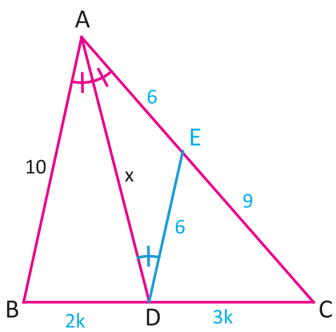
10. ÖRNEK



ABC üçgeninde

$|AB| = 10$ cm, $|AC| = 15$ cm olduğuna göre x in alabileceği kaç tane tam sayı değeri vardır?

ÇÖZÜM



İç açıortay teoreminden

$\dfrac{|BD|}{|DC|} = \dfrac{10}{15} = \dfrac{2k}{3k}$ dir.

D noktasından AB kenarına paralel çizilirse AED ikizkenar üçgeni elde edilir.

Bu durumda $|AE| = |ED| = 2t$ ve $|EC| = 3t$ dir.

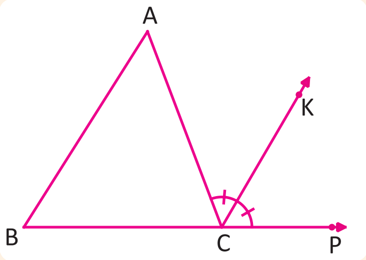
$5t = 15 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow |AE| = |ED| = 6$ cm ve $|EC| = 9$ cm

olarak bulunur.

AED üçgeninde üçgen eşitsizliği kullanılırsa $0 < x < 12$ olduğundan x in alabileceği tam sayı değerleri 11 tanedir.

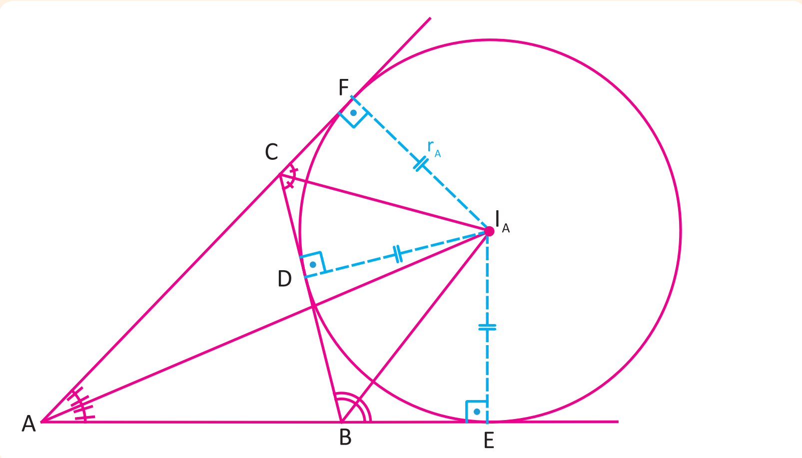
Üçgende Dış Açıortay

1. Bir üçgenin bir dış açısını iki eş açıya ayıran ışına o üçgenin dış açıortayı denir.



ABC üçgeninde ACP dış açısının açıortayı olan [CK , C açısına ait dış açıortaydır.

2. Bir üçgende iki dış açıortay ile üçüncü açının iç açıortayı tek noktada kesişir. Bu nokta, üçgenin dış teğet çemberinin merkezidir. Bir üçgenin üç tane dış teğet çemberi vardır.



A, B ve C açılarına ait dış teğet çemberlerin merkezleri sırasıyla

I_A, I_B, I_C

ile gösterilir.

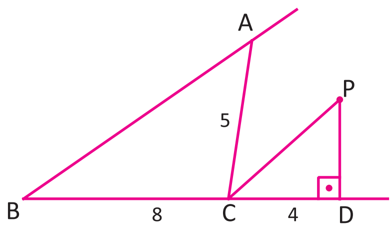
D, E ve F noktaları çemberin değme noktaları olmak üzere

$|I_AD| = |I_AE| = |I_AF| = r_A$

olup A açısına ait dış teğet çemberinin yarıçapı r_A dır.

Benzer şekilde: B açısına ait dış teğet çemberin yarıçapı r_B ,
C açısına ait dış teğet çemberinin yarıçapı r_C dir.

11. ÖRNEK

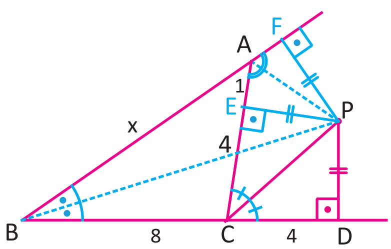


P noktası ABC üçgeninin dış teğet çemberinin merkezidir.

$[PD] \perp [BC$, $|BC| = 8$ cm, $|CD| = 4$ cm, $|AC| = 5$ cm

olduğuna göre ABC üçgeninin çevresini bulunuz.

ÇÖZÜM



P noktası, üçgenin dış teğet çemberinin merkezi olduğuna göre $[PA], [PC]$ ve $[PB]$ açıortaylardır.

$[PF] \perp [BA$, $[PE] \perp [AC]$,

$|PD| = |PE| = |PF|$ dir.

Bu durumda

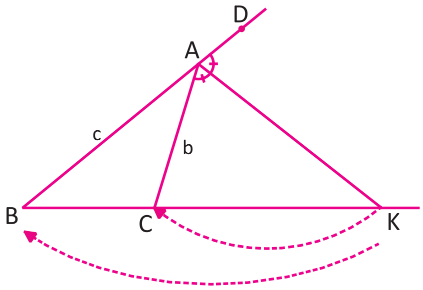
$|CD| = |CE| = 4$ br, $|AE| = |AF| = 1$ cm ve $|BD| = |BF|$

olduğundan $|AB| = x$ iken

$x + 1 = 8 + 4 \Rightarrow x = 11$ olarak bulunur.

$Ç(\widehat{ABC}) = 11 + 5 + 8 = 24$ cm bulunur.

Üçgende Dış Açıortay Teoremi



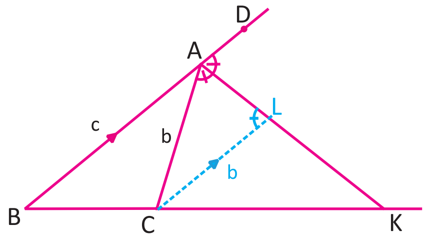
ABC üçgeninde

$[AK]$ dış açıortay, $K \in [BC$,

$|AB| = c$, $|AC| = b$ olmak üzere

$\frac{|KC|}{|KB|} = \frac{b}{c}$ dir.

İspat

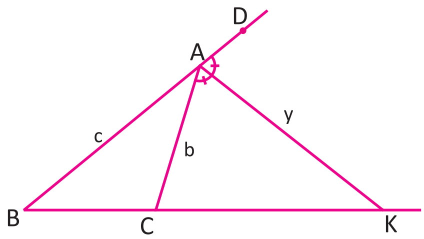


C den $[AB]$ na paralel olacak şekilde çizilen doğru $[AK]$ nı L noktasında kesiyor.

$m(\widehat{DAK}) = m(\widehat{ALC})$ olduğundan ACL üçgeni ikizkenar olur.

Bu durumda $|AC| = |CL| = b$ dir.

Dolayısıyla $\widehat{KLC} \sim \widehat{KAB}$ olduğundan $\frac{b}{c} = \frac{|KC|}{|KB|}$ olarak bulunur.



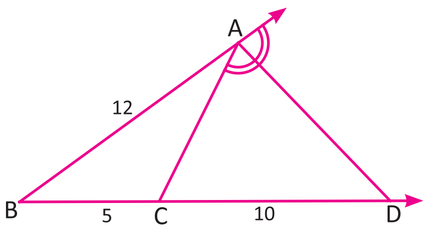
ABC üçgeninde

$[AK]$ dış açıortay ve $|AK| = y$ olsun.

$|AB| = c$, $|AC| = b$ olmak üzere

$y^2 = |KC| \cdot |KB| - bc$ dir.

12. ÖRNEK



ABC üçgeninde

$[AD]$ üçgenin dış açıortayı, $D \in [BC$,

$|AB| = 12$ cm, $|BC| = 5$ cm, $|CD| = 10$ cm

olduğuna göre $|AC|$ ve $|AD|$ uzunluklarını bulunuz.

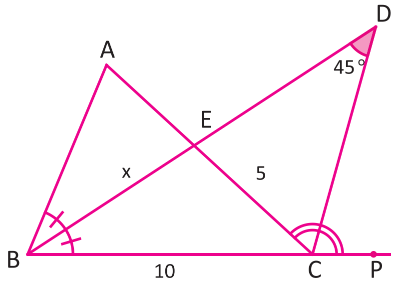
ÇÖZÜM

ABC üçgeninde dış açıortay teoremi kullanılırsa

$\frac{10}{15} = \frac{|AC|}{12} \Rightarrow |AC| = 8$ cm dir.

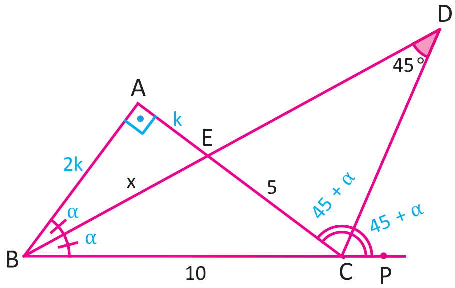
$|AD|^2 = 10 \cdot 15 - 12 \cdot 8 = 150 - 96 = 54 \Rightarrow |AD| = 3\sqrt{6}$ cm olarak bulunur.

13. ÖRNEK



ABC üçgeninde
$[BD]$ iç açıortay, $[CD]$ dış açıortay, $m(\widehat{BDC}) = 45°$,
$|BC| = 10$ cm, $|EC| = 5$ cm olduğuna göre
$|BE| = x$ değerini bulunuz.

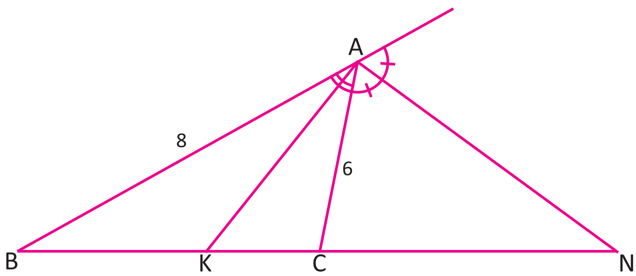
ÇÖZÜM



$m(\widehat{CBE}) = \alpha$ ise $m(\widehat{DCP}) = m(\widehat{DCE}) = 45 + \alpha$ olur.
$m(\widehat{A}) + 2\alpha = 90° + 2\alpha \Rightarrow m(\widehat{A}) = 90°$ tir.
ABC üçgeninde $[BE]$ iç açıortay olduğundan
iç açıortay teoremi kullanılırsa
$\dfrac{|AE|}{|AB|} = \dfrac{5}{10}$ olduğundan $|AE| = k$ ise $|AB| = 2k$ olur.

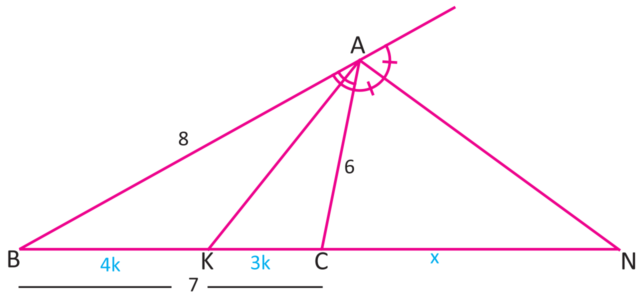
Pisagor teoreminden
$(2k)^2 + (k+5)^2 = 10^2 \Rightarrow k^2 + 2k - 15 = 0 \Rightarrow (k+5)(k-3) = 0 \Rightarrow k = 3$ olur.
Bu durumda $x^2 = 20k - 5k = 15k = 45 \Rightarrow x = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ cm olarak bulunur.

14. ÖRNEK



ABC üçgeninde
$[AK]$ iç açıortay, $[AN]$ dış açıortay,
$|AB| = 8$ cm, $|AC| = 6$ cm, $|BC| = 7$ cm
olduğuna göre $|KN|$ değerini bulunuz.

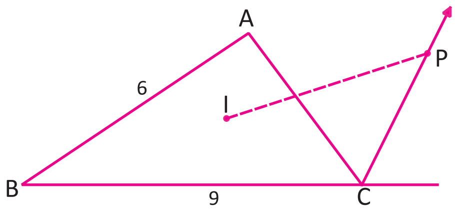
ÇÖZÜM



İç açıortay teoreminden
$\dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{4}{3} = \dfrac{|BK|}{|KC|}$
olduğundan $|BK| = 4k$ ise $|KC| = 3k$ bulunur.
$|BC| = 4k + 3k = 7k = 7$
olduğundan $k = 1$ bulunur.
O hâlde $|BK| = 4$ cm ve $|KC| = 3$ cm olur.

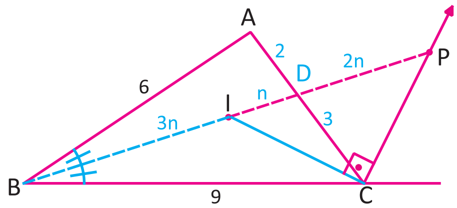
$|CN| = x$ olsun. Dış açıortay teoreminden
$\dfrac{x}{x+7} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow 4x = 3x + 21 \Rightarrow x = 21$ olur. Bu durumda
$|KN| = 3k + x = 3 + 21 = 24$ cm olarak bulunur.

15. ÖRNEK



ABC üçgeninde
I, üçgenin iç teğet çemberinin merkezi
P, üçgenin dış teğet çemberinin merkezi
$|AB| = 6\text{ cm}$, $|AC| = 5\text{ cm}$, $|BC| = 9\text{ cm}$
olduğuna göre I ile P arasındaki uzaklığı bulunuz.

ÇÖZÜM



Verilenlerden I noktası iç açıortayların kesişim noktası, P noktası ise dış açıortayların kesişim noktasıdır.
Dolayısıyla B, I ve P noktaları doğrusal olup
$[BI]$ ile $[CI]$ iç açıortaylar, $[CP]$ ise dış açıortaydır.

$|CI| = x$, $|CP| = y$, $[BP] \cap [AC] = \{D\}$ olsun.

ABC üçgeninde iç açıortay teoremi uygulandığında

$$\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{6}{9} = \frac{2k}{3k} \Rightarrow 2k + 3k = 5k = 5 \Rightarrow k = 1 \text{ dir.}$$

O hâlde $|AD| = 2\text{ cm}$ ve $|DC| = 3\text{ cm}$ olur.

BCD üçgeninde iç açıortay teoremi uygulandığında

$$\frac{|ID|}{|BI|} = \frac{3}{9} = \frac{n}{3n} \text{ dir.}$$

$[CP]$,CDB üçgeninin dış açıortayı olduğundan dış açıortay teoreminden

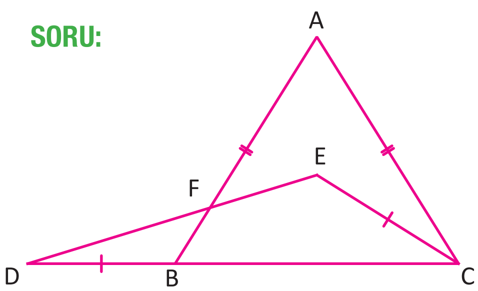
$$\frac{|PD|}{|PB|} = \frac{3}{9} \Rightarrow \frac{|PD|}{|PD| + 4n} = \frac{1}{3} \Rightarrow |PD| = 2n \text{ dir.}$$

ABC üçgeninde iç açıortay uzunluk formülü uygulandığında

$$(4n)^2 = 6 \cdot 9 - 2 \cdot 3 = 54 - 6 = 48 \Rightarrow 16n^2 = 48 \Rightarrow n = \sqrt{3} \Rightarrow |IP| = 3n = 3\sqrt{3} \text{ cm bulunur.}$$

Sıra Sizde

SORU:



ABC bir ikizkenar üçgen ve E noktası üçgenin iç teğet çemberinin merkezidir.

$m(\widehat{EDC}) = 14^\circ$

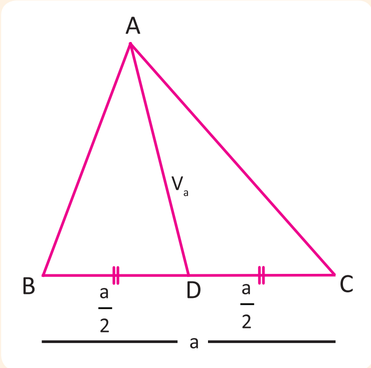
$|AB| = |AC|$, $|DB| = |EC|$

$m(\widehat{BAC})$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

2. Üçgende Kenarortay

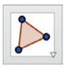
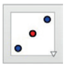
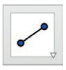
Üçgenin bir köşesinden karşı kenarın ortasına çizilen ve bu kenarı iki eşit uzunluğa bölen doğru parçasına kenarortay denir.

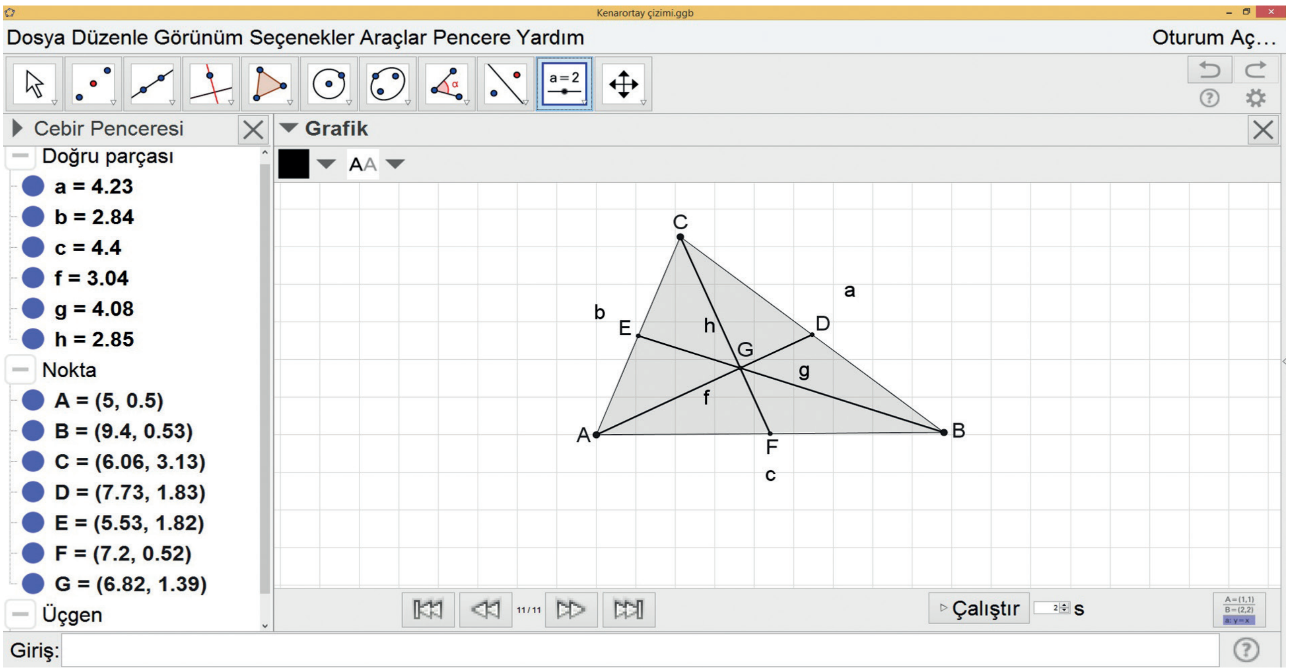


ABC üçgeninde $|BD| = |DC|$ olduğundan $[AD]$, BC kenarının kenarortayıdır. Bu kenarortayın uzunluğu $|AD| = V_a$ şeklinde gösterilir.
Benzer şekilde AC kenarının kenarortayı V_b,
AB kenarının kenarortayı V_c ile gösterilir.

Teknoloji Uygulaması

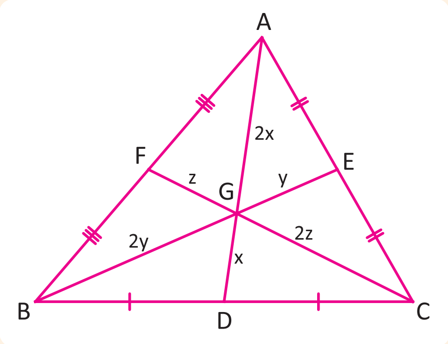
Aşağıda GeoGebra programı kullanılarak bir üçgen ve bu üçgenin kenarlarına ait kenarortayları çizilmiştir. Farklı üçgen çeşitlerine göre kenarortayların kesiştiği nokta incelenmiştir.

	Çokgen aracını etkinleştiriniz. A, B ve C noktalarını sırasıyla işaretleyerek bir ABC üçgeni oluşturunuz. (A noktasından başlayıp yine en son A noktasını seçiniz.)
	Orta nokta veya merkez aracını etkinleştiriniz. Bir kenara ait orta noktayı bulmak için sırasıyla o kenarı oluşturan köşeleri seçiniz. Bunu diğer kenarlara da uygulayarak kenarların orta noktalarını bulunuz.
	Doğru parçası aracını etkinleştiriniz. Kenarortayları çizmek için üçgenin köşesi ile karşısındaki kenarın orta noktasını birleştiriniz.
	Kesiştir aracını etkinleştiriniz. Üçgenin kenarortaylarının kesişim noktasını bulmak için kenarortayları seçiniz.
	Taşı aracını etkinleştiriniz. Üçgeni köşelerinden tutarak hareket ettiriniz. Farklı üçgen çeşitleri için kenarortayların kesiştiği noktanın yerini inceleyiniz.



Ağırlık Merkezi

Kenarortaylar üçgenin içinde bir noktada kesişir. Bu noktaya üçgenin ağırlık merkezi denir.



Ağırlık merkezi kenarortayı, köşeye 2 birim, kenara 1 birim oranında böler.

$|AE| = |EC|, |AF| = |FB|, |BD| = |DC|$ olduğundan

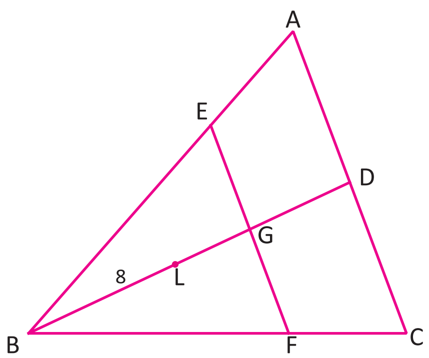
$[AD], [BE]$ ve $[CF]$ kenarortaydır.

$$\left.\begin{aligned} |AD| &= V_a \\ |BE| &= V_b \\ |CF| &= V_c \end{aligned}\right\}$$ şeklinde gösterilir.

$[AD] \cap [BE] \cap [CF] = \{G\}$ noktası üçgenin ağırlık merkezidir. Bu durumda

$|AG| = 2|GD|, |BG| = 2|GE|, |CG| = 2|GF|$ olur.

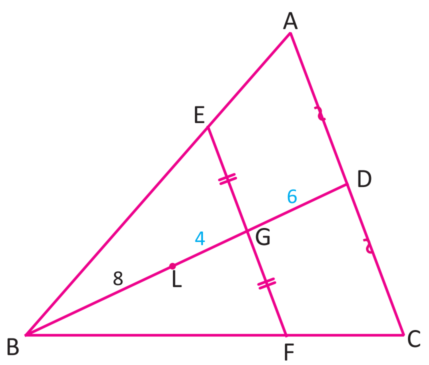
1. ÖRNEK



G noktası ABC üçgeninin, L noktası ise BEF üçgeninin ağırlık merkezidir.

$|BL| = 8$ cm olduğuna göre $|BD|$ nu bulunuz.

ÇÖZÜM



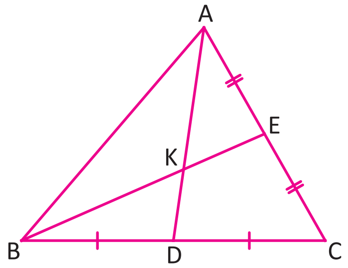
BEF üçgeninde L ağırlık merkezi olduğundan $|BL| = 2|LG|$ dir.

$8 = 2|LG| \Rightarrow |LG| = 4$ cm olur.

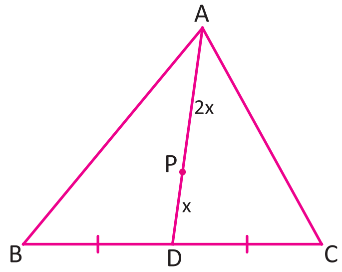
ABC üçgeninde G ağırlık merkezi olduğundan $|BG| = 2|GD|$ dir.

$12 = 2|GD| \Rightarrow |GD| = 6$ cm olur.

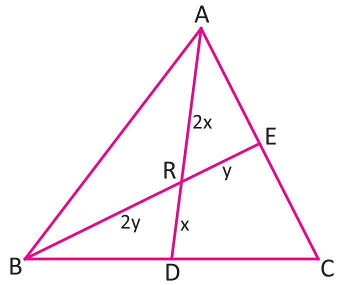
O hâlde $|BD| = 12 + 6 = 18$ cm olarak bulunur.



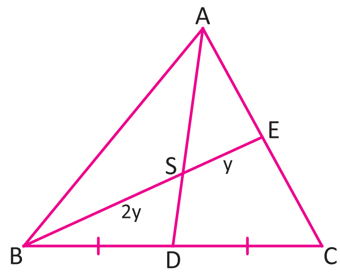
$|BD| = |DC|$ ve $|AE| = |EC|$ ise $[AD]$ ve $[BE]$ kenarortaydır. Bu durumda K noktası, ABC üçgeninin ağırlık merkezidir.



$|BD| = |DC|$ ve $|AP| = 2 \cdot |PD|$ ise P noktası, ABC üçgeninin ağırlık merkezi olur.

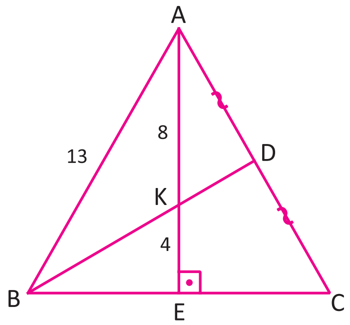


$|AR| = 2 \cdot |RD|$ ve $|BR| = 2 \cdot |RE|$ ise R noktası ABC üçgeninin ağırlık merkezi olur.
Bu durumda $[AD]$ ve $[BE]$ kenarortaydır.



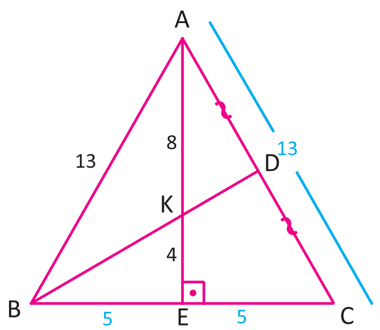
$[AD]$ kenarortay ve $|BS| = 2 \cdot |SE|$ ise $[BE]$ kenarortaydır. Bu durumda S noktası ABC üçgeninin ağırlık merkezi olur.

2. ÖRNEK



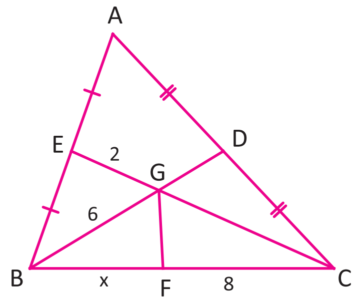
ABC üçgeninde $[AE] \perp [BC]$ ve $[BD]$ kenarortaydır.
$|AK| = 8$ cm, $|KE| = 4$ cm, $|AB| = 13$ cm
olduğuna göre ABC üçgeninin çevre uzunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



$|AK| = 2 \cdot |KE|$ olduğundan $[AE]$ kenarortay olur. Bu durumda K noktası, ABC üçgeninin ağırlık merkezidir.
$[AE] \perp [BC]$ ve $[AE]$ kenarortay ise ABC ikizkenar üçgendir.
$|AB| = |AC| = 13$ cm bulunur.
ABE dik üçgeninde Pisagor teoreminden $|BE|^2 + 12^2 = 13^2$ olur.
O hâlde
$|BE| = 5$ cm bulunur. $(5, 12, 13$ üçgeni$)$
$Ç(\widehat{ABC}) = 13 + 13 + 10 = 36$ cm olarak bulunur.

3. ÖRNEK



ABC bir üçgen;

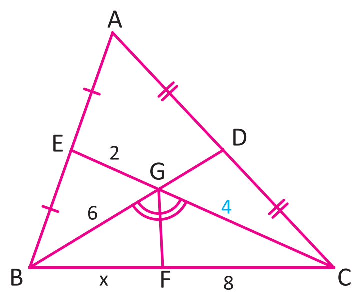
B,G,D ve C,G,E doğrusaldır.

$m(\widehat{BGF}) = m(\widehat{CGF}), |AD| = |DC|, |AE| = |EB|, |BG| = 6$ cm,

$|EG| = 2$ cm, $|FC| = 8$ cm

olduğuna göre $|BF| = x$ uzunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



ABC üçgeninde $[EC]$ ve $[BD]$ kenarortay olduğundan G, ağırlık merkezidir.

$|GC| = 2 \cdot |GE|$ olduğundan $|GC| = 4$ cm olur.

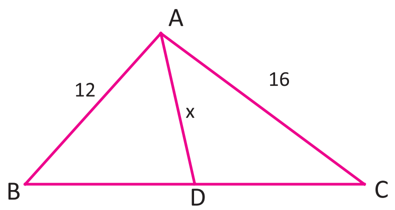
BGC üçgeninde $[GF]$ iç açıortaydır.

İç açıortay teoreminden

$\dfrac{|GC|}{|GB|} = \dfrac{|FC|}{|FB|}$ olduğundan

$\dfrac{4}{6} = \dfrac{8}{x} \Rightarrow 4 \cdot x = 6 \cdot 8 \Rightarrow x = 12$ cm bulunur.

4. ÖRNEK



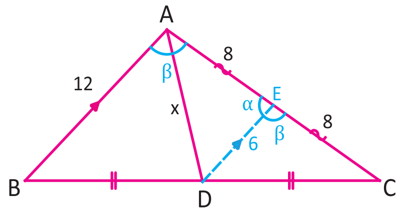
ABC üçgeninde

$m(\widehat{BAC}) > 90°$

$|BD| = |DC|, |AB| = 12$ cm, $|AC| = 16$ cm

olduğuna göre $|AD| = x$ değerinin alabileceği kaç tane tam sayı değeri olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



D noktasından AB kenarına paralel olacak şekilde çizilen doğru AC kenarını E noktasında kessin.

Bu durumda

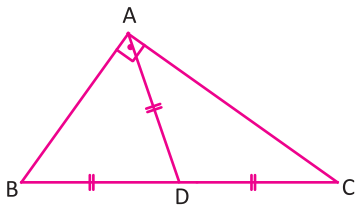
$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{DEC}) = \beta$ açısı geniş açı olup α açısı dar açıdır.

Üçgen eşitsizliğinden $2 < x < 14$ ...**(1)**

α dar açı olduğunda, $x^2 < 6^2 + 8^2 \Rightarrow x^2 < 100$ olup $x < 10$ ...**(2)**

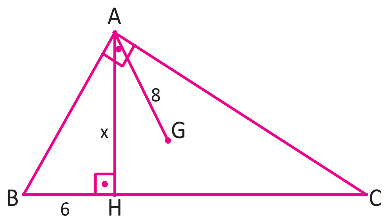
(1) ve (2) den $2 < x < 10$ olduğundan x değerinin alabileceği 7 tane tam sayı değeri vardır.

Bir dik üçgende hipotenüse ait kenarortayın uzunluğu, hipotenüsün uzunluğunun yarısına eşittir.



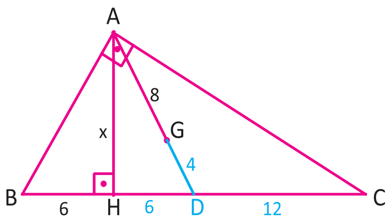
ABC dik üçgeninde $[AD]$, hipotenüse ait kenarortay ise
$|BD| = |DC| = |AD|$ olup $|BC| = 2 \cdot |AD|$ olur.

5. ÖRNEK



ABC bir dik üçgen;
G, ABC üçgeninin ağırlık merkezi.
$[AB] \perp [AC]$ ve $[AH] \perp [BC]$, $|BH| = 6$ cm, $|AG| = 8$ cm
olduğuna göre $|AH| = x$ değerini bulunuz.

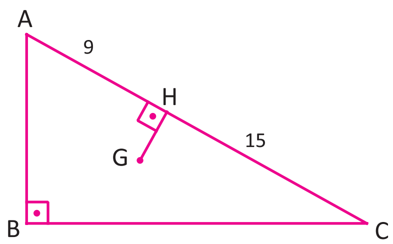
ÇÖZÜM



$[AG]$ nın hipotenüsü kestiği nokta D olsun.
$|AG| = 2 \cdot |GD|$ olduğundan $8 = 2 \cdot |GD| \Rightarrow |GD| = 4$ cm olur.
Buradan $|AD| = 8 + 4 = 12$ cm elde edilir.

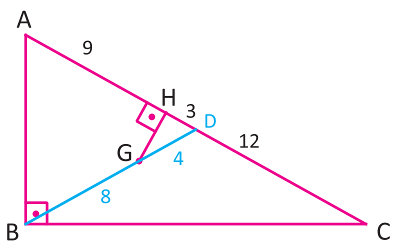
$|AD|$ hipotenüse ait kenarortay olduğundan $|AD| = |BD| = 12$ cm dir. Buradan $|HD| = 6$ cm olur.
AHD dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulandığında
$144 = 36 + x^2 \Rightarrow 144 - 36 = x^2 \Rightarrow 108 = x^2 \Rightarrow x = 6\sqrt{3}$ cm bulunur.

6. ÖRNEK



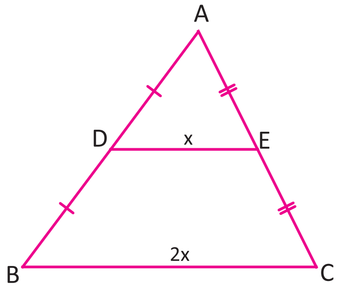
ABC dik üçgeninde G noktası, üçgenin ağırlık merkezidir.
$|AH| = 9$ cm, $|HC| = 15$ cm
olduğuna göre $|GH|$ nun kaç birim olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



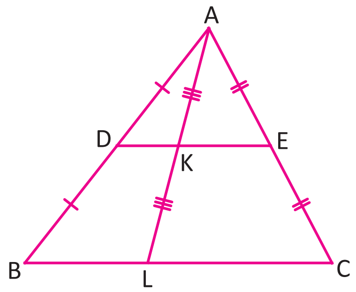
$[BD]$ kenarortayı çizildiğinde
$|AD| = |DC| = |BD| = 12$ cm ve $|HD| = 3$ cm olur.
G noktası üçgenin ağırlık merkezi olduğundan
$|BG| = 2|GD|$, $|BG| = 8$ cm, $\Rightarrow |GD| = 4$ cm olur.
Pisagor teoreminden
$|GH|^2 + 3^2 = 4^2 \Rightarrow |GH| = \sqrt{7}$ cm olarak bulunur.

Orta Taban

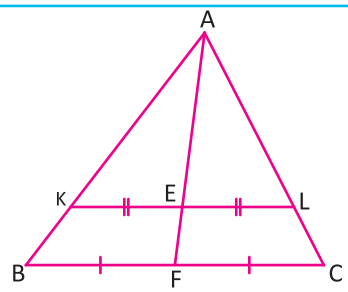


Bir üçgenin iki kenarının orta noktalarını birleştiren doğru parçasına orta taban denir.

ABC üçgeninde $[DE]$ orta taban ise $[DE] \parallel [BC]$ ve $|BC| = 2 \cdot |DE|$ olur.

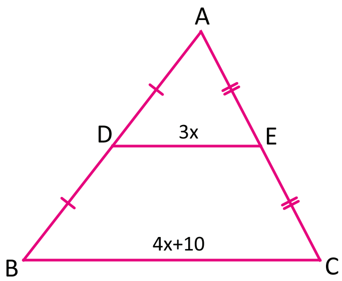


ABC üçgeninde D ve E kenarların orta noktaları ise $|AK| = |KL|$ olur.



ABC üçgeninde $[AF]$ kenarortay ve $[KL] \parallel [BC]$ ise $|KE| = |EL|$ olur.

7. ÖRNEK

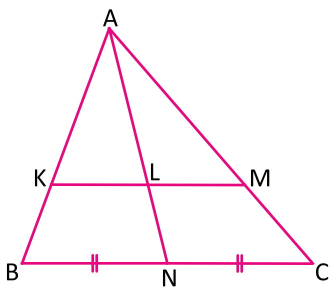


ABC üçgeninde
$|AD| = |DB|$ ve $|AE| = |EC|$ dir.
$|DE| = 3x$, $|BC| = 4x + 10$
olduğuna göre x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

D ve E orta noktalar ise $|BC| = 2 \cdot |DE|$ tir. Bu durumda
$4x + 10 = 2 \cdot 3x \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$ olarak bulunur.

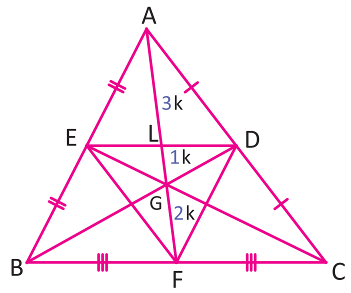
8. ÖRNEK



ABC üçgeninde
$[AN]$ kenarortay ve $[KM] \parallel [BC]$ dir.
$|KL| = 5x + 3$, $|LM| = 7x - 9$
olduğuna göre x değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

ABC üçgeninde $[KM] \parallel [BC]$ ve $[AN]$ kenarortay olduğuna göre $|KL| = |LM|$ dir. Buna göre
$5x + 3 = 7x - 9 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6$ olarak bulunur.



Bir ABC üçgeninde orta tabanların oluşturduğu üçgenin ağırlık merkezi ile ABC üçgeninin ağırlık merkezi aynı noktadır.

$[ED]$ orta tabanının $[AF]$ kenarortayını kestiği nokta L ise

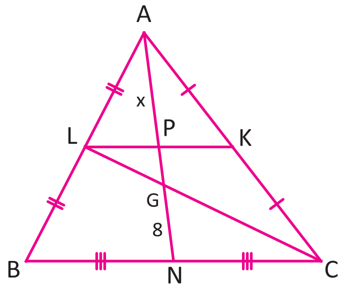
$|AL| - |LG| - |GF|$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

3k k 2k orantısı vardır.

$2|AL| = 6|LG| = 3|GF|$ olur.

9. ÖRNEK



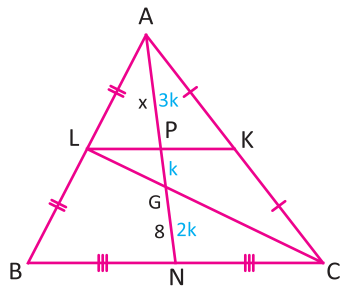
ABC üçgeninde

K, L, N noktaları, kenarların orta noktalarıdır.

$|GN| = 8$ cm

olduğuna göre $|AP| = x$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



K noktası $[AC]$ nın, L noktası $[AB]$ nın orta noktası olduğundan $[KL]$ orta tabandır.

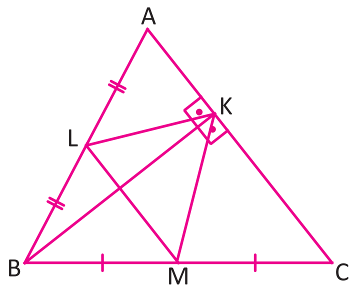
Ayrıca $[AN]$ ve $[CL]$ kenarortay olduğundan G noktası üçgenin ağırlık merkezidir.

Sırasıyla 3k, k, 2k oranından $|AP| = 3k$, $|PG| = k$, $|GN| = 2k$ bulunur.

O hâlde $2k = 8$ ise $k = 4$ olarak bulunur.

Bu durumda $x = 3k = 12$ cm olur.

10. ÖRNEK



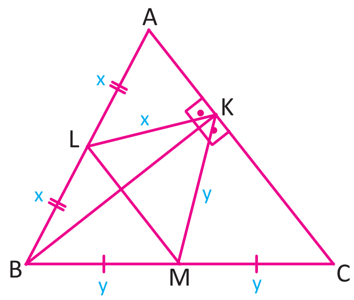
ABC üçgeninde

$|AL| = |LB|$, $|BM| = |MC|$, $[BK] \perp [AC]$

$Ç(\widehat{ABC}) = 36$ cm

olduğuna göre KLM üçgeninin çevre uzunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



BKC dik üçgeninde $|BM| = |MC| = |KM| = y$ olur.

AKB dik üçgeninde $|AL| = |LB| = |KL| = x$ olur.

Diğer taraftan ABC üçgeninde M ve L, kenar orta noktalar olduğundan $[ML]$ orta tabandır. $|AC| = 2z$ yazılırsa $|ML| = z$ olur.

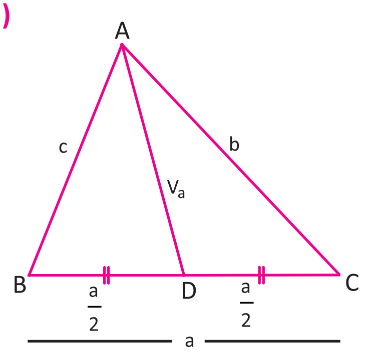
$Ç(\widehat{KLM}) = x + y + z$ olduğundan

$Ç(\widehat{ABC}) = 2x + 2y + 2z = 2(x + y + z) = 36 \Rightarrow x + y + z = 18$ cm olur.

$Ç(\widehat{KLM}) = x + y + z = 18$ cm olarak bulunur.

Kenarortay Uzunluğu

a)



ABC üçgeninde a, b ve c kenarlarına ait kenarortaylar sırasıyla V_a, V_b, V_c olmak üzere üçgenin kenarları ile kenarortayları arasında

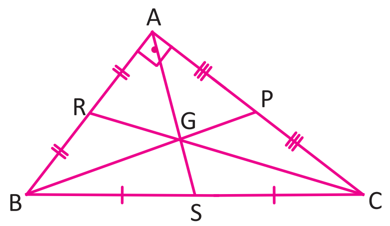
$2V_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$

$2V_b^2 = a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}$

$2V_c^2 = a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}$ bağıntıları vardır.

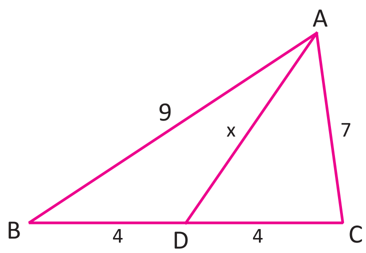
Bu bağıntılar taraf tarafa toplanıp düzenlenirse
$4(V_a^2 + V_b^2 + V_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$ bağıntısı bulunur.

b)



ABC dik üçgeninde $m(\widehat{A}) = 90^\circ$ ve
$|AS| = V_a$, $|BP| = V_b$, $|CR| = V_c$ olmak üzere
$5V_a^2 = V_b^2 + V_c^2$ olur.

11. ÖRNEK



ABC üçgeninde
$|BD| = |DC| = 4$ cm, $|AB| = 9$ cm, $|AC| = 7$ cm
olduğuna göre $|AD| = x$ uzunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

ABC üçgeninde [AD], BC kenarına ait kenarortay olduğundan $|AD| = x = V_a$ olur.

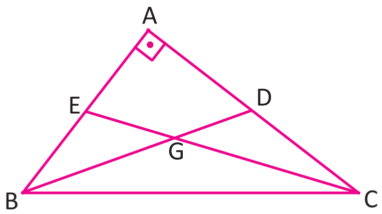
$2V_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$ eşitliği kullanılırsa

$2x^2 = 7^2 + 9^2 - \frac{8^2}{2} \Rightarrow 2x^2 = 130 - 32 = 98$

$x^2 = 49$

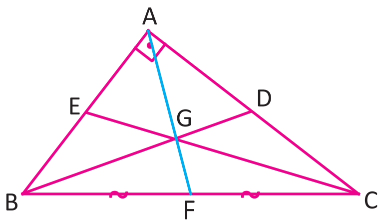
$x = 7$ cm olarak bulunur.

12. ÖRNEK



ABC dik üçgeninde G noktası ağırlık merkezidir.
$|BD| = 5\sqrt{2}$ cm ve $|CE| = 5\sqrt{3}$ cm
olduğuna göre $|BC| = x$ değerini bulunuz.

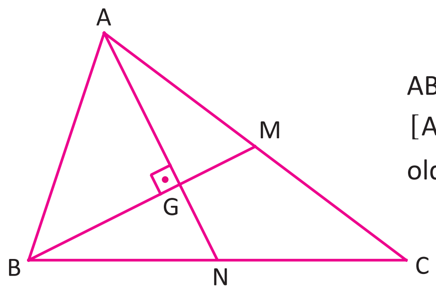
ÇÖZÜM



ABC dik üçgeninde D, E ve F kenar orta noktalar,
$|AF| = V_a$, $|BD| = V_b$, $|CE| = V_c$
olduğundan
$5V_a^2 = V_b^2 + V_c^2$ ve $|BC| = 2V_a$ olur.

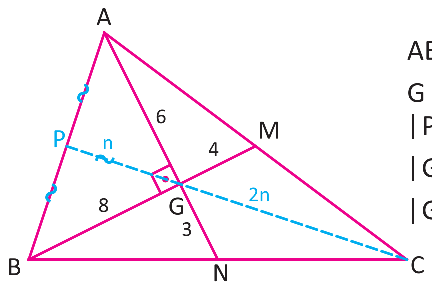
$5V_a^2 = (5\sqrt{3})^2 + (5\sqrt{2})^2 = 75 + 50 = 125$ olduğundan
$V_a^2 = 25 \Rightarrow V_a = 5$ cm olur.
O hâlde $|BC| = 2 \cdot V_a = 2 \cdot 5 = 10$ cm olur.

13. ÖRNEK



ABC üçgeninde G noktası ağırlık merkezidir.
$[AN] \perp [BM]$, $|AN| = 9$ cm, $|BM| = 12$ cm
olduğuna göre AB kenarına ait kenarortayın uzunluğunu bulunuz.

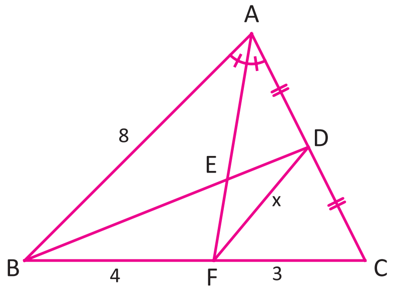
ÇÖZÜM



AB kenarına ait kenarortay $[CP]$ olsun.
G noktası ABC üçgeninin ağırlık merkezi olduğundan
$|PG| = n$ ise $|GC| = 2n$
$|GN| = 3$ cm, $|AG| = 6$ cm
$|GM| = 4$ cm, $|BG| = 8$ cm olur.

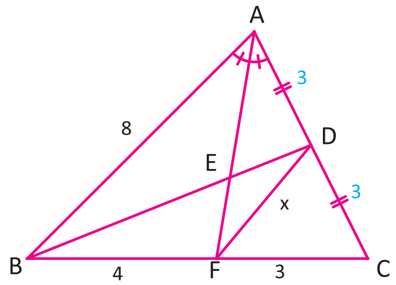
AGB dik üçgen olduğundan $|AB| = 10$ cm olur.
O hâlde $|AP| = |PB| = |PG| = 5$ cm olup $|GC| = 10$ cm bulunur.
Bu durumda $|CP| = 15$ cm olur.

14. ÖRNEK



ABC üçgeninde
[AF] açıortay, [BD] kenarortay,
$|AB| = 8\text{ cm}$, $|BF| = 4\text{ cm}$, $|FC| = 3\text{ cm}$
olduğuna göre $|DF| = x$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



İç açıortay teoreminden

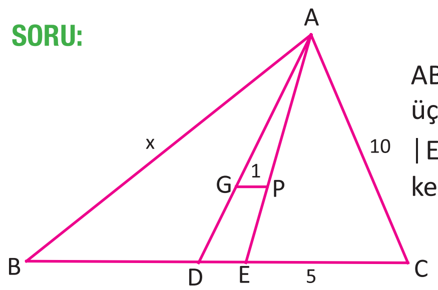
$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BF|}{|FC|} \Rightarrow \frac{8}{|AC|} = \frac{4}{3} \Rightarrow |AC| = 6\text{ cm olur.}$$

[AF] iç açıortay olduğundan
$|AF|^2 = 8 \cdot 6 - 4 \cdot 3 = 48 - 12 = 36$ olduğundan $|AF| = 6\text{ cm}$ olarak bulunur.
[FD], AFC üçgeninin kenarortayı olduğundan kenarortay uzunluk bağıntısından:

$$2x^2 = 6^2 + 3^2 - \frac{6^2}{2} \Rightarrow 2x^2 = 27 \Rightarrow x^2 = \frac{27}{2} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}\text{ cm olarak bulunur.}$$

Sıra Sizde

SORU:

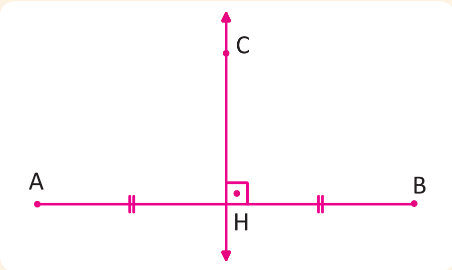


ABC üçgeninde G noktası üçgenin ağırlık merkezi, P noktası üçgenin iç açıortaylarının kesişim noktasıdır.
$|EC| = 5\text{ cm}$, $|AC| = 10\text{ cm}$, $|GP| = 1\text{ cm}$, olduğuna göre AB kenarının uzunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

3. Üçgenin Kenar Orta Dikmeleri

Orta Dikme

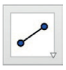
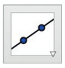
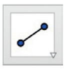


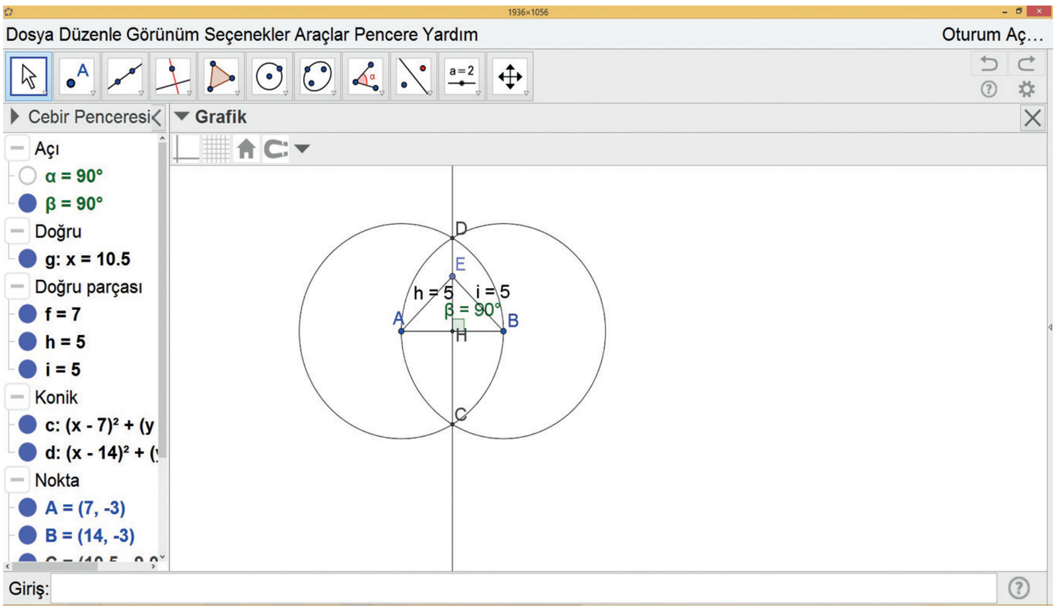
Bir doğru parçasının orta noktasından geçen ve doğru parçasına dik olan doğruya orta dikme doğrusu denir.

Yandaki şekilde AB doğru parçasının CH orta dikmesidir.

Teknoloji Uygulaması

Aşağıda GeoGebra programı kullanılarak verilen bir doğru parçasının orta dikme doğrusunun nasıl çizileceği açıklanmıştır.

	Doğru parçası aracını etkinleştiriniz. A ve B iki nokta seçerek doğru parçasını oluşturunuz.
	Merkez ve bir noktadan geçen çember aracını etkinleştiriniz. A merkezli B den geçen ve B merkezli A dan geçen iki çember çiziniz.
	Kesiştir aracını etkinleştiriniz. Bu iki çemberi seçerek kesiştikleri iki noktayı belirleyiniz.
	Doğru aracını etkinleştiriniz. Çemberlerin kesiştikleri iki noktayı seçerek doğruyu oluşturunuz.
	Nokta aracını etkinleştiriniz. Doğru üzerinde herhangi bir nokta seçiniz.
	Doğru parçası aracını etkinleştiriniz. Doğru üzerinde aldığınız herhangi bir noktadan (E noktası) A ve B noktalarına doğru parçaları çiziniz.
	Uzunluk aracını etkinleştiriniz. Çizilen doğru parçalarını seçerek bunların uzunluklarını bulunuz.
	Taşı aracını etkinleştiriniz. E noktasını, doğru üzerinde hareket ettirerek doğru parçalarının uzunluklarındaki değişimi inceleyin.



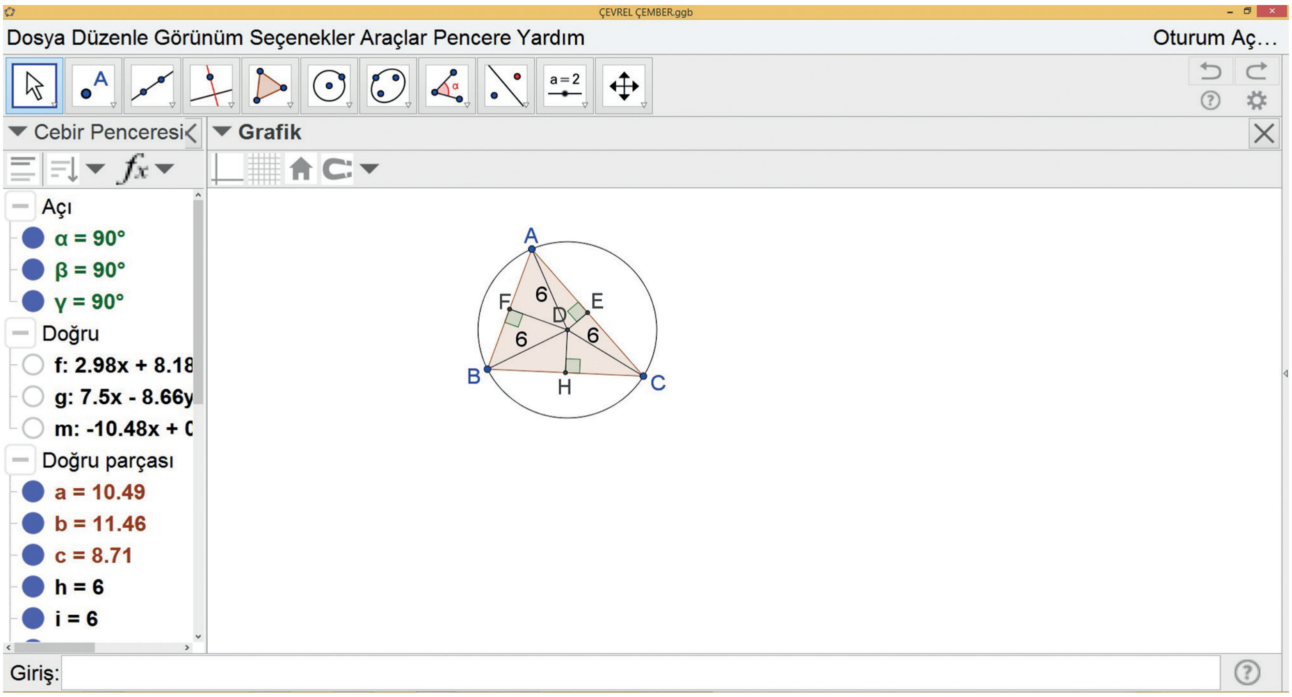
Üçgende Kenar Orta Dikme

Bir ABC üçgeninde A, B ve C noktalarından geçen çember üçgenin çevrel çemberi olarak isimlendirilir. Bir üçgenin kenar orta dikmeleri tek noktada kesişir. Bu nokta, üçgenin çevrel çemberinin merkezidir.

Teknoloji Uygulaması

Aşağıda GeoGebra programı kullanılarak verilen bir üçgenin kenarlarına ait orta dikmelerinin ve üçgenin çevrel çemberinin nasıl çizileceği açıklanmıştır.

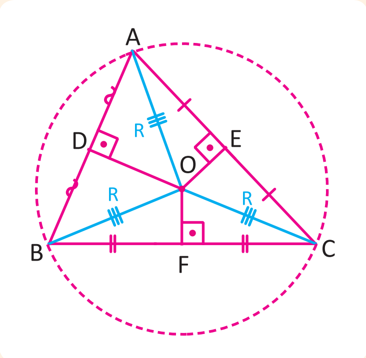
	Çokgen aracını etkinleştiriniz. ABC üçgenini oluşturmak için A, B ve C noktalarını art arda seçiniz. (A noktasından başlayıp yine en son A noktasını seçiniz.)
	Orta dikme aracını etkinleştiriniz. Kenarlara ait orta dikmeleri oluşturmak için kenarları seçiniz.
	Kesiştir aracını etkinleştiriniz. Orta dikmelerin kesiştikleri noktayı bulmak için orta dikmeleri seçiniz. Kesişim noktasını D harfi ile isimlendiriniz.
	Merkez ve bir noktasından geçen çember aracını etkinleştiriniz. Çevrel çemberi oluşturmak için D ve A noktalarını seçiniz.
	Doğru parçası aracını etkinleştiriniz. Kenar orta dikmelerin kesiştiği nokta ile üçgenin köşelerinin oluşturduğu doğru parçalarını çiziniz.
cm	Uzunluk aracını etkinleştiriniz. Çizilen doğru parçalarını seçerek bunların uzunluklarını bulunuz.
	Üçgeni köşelerinden tutarak hareket ettiriniz. Üçgenin farklı durumları için çevrel çemberi inceleyiniz.



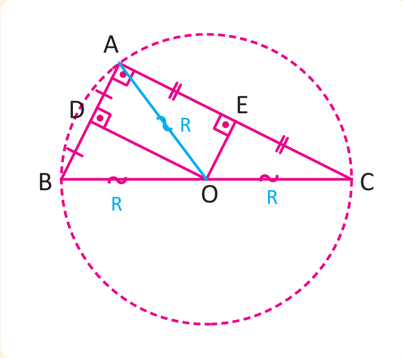
Yapılan GeoGebra çiziminde de görüldüğü gibi bir üçgenin kenar orta dikmelerinin kesiştiği noktanın üçgenin köşelerine olan uzaklıkları eşittir ve bu uzaklık üçgenin çevrel çemberinin merkezidir.

ABC üçgeninde çevrel çemberin merkezi O, yarıçapı R ise $|AO| = |BO| = |CO| = R$ birimdir.

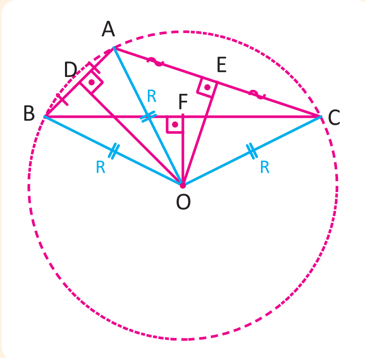
Üçgenin çeşidine göre çevrel çemberinin merkezi için 3 farklı durum vardır.



Dar açılı üçgenin çevrel çemberinin merkezi, üçgenin iç bölgesindedir.

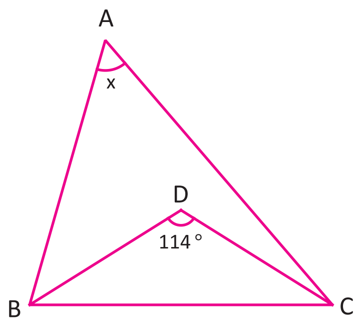


Dik üçgenin çevrel çemberinin merkezi, hipotenüsün orta noktasıdır.



Geniş açılı üçgenin çevrel çemberinin merkezi, üçgenin dış bölgesindedir.

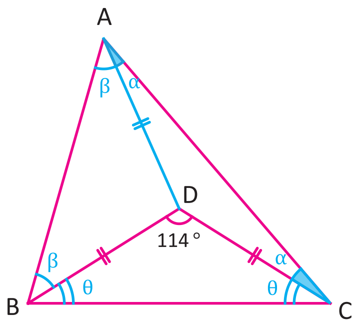
1. ÖRNEK



ABC üçgeninde D noktası, çevrel çemberinin merkezidir.

$m(\widehat{BDC}) = 114^\circ$ olduğuna göre $m(\widehat{BAC}) = x$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



ABC üçgeninde D noktası çevrel çemberinin merkezi olduğundan üçgenin köşe noktalarına eşit uzaklıktadır.

$m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{DCA}) = \alpha$

$m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{DBA}) = \beta$

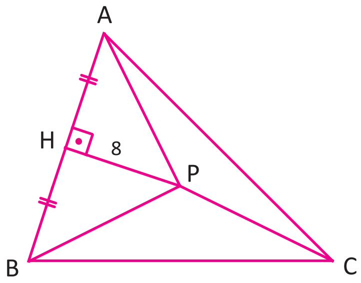
$m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{DCB}) = \theta$

BDC üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamı: $2\theta + 114 = 180 \Rightarrow \theta = 33^\circ$ dir.

ABC üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamı: $2\alpha + 2\beta + 2\theta = 180 \Rightarrow \alpha + \beta = 57^\circ$ olarak bulunur.

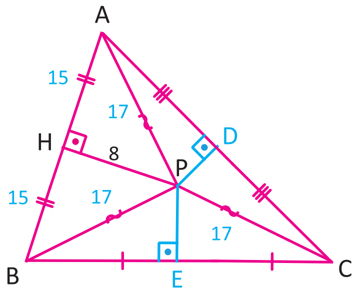
O hâlde $x = \alpha + \beta = 57^\circ$ tir.

2. ÖRNEK



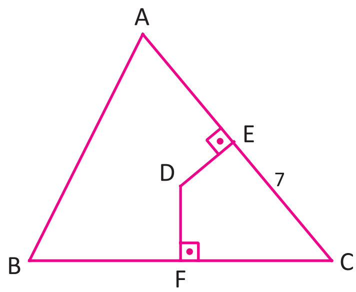
ABC üçgeninde P noktası, kenar orta dikmelerinin kesiştiği noktadır.
$|PH| = 8$ cm, $|AP| + |BP| + |PC| = 51$ cm
olduğuna göre AB kenarının uzunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



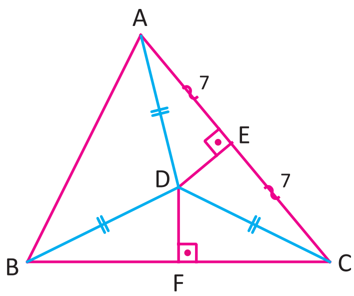
P noktası, kenar orta dikmelerinin kesiştiği nokta olduğundan
$|AP| = |BP| = |PC| = 17$ cm olur.
PAH dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulandığında
$|AH|^2 + 8^2 = 17^2 \Rightarrow |AH| = 15$ cm
olduğundan $|AB| = 30$ cm bulunur.

3. ÖRNEK



ABC üçgeninde D noktası, çevrel çemberinin merkezidir.
$[DE] \perp [AC]$, $[DF] \perp [BC]$, $|EC| = 7$ cm, $|DE| = \sqrt{15}$ cm,
$|DF| = 2\sqrt{7}$ cm olduğuna göre BC kenarının uzunluğunu bulunuz.

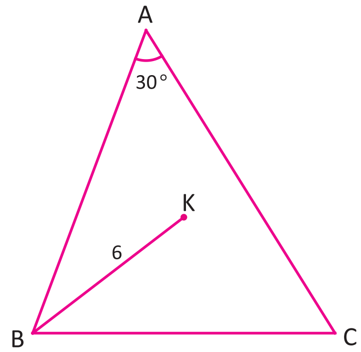
ÇÖZÜM



D noktası, ABC üçgeninde çevrel çemberin merkezi olduğundan
$[DF]$, $[BC]$ kenarına ait orta dikmedir.
DEC dik üçgeninde
$|DC|^2 = |DE|^2 + |EC|^2 \Rightarrow |DC|^2 = 15 + 49 = 64 \Rightarrow |DC| = 8$ cm olur.

DFC dik üçgeninde
$|DC|^2 = |DF|^2 + |FC|^2 \Rightarrow 64 = 28 + |FC|^2 \Rightarrow |FC| = 6$ cm bulunur.
$|FC| = 6$ cm olduğundan $|BC| = 12$ cm olarak bulunur.

4. ÖRNEK



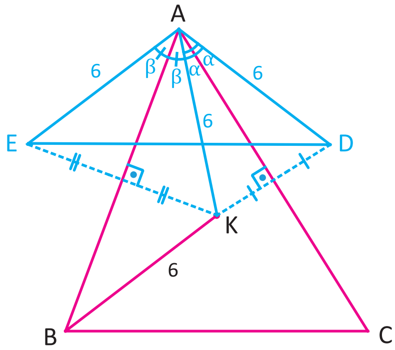
ABC üçgeninde K noktası, kenar orta dikmelerinin kesişim noktasıdır.

K noktasının [AC] kenarına göre simetriği D,

[AB] kenarına göre simetriği E noktasıdır.

Buna göre $|BK| = 6$ cm ise D ve E noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz.

ÇÖZÜM



K noktası, üçgenin kenar orta dikmelerinin kesişim noktası olduğundan üçgenin çevrel çemberinin merkezidir.

Bu durumda üçgenin çevrel çemberinin yarıçapı

$|BK| = |AK| = 6$ cm

olduğundan $|AK| = |AE| = |AD| = 6$ cm olur.

$\alpha + \beta = 30^\circ \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 60^\circ$ olup AED

üçgeni eşkenardır.

O hâlde $|ED| = 6$ cm olarak bulunur.

Sıra Sizde

SORU:

Üçgen biçiminde bir bahçenin tamamını sulayabilmek için bir fıskiye kullanılmak isteniyor. Buna göre

a) Bahçe dar açılı bir üçgen şeklinde olursa fıskiye nereye konulmalıdır?

b) Bahçe geniş açılı üçgen şeklinde olursa fıskiye nereye konulmalıdır?

a ve b seçeneklerinde bulduğunuz sonuçlardan yararlanarak bu durumun uygulanabilirliği hakkında ne düşünüyorsunuz? Açıklayınız.

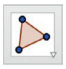
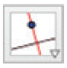
ÇÖZÜM

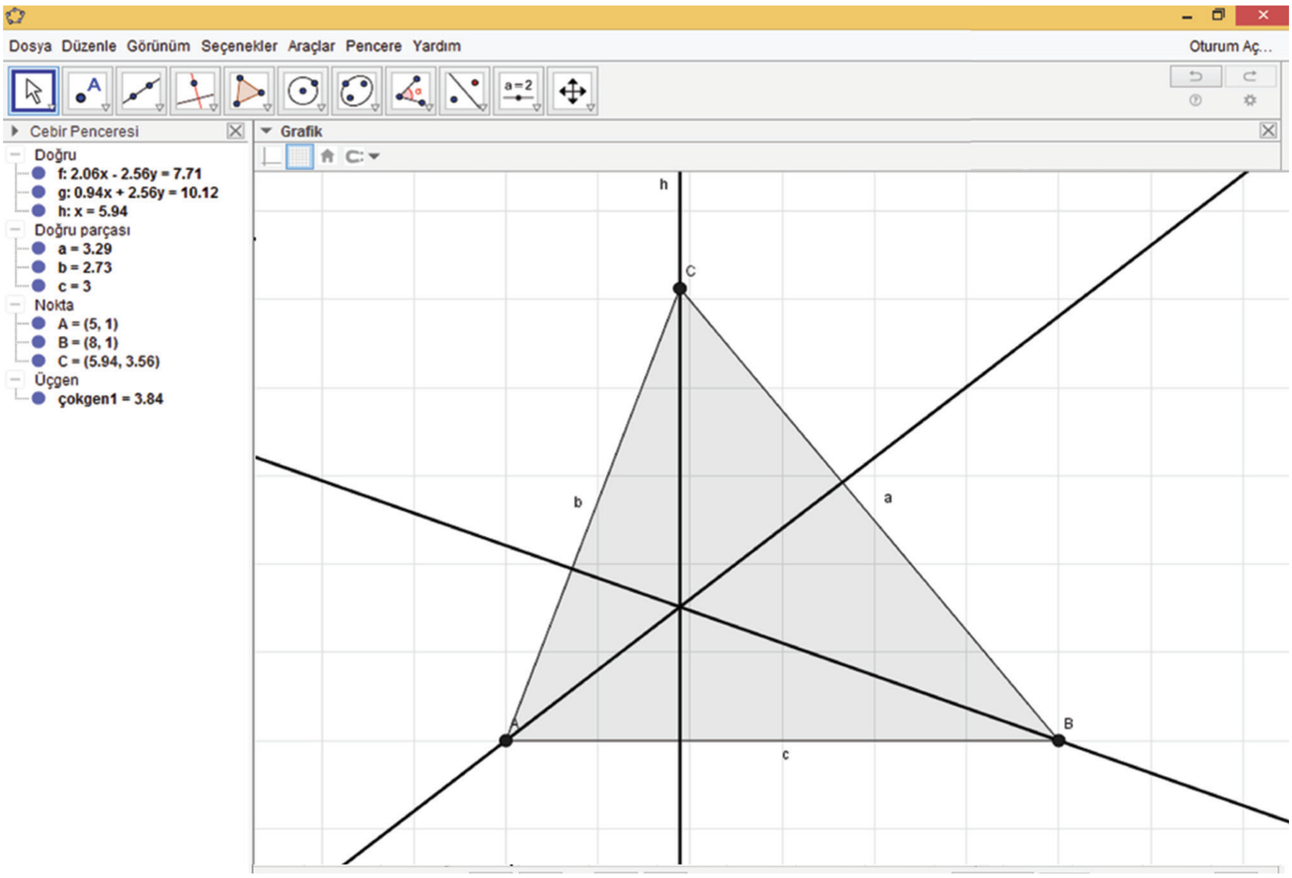
4. Üçgende Yükseklik

Üçgenin bir köşesinden karşısındaki kenara çizilen dikmeye üçgenin o kenarına ait yüksekliği denir. Bir ABC üçgeninin a, b, c kenarlarına ait h_a, h_b, h_c olmak üzere üç yüksekliği vardır. Bir üçgende yükseklikler tek noktada kesişir. Bu noktaya üçgenin diklik merkezi denir.

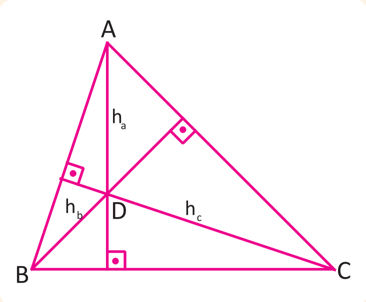
Teknoloji Uygulaması:

Aşağıda GeoGebra programı kullanılarak bir üçgen ve bu üçgenin yükseklikleri çizilmiştir. Farklı üçgen çeşitlerine göre yüksekliklerin kesiştiği nokta incelenmiştir.

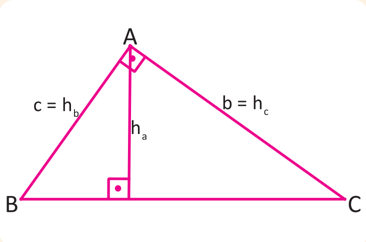
	Çokgen aracını etkinleştiriniz. ABC üçgenini oluşturmak için A, B ve C noktalarını art arda seçiniz.
	Dik doğru aracını etkinleştiriniz. Kenarlara ait yükseklikleri oluşturmak için üçgenin bir köşesini ve karşısındaki kenarı seçiniz.
	Kesiştir aracını etkinleştiriniz. Üçgenin yüksekliklerinin kesiştiği noktayı bulmak için yükseklikleri seçiniz.
	Taşı aracını etkinleştiriniz. Üçgeni köşelerinden hareket ettirerek farklı üçgen çeşitlerinde yüksekliklerin kesiştiği noktanın yerini inceleyiniz.



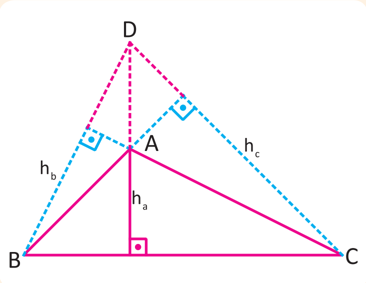
Üçgenin çeşidine göre diklik merkezi için üç farklı durum vardır.



1. ABC üçgeni dar açılı üçgen ise diklik merkezi üçgenin iç bölgesindedir.
Diklik merkezi D noktasıdır.

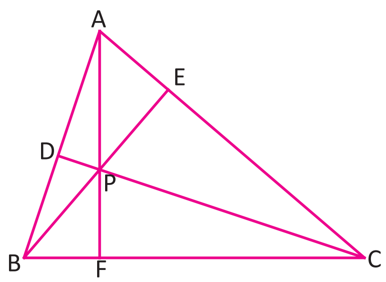


2. ABC üçgeni dik üçgen ise diklik merkezi üçgenin dik köşesidir.
A noktası aynı zamanda diklik merkezidir.



3. ABC üçgeni geniş açılı üçgen ise diklik merkezi üçgenin dış bölgesindedir.
Diklik merkezi D noktasıdır.

1. ÖRNEK



ABC üçgeninde P noktası üçgenin diklik merkezi olmak üzere $m(\widehat{BAC}) = 3x - 72^\circ$ olduğuna göre x in alabileceği kaç tam sayı değeri olduğunu bulunuz.

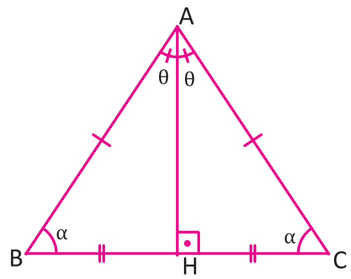
ÇÖZÜM

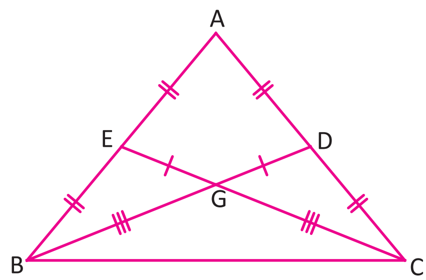
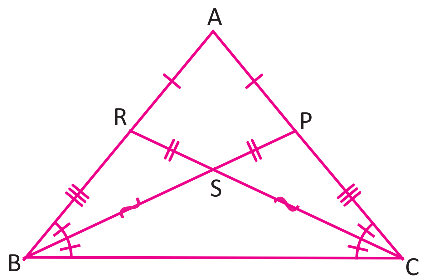
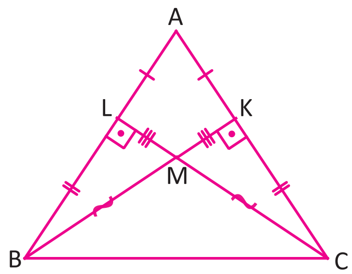
ABC üçgeninde diklik merkezi üçgenin iç bölgesinde olduğundan üçgen dar açılı bir üçgendir. Buna göre

$$0^\circ < m(\widehat{BAC}) < 90^\circ \Rightarrow 0^\circ < 3x - 72^\circ < 90^\circ$$
$$72^\circ < 3x < 162^\circ$$
$$24^\circ < x < 54^\circ$$

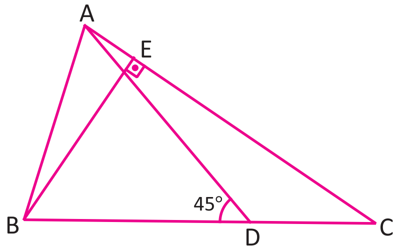
olup x in alabileceği 29 farklı tam sayı değeri vardır.

İkizkenar Üçgenin Yardımcı Elemanları



ABC üçgeninde $H \in [BC]$ olmak üzere 1. $\|AB\| = \|AC\|$ 2. $\|BH\| = \|HC\|$ 3. $m(\widehat{BAH}) = m(\widehat{HAC})$ 4. $[AH] \perp [BC]$	Bu dört özellikten herhangi ikisi sağlanıyorsa üçgen ikizkenar olup diğer özellikler de sağlanır.
İkizkenar üçgende eşit kenarlara ait kenarortay uzunlukları birbirine eşittir. $\|AB\| = \|AC\| \Rightarrow \|BD\| = \|CE\|$	
İkizkenar üçgende eşit açılara ait açıortay uzunlukları birbirine eşittir. $\|AB\| = \|AC\| \Rightarrow \|BP\| = \|CR\|$	
İkizkenar üçgende eşit kenarlara ait yükseklik uzunlukları birbirine eşittir. $\|AB\| = \|AC\| \Rightarrow \|BK\| = \|CL\|$	

2. ÖRNEK

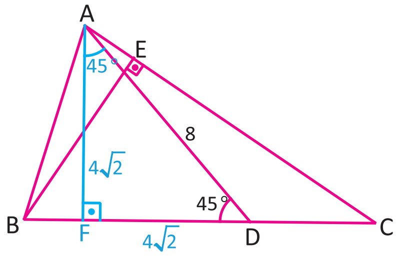


ABC ikizkenar üçgeninde

$[BE] \perp [AC]$, $|AC| = |BC|$, $m(\widehat{ADB}) = 45°$, $|AD| = 8$ cm

olduğuna göre BE kenarının uzunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



$[BC]$ kenarına ait yükseklik $[AF]$ çizildiğinde

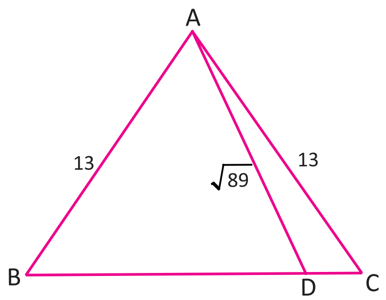
İkizkenar üçgende eşit kenarlara ait yükseklikler eşit olduğundan $|AF| = |BE|$ dir.

AFD ikizkenar dik üçgeninde

$|AF| = |FD| = 4\sqrt{2}$ cm olduğundan

$|AF| = |BE| = 4\sqrt{2}$ cm olarak bulunur.

3. ÖRNEK



ABC ücgeninde

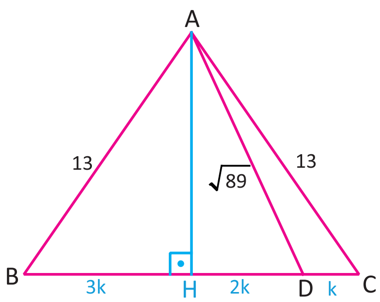
$|BD| = 5|DC|$

$|AB| = |AC| = 13$ cm

$|AD| = \sqrt{89}$ cm olduğuna göre

$|BD|$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



Tabana ait yükseklik $[AH]$ çizildiğinde

ABC üçgeni, ikizkenar olduğundan $[AH]$ aynı zamanda tabana ait kenarortaydır.

$|DC| = k$ denirse $|BD| = 5k$ olduğundan $|BH| = |HC| = 3k$ olur.

Pisagor teoreminden

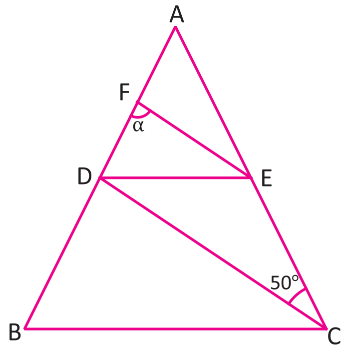
$|AH|^2 + 4k^2 = 89$ ve $|AH|^2 + 9k^2 = 169$

$89 - 4k^2 = 169 - 9k^2$

$5k^2 = 80 \Rightarrow k = 4$ tür.

O hâlde $|BD| = 5k = 20$ cm olarak bulunur.

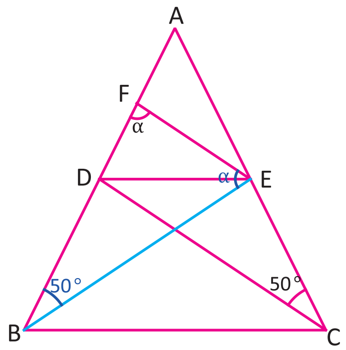
4. ÖRNEK



ABC ikizkenar üçgen ve $|AB| = |AC|$, $[CD]$ kenarortay ve $|CD| = |BF|$, $|AE| = |EC|$, $m(\widehat{DCE}) = 50^\circ$

olduğuna göre $m(\widehat{BFE}) = \alpha$ açısının ölçüsünü bulunuz.

ÇÖZÜM

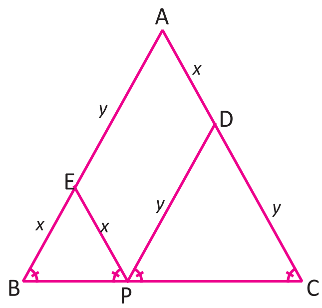
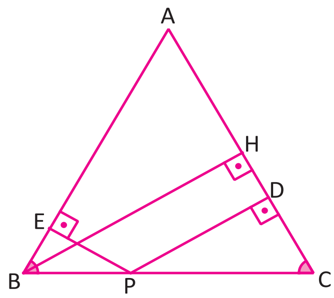


$|AE| = |EC|$ olduğundan B ile E noktaları birleştirilirse $[BE]$ kenarortayı elde edilir.

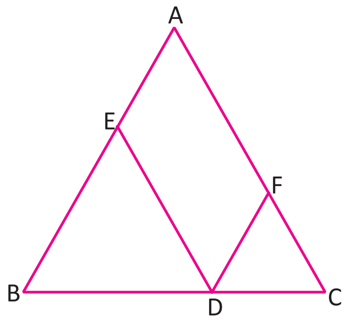
$|AB| = |AC|$ olduğundan bu kenarlara ait kenarortay uzunlukları eşittir. O hâlde $|CD| = |BE| = |BF|$ ve $m(\widehat{FBE}) = m(\widehat{ECD}) = 50^\circ$ olur.

Bu durumda FBE üçgeni ikizkenar üçgen olup $m(\widehat{BFE}) = m(\widehat{BEF}) = \alpha$ tir.

Dolayısıyla $2\alpha + 50^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 65^\circ$ olarak bulunur.

İkizkenar üçgende taban üzerindeki herhangi bir noktadan eşit kenarlara çizilen paralellerin uzunlukları toplamı, eşit kenarlardan birinin uzunluğuna eşittir.	ABC ikizkenar üçgen,  $|AB| = |AC|$ $P \in [BC]$ $[PE] /\!/ [AC]$ $[PD] /\!/ [AB]$ ise $|PE| + |PD| = |AB| = |AC|$
İkizkenar üçgende taban üzerindeki herhangi bir noktadan eşit kenarlara çizilen dikmelerin uzunlukları toplamı, eşit kenarlara ait yüksekliğe eşittir.	ABC ikizkenar üçgen,  $|AB| = |AC|$ $P \in [BC]$ $[PE] \perp [AB]$ $[PD] \perp [AC]$ ise $|PE| + |PD| = |BH|$

5. ÖRNEK



ABC ikizkenar üçgeninde

$|AB| = |AC| = 15$ cm,

$[DE] \parallel [AC]$, $[DF] \parallel [AB]$,

$|DE| - |FD| = 3$

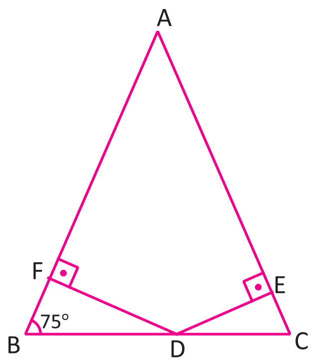
olduğuna göre $|DE|$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

İkizkenar üçgende taban üzerindeki herhangi bir noktadan eşit kenarlara çizilen paralellerin toplamı, eşit kenarlardan birinin uzunluğuna eşit olduğundan

$$\begin{array}{rl} & |DE| + |FD| = 15 \\ + & |DE| - |FD| = 3 \\ \hline & 2|DE| = 18 \Rightarrow |DE| = 9 \text{ cm olarak bulunur.} \end{array}$$

6. ÖRNEK



ABC ikizkenar üçgeninde

$|AB| = |AC| = 18$ cm,

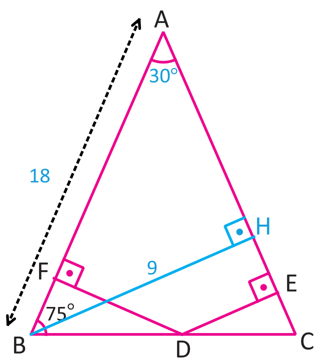
$[DF] \perp [AB]$, $[DE] \perp [AC]$,

$m(\widehat{ABC}) = 75^\circ$

$|DF| = 5$ cm

olduğuna göre $|DE|$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



ABC ikizkenar üçgen olduğundan

$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB}) = 75^\circ$ olduğundan $m(\widehat{BAC}) = 30^\circ$ tir.

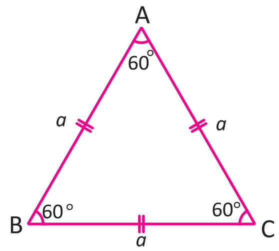
O hâlde B noktasından AC kenarına indirilen dikme

$[BH]$ ise $|BH| = 9$ cm olur.

İkizkenar üçgende taban üzerindeki herhangi bir noktadan kenarlara indirilen dikmelerin uzunlukları toplamı eşit kenarlara ait yüksekliğe eşit olacağından

$|DE| + |DF| = |BH| = 9 \Rightarrow |DE| = 9 - 5 = 4$ cm olarak bulunur.

Eşkenar Üçgenin Yardımcı Elemanları

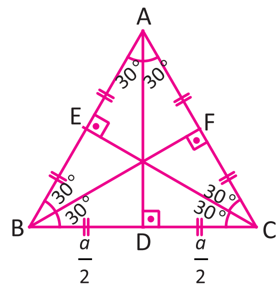


Eşkenar üçgende üç kenara ait yükseklik ve kenarortay uzunlukları ile üç açıya ait açıortay uzunlukları eşittir.

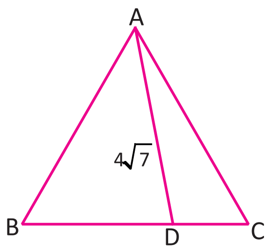
$|AB| = |AC| = |BC| = a$ ise

$|BD| = |DC| = |FC| = |AF| = |AE| = |EB| = \frac{a}{2}$

$V_a = V_b = V_c = n_A = n_B = n_C = h_a = h_b = h_c = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ olur.



7. ÖRNEK

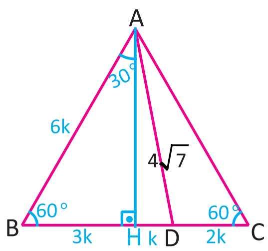


ABC eşkenar üçgeninde

$2|AB| = 3|BD|$, $|AD| = 4\sqrt{7}$ cm

olduğuna göre $|AB|$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



$|AB| = 6k$ ise $|BD| = 4k$ ve $|DC| = 2k$ dir.

A noktasından BC kenarına ait yükseklik çizilirse

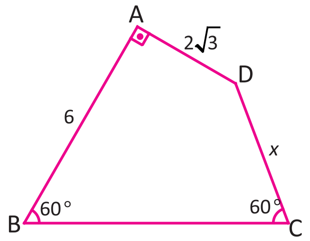
$|BH| = 3k, |HD| = k$ ve $|AH| = \frac{6k\sqrt{3}}{2} = 3k\sqrt{3}$ bulunur.

Pisagor teoreminden

$$(3k\sqrt{3})^2 + k^2 = (4\sqrt{7})^2 \Rightarrow 27k^2 + k^2 = 16 \cdot 7$$
$$28k^2 = 16 \cdot 7$$
$$k^2 = 4$$
$$k = 2 \text{ bulunur.}$$

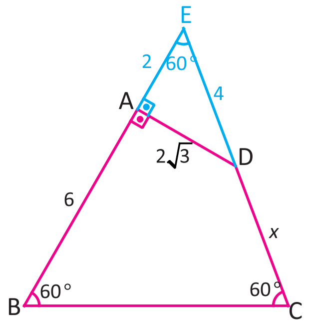
O hâlde $|AB| = 6k = 12$ cm olarak bulunur.

8. ÖRNEK



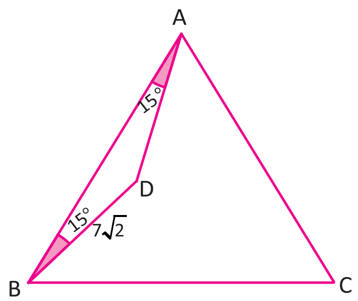
ABCD dörtgeninde
$m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 60^\circ, [DA] \perp [AB], |AB| = 6$ cm, $|AD| = 2\sqrt{3}$ cm,
olduğuna göre $|DC|$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



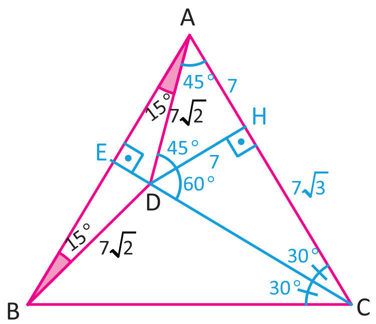
BA ve CD kenarları uzatıldığında oluşan BEC üçgeni eşkenardır.
EAD üçgeni $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ üçgeni olduğundan
$|AD| = 2\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow |AE| = 2$ cm ve $|ED| = 4$ cm olur.
BEC eşkenar üçgen olduğundan
$|BE| = |EC| \Rightarrow 8 = x + 4 \Rightarrow x = 4$ cm olarak bulunur.

9. ÖRNEK



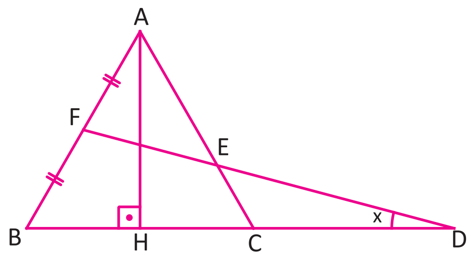
ABC eşkenar üçgeninde
$m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{DBA}) = 15^\circ$, $|AD| = 7\sqrt{2}$ cm
olduğuna göre $|AC|$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



$[DH] \perp [AC]$ ve $[CE] \perp [AB]$ olacak şekilde $[DH]$ ve $[CE]$ çizildiğinde
DHA üçgeni $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$,
DHC üçgeni $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ olduğundan
$|AD| = 7\sqrt{2}$ cm $\Rightarrow |AH| = |DH| = 7$ cm olur.
$|DH| = 7$ cm $\Rightarrow |HC| = 7\sqrt{3}$ cm olup $|AC| = 7 + 7\sqrt{3}$ cm olarak bulunur.

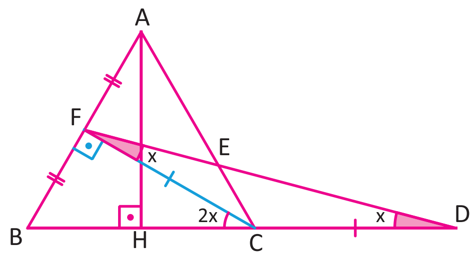
10. ÖRNEK



ABC eşkenar üçgeninde
$[AH] \perp [BC]$,
$|BF| = |FA|$,
$|AH| = |CD|$ olduğuna göre

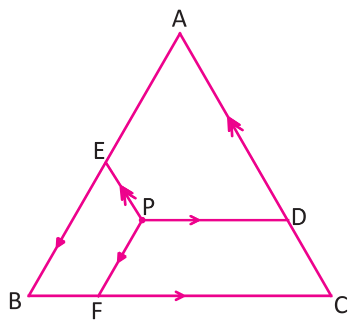
$m(\widehat{EDC}) = x$ açısının ölçüsünü bulunuz.

ÇÖZÜM



C ile F noktaları birleştirilirse $[CF]$ kenarortay olacağından
$|CF| = |AH| = |CD|$ veriliyor.
Dolayısıyla FCD ikizkenar üçgen olduğundan $m(\widehat{CFD}) = x$ olur.
ABC eşkenar üçgen olduğundan
$m(\widehat{FCB}) = 30^\circ \Rightarrow 2x = 30^\circ \Rightarrow x = 15^\circ$ olarak bulunur.

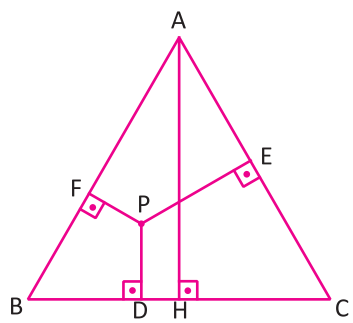
Eşkenar üçgenin iç bölgesinde veya kenarlarının üzerinde alınan herhangi bir noktadan kenarlara çizilen paralellerin uzunlukları toplamı, eşkenar üçgenin bir kenar uzunluğuna eşittir.



ABC eşkenar üçgen,
P üçgenin içinde
herhangi bir nokta,
$[PE] \parallel [AC]$
$[PD] \parallel [BC]$
$[PF] \parallel [AB]$ ise

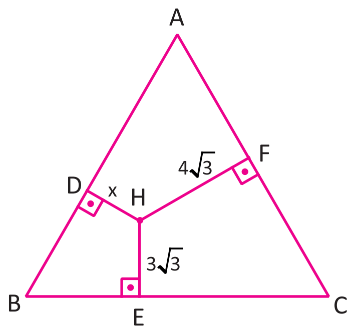
$|PD| + |PE| + |PF| = |AB| = |AC| = |BC|$

Eşkenar üçgenin iç bölgesinde veya kenarlarının üzerinde alınan herhangi bir noktadan kenarlara indirilen dikmelerin uzunlukları toplamı, eşkenar üçgenin yüksekliğine eşittir.



ABC eşkenar üçgen, P üçgenin içinde herhangi bir nokta,
$[PE] \perp [AC]$
$[PD] \perp [BC]$
$[PF] \perp [AB]$
$[AH] \perp [BC]$ ise
$|PD| + |PE| + |PF| = |AH|$ olur.

11. ÖRNEK



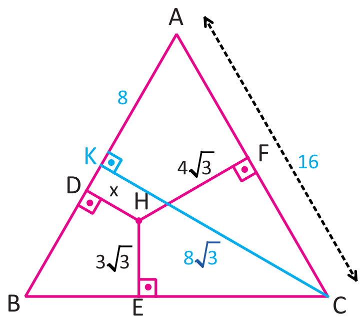
ABC eşkenar üçgeninde

$[DH] \perp [AB]$, $[HF] \perp [AC]$, $[HE] \perp [BC]$,

$|AC| = 16$ cm, $|HF| = 4\sqrt{3}$ cm, $|HE| = 3\sqrt{3}$ cm

olduğuna göre $|DH| = x$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



ABC eşkenar üçgeninin bir kenarının uzunluğu 16 cm olduğundan üçgenin bu kenara ait yüksekliği

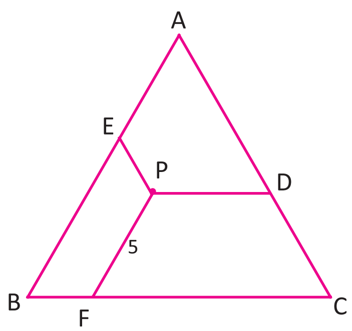
$|CK| = \dfrac{16\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$ cm olur.

Eşkenar üçgenin içinde alınan bir noktanın kenarlara olan uzaklıklarının toplamı, eşkenar üçgenin yüksekliğine eşit olduğundan

$|HD| + |HE| + |HF| = |CK| \Rightarrow x + 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

$\Rightarrow x = \sqrt{3}$ cm olarak bulunur.

12. ÖRNEK



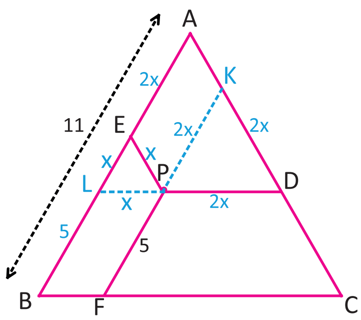
ABC eşkenar üçgen,

$[EP] \parallel [AC]$, $[PD] \parallel [BC]$, $[PF] \parallel [AB]$,

$2|PE| = |PD|$, $|PF| = 5$ cm, $Ç(\widehat{ABC}) = 33$ cm

olduğuna göre $|PD|$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



$|PE| = x$ ise $|PD| = 2x$ tir.

$[LP] \parallel [BC]$ ve $[KP] \parallel [AB]$

çizildiğinde PEL ve PKD üçgenleri eşkenar olduğundan

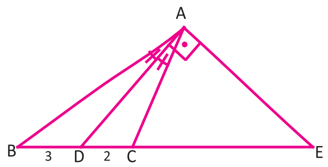
$|PL| = |PE| = |EL| = x$ ve $|PD| = |KP| = |KD| = 2x$ olur.

$|PF| = |LB| = 5$ cm ve $|AE| = |KP| = 2x \Rightarrow 3x + 5 = 11 \Rightarrow x = 2$ cm olur.

Bu durumda $|PD| = 2x = 4$ cm olarak bulunur.

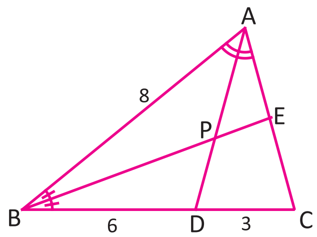
ALIŞTIRMALAR-3

1.



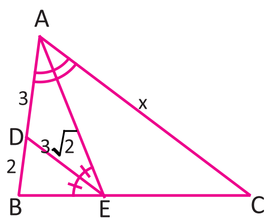
ABC bir üçgen, $[AD]$ açıortay, $[AD] \perp [AE]$, $|DC| = 2$ cm, $|BD| = 3$ cm olduğuna göre $|EC|$ nu cm cinsinden bulunuz.

2.



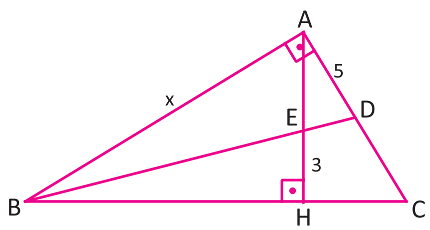
ABC bir üçgen, $[BE]$ ve $[AD]$ iç açıortaylar, $|BD| = 6$ cm, $|DC| = 3$ cm, $|AB| = 8$ cm olduğuna göre $|PD|$ nu cm cinsinden bulunuz.

3.



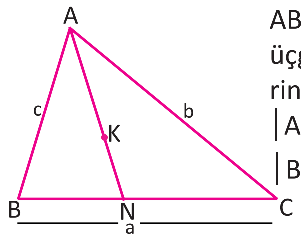
ABC bir üçgen, $[AE]$ ve $[ED]$ açıortaylar, $|DB| = 2$ cm, $|AD| = 3$ cm, $|ED| = 3\sqrt{2}$ cm olduğuna göre $|AC|$ nu cm cinsinden bulunuz.

4.



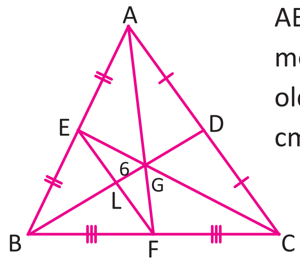
ABC bir üçgen, $[BD]$ iç açıortay, $|AD| = 5$ cm, $|EH| = 3$ cm olduğuna göre $|AB| = x$ değerini cm cinsinden bulunuz.

5.



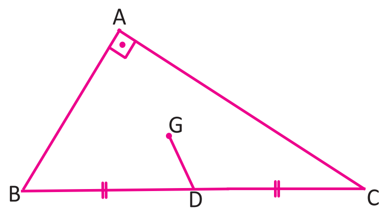
ABC bir üçgen, K noktası üçgenin iç teğet çemberinin merkezi, $|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$ olmak üzere $\dfrac{|AK|}{|KN|} = \dfrac{b+c}{a}$ olduğunu gösteriniz.

6.



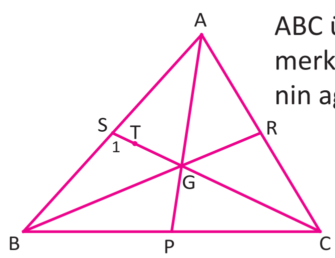
ABC bir üçgen, G ağırlık merkezi ve $|GL| = 6$ cm olduğuna göre $|BD|$ nu cm cinsinden bulunuz.

7.



ABC bir dik üçgen, G noktası üçgenin ağırlık merkezidir. $|GD| = \sqrt{2}$ cm, $|AC| = 4\sqrt{3}$ cm olmak üzere $|AB|$ nu cm cinsinden bulunuz.

8.

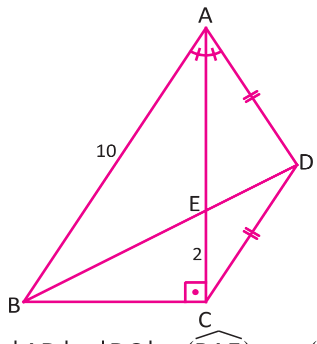


ABC üçgeninin ağırlık merkezi G, ABG üçgeninin ağırlık merkezi T,

$|ST| = 1$ cm, $|AP| = 15$ cm, $|BR| = 12$ cm

olduğuna göre $|AB|$ nu cm cinsinden bulunuz.

9.



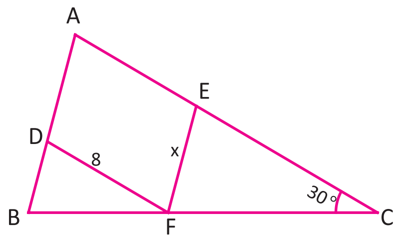
ABC dik üçgen,

$|AB| = 10$ cm,

$|EC| = 2$ cm,

$|AD| = |DC|$, $m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{EAD})$ olduğuna göre $|BD|$ nu cm cinsinden bulunuz.

10.

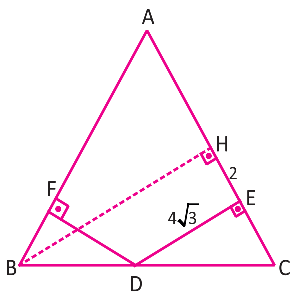


ABC ikizkenar üçgeninde

$|AC| = |BC|$, $m(\widehat{ACB}) = 30°$

$[FE] \mathbin{/\!/} [AB]$, $[FD] \mathbin{/\!/} [AC]$, A noktasının $[BC]$ na uzaklığı 7 cm olduğuna göre $|EF| = x$ değerini cm cinsinden bulunuz.

11.



ABC eşkenar üçgen,

$[DE] \perp [AC]$,

$[FD] \perp [AB]$,

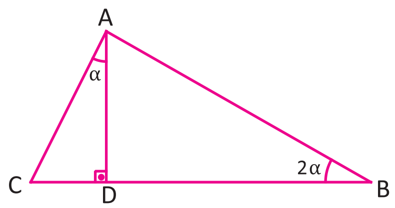
$[BH] \perp [AC]$,

$|DE| = 4\sqrt{3}$ cm,

$|EH| = 2$ cm

olduğuna göre FD kenarının uzunluğunu cm cinsinden bulunuz.

12.

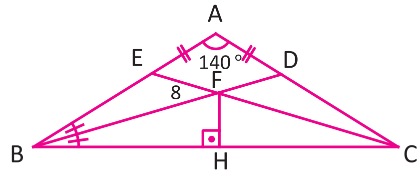


ABC üçgeninde, $[AD] \perp [BC]$ olmak üzere

$|AB| = 17$ cm, $|CD| = 2$ cm, $m(\widehat{CAD}) = \alpha$,

$m(\widehat{ABC}) = 2\alpha$ olduğuna göre AC kenarının uzunluğunu cm cinsinden bulunuz.

13.

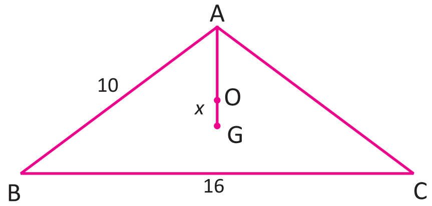


ABC ikizkenar üçgeninde,

$m(\widehat{BAC}) = 140°$, $|AB| = |AC|$, $[BD]$ açıortay,

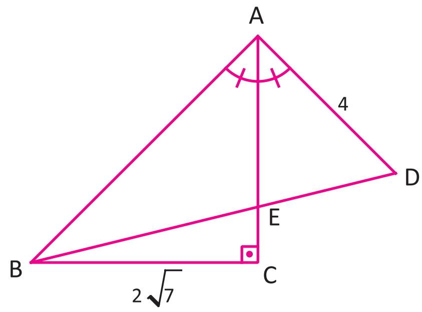
$|AD| = |AE|$, $[FH] \perp [BC]$, $|FE| = 8$ cm olduğuna göre $|FH|$ nu cm cinsinden bulunuz.

14.



ABC üçgeninde, $|AB| = 10$ cm, $|BC| = 16$ cm ve G ağırlık merkezi, O iç teğet çemberin merkezidir. $|OG| = x$ değerinin cm cinsinden bulunuz.

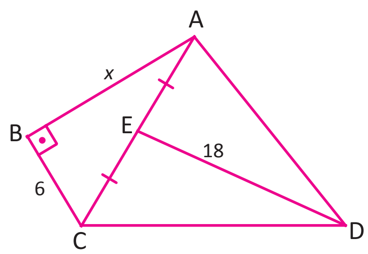
15.



$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{CAD})$, $|BE| = 2|ED|$

$|AD| = 4$ cm, $|BC| = 2\sqrt{7}$ cm olduğuna göre AC uzunluğunu cm cinsinden bulunuz.

16.



$m(\widehat{DAC}) = 2m(\widehat{CAB})$, $|AC| = |AD|$,

$|AE| = |EC|$, $|BC| = 6$ cm, $|ED| = 18$ cm ise $|AB| = x$ değerini cm cinsinden bulunuz.

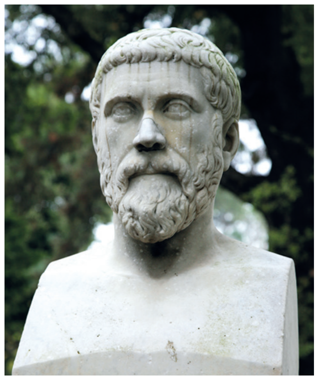
9.4.4. DİK ÜÇGENDE TRİGONOMETRİ

1. Dik Üçgende Pisagor Teoremi

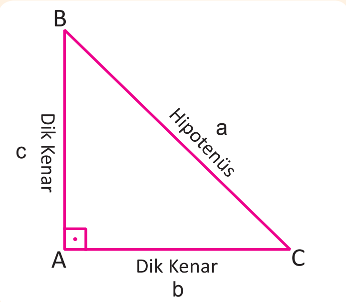
Pisagor (Görsel 4.4.1), Yunan filozof ve matematikçidir. Matematik bilimine ispat özelliğini getiren bilim insanıdır. Doğadaki her şeyi matematik bilimi ile açıklayıp yorumlamaya çalışmıştır.

Pisagor'a göre sayılar nesnelerin özünü oluşturmaktadır. Pisagor, matematiğin doğanın temel yasalarını çözen bir anahtar olduğunu kabul eder. Bu konudaki kayıtlı ilk sistematik düşünceler, MÖ 600-400 yıllarında Pisagor yanlısı bir gruba aittir. Bu gruba Pisagorcular denir.

Pisagor'un hayatı hakkında çok fazla bilgi olmamasına rağmen dik üçgen ile ilgili teoremi, geçmişten günümüze dek gelen en ünlü teoremlerinden biridir.



Görsel 4.4.1:
Pythagoras (Pisagor)



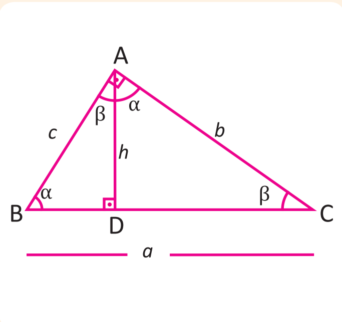
Bir açısı 90 derece olan üçgene dik üçgen denir. Dik üçgende 90 derecenin karşısındaki kenara hipotenüs, diğer kenarlara dik kenar adı verilir.

Pisagor teoremi

Bir dik üçgende dik kenarların kareleri toplamı hipotenüsün karesine eşittir.

$a^2 = b^2 + c^2$

Pisagor teoreminin birçok farklı şekilde ispatı yapılmıştır. Benzerlik yöntemi ile ispatı aşağıdaki gibi yapılabilir.



ABC dik üçgeninde

$m(\widehat{A}) = 90^\circ, |AB| = c, |BC| = a, |AC| = b$

$[AD] \perp [BC]$ olacak biçimde h yüksekliği çizilir.

Açı açı benzerlik kuralından $\overset{\frown}{CAD} \sim \overset{\frown}{CBA}$ olacağından

$\dfrac{|CA|}{|CB|} = \dfrac{|CD|}{|CA|} \Rightarrow |CA|^2 = |CD| \cdot |CB| \quad ...(1)$

Açı açı benzerlik kuralından $\overset{\frown}{ABD} \sim \overset{\frown}{CBA}$ olacağından

$\dfrac{|AB|}{|CB|} = \dfrac{|BD|}{|BA|} \Rightarrow |AB|^2 = |CB| \cdot |BD| \quad ...(2)$

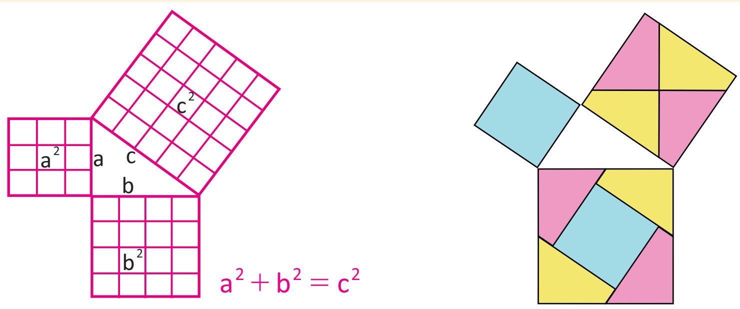
(1) ve (2) eşitliklerin toplamı alınırsa

$|CA|^2 + |AB|^2 = |CD| \cdot |CB| + |CB| \cdot |BD|$

$b^2 + c^2 = |CB| \cdot (|CD| + |BD|)$

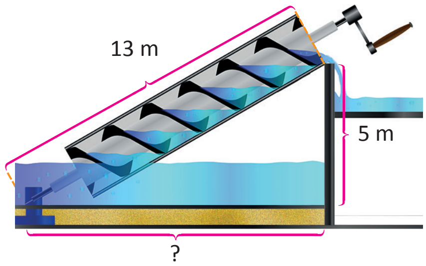
$b^2 + c^2 = a^2$

Şekildeki dik kenarlar üzerindeki karelerin alanları toplamı hipotenüsün üzerinde kurulan karenin alanına eşittir. Bu ispat, 1917 yılında H.E. Dudeney tarafından yandaki şekildeki gibi gösterilmiştir.

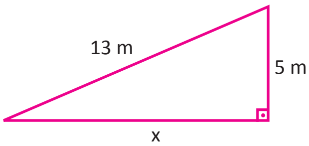


1. ÖRNEK

Sulama yapmak için Nil Nehri'nin suyunu yükseltmeye yarayan Arşimet vidası yanda verilmiştir. Şekilde verilen bilgilere göre vidanın uç kısmı duvardan kaç m uzağa yerleştirilmelidir?



ÇÖZÜM

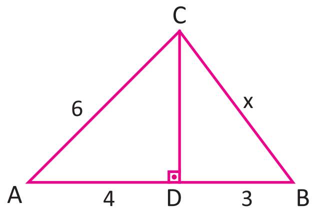


Pisagor teoreminden $x^2 + 5^2 = 13^2$

$x = 12$ m

2. ÖRNEK

Yandaki şekilde
$[AB] \perp [CD]$
$|AC| = 6$ cm
$|AD| = 4$ cm
$|DB| = 3$ cm olduğuna göre
$|CB| = x$ değerini bulunuz.



ÇÖZÜM

ACD üçgeninde Pisagor teoremi yapılarak CD kenarının uzunluğu bulunur.

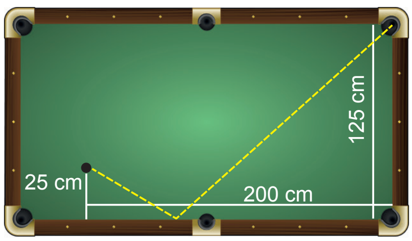
$|CD|^2 = 6^2 - 4^2$
$|CD|^2 = 36 - 16$
$|CD|^2 = 20$
$|CD| = 2\sqrt{5}$ cm

CDB üçgeninin üçgeninde Pisagor teoremi yapılarak CB kenarının uzunluğu bulunur.

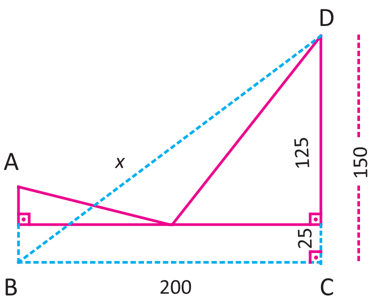
$|CB|^2 = |CD|^2 + |DB|^2$
$x^2 = (2\sqrt{5})^2 + 3^2$
$x^2 = 29$
$x = \sqrt{29}$ cm

3. ÖRNEK

Bir bilardo oyuncusu yaptığı gösteride şekildeki gibi bir vuruş gerçekleştirerek topu deliğe sokmak istiyor. Topun alacağı en kısa yolun uzunluğunu bulunuz.



ÇÖZÜM



Topun alacağı en kısa yolu bulmak için A noktasının simetriği alınır. BCD dik üçgeni oluşturulup Pisagor teoremi uygulanırsa

$x^2 = 200^2 + 150^2$

$x = 250$ cm olur.

4. ÖRNEK

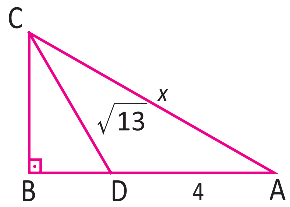
Yandaki şekilde $|BC| = |BD| + 1$

$[CB] \perp [BA]$

$|AD| = 4$ cm

$|CD| = \sqrt{13}$ cm olduğuna göre

$|AC| = x$ değerini bulunuz.



ÇÖZÜM

BCD üçgeninde Pisagor teoremi uygulandığında

$$|BC|^2 + |BD|^2 = 13$$

$$|BC| = |BD| + 1 \text{ için } (|BD| + 1)^2 + |BD|^2 = 13$$

$$|BD|^2 + 2|BD| + 1 + |BD|^2 = 13$$

$$|BD|^2 + |BD| - 6 = 0$$

$$(|BD| - 2)\cdot(|BD| + 3) = 0$$

$$\Rightarrow |BD| = 2 \text{ cm bulunur.}$$

$$|BC|^2 = |CD|^2 - |BD|^2 = 13 - 4 = 9 \Rightarrow |BC| = 3 \text{ cm olur.}$$

CBA üçgeninde Pisagor teoremi uygulandığında

$x^2 = 3^2 + 6^2$

$x^2 = 9 + 36$

$x = 3\sqrt{5}$ cm bulunur.

5. ÖRNEK

Yandaki şekilde

$[BC] \perp [AC]$

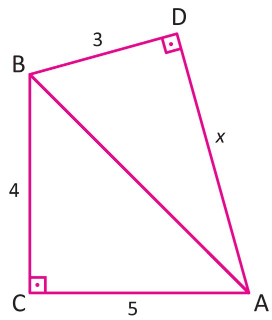
$[BD] \perp [AD]$

$|BC| = 4$ cm

$|AC| = 5$ cm

$|BD| = 3$ cm olduğuna göre

$|AD| = x$ değerini bulunuz.



ÇÖZÜM

BCA ve ADB üçgenlerinde Pisagor teoremi uygulanıp birbirine eşitlendiğinde

$|AB|^2 = 4^2 + 5^2 \qquad |AB|^2 = x^2 + 3^2$

$$4^2 + 5^2 = x^2 + 3^2$$

$$16 + 25 = x^2 + 9$$

$$x^2 = 32$$

$$x = 4\sqrt{2} \text{ cm bulunur.}$$

Kenarları Tam Sayı Olan Özel Dik Üçgenler											
3k	4k	5k	5k	12k	13k	8k	15k	17k	7k	24k	25k
3	4	5	5	12	13	8	15	17	7	24	25
6	8	10	10	24	26	16	30	34	14	48	50
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

6. ÖRNEK

Yandaki şekilde ABC, CBD ve EFC dik üçgenler

$|AC| = 3$ cm

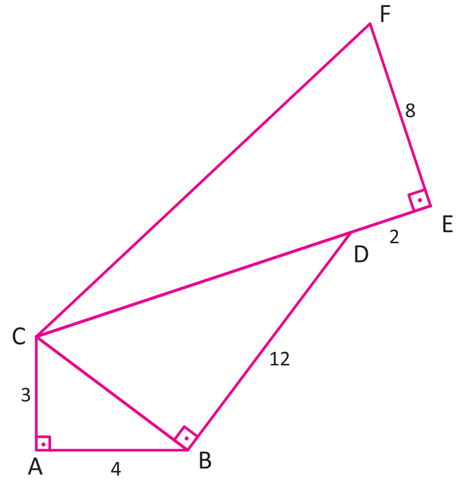
$|AB| = 4$ cm

$|BD| = 12$ cm

$|DE| = 2$ cm

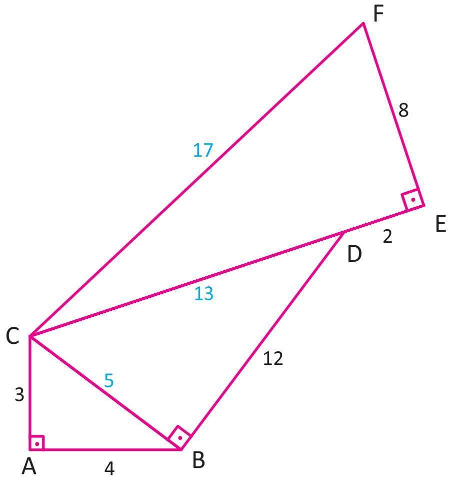
$|EF| = 8$ cm

olduğuna göre CF kenarının uzunluğunu bulunuz.



ÇÖZÜM

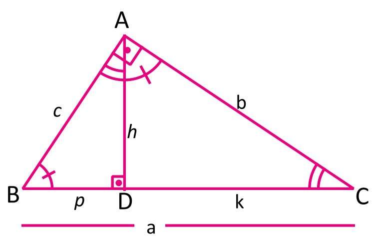
ABC dik üçgeninde dik kenar uzunlukları 3 cm ve 4 cm olduğundan bu üçgen 3-4-5 dik üçgeni olup CB kenarının uzunluğu 5 cm dir.



CBD dik üçgeninde dik kenar uzunlukları 5 cm ve 12 cm olduğundan bu üçgen 5-12-13 dik üçgeni olup CD kenarının uzunluğu 13 cm dir.

CEF dik üçgeninde dik kenar uzunlukları 8 cm ve 15 cm olduğundan bu üçgen 8-15-17 dik üçgeni olup CF kenarının uzunluğu 17 cm olur.

2. Öklid Teoremi



$[AB] \perp [AC]$ ve $[AD] \perp [BC]$

ABC üçgeninde hipotenüse ait yükseklik çizildiğinde oluşan ABD ve ACD üçgenlerinin açıları eş olduğundan Açı Açı benzerlik kuralına göre $\overset{\frown}{ABD} \sim \overset{\frown}{CAD}$ olur.

Benzer üçgenlerde eş açılar karşısındaki kenarlar orantılı olduğundan

$\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|BD|}{|AD|}$ ise $|AD|^2 = |CD| \cdot |BD|$

Bir dik üçgende hipotenüse ait yüksekliğin uzunluğunun karesi, bu yüksekliğin hipotenüs üzerinde ayırdığı parçaların uzunluklarının çarpımına eşittir.

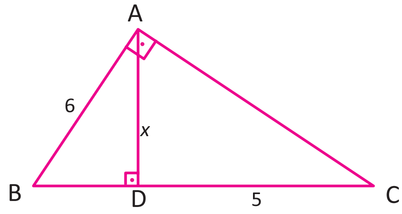
$h^2 = p \cdot k$

Bir dik üçgende, bir dik kenarın uzunluğunun karesi, hipotenüse ait yüksekliğin hipotenüste ayırdığı parçalardan kenara yakın olanın uzunluğu ile hipotenüsün uzunluğunun çarpımına eşittir.

$\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{DBA}$ olduğundan $c^2 = p \cdot a$

$\overset{\frown}{ABC} \sim \overset{\frown}{DAC}$ olduğundan $b^2 = a \cdot k$

1. ÖRNEK



ABC üçgeninde

$[AB] \perp [AC], [AD] \perp [BC]$

$|AB| = 6$ cm, $|DC| = 5$ cm olduğuna göre

$|AD| = x$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

ABC üçgeninde Öklid teoremi AB dik kenarı için uygulandığında

$6^2 = |BD| \cdot (|BD| + 5)$

$36 = |BD|^2 + 5|BD| \qquad |BD|^2 + 5|BD| - 36 = 0$

$|BD| = 4$ cm bulunur.

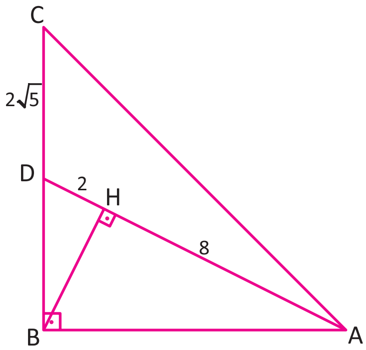
Benzer şekilde Öklid teoremi yükseklik için uygulandığında

$x^2 = 4 \cdot 5$

$x^2 = 20$

$x = 2\sqrt{5}$ cm bulunur.

2. ÖRNEK



ABC üçgeninde

$[AB] \perp [BC]$

$[BH] \perp [AD]$

$|DH| = 2$cm

$|AH| = 8$cm

$|DC| = 2\sqrt{5}$ cm olduğuna göre AC kenarının uzunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

DBA dik üçgeninde BD ve AB dik kenarları için Öklid teoremi uygulandığında

$|BD|^2 = 2 \cdot 10 \qquad |AB|^2 = 8 \cdot 10$

$|BD| = 2\sqrt{5}$ cm $\qquad |AB| = 4\sqrt{5}$ cm

ABC üçgeninde AC kenarının uzunluğunu bulmak için Pisagor teoremi uygulandığında

$|AC|^2 = (4\sqrt{5})^2 + (4\sqrt{5})^2 \Rightarrow |AC|^2 = 160 \Rightarrow |AC| = 4\sqrt{10}$ cm elde edilir.

TARİHÇE

ÖKLİD'İN ÇALIŞMALARI

Öklid (MÖ 330-275) ünlü bir matematikçidir. MÖ. 300 lü yıllarda yazdığı geometri ile ilgili 13 ciltlik yapıtıyla ünlüdür. 13 ciltlik bu eser 19. yüzyılın sonlarına kadar geometri alanında okutulan bir eser olmuştur. Matematiğe yaptığı katkılar nedeniyle matematiğin babası olarak bilinir.

Öklid geometrisinin aksiyomları olarak bilinen pek çok aksiyomu matematiğe kazandırmıştır. Bu aksiyomlardan bazıları

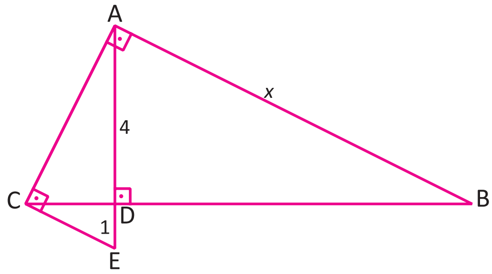
- *Bütün dik açılar birbirine eşittir.*
- *Bir üçgenin iç açıları toplamı 180° dir.*
- *Bir noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri çemberdir.*
- *Eşit miktardan eğer eşit miktarlar çıkarılırsa eşitlik bozulmaz.*

Bir dik üçgende bir dik kenarının uzunluğunun karesi, bu kenarın hipotenüs üzerindeki dik izdüşümü ile hipotenüs uzunluğunun çarpımına eşittir. Bu bağıntıya Öklid'in Dik Kenar Bağıntısı denir.

Kaynak: A.Dönmez, Matematiğin Öyküsü ve Serüveni/Yunan ve Roma Matematikçileri, 2002

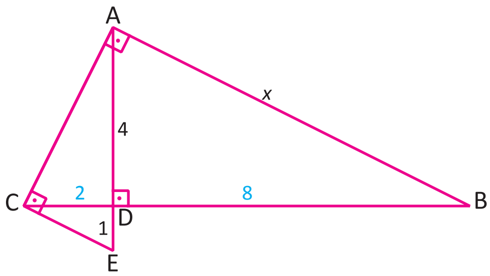
3. ÖRNEK

$[AD] \perp [CB]$
$[AC] \perp [CE]$
$[BA] \perp [CA]$
$|AD| = 4cm$
$|DE| = 1cm$
$|AB| = x$ olduğuna göre değerini bulunuz.



ÇÖZÜM

ACE dik üçgeninde CD dik kenarının uzunluğunu bulmak için Öklid teoremi uygulandığında

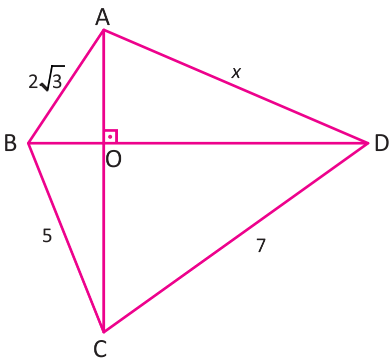


$|CD|^2 = |AD| \cdot |DE|$
$|CD|^2 = 4 \cdot 1$
$|CD| = 2$ cm bulunur.
$|AD|^2 = |CD| \cdot |DB|$
$4^2 = 2 \cdot |DB|$
$|DB| = 8$ cm bulunur.

ADB dik üçgeninde AB hipotenüs uzunluğunu bulmak için Pisagor teoremi uygulandığında

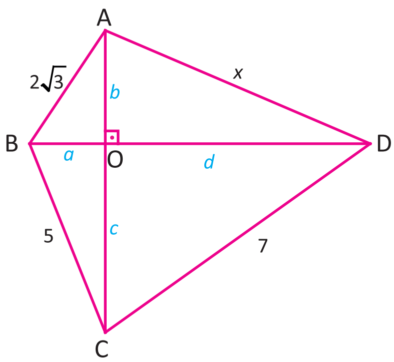
$x^2 = 4^2 + 8^2$
$x^2 = 80$
$x = 4\sqrt{5}$ cm bulunur.

4. ÖRNEK



$[AC] \perp [BD]$
$|AB| = 2\sqrt{3}$ cm
$|BC| = 5$cm
$|CD| = 7$cm
$|AD| = x$ olduğuna göre değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

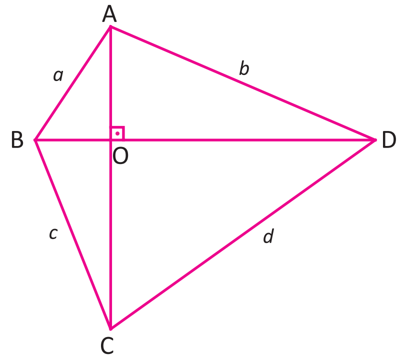


$|OB| = a, |AO| = b, |OD| = d, |OC| = c$

olmak üzere ABO, AOD,COB ve DOC dik üçgenlerinde Pisagor teoremi uygulandığında aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

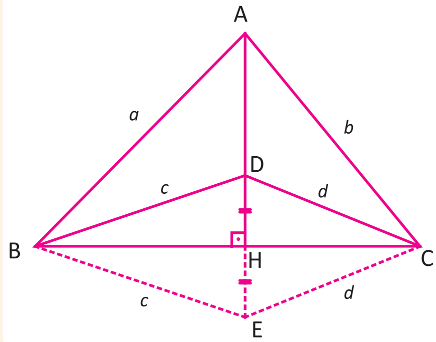
$$\begin{array}{rl} & a^2 + b^2 = 12 \\ + & c^2 + d^2 = 49 \\ \hline & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 61 \ldots (1) \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & a^2 + c^2 = 25 \\ + & b^2 + d^2 = x^2 \\ \hline & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = x^2 + 25 \ldots (2) \end{array}$$

(1) ve (2) denklemleri eşitlenirse $x^2 + 25 = 61$
$x^2 = 36$
$x = 6$ bulunur.



$[AC] \perp [BD]$ olmak üzere

$a^2 + d^2 = b^2 + c^2$

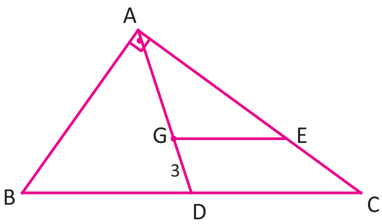


$[AH] \perp [BC]$ olmak üzere

$a^2 + d^2 = b^2 + c^2$

5. ÖRNEK

ABC dik üçgeninde G ağırlık merkezi olmak üzere



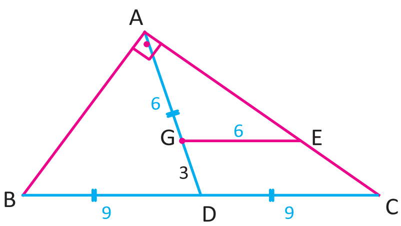
$[AB] \perp [AC]$

$[GE] \parallel [BC]$

$|GD| = 3$ cm

$|GE| = x$ olduğuna göre değerini bulunuz.

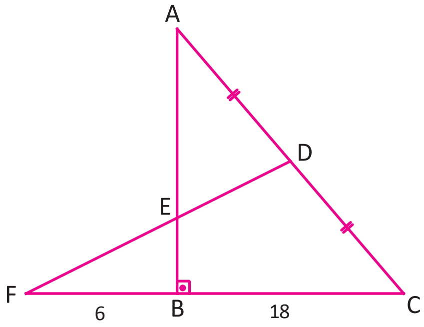
ÇÖZÜM



ABC dik üçgeninde G ağırlık merkezi olduğundan AG kenarının uzunluğu GD kenarının uzunluğunun iki katıdır. Dik üçgende hipotenüse ait kenarortayın uzunluğu hipotenüsün uzunluğunun yarısı olduğundan BC kenarının uzunluğu 18 cm bulunur. GE ile DC paralel olduğundan benzerlik kuralı uygulandığından

$\frac{|AG|}{|AD|} = \frac{|GE|}{|DC|} \Rightarrow \frac{6}{9} = \frac{|GE|}{9} \Rightarrow |GE| = 6$ cm bulunur.

6. ÖRNEK



Yandaki şekilde

$[AB] \perp [BC]$

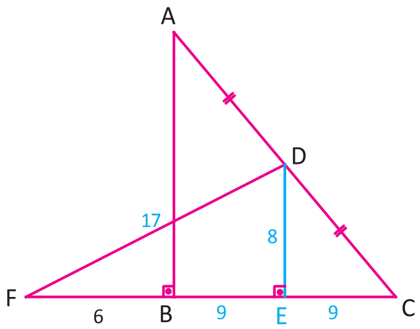
$|AD| = |DC|$

$|AB| = 16cm$

$|FB| = 6cm$

$|BC| = 18cm$ olduğuna göre FD kenarının uzunluğunu bulunuz.

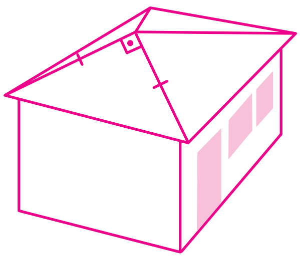
ÇÖZÜM



ABC dik üçgeninde D noktasından BC kenarına inilen yüksekliğin uzunluğu AB kenarının uzunluğunun yarısı kadardır. Ayrıca BC kenarını iki eş parçaya böler.

Yeni oluşan DEF dik üçgeninin dik kenarları 8cm ve 15 cm olduğundan bu üçgen 8-15-17 dik üçgeni olup FD kenarının uzunluğu 17 cm olur.

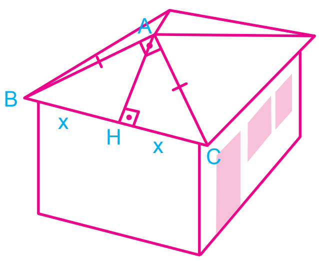
7. ÖRNEK



Ahmet Bey, hobi bahçesine bir bağ evi yaptırmak istemektedir. Bağ evinin çatı yüzeylerinin her biri yandaki ikizkenar dik üçgen gibidir.

Bağ evinin çatısının bir yüzeyinin yüksekliği $3\,m$ olduğuna göre iki çatı yüzeyinin kesişme kenar uzunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Her bir çatı yüzeyi ikizkenar dik üçgen olduğundan ABC çatı yüzeyi için işlem yapmak yeterlidir.

ABC dik üçgeninde

$[AH] \perp [BC]$ ve $|BH| = |HC|$ olur.

$|BH| = x$ alınırsa

$|AH|^2 = x \cdot x$

$3^2 = x^2$

$x = 3\,m$ olur.

$|AC|^2 = |HC| \cdot |BC| \Rightarrow |AC|^2 = 3 \cdot 6$

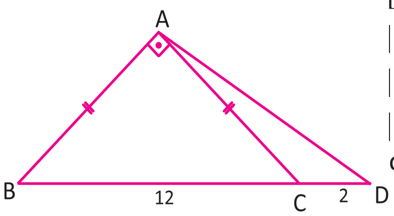
$|AC|^2 = 18$

$|AC| = 3\sqrt{2}\,m$

Buna göre iki çatı yüzeyinin kesişme kenar uzunluğu $3\sqrt{2}$ m olur.

ALIŞTIRMALAR-4

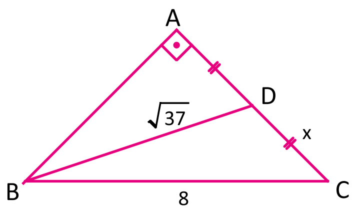
1. ABC ikizkenar dik üçgen olmak üzere



$[AB] \perp [AC]$
$|AB| = |AC|$
$|BC| = 12$ cm
$|CD| = 2$ cm
olduğuna göre

AD kenarının uzunluğunu cm cinsinden bulunuz.

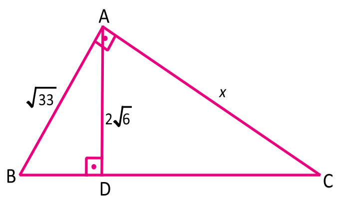
2.



Yandaki şekilde
$[AB] \perp [AC]$
$|AD| = |DC|$
$|BD| = \sqrt{37}$ cm
$|BC| = 8$ cm

olduğuna göre $|DC| = x$ değerini cm cinsinden bulunuz.

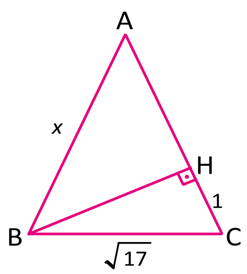
3. Aşağıda verilen ABC dik üçgeninde



$[AB] \perp [AC]$
$[AD] \perp [BC]$
$|AD| = 2\sqrt{6}$ cm
$|AB| = \sqrt{33}$ cm
$|AC| = x$ dir.

Buna göre x değerini cm cinsinden bulunuz.

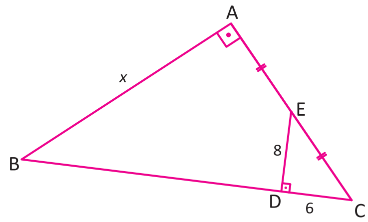
4.



Yandaki şekilde
$[BH] \perp [AC]$
$|AB| = |AC|$
$|DC| = 1$ cm
$|BC| = \sqrt{17}$ cm

olduğuna göre $|AB| = x$ cm cinsinden bulunuz.

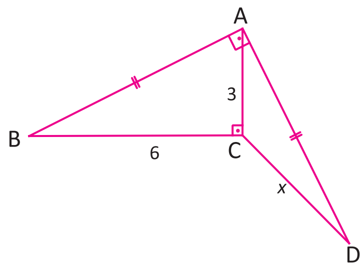
5.



Yandaki şekilde
$[AB] \perp [AC]$
$|AE| = |EC|$
$|ED| = 8$ cm
$|DC| = 6$ cm

olduğuna göre AB kenarının uzunluğunu cm cinsinden bulunuz.

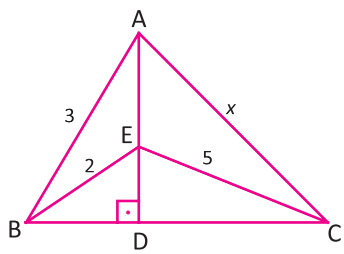
6.



Yandaki şekilde
$[AB] \perp [AD]$
$[AC] \perp [BC]$
$|AB| = |AD|$
$|AC| = 3$ cm
$|BC| = 6$ cm

olduğuna göre $|DC| = x$ değerini cm cinsinden bulunuz.

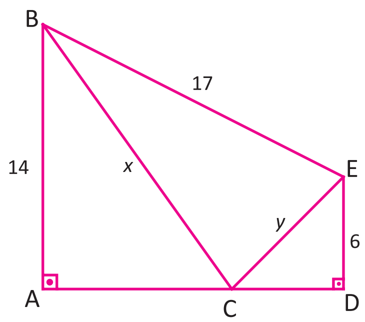
7.



Yandaki şekilde
$[AD] \perp [BC]$
$|AB| = 3$ cm
$|BE| = 2$ cm
$|EC| = 5$ cm
olduğuna göre

AC kenarının uzunluğunu cm cinsinden bulunuz. bulunuz.

8. Aşağıdaki şekilde C noktası AD doğru parçası üzerindedir.



$[AB] \perp [AD]$
$[DE] \perp [AD]$
$|AB| = 14$cm
$|BE| = 17$cm
$|DE| = 6$cm
$|BC| = x$
$|CE| = y$

olduğuna göre $x + y$ toplamının alabileceği en küçük değeri cm cinsinden bulunuz.

3. Dik Üçgende Dar Açıların Trigonometrik Oranları

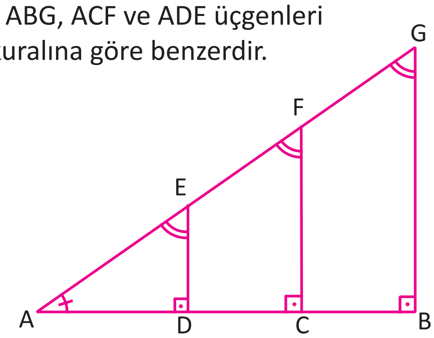
Trigonometri, bilim ve teknolojide en çok kullanılan matematik tekniklerinden biridir. El Battani, Güneş'in ve Ay'ın hareketlerinin ölçümüne bağlı olarak gece ve gündüzün başlangıç saatlerinin tam olarak belirlenebilmesi için trigonometriyi kullanmıştır. Trigonometrinin tam bir disiplin hâline getirilmesi Battani'nin zamanından itibaren Müslüman matematikçilerin eseridir.

Matematikçi Nasırüddin Tusi "Dörtgenler Üzerine İncelemeler" adlı çalışmasında trigonometriye yer vermiştir. Nasuriddin Tusi, konuya gökbilimin bir parçası olarak değil matematiksel olarak yaklaşır.

Trigonometri; arazi ölçümlerinde, haritacılıkta, GPS uydu sistemlerinde veya bir kıtanın haritasının çıkarılmasında hayati önem taşır. Özellikle engebeli arazilerde mesafe ölçümünde topograflar, nirengi (üçgenlere ayırma) sürecinde hesaplama yaparken trigonometriyi kullanırlar.

Trigonometri, açıları aynı olan benzer dik üçgenlerin belirlenen kenarlarının uzunlukları arasındaki oranların değişmediğini gösterir. Bu oranlara trigonometrik oranlar denir.

Yandaki şekilde ABG, ACF ve ADE üçgenleri A.A. benzerlik kuralına göre benzerdir.



Bu benzerlik aşağıdaki şekildeki gibi ifade edilebilir.

$$\frac{|AB|}{|AG|} = \frac{|AC|}{|AF|} = \frac{|AD|}{|AE|}$$

$$\frac{|AB|}{|BG|} = \frac{|AC|}{|CF|} = \frac{|AD|}{|DE|}$$

$$\frac{|BG|}{|AG|} = \frac{|CF|}{|AF|} = \frac{|DE|}{|AE|}$$

$$\frac{|BG|}{|AB|} = \frac{|CF|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|AD|}$$

Yukarıdaki oranların sabitliği trigonometride sinüs, kosinüs, tanjant, kotanjant olarak isimlendirilir.

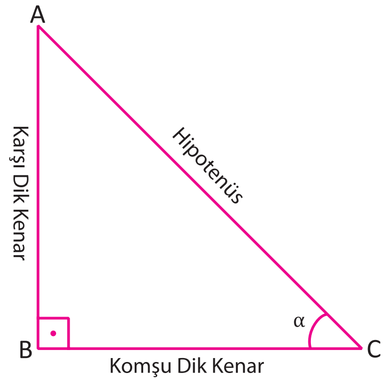
- Bir açının sinüs değeri, dik üçgende açının karşısında bulunan dik kenarın uzunluğunun hipotenüs uzunluğuna oranıdır. Kısaca sin ile gösterilir.
- Bir açının kosinüs değeri, dik üçgende açıya komşu olan dik kenar uzunluğunun hipotenüs uzunluğuna oranıdır. Kısaca cos ile gösterilir.
- Bir açının tanjant değeri, dik üçgende açının karşısında bulunan dik kenar uzunluğunun açıya komşu olan dik kenar uzunluğuna oranıdır. Kısaca tan ile gösterilir.
- Bir açının kotanjant değeri, dik üçgende açıya komşu olan dik kenar uzunluğunun açının karşısında bulunan dik kenar uzunluğuna oranıdır. Kısaca cot ile gösterilir.

$$\sin\alpha = \frac{\text{Karşı Dik Kenar Uzunluğu}}{\text{Hipotenüsün Uzunluğu}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Komşu Dik Kenar Uzunluğu}}{\text{Hipotenüsün Uzunluğu}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Karşı Dik Kenar Uzunluğu}}{\text{Komşu Dik Kenar Uzunluğu}}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{Komşu Dik Kenar Uzunluğu}}{\text{Karşı Dik Kenar Uzunluğu}}$$



1. ÖRNEK

Bir ABC dik üçgeninde

$m(\widehat{A}) = 90^\circ$

$|AB| = 4\,\text{cm}$

$|AC| = 3\,\text{cm}$

olmak üzere $\sin\widehat{C}$, $\cos\widehat{C}$, $\tan\widehat{C}$, $\cot\widehat{C}$ değerlerini bulunuz.

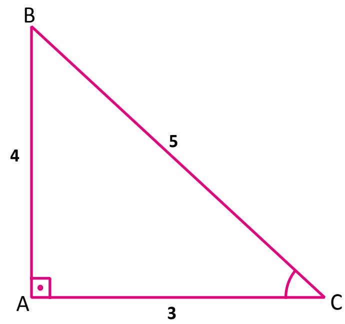
ÇÖZÜM

Pisagor teoremini kullanarak BC kenarının uzunluğu bulunur.

$|BC|^2 = 3^2 + 4^2$

$|BC| = 5\,\text{cm}$

C açısının karşısındaki dik kenarın uzunluğu 4 cm, C açısının komşusundaki dik kenarın uzunluğu 3 cm ve hipotenüs uzunluğu 5 cm dir. Uygun dik üçgen yandaki gibi çizilirse aşağıdaki oranlar bulunur.

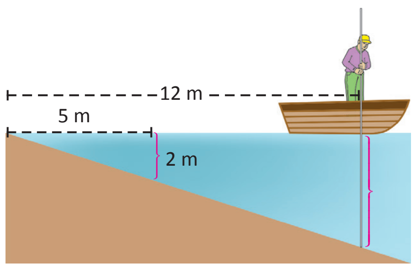


$$\sin\widehat{C} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{4}{5} \qquad \cos\widehat{C} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{3}{5}$$

$$\tan\widehat{C} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{4}{3} \qquad \cot\widehat{C} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{3}{4}$$

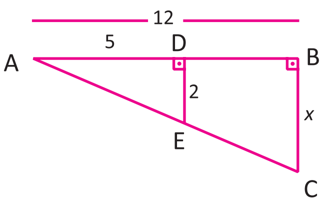
2. ÖRNEK

Sandal üzerinde hareket eden bir kişi 5 m ilerledikten sonra suyun derinliğini 2 m olarak belirliyor. Su üzerinde 12 m ilerlediğinde derinliğin kaç metre olduğunu bulunuz.



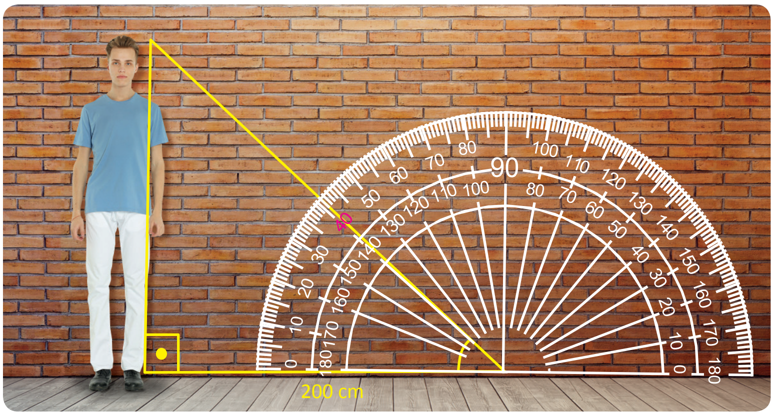
ÇÖZÜM

A açısının tanjant değeri ADE ve ABC üçgenlerini kullanılarak hesaplandığında eşit olacağından



$$\left.\begin{aligned} \tan\widehat{A} &= \frac{|DE|}{|AD|} = \frac{2}{5} \\ \tan\widehat{A} &= \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{x}{12} \end{aligned}\right\} \frac{2}{5} = \frac{x}{12} \Rightarrow 5x = 24 \Rightarrow x = \frac{24}{5}\ \text{m dir.}$$

3. ÖRNEK

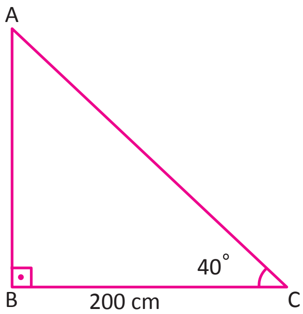


Bir lisede öğrencilerden boylarını farklı bir yöntem kullanarak hesaplamaları istenmiştir.

Öğrenci, kendi boyunu hesaplamak için iletki kullanacaktır. Öğrencinin iletkinin orta noktasına olan uzaklığı 200 cm ve şekildeki gibi açısı 40° olarak hesaplanmıştır. Öğrencinin boyunu bulunuz.

$(\tan 40^\circ = 0,84)$

ÇÖZÜM



Öğrencinin boyu x olarak alındığında aşağıdaki dik üçgen oluşturulur. C açısına ait tanjant değeri yazıldığında

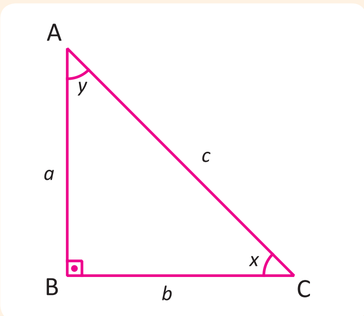
$|AB| = x$ için

$$\tan 40^\circ = \frac{|AB|}{|BC|} \Rightarrow \tan 40^\circ = \frac{x}{200}$$

$$x = 200 \cdot 0,84$$

$$x = 168 \text{ cm tir.}$$

Tümler Açıların Trigonometrik Oranları



Dik üçgende bulunan dar açıların trigonometrik oranları alındığında

$\sin x = \frac{a}{c}$ $\qquad \cos y = \frac{a}{c}$

$\cos x = \frac{b}{c}$ $\qquad \sin y = \frac{b}{c}$

$\tan x = \frac{a}{b}$ $\qquad \cot y = \frac{a}{b}$

$\cot x = \frac{b}{a}$ $\qquad \tan y = \frac{b}{a}$

Toplamları 90 dereceye eşit olan açılardan birinin sinüs değeri diğerinin kosinüs değerine, birinin tanjant değeri diğerinin kotanjant değerine eşittir.

$x + y = 90^\circ \Rightarrow \sin x = \cos y$ ve $\tan x = \cot y$

Örneğin

$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ $\qquad \tan 25^\circ = \cot 65^\circ$

$\sin 70^\circ = \cos 20^\circ$ $\qquad \cot 3^\circ = \tan 87^\circ$

$\sin 1^\circ = \cos 89^\circ$ $\qquad \tan \alpha = \cot(90 - \alpha)$

4. ÖRNEK

$\dfrac{\sin 24^\circ \cdot \tan 56^\circ}{\cot 34^\circ \cdot \cos 66^\circ}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Tümler açılardan birinin sinüsü diğerinin kosinüsüne, birinin tanjantı diğerinin kotanjantına eşittir. Buna göre

$\sin 24^\circ = \cos 66^\circ$, $\cot 34^\circ = \tan 56^\circ$ olacağından $\dfrac{\cancel{\sin 24^\circ} \cdot \cancel{\tan 56^\circ}}{\cancel{\cot 34^\circ} \cdot \cancel{\cos 66^\circ}} = 1$ elde edilir.

5. ÖRNEK

$7\alpha = 90^\circ$ ise $\dfrac{\cos 5\alpha \cdot \tan 3\alpha}{\sin 2\alpha \cdot \cot 4\alpha}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$2\alpha + 5\alpha = 7\alpha = 90^\circ \Rightarrow \cos 5\alpha = \sin 2\alpha$

$3\alpha + 4\alpha = 7\alpha = 90^\circ \Rightarrow \tan 3\alpha = \cot 4\alpha$

olacağından $\dfrac{\cancel{\cos 5\alpha} \cdot \cancel{\tan 3\alpha}}{\cancel{\sin 2\alpha} \cdot \cancel{\cot 4\alpha}} = 1$ elde edilir.

6. ÖRNEK

$3\alpha + \beta = 90^\circ$ ise $\dfrac{\sin(\alpha - 2\beta) \cdot \cot(\alpha + 4\beta)}{\tan(2\alpha - 3\beta) \cdot \cos(2\alpha + 3\beta)}$ işleminin sonucunu bulunuz.

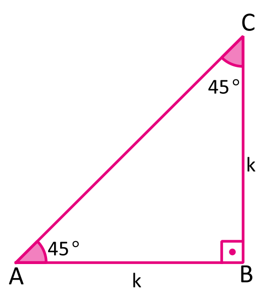
ÇÖZÜM

$(\alpha - 2\beta) + (2\alpha + 3\beta) = 3\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \sin(\alpha - 2\beta) = \cos(2\alpha + 3\beta)$

$(2\alpha - 3\beta) + (\alpha + 4\beta) = 3\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \cot(\alpha + 4\beta) = \tan(2\alpha - 3\beta)$

$\dfrac{\cancel{\sin(\alpha - 2\beta)} \cdot \cancel{\cot(\alpha + 4\beta)}}{\cancel{\tan(2\alpha - 3\beta)} \cdot \cancel{\cos(2\alpha + 3\beta)}} = 1$ elde edilir.

45°- 45°- 90° Dik Üçgeninde Trigonometrik Oranlar



Yandaki ABC ikizkenar dik üçgeninde $m(\widehat{ABC}) = 90^\circ$, $|AB| = |BC| = k$

Pisagor teoreminden $|AC| = k\sqrt{2}$ olarak bulunur.

Buna göre ABC üçgenindeki A açısının trigonometrik oranları aşağıdaki gibidir.

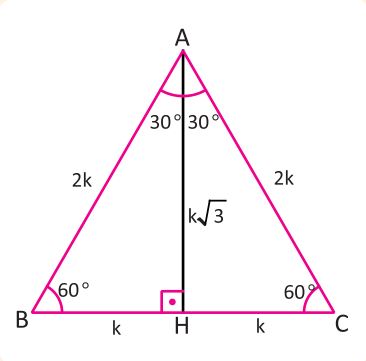
$$\sin 45^\circ = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{k}{k\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{k}{k\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{k}{k} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{k}{k} = 1$$

30°- 60°- 90° Dik Üçgeninde Trigonometrik Oranlar



Yandaki ABC eşkenar üçgeninin bir köşesinden karşı kenara dik inildiğinde bu yükseklik aynı zamanda açıortay ve kenarortaydır. Buradan $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ üçgeni elde edilmiş olur.

30° lik açının karşısındaki dik kenarın uzunluğu, hipotenüs uzunluğunun yarısına eşittir.

60° lik açının karşısındaki dik kenarın uzunluğu, 30° lik açının karşısındaki dik kenarın uzunluğunun $\sqrt{3}$ katına eşittir. Buna göre 30° ve 60° lik açıların trigonometrik oranları aşağıdaki gibidir.

$$\sin 30^\circ = \frac{|BH|}{|AB|} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2} \qquad \sin 60^\circ = \frac{|AH|}{|AB|} = \frac{k\sqrt{3}}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{|AH|}{|AB|} = \frac{k\sqrt{3}}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \frac{|BH|}{|AB|} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{|BH|}{|AH|} = \frac{k}{k\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \tan 60^\circ = \frac{|AH|}{|BH|} = \frac{k\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{|AH|}{|BH|} = \frac{k\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \qquad \cot 60^\circ = \frac{|BH|}{|AH|} = \frac{k}{k\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

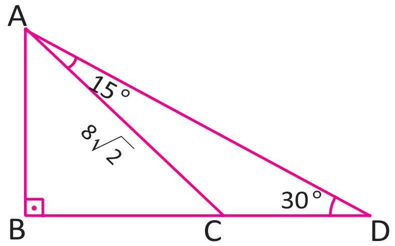
7. ÖRNEK

$\dfrac{\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ + \tan 45^\circ \cdot \sin^2 60^\circ}{\cot 60^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cot 45^\circ}$ işleminin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\frac{\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ + \tan 45^\circ \cdot \sin^2 60^\circ}{\cot 60^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cot 45^\circ} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

8. ÖRNEK



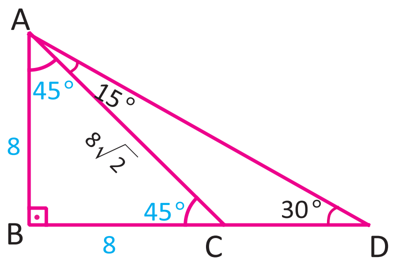
$[AB] \perp [BC]$

$m(\widehat{CAD}) = 15^\circ$

$m(\widehat{ADC}) = 30^\circ$

$|AC| = 8\sqrt{2}$ cm olduğuna göre CD uzunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



İki iç açının toplamı kendilerine komşu olmayan bir dış açıya eşit olduğundan $m(\widehat{ACB}) = 45^\circ$ dir.

Buradan $|AB| = |BC| = 8$ cm olur. ABD dik üçgeninin açıları $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ olduğundan BD kenarının uzunluğu AB kenarının uzunluğunun $\sqrt{3}$ katıdır.

$|BD| = 8\sqrt{3}$ cm

$|CD| = |BD| - |BC|$

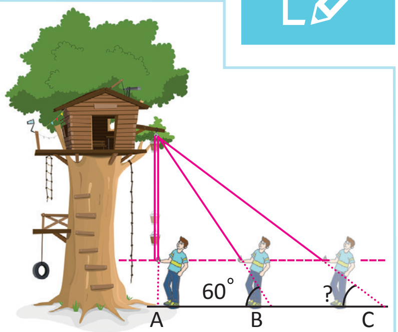
$|CD| = (8\sqrt{3} - 8)$ cm dir.

Sıra Sizde

SORU:

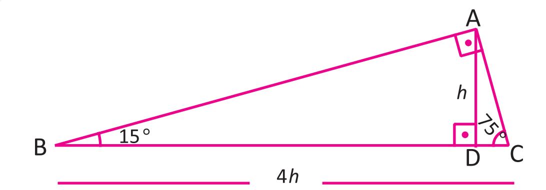
A noktasında bulunan Mert, eli hizasında bulunan kovayı 12 m uzunluğundaki ip ile makara yardımıyla yukarı çıkarmak istiyor. Buna göre

- Mert ipi çekerek B noktasına geldiğinde kova ne kadar yükselmiş olur?
- Mert C noktasına ulaştığında kova tam yukarıda olduğuna göre ip ile zemin arasındaki açı kaç derece olur.



ÇÖZÜM

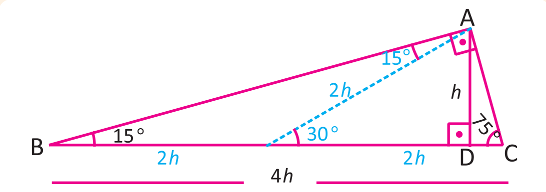
15°- 75°- 90° Dik Üçgeni



$15^\circ - 75^\circ - 90^\circ$ dik üçgeninde hipotenüsün uzunluğu, hipotenüse ait yüksekliğin uzunluğunun 4 katıdır.

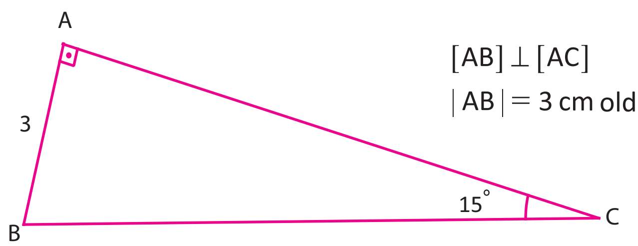
$|BC| = 4|AD|$

İspat:



ABC dik üçgeninde A açısından 15 derecelik kısım ayrıldığında ikizkenar üçgen elde edilmiş olur. Oluşan $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ üçgeninden dolayı hipotenüse ait kenarortay uzunluğu 2h olur. Hipotenüsün uzunluğu, hipotenüse ait kenarortay uzunluğunun 2 katı olacağından Hipotenüs uzunluğu 4h olur.

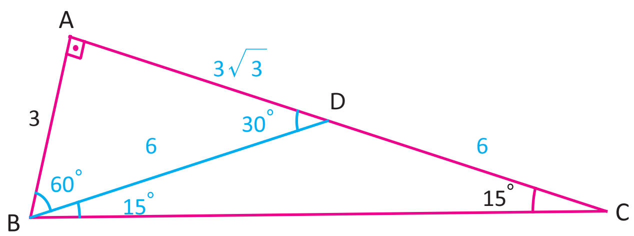
9. ÖRNEK



$[AB] \perp [AC]$

$|AB| = 3$ cm olduğuna göre AC kenarının uzunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



$|BD| = |DC|$ olacak şekilde bir BD doğru parçası çizildiğinde

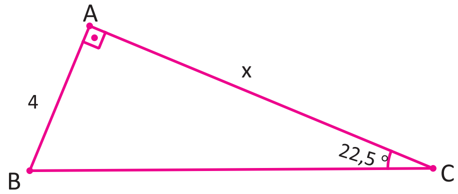
$m(\widehat{DBC}) = 15^\circ, m(\widehat{BDA}) = 30^\circ, m(\widehat{ABD}) = 60^\circ$

$|DC| = |BD| = 6$ cm

$|AD| = 3\sqrt{3}$ cm

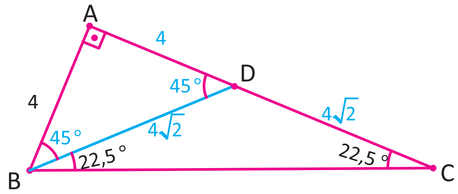
$|AC| = 6 + 3\sqrt{3}$ cm bulunur.

10. ÖRNEK



Yandaki ABC dik üçgeninde
$[AB] \perp [AC]$
$|AB| = 4$ cm
olduğuna göre AC kenarının uzunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



$|BD| = |DC|$ olacak şekilde bir BD doğru parçası çizildiğinde
$m(\widehat{DBC}) = 22,5^\circ, m(\widehat{BDA}) = m(\widehat{ABD}) = 45^\circ$ olacağından
$|AD| = 4$ cm
$|DC| = |BD| = 4\sqrt{2}$ cm
$|AC| = 4 + 4\sqrt{2}$ cm bulunur.

Trigonometrik Oranlardan Biri Belli İken Diğerini Bulma

Trigonometrik oranlardan biri belli iken diğerlerinin bulunması istendiğinde

- Verilen trigonometrik orana uygun dik üçgen çizilir.
- Çizilen dik üçgen yardımıyla diğer trigonometrik oranlar hesaplanır.

11. ÖRNEK

$0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ve $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ ise $\sin\alpha, \tan\alpha$ ve $\cot\alpha$ değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

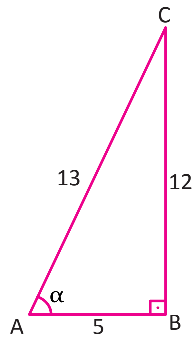
$\cos\alpha = \frac{5}{13} \Rightarrow |AB| = 5, |AC| = 13$

$|BC|^2 = 13^2 - 5^2$

$|BC| = 12$ cm

$\sin\alpha = \frac{12}{13}, \quad \tan\alpha = \frac{12}{5}, \quad \cot\alpha = \frac{5}{12}$

olacak şekilde bir ABC dik üçgeni çizilir.

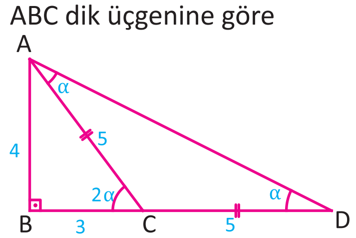


12. ÖRNEK

$0^\circ < 2\alpha < 90^\circ$ ve $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$ olduğuna göre $\cot\alpha$ değerini bulunuz.

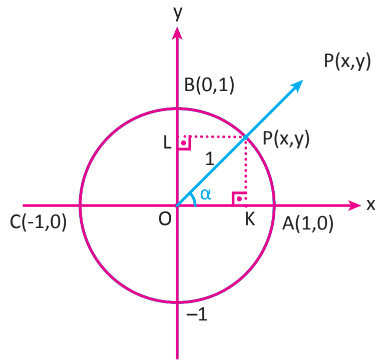
ÇÖZÜM

$\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$ oranına göre aşağıdaki üçgen oluşturulur.
ABC dik üçgenine göre



$\cot\alpha = \frac{|BD|}{|AB|} = \frac{8}{4} = 2$ olarak bulunur.

4. Birim Çember ve Trigonometrik Oranlar



Analitik düzlemde merkezi orijin (başlangıç noktası) ve yarıçapı 1 birim olan çembere birim çember denir.

KOP dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulandığında $x^2 + y^2 = 1$ denklemi elde edilir.

$\widehat{KOP}$ açısına göre trigonometrik oranlar yazıldığında $\sin\alpha = \frac{y}{1}, \cos\alpha = \frac{x}{1}$ elde edilir.

Buna göre çember üzerindeki her noktanın apsisi (x), yarıçap doğrusu ile pozitif yönde oluşan açının kosinüsü, ordinatı (y) sinüs değerini verir.

$A(1,0) \Rightarrow \cos 0^\circ = 1$ ve $\sin 0^\circ = 0$

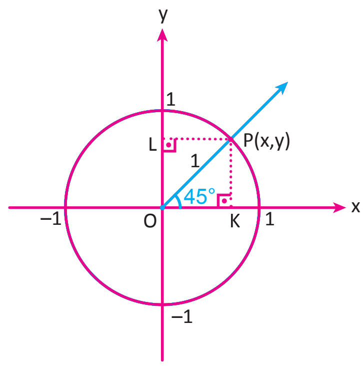
$B(0,1) \Rightarrow \cos 90^\circ = 0$ ve $\sin 90^\circ = 1$

$C(-1,0) \Rightarrow \cos 180^\circ = -1$ ve $\sin 180^\circ = 0$

1. ÖRNEK

Ölçüsü 45° olan açıyı birim çemberde göstererek trigonometrik oranlarını bulunuz.

ÇÖZÜM



$\widehat{OKP}$ ikizkenar dik üçgen olduğundan $|PK| = |OK| = x = y$ olur. Buna göre Pisagor teoreminden

$|OP|^2 = |OK|^2 + |PK|^2 \Rightarrow 1 = x^2 + x^2$

$1 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ olur.

45° lik açının trigonometrik oranları

$$\sin 45^\circ = \frac{|PK|}{|OP|} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 45^\circ = \frac{|OK|}{|OP|} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{|PK|}{|OK|} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 \qquad \cot 45^\circ = \frac{|OK|}{|PK|} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$ olarak bulunur.

2. ÖRNEK

$A = \sin^2 90^\circ + \cos^2 180^\circ$

$B = \cos 90^\circ \cdot \sin x + \cos^2 0^\circ$

olduğuna göre $\frac{A}{B}$ oranını bulunuz.

ÇÖZÜM

$\sin 90^\circ = 1,\ \cos 180^\circ = -1,\ \cos 90^\circ = 0$ ve $\cos 0^\circ = 1$ olduğundan

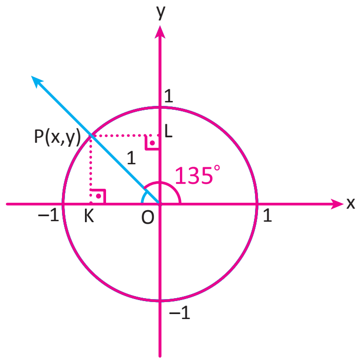
$A = 1^2 + (-1)^2 = 2$

$B = 0 \cdot \sin x + 1^2 = 1$ olarak bulunur. Bu durumda $\frac{A}{B} = \frac{2}{1} = 2$ dir.

3. ÖRNEK

Ölçüsü 135° olan açıyı birim çemberde göstererek trigonometrik oranlarını bulunuz.

ÇÖZÜM



$\widehat{OKP}$ ikizkenar dik üçgen olduğundan $|PK| = |OK| = x = y$ olur.
Buna göre Pisagor teoreminden

$$|OP|^2 = |OK|^2 + |PK|^2 \Rightarrow 1 = x^2 + x^2$$
$$1 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}$$
$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ olur.}$$

Birim çember üzerindeki her noktanın apsisi (x), yarıçap doğrusu ile pozitif yönde oluşan açının kosinüsünü, ordinatı (y) da sinüs değerini verdiğinden 135° lik açının trigonometrik oranları

$$\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tan 135^\circ = \cot 135^\circ = -1$$

olarak bulunur.

TARİHÇE

Ebü'l Ve'fâ el Büzcâni (Görsel 4.4.2), İslâm matematik ve astronomi âlimlerinin önde gelenlerindendir.

Geometri çalışmalarının dışında trigonometriyi sistematik ilim dalı hâline getirmiştir. Trigonometri teoremlerinin ilk ispatlarını vermiş; "zıl" adıyla tanjantı, "kutr-ı zıl" adıyla da sekantı tarif etmiştir.

Trigonometrik fonksiyonların yayın fonksiyonu olarak on beş dakikalık adımlarla hassas cetvellerini gerçekleştirmiştir.

Bir küresel dik üçgende büyük harfler açıları, küçük harfler kenarları ve A dik açıyı göstermek üzere

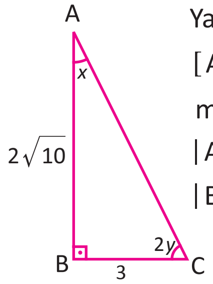
$\frac{tgc}{tgC} = \sin b, \frac{tgb}{tgB} = \sin c$ *eşitliklerini bulmuştur.*
Trigonometrik oranlarla ilgili çalışmalar yapan bir diğer bilim insanı da Gıyaseddin Çemşid'tir. İsmi Cemşid bin Mes'ûd Mahmud et-Tabîb el-Kâşî, lakabı Gıyaseddin'dir. Ondalık kesirleri ilk kullanan büyük matematik ve astronomi âlimlerinden biridir. Ondalık kesirlerin kâşifi olduğu 1948 yılında Alman bilim tarihçisi Pouluckey'in araştırmaları ile ispatlanmıştır.

Gıyaseddin Cemşid, trigonometri üzerindeki çalışmaları sonucunda sinüs cetvellerini hazırlayarak bu cetvelleri trigonometrik denklemlerin çözümünde kullanmıştır. Trigonometri üzerine bir diğer çalışması ise pi sayısını, gerçek değerine çok yakın olarak hesaplamasıdır. Bulduğu değer, bugün kullanılan değer ile karşılaştırıldığında tam kısım yanında virgülden sonraki kısımda da belli basamağa kadar benzer sayıları bulduğu anlaşılmıştır.

Kaynak: İslam Tarihi Ansiklopedisi

Görsel 4.4.2:
Ebü'l Ve'fâ el Büzcâni (940-988)

ALIŞTIRMALAR-5

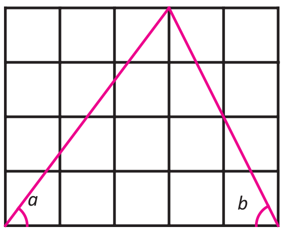
1. 

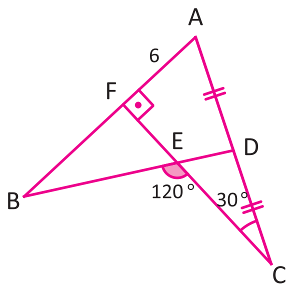
Yandaki ABC dik üçgeninde
$[AB] \perp [BC]$,
$m(\widehat{CAB}) = x, m(\widehat{BCA}) = 2y$
$|AB| = 2\sqrt{10}$ cm
$|BC| = 3$ cm veriliyor.

Buna göre aşağıdaki trigonometrik oranları bulunuz.

$\sin x =$	$\tan x =$
$\sin 2y =$	$\tan y =$
$\cos x =$	$\cot x =$
$\cos 2y =$	$\cot y =$

2. Aşağıda birim karelerle oluşturulmuş şekilde $\dfrac{\tan a + \cot b}{\sin a + \cos^2 b}$ işleminin sonucunu bulunuz.

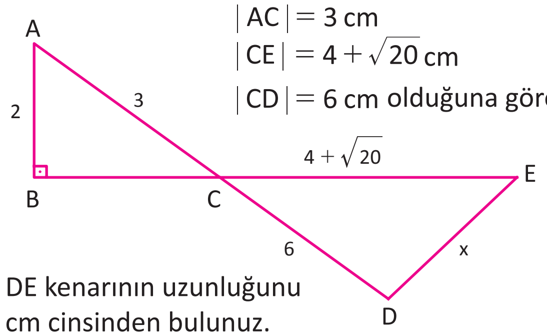


3. 

Yandaki şekilde
$[CF] \perp [AB]$
$|AD| = |DC|$
$m(\widehat{FCA}) = 30^\circ$
$m(\widehat{CEB}) = 120^\circ$
$|AF| = 6$ cm
olduğuna göre

BF uzunluğunu cm cinsinden bulunuz.

4. Aşağıda verilen şekilde $[AB] \perp [BC]$
$|AB| = 2$ cm
$|AC| = 3$ cm
$|CE| = 4 + \sqrt{20}$ cm
$|CD| = 6$ cm olduğuna göre



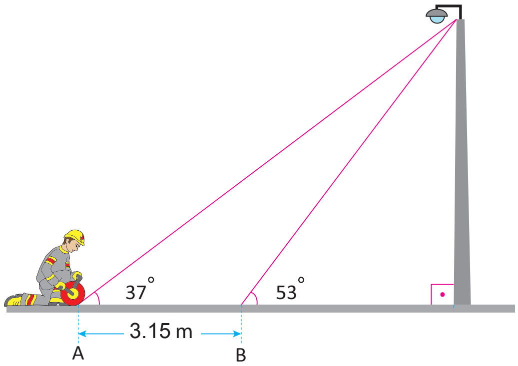
DE kenarının uzunluğunu cm cinsinden bulunuz.

5. $26x = 180$ ise $\dfrac{\sin 10x \cdot \cos 4x \cdot \tan x}{\sin 9x \cdot \cos 3x \cdot \cot 12x}$ işleminin sonucunu bulunuz.

6. $\dfrac{\sin^2 45^\circ + \cos 30^\circ \cdot \tan 30^\circ}{\cot^2 30^\circ - \cos 60^\circ \cdot \sin^2 60^\circ}$ işleminin sonucunu bulunuz.

7. $\dfrac{2\sin x - 3\cos x}{3\cos x - 7\sin x} = \dfrac{2}{3}$ olmak üzere sinx değerini bulunuz.

8.

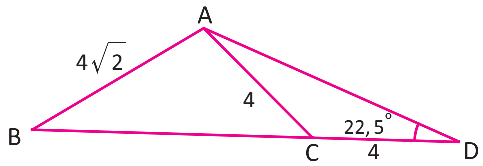


Bir elektrik teknisyeni, kopan bir kabloyu şekildeki gibi A noktasından başlayarak toplamaya çalışıyor. Gergin durumdaki kablonun zemin ile yaptığı açı 37°dir. Teknisyen 3,15 m yürüdüğünde B noktasına geliyor ve kablo ile zemin arasındaki açının 53° olduğunu görüyor. Buna göre

a) Elektrik direğinin uzunluğunu yaklaşık olarak hesaplayınız.

b) Teknisyenin A noktasından B noktasına gelinceye kadar yaklaşık kaç m kablo sardığını bulunuz.
$(\sin 37^\circ \approx 0{,}6)$

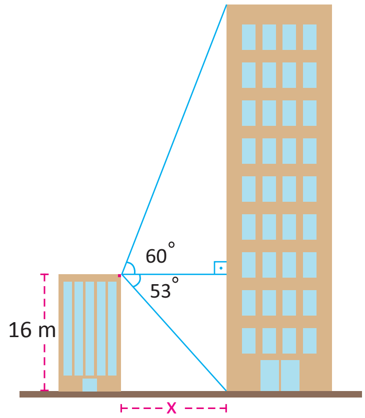
9. Aşağıda verilen ABD üçgeninde



$m(\widehat{ADB}) = 22{,}5^\circ, |AC| = |CD| = 4$ cm ve
$|AB| = 4\sqrt{2}$ cm

olduğuna göre BC kenarının uzunluğunu cm cinsinden bulunuz.

10.



Bir güvenlik kamerası, 16 m yükseklikteki bir binanın üzerine yerleştiriliyor. Kamera yatayla 53° lik açı yapacak şekilde ayarlanırsa karşıdaki binanın en alt noktasını, yatayla 60° lik açı yapacak şekilde konumlandırılırsa aynı binanın en üst noktasını görüntüleyebiliyor.

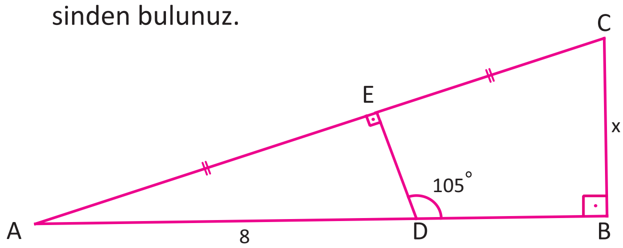
Buna göre

a) Kameranın yerleştirildiği bina ile diğer bina arasındaki yaklaşık uzaklığı bulunuz.

b) İkinci binanın yüksekliğini yaklaşık olarak hesaplayınız.
$(\sin 53^\circ \approx 0{,}8)$

11. $[BC] \perp [AB]$, $[DE] \perp [AC]$, $|AE| = |EC|$
$m(\widehat{EDB}) = 105^\circ$ ve $|AD| = 8$ cm

olduğuna göre BC kenarının uzunluğunu cm cinsinden bulunuz.



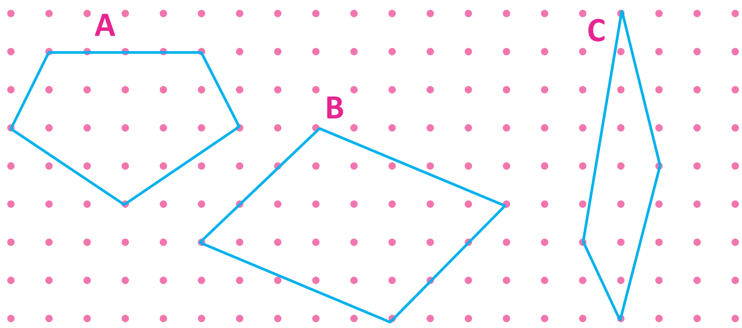
9.4.5. ÜÇGENİN ALANI

Etkinlik

ALAN HESAPLAMA

Birim karelerden oluşan bir düzlemde karelerin köşelerini kullanarak oluşturulan şekillerin alanlarını farklı bir yöntem geliştirerek bulmaya çalışınız.

1. Aşağıdaki şekilde verilen çokgenlerin alanlarını bulunuz. Tabloya yazınız.



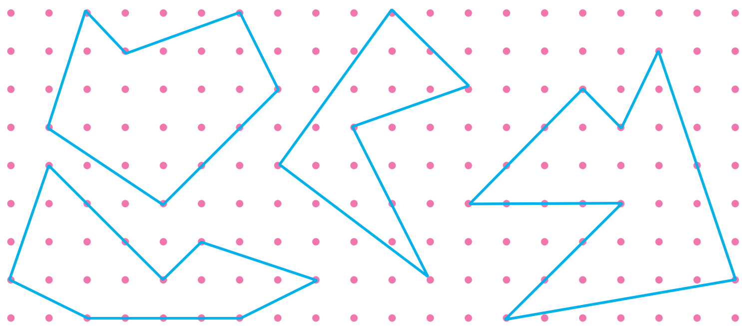
	A	B	C
Şeklin Alanı			

2. Çokgenlerle ilgili aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

Şekil Adı	Çokgenlerin Kenarlarının Üzerinden Geçtiği Nokta Sayısı	Çokgenlerin İçinde Kalan Nokta Sayısı
A		
B		
C		

3. Çokgenlerin kenarlarının geçtiği nokta sayısı ve içindeki nokta sayısını kullanarak çokgenin alanını veren bir formül bulunuz.

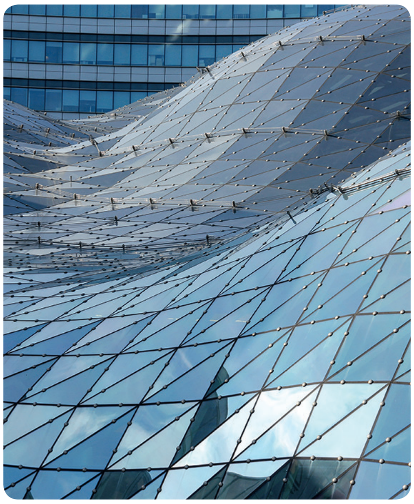
4. Bulduğunuz formülü kullanarak aşağıdaki şekillerin alanlarını bulunuz. Elde ettiğiniz bu formüle Pick teoremi denir.



5. Sizce bu yöntemi kullanarak günlük hayatta karşılaşılan hangi şekillerin alanlarını bulabilirsiniz?

1. Üçgenlerde Alan Uygulamaları

Üçgenlerde Temel Alan Bağıntısı

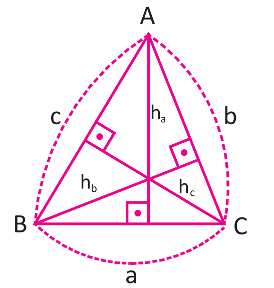


Alan hesaplama işlemi ile hayatın birçok yerinde karşılaşılmaktadır. Mesela bir ülkenin yüzölçümü, bir ilin yüz ölçümü, bir bina veya oyun parkının kapladığı alan, yol yapımı için gerekli alan, takım elbise dikmek için gereken kumaşı hesaplama, inşaat sektörü gibi birçok konuda alan hesaplamalarına ihtiyaç duyulur.

Örneğin çocuklarına pasta paylaştırmak isteyen Gönül Hanım, pastanın bir kenarının orta noktasına bıçakla iz bırakmıştır. Dilimin bu kenarının karşısındaki köşeden işaretli yere kadar pastayı iki parçaya ayırıyor. Pastanın iki eşit parçaya ayrıldığını çocuklarına nasıl anlatabilir?

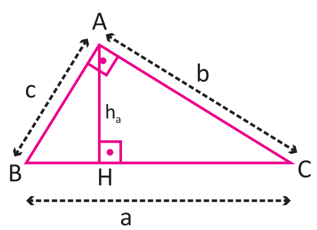
Bir üçgensel bölgenin alanı, bir kenar uzunluğu ile o kenar uzunluğuna ait yüksekliğin uzunluğunun çarpımının yarısına eşittir. A, B, C köşelerinden oluşan üçgensel bölgenin alanı $A(\widehat{ABC})$ biçiminde gösterilir.

Dar Açılı Üçgende Alan



$$\Rightarrow A(\widehat{ABC}) = \frac{a.h_a}{2} = \frac{b.h_b}{2} = \frac{c.h_c}{2} \text{ dir.}$$

Dik Üçgende Alan

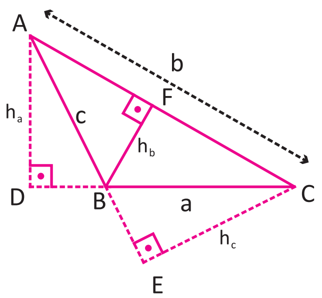


Dik üçgensel bölgenin alanı, dik kenar uzunluklarının çarpımının yarısının alınması ile bulunur. Eğer hipotenüse ait yükseklik biliniyorsa taban ile yükseklik çarpımının yarısı da alınabilir.

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{b \cdot c}{2} = \frac{a \cdot h_a}{2} \text{ buna göre}$$

$$b \cdot c = a \cdot h_a \text{ olur.}$$

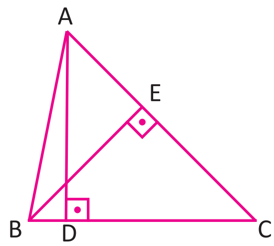
Geniş Açılı Üçgende Alan



Geniş açılı üçgenlerde [AB] ve [BC] kenarlarına ait yükseklikler üçgenin dış bölgesindedir.

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2} \text{ şeklinde bulunur.}$$

1. ÖRNEK



$\left.\begin{array}{l} [AD]\perp[BC], \\ |AD| = 8cm, \\ |BC| = 12cm, \\ |AC| = 16cm \end{array}\right\}$ ise $|BE|$ nin kaç cm olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Üçgensel bölgelerin alan bağıntısı iki kenar için de uygulanırsa

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{|AD|\cdot|BC|}{2} = \frac{|AC|\cdot|BE|}{2}$$

$$= \frac{8\cdot 12}{2} = \frac{16\cdot|BE|}{2} \Rightarrow 8\cdot 12 = 16\cdot|BE| \Rightarrow |BE| = 6\text{ cm olur.}$$

2. ÖRNEK

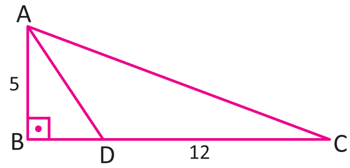
ABC üçgeninde

$[AB]\perp[BC]$

$|AB| = 5$ cm

$[DC] = 12$ cm ise

$A(\widehat{ADC})$ nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

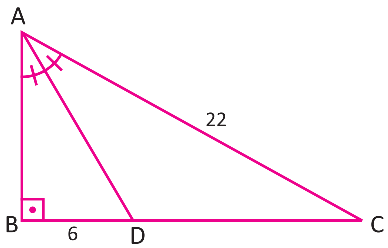


ÇÖZÜM

$|AB|$ kenarı aynı zamanda $|DC|$ kenarının yüksekliği olduğu için

$$A(\widehat{ADC}) = \frac{|DC|\cdot|AB|}{2} = \frac{12\cdot 5}{2} = 30\text{ cm}^2\text{ olur.}$$

3. ÖRNEK

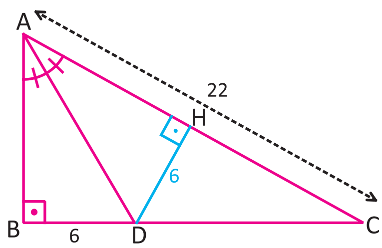


ABC dik üçgen $[AD]$ açıortay olmak üzere

$[AB]\perp[BC], |AC| = 22$ cm

$|BD| = 6$ cm ise $\widehat{ADC}$ nin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



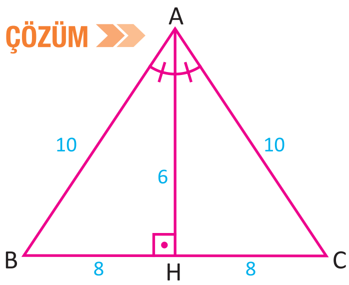
Açıortay üzerinde alınan bir noktadan açıortayın kollarına inilen dikmelerin uzunlukları eşit olduğundan $|DH| = 6$ cm olur. Bu durumda

$$A(\widehat{ADC}) = \frac{22\cdot 6}{2} = 66\ cm^2 \text{ dir.}$$

4. ÖRNEK

ABC ikizkenar üçgeninde $|AB| = |AC| = 10$ cm ve $|BC| = 16$ cm ise ABC üçgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

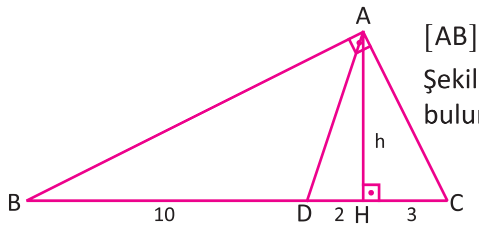


ABH 6-8-10 özel üçgeni olduğundan $|AH| = 6$ cm olur.

Buradan

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{6\cdot 16}{2} = 48\ cm^2 \text{ olur.}$$

5. ÖRNEK



$[AB] \perp [AC]$ ve $[AH] \perp [BC]$ dir.

Şekilde verilenlere göre ABD üçgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

ABD üçgeninin alanını ve $[BD]$ kenarına ait yüksekliği bulmak için Öklid teoremi kullanılırsa

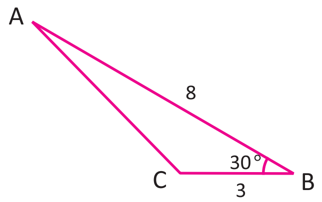
$h^2 = |BH| \cdot |HC|$

$h^2 = 12 \cdot 3$

$h^2 = 36 \Rightarrow h = 6$ cm dir.

$$A(\widehat{ABD}) = \frac{6 \cdot 10}{2} = 30 \text{ cm}^2$$

6. ÖRNEK

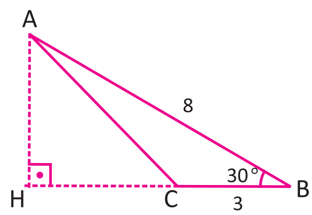


ABC üçgeninde $m(\widehat{ABC}) = 30°$, $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 3$ cm ise ABC üçgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

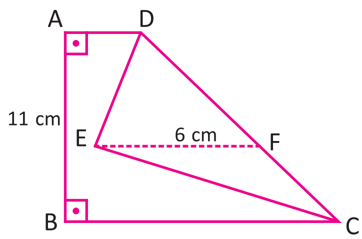
ÇÖZÜM

$[BC]$ kenarına ait yükseklik üçgenin dışından çizilir. ABH dik üçgeninde $30°$ nin karşısındaki kenar hipotenüsün yarısına eşit olduğundan $|AH| = \frac{8}{2} = 4$ cm olur.

$A(\widehat{ABC}) = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ cm}^2$ bulunur.



7. ÖRNEK



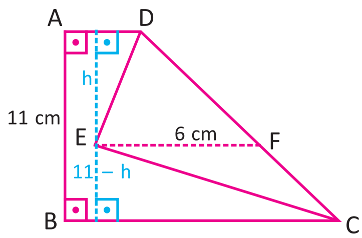
ABCD dörtgeninde

$[AB] \perp [BC]$, $[EF] \parallel [BC]$,

$|AB| = 11$ cm

$|EF| = 6$ cm ise DEC üçgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

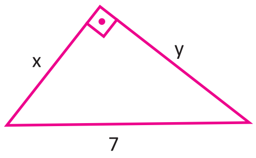


$$\begin{aligned} A(\widehat{DEC}) &= A(\widehat{DEF}) + A(\widehat{ECF}) \\ &= \frac{6 \cdot h}{2} + \frac{6 \cdot (11-h)}{2} \\ &= \frac{6 \cdot h + 66 - 6h}{2} \\ &= 33 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

8. ÖRNEK

Dik üçgen şeklindeki bir masa yüzeyinin en uzun kenarının uzunluğu 7 m dir. Masanın yüzeyinin çevresinin toplam uzunluğu 18 m olduğuna göre masanın üst yüzünün alanının kaç m^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Pisagor bağıntısı uygulanırsa
$x^2 + y^2 = 7^2$ ...(1)
olur.

Masanın diğer kenarlarının uzunlukları x ve y olsun.

$x + y + 7 = 18$

$x + y = 11$

$(x + y)^2 = 11^2$

$x^2 + 2xy + y^2 = 121$

$49 + 2xy = 121$

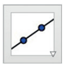
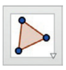
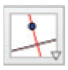
$2xy = 72$ her iki taraf 2' ye bölünürse

$xy = 36$ (1) denklemde yerine yazılırsa

Alan $= \dfrac{xy}{2} = \dfrac{36}{2} = 18\ m^2$ olur.

Teknoloji Uygulaması

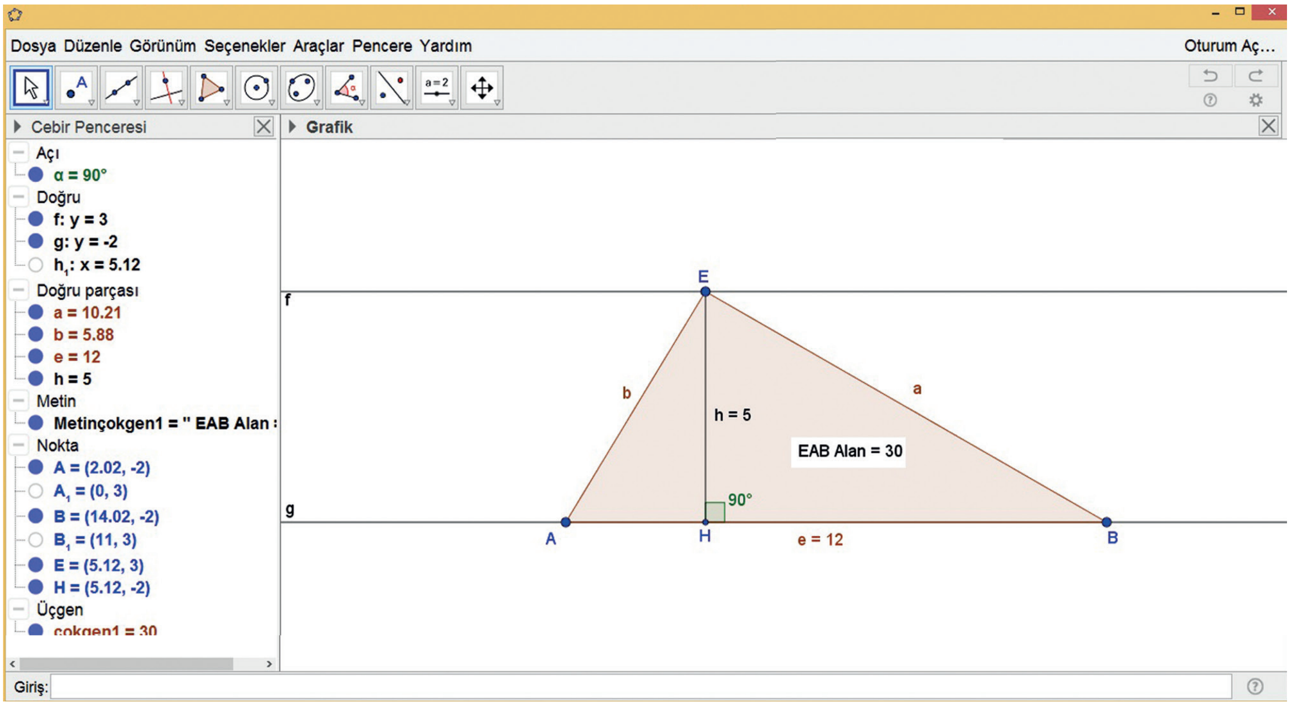
Aşağıda GeoGebra programı kullanılarak taban ve yüksekliği değiştirilen bir üçgenin alanının nasıl değiştiği incelenmiştir.

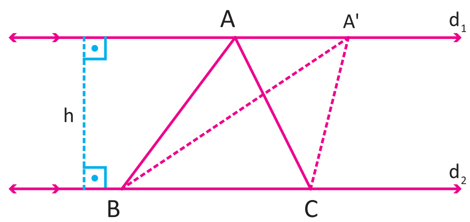
	Doğru aracını etkinleştiriniz. Nokta seçerek iki farklı doğru oluşturunuz.
	Nokta aracını etkinleştiriniz. Oluşturduğunuz doğrulardan birinin üzerinde yeni bir nokta oluşturunuz. Bu noktayı E olarak adlandırınız.
	Çokgen aracını etkinleştiriniz. EAB üçgeni oluşturmak için E, A ve B noktalarını art arda seçiniz. (E noktasından başlayıp yine en son E noktasına tıklayınız.)
	Dik doğru aracını etkinleştiriniz. Üçgenin bir köşesini ve bu köşenin karşısındaki kenarı işaretleyerek yüksekliği oluşturunuz.
	Uzunluk aracını etkinleştiriniz. Üçgene ait taban ve yüksekliği işaretleyerek uzunluklarını bulunuz.
	Alan aracını etkinleştiriniz. Üçgeni işaretleyerek alanını hesaplatınız.
	Taşı aracını etkinleştiriniz. Üçgenin köşelerini hareket ettirerek farklı üçgenler oluşturunuz.

Üçgenin taban ve yüksekliği değiştiğinde alanının nasıl değiştiğini açıklayınız.

Sadece E noktasını hareket ettirdiğinizde üçgenin taban, yükseklik ve alanında bir değişim olup olmadığını gerekçesiyle açıklayınız.

Üçgenin taban ve yüksekliği değiştiğinde alanının nasıl değiştiğiyle ilgili GeoGebra çizimi aşağıda verilmiştir.





$$A(\widehat{ABC}) = A(\widehat{A'BC}) = \frac{|BC| \cdot h}{2}$$

Yandaki şekilde $d_1 \parallel d_2$ olmak üzere ABC üçgeninin A noktası hareket ettirildiğinde oluşan A'BC üçgeninin alanı değişmez. Bu üçgenlerin tabanları ve yükseklikleri aynı uzunluktadır.

9. ÖRNEK

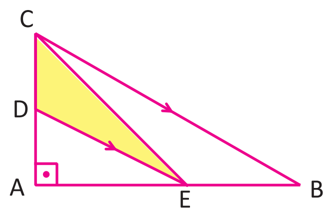
ABC dik üçgeninde

$[AC] \perp [AB]$,

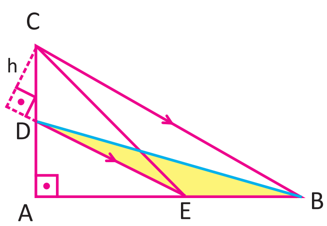
$[DE] \parallel [BC]$,

$|AD| = 5$ cm,

$|EB| = 10$ cm ise CDE üçgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.



ÇÖZÜM



CDE ve DEB üçgenlerinde DE kenarı ortak ve bu kenara ait yükseklik (paralellikten dolayı) değişmediğinden $A(\widehat{CDE}) = A(\widehat{DEB})$ dir.

$A(\widehat{CDE}) = A(\widehat{DEB}) = \frac{10 \cdot 5}{2} = 25$ cm^2 olur.

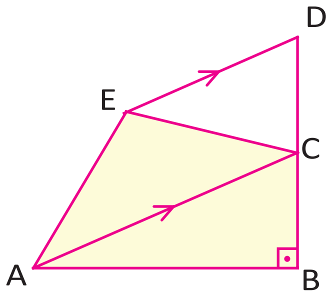
Sıra Sizde

SORU:
Yandaki verilen şekilde $[AC] \parallel [ED]$ ve $[AB] \perp [BD]$ dir.

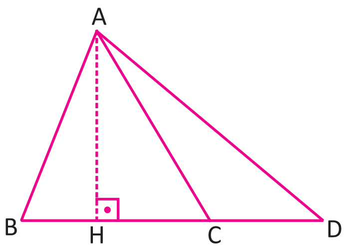
$|AB| = 4$ cm

$|BC| = 3$ cm

$|CD| = 1$ cm olduğuna göre taralı alanın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.



ÇÖZÜM

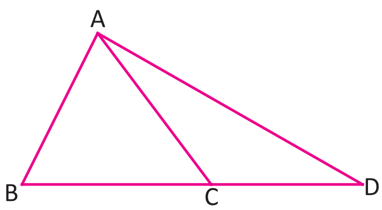


$$\frac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{ACD})} = \frac{\frac{|BC| \cdot |AH|}{2}}{\frac{|CD| \cdot |AH|}{2}} = \frac{|BC|}{|CD|}$$

Yükseklikleri eşit olan üçgenlerin alanları oranı bu yüksekliklere ait taban uzunlukları oranına eşittir.

Yukarıdaki kurala benzer olarak tabanları eşit olan üçgenlerin alanları oranı yükseklikleri oranına eşittir.

10. ÖRNEK

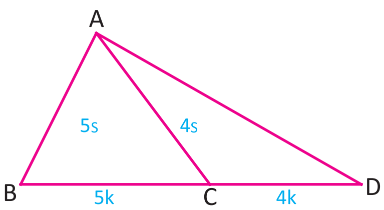


Yandaki ABD üçgeninde B, C, D doğrusaldır.

$4|BC| = 5|CD|$ dir. ABD üçgeninin alanı 54 cm^2 ise

$A(\widehat{ABC})$ nı kaç cm^2 dir?

ÇÖZÜM



$4|BC| = 5|CD|$ ise

$|BC| = 5k$

$|CD| = 4k$ olur.

$\frac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{ACD})} = \frac{5}{4}$ ise $A(\widehat{ABC}) = 5s$, $A(\widehat{ACD}) = 4s$ olur.

$A(\widehat{ABD}) = 54\ cm^2$

$9s = 54$

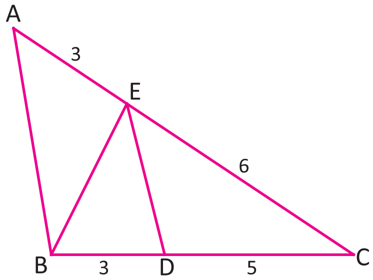
$s = 6\ cm^2$

$A(\widehat{ABC}) = 5s$

$= 5 \cdot 6$

$= 30\ cm^2$

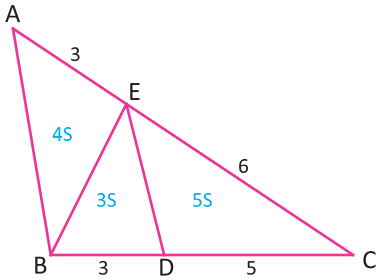
11. ÖRNEK



ABC üçgeninde
$|BD| = 3$ cm, $|DC| = 5$ cm
$|CE| = 6$ cm, $|EA| = 3$ cm

olduğuna göre $\dfrac{A(\widehat{BDE})}{A(\widehat{ABC})}$ oranını bulunuz.

ÇÖZÜM

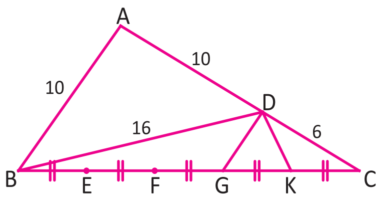


$$\frac{A(\widehat{BDE})}{A(\widehat{DCE})} = \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{3}{5} \Rightarrow A(\widehat{BDE}) = 3S \text{ ve } A(\widehat{DCE}) = 5S \text{ olur.}$$

$$\frac{A(\widehat{ABE})}{A(\widehat{BCE})} = \frac{|AE|}{|EC|} = \frac{3}{6} \Rightarrow \frac{A(\widehat{ABE})}{8S} = \frac{3}{6} \Rightarrow A(\widehat{ABE}) = 4S \text{ olur.}$$

$$\frac{A(\widehat{BDE})}{A(\widehat{ABC})} = \frac{3S}{12S} = \frac{1}{4}$$

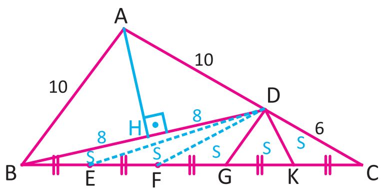
12. ÖRNEK



ABC üçgeninde
$|AB| = |AD| = 10$ cm
$|BD| = 16$ cm, $|DC| = 6$ cm
BC kenarı 5 eşit parçaya ayrılmıştır.
Buna göre DGK üçgeninin alanını cm^2 cinsinden bulunuz.

ÇÖZÜM

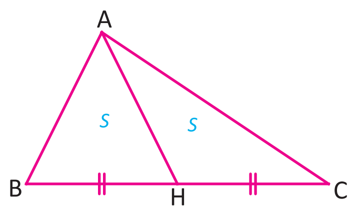
$[AH] \perp [BD]$ olacak şekilde $[AH]$ çizildiğinde $|BH| = |HD|$ olur.
AHD üçgeninde Pisagor teoreminden $|AH| = 6$ cm bulunur.



$$A(\widehat{ABD}) = \frac{|BD| \cdot |AH|}{2} = \frac{16 \cdot 6}{2} = 48 \text{ cm}^2$$

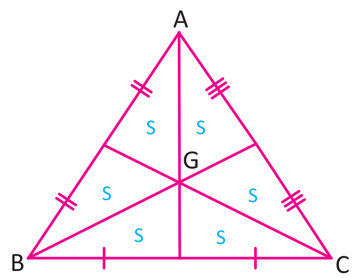
$$\frac{A(\widehat{ABD})}{A(\widehat{BCD})} = \frac{10}{6} \Rightarrow \frac{48}{A(\widehat{BCD})} = \frac{5}{3} \Rightarrow A(\widehat{BCD}) = \frac{144}{5} \text{ cm}^2$$

$$A(\widehat{DGK}) = \frac{A(\widehat{DBC})}{5} \Rightarrow A(\widehat{DGK}) = \frac{\frac{144}{5}}{5} = \frac{144}{25} \text{ cm}^2$$



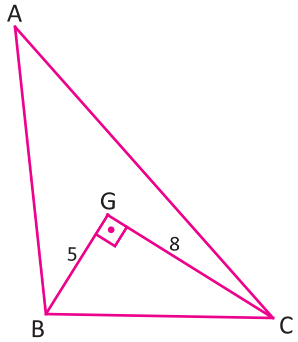
Kenarortay, üçgeni alanları eşit olan iki parçaya ayırır.

ABC üçgeninde
$|BH| = |HC|$
$A(\widehat{ABH}) = A(\widehat{AHC})$



Ağırlık merkezi üçgenin alanını 6 eşit parçaya ayırır.

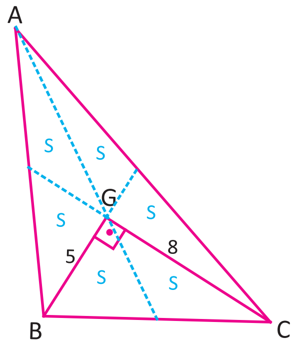
13. ÖRNEK



ABC üçgeninde G ağırlık merkezi
$[BG] \perp [GC]$, $|BG| = 5$ cm, $|CG| = 8$ cm dir.
Buna göre $A(\overset{\frown}{ABC})$ nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Üçgenin kenarortayları çizildiğinde alanın 6 eşit parçaya ayrıldığı görülür.



$A(\overset{\frown}{BCG}) = \dfrac{5 \cdot 8}{2}$

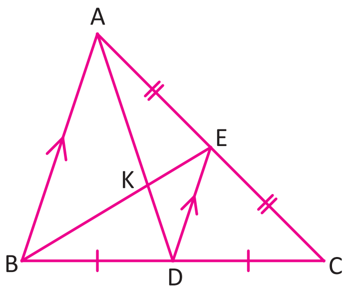
$2S = 20$

$S = 10\ cm^2$

$A(\overset{\frown}{ABC}) = 6S$

$A(\overset{\frown}{ABC}) = 60\ cm^2$ bulunur.

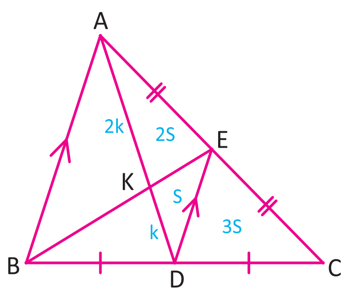
14. ÖRNEK



ABC üçgeninde
$[AB] \parallel [ED]$, $|AE| = |EC|$, $|BD| = |DC|$, $A(\overset{\frown}{ABC}) = 48\,cm^2$ dir.
Buna göre $A(\overset{\frown}{KDE})$ nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

$[BE]$ ve $[AD]$ kenarortay olduğundan kesiştikleri nokta K ağırlık merkezidir.



Buna göre $|AK| = 2|KD|$ olacağından

$A(\overset{\frown}{KDE}) = S \Rightarrow A(\overset{\frown}{AKE}) = 2S$

$A(\overset{\frown}{ADE}) = 3S$ ve $A(\overset{\frown}{EDC}) = 3S$ dir.

$|BD| = |DC|$ olduğundan

$A(\overset{\frown}{ABD}) = A(\overset{\frown}{ADC}) = 6S$ olur.

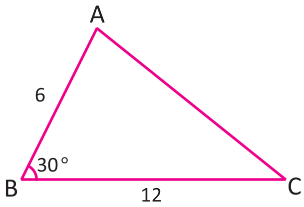
$A(\overset{\frown}{ABC}) = 48\ cm^2$

$12S = 48$

$S = A(\overset{\frown}{KDE})$

$= 4\ cm^2$ bulunur.

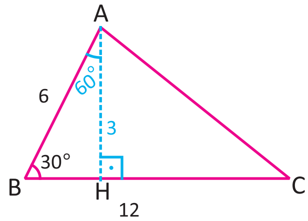
15. ÖRNEK



ABC üçgeninde $|AB| = 6$ cm, $|BC| = 12$ cm, $m(\widehat{ABC}) = 30^\circ$ dir.

Buna göre $A(\widehat{ABC})$ nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



$[AH] \perp [BC]$ olacak şekilde bir $[AH]$ çizildiğinde

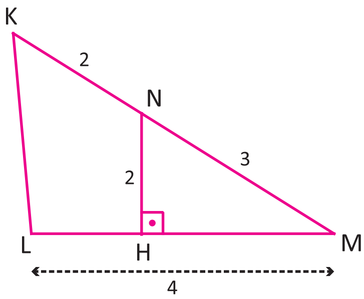
$30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ üçgeni oluşacağından $|AH| = 3$ cm dir.

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{|BC| \cdot |AH|}{2}$$

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{12 \cdot 3}{2}$$

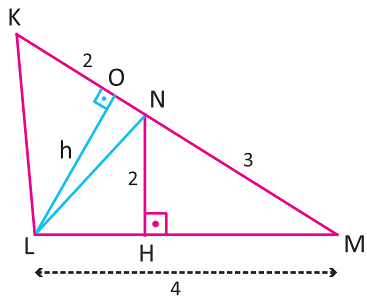
$A(\widehat{ABC}) = 18 \text{ cm}^2$ bulunur.

16. ÖRNEK



Yandaki şekilde $|KN| = 2$ cm, $|NM| = 3$ cm, $|NH| = 2$ cm, $|LM| = 4$ cm $N \in [KM]$ ve $H \in [LM]$ olduğuna göre KLM üçgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Yükseklikleri eşit olan üçgenlerin alanları oranı, bu yüksekliklere ait taban uzunlukları oranına eşittir.

$[LN]$ ve $[OL] \perp [KM]$ olacak şekilde $[OL]$ çizilirse $[OL]$, $\widehat{NML}$ nde MN kenarına ve $\widehat{KLN}$ nde KN kenarına ait yükseklik olur. Bu durumda

$\dfrac{A(\widehat{NLM})}{A(\widehat{KLN})} = \dfrac{|NM|}{|KN|} = \dfrac{3}{2}$ olur.

$A(\widehat{NLM}) = \dfrac{|LM| \cdot |NH|}{2} = \dfrac{4 \cdot 2}{2} = 4 \text{ cm}^2$ olduğundan

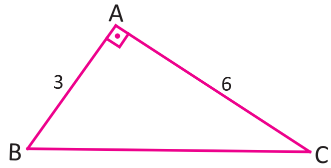
$\dfrac{A(\widehat{NLM})}{A(\widehat{KLN})} = \dfrac{4}{A(\widehat{KLN})} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow A(\widehat{KLN}) = \dfrac{8}{3} \text{ cm}^2$ bulunur.

$$\begin{aligned} A(\widehat{KLM}) &= A(\widehat{NML}) + A(\widehat{KLN}) \\ &= 4 + \frac{8}{3} \\ &= \frac{20}{3} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

17. ÖRNEK

Ahmet, iki kenarının uzunluğu 3 m ve 6 m olan bir üçgen oluşturmak istiyor.
Bu üçgenin alanı en çok kaç m^2 olabilir?

ÇÖZÜM

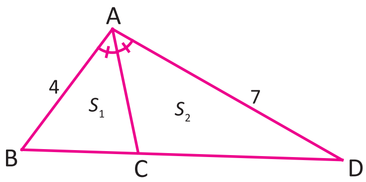


İki kenar uzunluğu 3 m ve 6 m olan üçgen oluşturulduğunda ABC üçgeninin alanının en çok olabilmesi için bu iki kenar dik olmalıdır.

Bu durumda

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{|AB| \cdot |AC|}{2} = \frac{3 \cdot 6}{2} = \frac{18}{2} = 9\,m^2 \text{ olur.}$$

18. ÖRNEK



Yandaki şekilde $A(\widehat{ABC}) = S_1$ ve $A(\widehat{ACD}) = S_2$

$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{CAD})$

$|AB| = 4$ cm, $|AD| = 7$ cm olduğuna göre

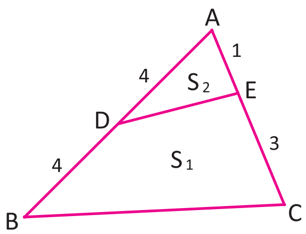
$\frac{S_1}{S_2}$ oranını bulunuz.

ÇÖZÜM

İç açıortay teoreminden

$$\frac{|BC|}{|CD|} = \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{ACD})} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{7} \text{ bulunur.}$$

19. ÖRNEK



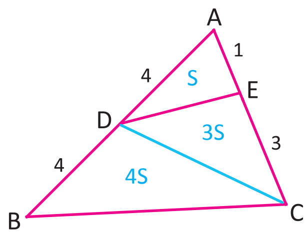
ABC üçgeninde

$|AD| = |DB| = 4$ cm

$|AE| = 1$ cm, $|EC| = 3$ cm

$A(BCED) = S_1$, $A(\widehat{EDA}) = S_2$ olduğuna göre $\frac{S_1}{S_2}$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



Yükseklikleri eşit olan üçgenlerin alanları oranı, bu yüksekliklere ait taban uzunlukları oranına eşittir.

$[DC]$ çizilirse $\widehat{AED}$ nde AE kenarına ve $\widehat{DEC}$ nde EC kenarına ait yükseklik olur. Bu durumda

$$\frac{A(\widehat{AED})}{A(\widehat{DEC})} = \frac{|AE|}{|EC|} = \frac{1}{3} \text{ olur.}$$

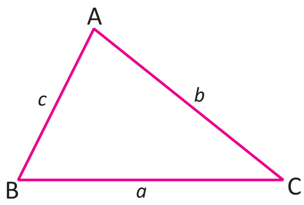
Buradan $A(\widehat{AED}) = S$ ise $A(\widehat{DEC}) = 3S$ yazılır.

$$\frac{A(\widehat{ADC})}{A(\widehat{DBC})} = \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{4}{4} = 1 \text{ dir. } A(\widehat{ADC}) = A(\widehat{AED}) + A(\widehat{DEC}) = S + 3S = 4S \text{ olduğundan}$$

$$\frac{4S}{A(\widehat{DBC})} = 1 \Rightarrow A(\widehat{DBC}) = 4S \text{ olur.}$$

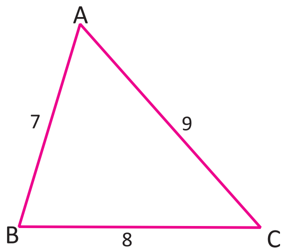
Bu durumda $\frac{S_1}{S_2} = \frac{4S + 3S}{S} = 7$ bulunur.

Heron Alan Formülü



Kenar uzunlukları a, b, c olan üçgenin çevre uzunluğunun yarısı $u=\dfrac{a+b+c}{2}$ olmak üzere $A(\widehat{ABC})=\sqrt{u\cdot(u-a)\cdot(u-b)\cdot(u-c)}$ bağıntısı ile bulunur.

20. ÖRNEK



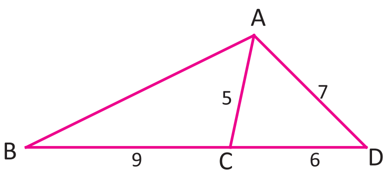
ABC üçgeninde $|AB|=7$ cm, $|BC|=8$ cm ve $|AC|=9$ cm olduğuna göre ABC üçgeninin alanını cm^2 cinsinden bulunuz.

ÇÖZÜM

ABC üçgeninin yarı çevresi hesaplandığında $u=\dfrac{7+8+9}{2}=12$ cm bulunur.
ABC üçgeninin alanını bulmak için Heron alan formülü uygulandığında

$$A(\widehat{ABC})=\sqrt{u\cdot(u-a)\cdot(u-b)\cdot(u-c)}$$
$$A(\widehat{ABC})=\sqrt{12\cdot(12-7)\cdot(12-8)\cdot(12-9)}$$
$$A(\widehat{ABC})=\sqrt{12\cdot 5\cdot 4\cdot 3}$$
$A(\widehat{ABC})=12\sqrt{5}\,cm^2$ bulunur.

21. ÖRNEK



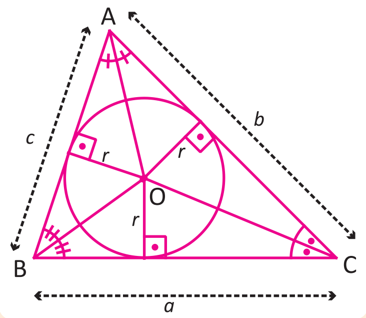
Yandaki şekilde
$|AC|=5cm, |AD|=7cm$
$|BC|=9cm, |CD|=6cm$ dir.
Buna göre $A(\widehat{ABC})$ nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

ACD üçgeninin alanını bulmak için Heron alan formülü uygulandığında $u=\dfrac{5+7+6}{2}\Rightarrow u=9$ cm dir.

$$A(\widehat{ACD})=\sqrt{9\cdot(9-5)\cdot(9-7)\cdot(9-6)}$$
$$A(\widehat{ACD})=\sqrt{9\cdot 4\cdot 2\cdot 3}$$
$$A(\widehat{ACD})=6\sqrt{6}\,cm^2$$
$$\frac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{ACD})}=\frac{9}{6}\Rightarrow\frac{A(\widehat{ABC})}{6\sqrt{6}}=\frac{3}{2}\Rightarrow A(\widehat{ABC})=9\sqrt{6}\,cm^2$$

İç Teğet Çember Yardımıyla Alan Bulma



ABC üçgeninin çevresi ve iç teğet çemberinin yarıçapı biliniyorsa üçgenin alanı hesaplanabilir. ABC üçgeninin yarıçapı r olsun.

$$A(\widehat{BOC}) = \frac{a \cdot r}{2}$$

$$A(\widehat{AOC}) = \frac{b \cdot r}{2}$$

$$A(\widehat{AOB}) = \frac{c \cdot r}{2}$$

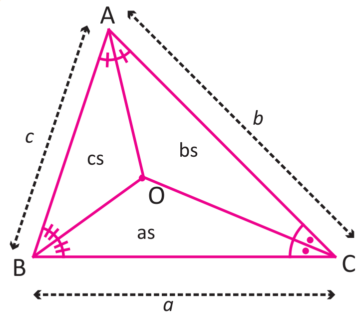
Bu üçgenlerin alanları toplamı ABC üçgeninin alanına eşit olacağından

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2}$$

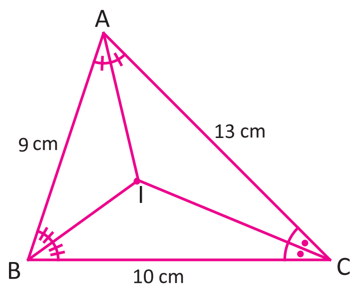
$$A(\widehat{ABC}) = \frac{(a+b+c) \cdot r}{2} \Rightarrow A(\widehat{ABC}) = u \cdot r$$

ABC üçgeninde O noktası iç teğet çemberinin merkezi ise oluşan üçgenlerin alanları kenar uzunlukları ile orantılıdır.

$$\frac{A(\widehat{BOC})}{a} = \frac{A(\widehat{AOC})}{b} = \frac{A(\widehat{AOB})}{c} \text{ olur.}$$



22. ÖRNEK



ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi I noktasıdır. Buna göre

a) ABC üçgeninin iç teğet çemberinin yarıçapının kaç cm,

b) BIC üçgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

a) ABC üçgeninin alanını bulmak için Heron alan formülü kullanıldığında

$$u = \frac{9+10+13}{2} = 16 \quad A(\widehat{ABC}) = \sqrt{16 \cdot (16-9) \cdot (16-10) \cdot (16-13)}$$

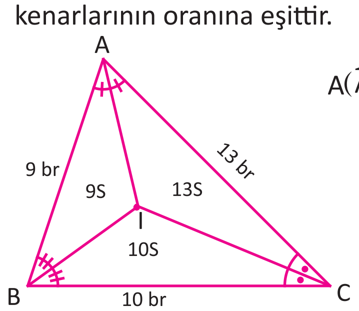
$$A(\widehat{ABC}) = \sqrt{16 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 3}$$

$$A(\widehat{ABC}) = 12\sqrt{14}\ cm^2$$

ABC üçgeninin alanı iç teğet çember yardımıyla hesaplandığında

$$A(\widehat{ABC}) = u \cdot r \Rightarrow 12\sqrt{14} = 16 \cdot r \Rightarrow r = \frac{3\sqrt{14}}{4} \text{cm bulunur.}$$

b) ABC üçgeninde I noktası iç teğet çemberin merkezi olduğundan oluşan üçgenlerin alanları oranı, kenarlarının oranına eşittir.



$$A(\widehat{ABC}) = 9S + 10S + 13S$$

$$32S = 12\sqrt{14}$$

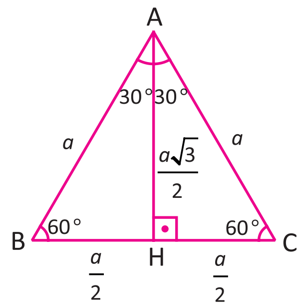
$$S = \frac{3\sqrt{14}}{8} br^2 \text{ olur.}$$

$$A(\widehat{BIC}) = 10S \Rightarrow A(\widehat{BIC}) = 10 \cdot \frac{3\sqrt{14}}{8}$$

$$A(\widehat{BIC}) = \frac{15\sqrt{14}}{4} br^2$$

bulunur.

Eşkenar Üçgenin Alanı



Eşkenar üçgende bir köşeden karşısındaki kenara dik inildiğinde $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ dik üçgeni oluşacağından

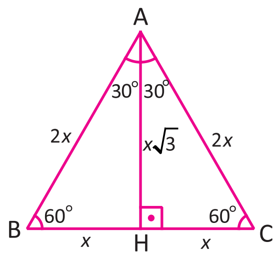
$A(\widehat{ABC}) = \dfrac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ olur. $|AH| = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ bulunur.

23. ÖRNEK

Alanı $9\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ olan bir eşkenar üçgenin yüksekliğinin kaç cm olduğunu bulunuz.

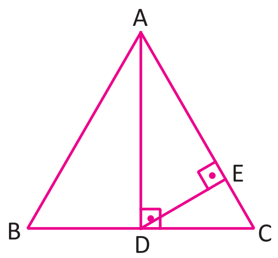
ÇÖZÜM

Bir kenarının uzunluğu 2x olan ABC üçgeni çizildiğinde



$$A(\widehat{ABC}) = \frac{2x \cdot x\sqrt{3}}{2}$$
$$9\sqrt{3} = x^2\sqrt{3}$$
$$x = 3\,\text{cm}$$
$$|AH| = x\sqrt{3} \Rightarrow |AH| = 3\sqrt{3}\ \text{cm bulunur.}$$

24. ÖRNEK



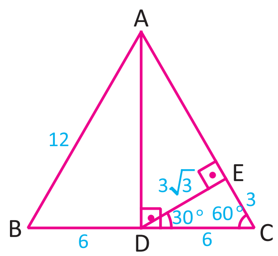
ABC eşkenar üçgeninde

$[AD] \perp [BC]$, $[DE] \perp [AC]$

$A(\widehat{ABC}) = 36\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ dir.

Buna göre $A(\widehat{DEC})$ alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Bir kenarı a olan ABC üçgeninde

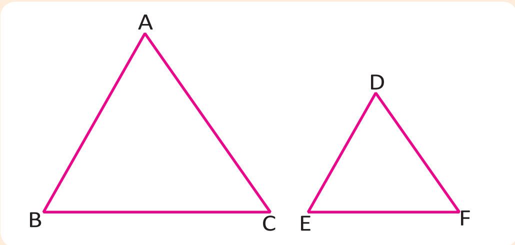
$A(\widehat{ABC}) = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow 36\sqrt{3} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow a^2 = 144 \Rightarrow a = 12\,\text{cm}$ olur.

DEC üçgeni $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ dik üçgeni olduğundan

$|EC| = 3\,\text{cm}$ ve $|DE| = 3\sqrt{3}\ \text{cm}$ olur.

$$A(\widehat{DEC}) = \frac{3 \cdot 3\sqrt{3}}{2}$$
$$A(\widehat{DEC}) = \frac{9\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^2$$

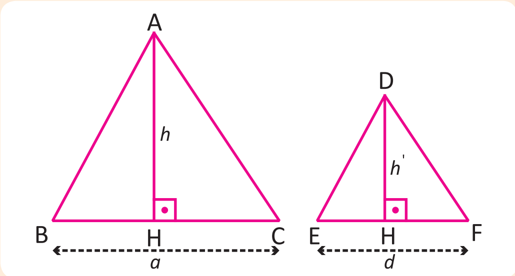
Benzer Üçgenlerin Alanları



Benzer iki üçgenin alanları oranı benzerlik oranının karesine eşittir. $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ ve benzerlik oranı k ise

$\dfrac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DEF})} = k^2$ olur.

Bu ifadenin doğruluğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.

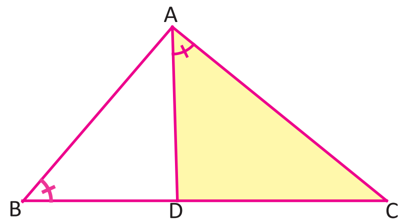


$\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ ve benzerlik oranı k olduğundan

$\dfrac{a}{d} = \dfrac{h}{h'} = k$ olur.

$$\frac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DEF})} = \frac{\frac{a \cdot h}{2}}{\frac{d \cdot h'}{2}} \Rightarrow \frac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DEF})} = \frac{a \cdot h}{2} \cdot \frac{2}{d \cdot h'} \Rightarrow = \frac{a}{d} \cdot \frac{h}{h'}$$
$$= k \cdot k$$
$$= k^2$$

25. ÖRNEK



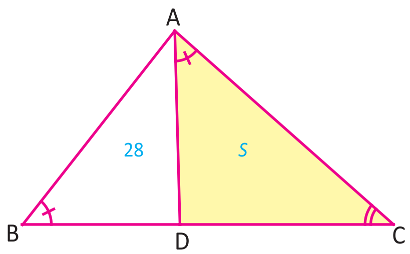
ABC üçgeninde

$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DAC}), 3|AC| = 4|DC|$

$A(\widehat{ADB}) = 28\,cm^2$

olduğuna göre $A(\widehat{ADC})$ nı cm^2 cinsinden bulunuz.

ÇÖZÜM

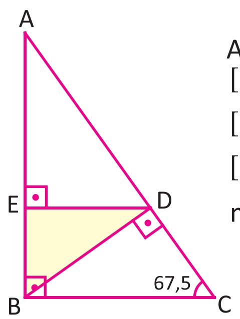


ACB açısı her iki üçgenin de ortak açısıdır. Bu durumda $m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{BAC})$ olur. AA benzerliğinden $\widehat{ABC} \sim \widehat{DAC}$ olacağından benzerlik oranı k olsun.

$$\frac{A(\widehat{DAC})}{A(\widehat{ABC})} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow \frac{S}{S+28} = \frac{9}{16} \Rightarrow 16S = 9(S+28) \Rightarrow 7S = 28 \cdot 9$$
$$S = 36\,cm^2$$

Sıra Sizde

SORU:



ABC dik üçgeninde

$[AB] \perp [BC]$

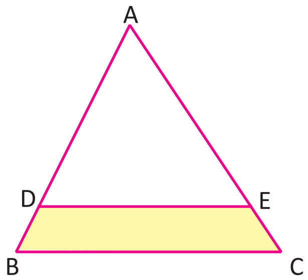
$[AB] \perp [ED]$

$[BD] \perp [AC]$

$m(\widehat{BCA}) = 67,5^\circ$ olduğuna göre $\dfrac{A(\widehat{BDE})}{A(\widehat{ABC})}$ oranını bulunuz.

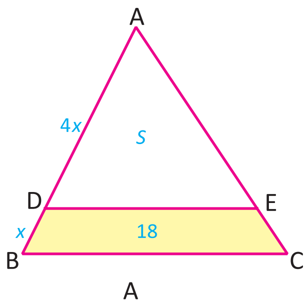
ÇÖZÜM

26. ÖRNEK



Yandaki şekilde $[DE] \parallel [BC]$ dir.
$|AD| = 4|BD|$ ve $A(BDEC) = 18\ cm^2$
olduğuna göre ADE üçgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



$[DE] \parallel [BC]$ olduğundan

$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ADE})$ ve $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{AED})$ olur.

Bu durumda $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{ADE}$ olacağından

$\dfrac{|AD|}{|AB|} = \dfrac{4x}{5x} \Rightarrow \dfrac{|AD|}{|AB|} = \dfrac{4}{5}$ dir.

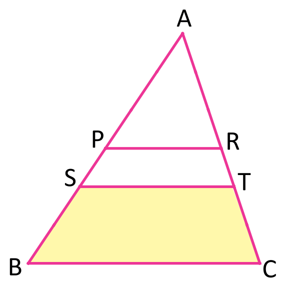
Benzer üçgenlerde alanlar oranı, benzerlik oranının karesine eşit olduğundan

$$\frac{A(\overset{\triangle}{ADE})}{A(\overset{\triangle}{ABC})} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Rightarrow \frac{S}{S+18} = \frac{16}{25} \Rightarrow 25S = 16S + 16 \cdot 18$$

$$9S = 16 \cdot 18$$

$S = 32\,cm^2$ bulunur.

27. ÖRNEK



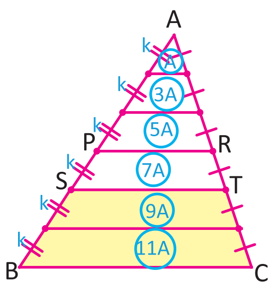
$[PR] \parallel [ST] \parallel [BC]$

$6|PS| = 2|AP| = 3|SB|$

$A(BCTS) = 40\,cm^2$ olmak üzere

ABC üçgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



$|PS| = k$ için $|AP| = 3k$ ve $|SB| = 2k$ olur. $[AB]$ ve $[AC]$

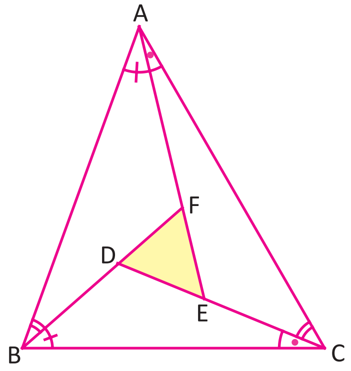
kenarları eşit parçalara bölünerek elde edilen üçgenlerden küçük üçgenin diğer büyük üçgenlere olan benzerlik oranları sırasıyla $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{6}$ olduğundan alanları oranı $\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{25}, \dfrac{1}{36}$ olur.

En üstteki küçük üçgenin alanına A denirse diğer parçaların alanları sırasıyla A, 3A, 5A, 7A, 9A, 11A olur.

$A(BCTS) = 11A + 9A = 20A = 40$ olduğundan $A = 2\,cm^2$ bulunur.

$A(\overset{\triangle}{ABC}) = 11A + 9A + 7A + 5A + 3A + A = 36A = 72\,cm^2$ bulunur.

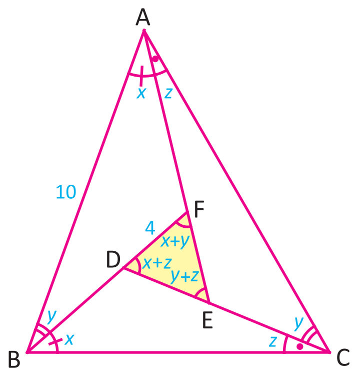
28. ÖRNEK



ABC ve FDE üçgenlerinin eş açıları şekilde gösterilmiştir.

$|AB| = 10\text{br}$ ve $|DF| = 4\text{br}$ olduğuna göre $\dfrac{A(\widehat{DFE})}{A(\widehat{ABC})}$ oranını bulunuz.

ÇÖZÜM



ABC üçgenindeki eş açılar harflendirilir. Bir üçgendeki iki iç açının ölçüleri toplamı, komşu olmayan dış açının ölçüsüne eşittir. Buna göre

$m(\widehat{DFE}) = x + y$

$m(\widehat{EDF}) = x + z$

$m(\widehat{FED}) = y + z$ olur.

Karşılıklı açılar eş olduğundan $\widehat{DFE} \sim \widehat{ABC}$ dir. Benzerlik oranı

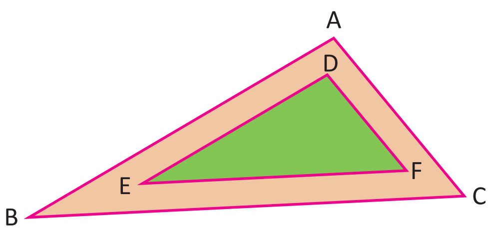
$$\frac{|DF|}{|AB|} = \frac{4}{10} \Rightarrow \frac{A(\widehat{DFE})}{A(\widehat{ABC})} = \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{A(\widehat{DFE})}{A(\widehat{ABC})} = \frac{4}{25} \text{ olur.}$$

29. ÖRNEK

Üçgen şeklindeki bir çocuk parkı etrafına renkli taşlar kullanılarak bir bisiklet yolu yapılacaktır. Parkın kenar uzunlukları 10 m, 17 m ve 21 m dir. Bisiklet yolu yapıldıktan sonra parkın yeni kenar uzunlukları 20 m, 34 m ve 42 m olacağına göre bisiklet yolunun alanının kaç m^2 olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



Parkın çevresine yapılacak bisiklet yolunun alanı

$A(\widehat{ABC}) - A(\widehat{DEF})$ dir.

ABC üçgeni için

$u_1 = \dfrac{Ç(\widehat{ABC})}{2} \Rightarrow u_1 = \dfrac{20 + 34 + 42}{2} \Rightarrow u_1 = 48\text{m}$

Heron alan formülü uygulandığında

$A(\widehat{ABC}) = \sqrt{48 \cdot 28 \cdot 14 \cdot 6}$

$A(\widehat{ABC}) = 336\text{m}^2$

DEF üçgeni için

$u_2 = \dfrac{Ç(\widehat{DEF})}{2} \Rightarrow u_2 = \dfrac{10 + 17 + 21}{2} \Rightarrow u_2 = 24\text{m}$

$A(\widehat{DEF}) = \sqrt{24 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 3}$

$A(\widehat{DEF}) = 84\text{m}^2$ olur.

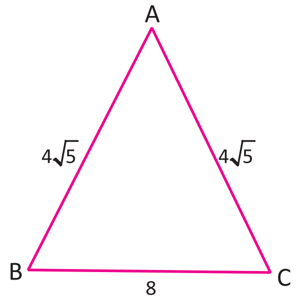
Buna göre bisiklet yolunun alanı,

$A(\widehat{ABC}) - A(\widehat{DEF}) = 336 - 84$

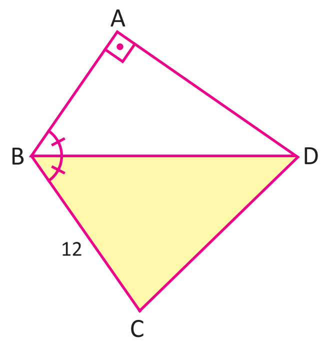
$= 252\text{m}^2$ bulunur.

ALIŞTIRMALAR-6

1. ABC üçgeninde $|AB| = |AC| = 4\sqrt{5}$ cm $|BC| = 8$ cm ise $A(\widehat{ABC})$ nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

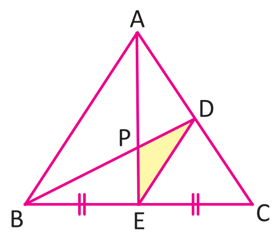


2. Aşağıdaki şekilde $[BD]$ açıortay



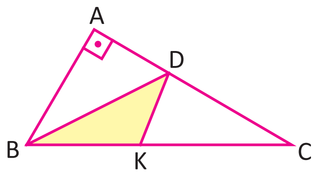
$[BA] \perp [DA]$
$|BC| = 12$ cm
$A(\widehat{DBC}) = 48$ cm^2
olduğuna göre AD kenarının uzunluğunun kaç cm olduğunu bulunuz.

3. ABC üçgeninde B, E, C doğrusal



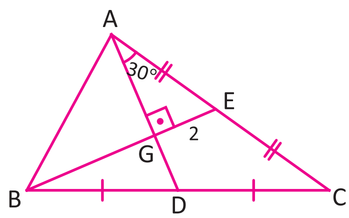
$[AB] \parallel [DE]$
$|BE| = |EC|$
$A(\widehat{APD}) = 20$ cm^2
olduğuna göre boyalı alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

4.



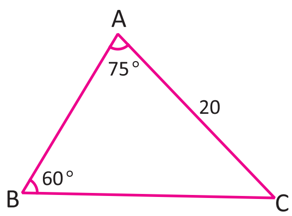
ABC üçgeninde $m(\widehat{BAC}) = 90°$ olmak üzere A noktasının $[BD]$ na göre simetriği $K \in [BC]$ noktasıdır.
$|AB| = 6$ cm
$|BC| = 10$ cm
olduğuna göre $A(\widehat{BKD})$ nın kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

5.



ABC üçgeninde $m(\widehat{BAC}) = 90°$ ve B, D, C doğrusaldır. G noktası ABC üçgeninin ağırlık merkezi olduğuna göre $A(\widehat{ABC})$ nın kaç birimkare olduğunu bulunuz.

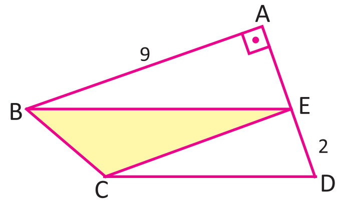
6.



ABC üçgeninde
$m(\widehat{ABC}) = 60°$
$m(\widehat{BAC}) = 75°$ ise

$A(\widehat{ABC})$ nın kaç birimkare olduğunu bulunuz.

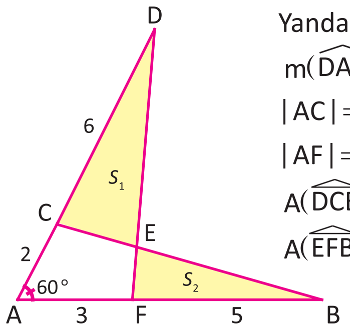
7.



Yukarıdaki şekilde $[BE] \parallel [CD]$

$[BA] \perp [AD]$ ise $A(\widehat{BCE})$ nın kaç birimkare olduğunu bulunuz.

8.



Yandaki şekilde

$m(\widehat{DAB}) = 60^\circ$

$|AC| = 2\,cm, |CD| = 6\,cm$

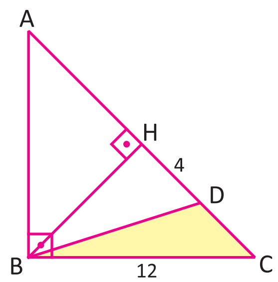
$|AF| = 3\,cm, |FB| = 5\,cm$

$A(\widehat{DCE}) = S_1$

$A(\widehat{EFB}) = S_2$

Verilenlere göre $|S_1 - S_2|$ değerini bulunuz.

9.



ABC dik üçgeninde

$|AD| = |AB|$

$[AB] \perp [BC]$

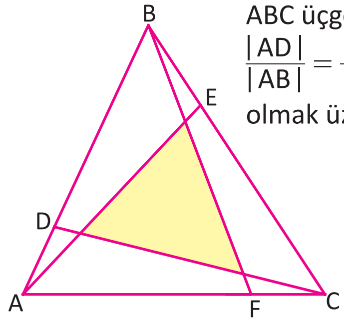
$[BH] \perp [AC]$

$|BC| = 12\,cm$

$|HD| = 4\,cm$ dir.

Buna göre boyalı alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

10.



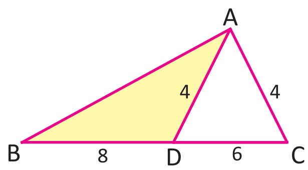
ABC üçgeninde

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|FC|}{|AC|} = \frac{|BE|}{|BC|} = \frac{1}{4}$$

olmak üzere

boyalı bölgenin alanı $36\,cm^2$ olduğuna göre ABC üçgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

11.



ABC üçgeninde

$|AD| = |AC| = 4\,cm$

$|DC| = 6\,cm$ ve $|BD| = 8\,cm$

olduğuna göre ABD üçgeninin alanının kaç cm^2 olduğunu bulunuz.

A) 4 B) 8 C) $4\sqrt{7}$ D) 12 E) $8\sqrt{7}$

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A) Aşağıdaki 1-5. cümlelerde boş bırakılan yerlere uygun sözcük ya da değerleri yazınız.

1. Atatürk'ün hazırladığı ve 1937 yılında yayınlanan geometri kitabında "müselles" ve "zaviye" kelimelerinin karşılığı sırasıyla............ ve .... olarak isimlendirilir.

2. Ölçüsü 68° olan açının tümleyeninin bütünleyeni .... olur.

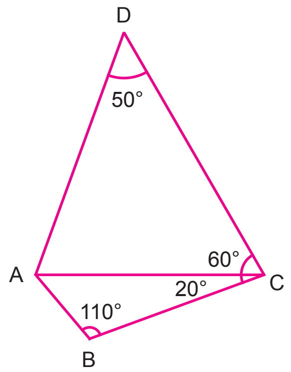
3. Benzer iki üçgenin benzerlik oranı k ise çevrelerinin oranı ...., alanları oranı .... olur.

4. α dar açı olmak üzere $\sin\alpha = \frac{7}{25}$ olduğuna göre $\tan\alpha =$......... bulunur.

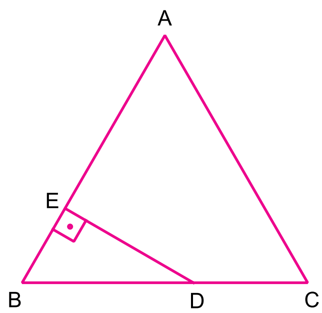
5. Üçgenin ağırlık merkezi .... kesişme noktasıdır.

B) Aşağıda 6. soruda numaralar ile verilen ifadeleri, harf ile verilen ifadelerle eşleştiriniz.

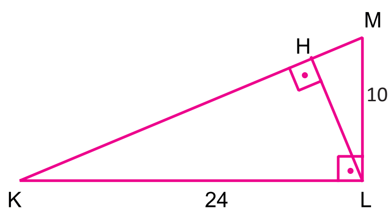
6.



Şekilde verilenlere göre en uzun kenar — 1.



ABC eşkenar üçgen, $[DE] \perp [AB]$ ve $\frac{|BE|}{|BA|} = \frac{3}{10}$ olduğuna göre $\frac{|DC|}{|BC|}$ değeri — 2.



KLM dik üçgeninde $|LH| = h$ değeri — 3.

$\frac{\cos 120^\circ \cdot \tan 135^\circ + \sin 150^\circ}{\sin 120^\circ \cdot \cos 150^\circ - \cot 135^\circ}$ ifadesinin değeri — 4.

a) $[AC]$

b) $[DC]$

c) $\frac{120}{13}$

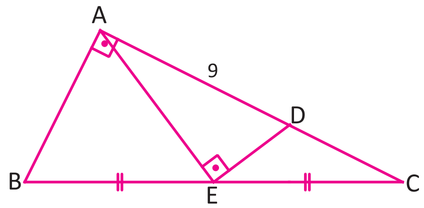
ç) $\frac{2}{5}$

d) 4

e) $\frac{2}{3}$

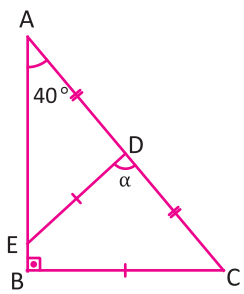
C) Aşağıda 7-10. açık uçlu soruların cevaplarını boş bırakılan yerlere yazınız.

7.



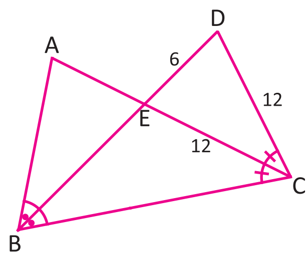
ABC dik üçgeninde $[AE]$ kenarortay, $m(\widehat{CAB}) = 90^\circ, [AE] \perp [ED], |AD| = 9$ cm, $|ED| = \sqrt{17}$ cm olduğuna göre BC kenarının uzunluğunu cm cinsinden bulunuz.

8.



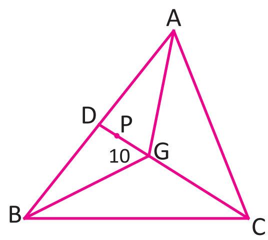
ABC üçgeninde
$[AB] \perp [BC]$,
$|AD| = |DC|$
$|ED| = |BC|$,
$m(\widehat{BAC}) = 40^\circ$
olduğuna göre EDC açısı kaç derecedir?

9.



Yandaki şekilde
$m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{DBC})$
$m(\widehat{DCE}) = m(\widehat{ECB})$
$|EC| = |DC| = 12$ cm
$|ED| = 6$ cm ise ABC üçgeninin çevresi kaç cm dir?

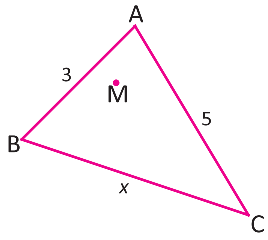
10.



ABC üçgeninin ağırlık merkezi G, ABG üçgeninin ağırlık merkezi P noktasıdır. $|PG| = 10$ cm ise CD kenarının uzunluğu kaç birimdir?

Ç) Aşağıda 11-17. açık uçlu soruların cevaplarını boş bırakılan yerlere yazınız.

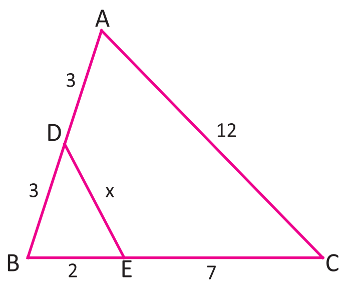
11.



ABC üçgeninin diklik merkezi üçgenin içindeki M noktasıdır.
$|AB| = 3$ cm,
$|AC| = 5$ cm
olduğuna göre $|BC| = x$ in alabileceği kaç tam sayı değeri vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

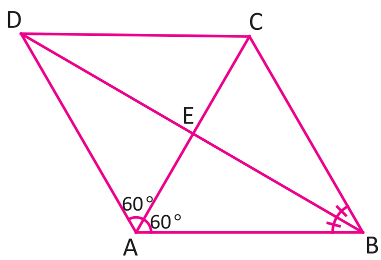
12.



ABC üçgeninde
$|AD| = 3$ cm
$|DB| = 3$ cm
$|AE| = 2$ cm
$|EC| = 7$ cm
$|BC| = 12$ cm
olduğuna göre $|DE| = x$ değeri kaç cm dir?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

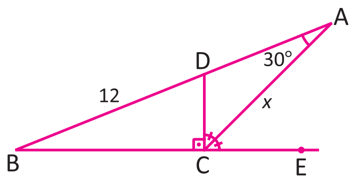
13.



Yukarıdaki şekilde A, E, C doğrusaldır.
$m(\widehat{DBA}) = m(\widehat{DBC}), m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{BAC}) = 60^\circ$
olduğuna göre BDC açısının ölçüsü kaçtır?

A) 70° B) 60° C) 50° D) 40° E) 30°

14.

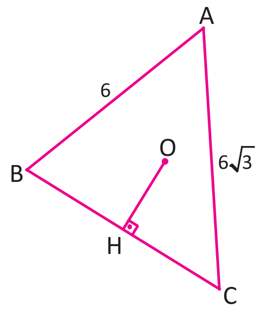


Yandaki şekilde $[DC] \perp [BE]$, $m(\widehat{DAC}) = 30°$, $|BD| = 12$ cm

$m(\widehat{DCA}) = m(\widehat{ACE})$ olduğuna göre $|AC| = x$ kaç cm dir?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

15.



O noktası ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezidir.

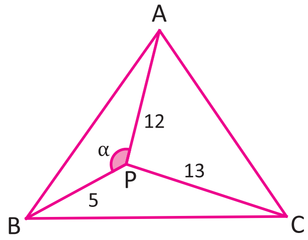
$|OH| = \sqrt{3}|HC|$

$|AB| = 6$ cm

$|AC| = 6\sqrt{3}$ cm ise BC kenarının uzunluğu kaç cm dir?

A) 3 B) 4 C) $3\sqrt{3}$ D) 6 E) $6\sqrt{3}$

16.



ABC eşkenar üçgeninde

$|AP| = 12$ cm

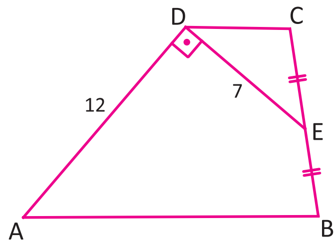
$|BP| = 5$ cm

$|CP| = 13$ cm

olduğuna göre α açısı kaç derecedir?

A) 120 B) 135 C) 150 D) 155 E) 165

17.



Yandaki şekilde,

$[DC] \parallel [AB]$

$[AD] \perp [DE]$

$|CE| = |EB|$

$|DE| = 7$ cm

$|AD| = 12$ cm

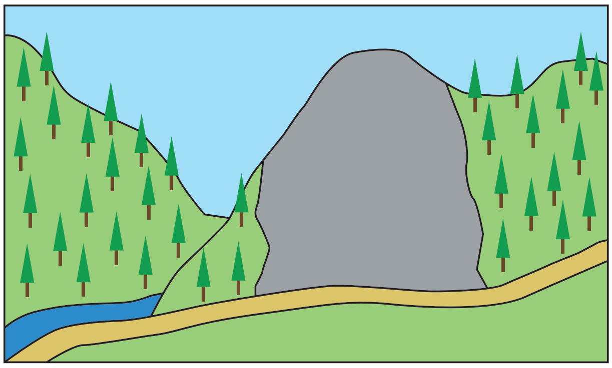
olduğuna göre A(ABCD) kaç cm^2 dir?

A) 88 B) 84 C) 75 D) 72 E) 60

D) Aşağıdaki 18-20. soruyu ortak metne ve görsele göre cevaplandırınız.

Melis ve ailesi, ormandaki piknik alanında piknik yapmaktadır. Piknik bitiminde Melis'in babası piknik ateşini söndürdüğünü düşünerek piknik alanından ayrılıyor. İki saat sonra piknik alanının kenarındaki ormanda yangın çıktığı haberi geliyor. Saatler süren söndürme çalışmaları sonucunda yangın söndürülüyor. Gün ağardığında yanan orman alanı hesaplanmak isteniyor.

Yanan alanın görüntüsü aşağıda verilmiştir.



Görselde 1 cm 500 m ye karşılık gelmektedir.

18. Görüntüdeki ölçeği kullanarak yanan orman alanının yaklaşık değerini hesaplayınız.

19. Haritaya göre yanan orman alanı tüm ormanın yaklaşık yüzde kaçıdır?

20. İki fidan arası 3 m ve bir fidanın dikim maliyeti 4 TL dir. Buna göre yanan orman alanına dikilecek fidan sayısı ve dikim maliyetinin hangi aralıkta olacağını hesaplayınız.

Fidan Sayısı	Fidan Dikim Maliyeti (TL)
50 000-100 000	200 000-400 000
100 001-200 000	400 004-800 000
200 001-300 000	800 004-1 200 000
300 001-400 000	1 200 004-1 600 000

VERİ, SAYMA VE OLASILIK

9.5. VERİ

Neler Öğreneceksiniz?

- Veri kavramını, sürekli ve kesikli veri çeşitlerini,
- Merkezi eğilim ölçülerini (aritmetik ortalama, ortanca ve tepe değer) ve hesaplamalarını,
- Merkezi yayılım ölçülerini (en büyük ve en küçük değer, açıklık, alt ve üst çeyrek, çeyrekler açıklığı ve standart sapma) ve hesaplamalarını,
- Merkezi eğilim ve yayılım ölçüleri yardımıyla gerçek yaşam problemlerini yorumlamayı,
- Farklı değişkenler üzerinden veri toplamayı ve tablo oluşturmayı,
- Ölçme sonucu elde edilen verilerin çizgi, sütun (çubuk), daire (pasta dilim), serpme, histogram ve kutu grafiklerini oluşturup yorumlamayı ve bu grafiklerden sonuç elde etmeyi öğreneceksiniz.

Veri-Grafik Hazırlama ve Yorumlamayı Öğrenmek Neden Önemlidir ?

- Günlük hayatı anlamak veri grafik hazırlama ve yorumlama bilgisine sahip olduğunuzda daha kolaydır. Örneğin sağlık sektöründeki muayene ve tahlil sonuçları, seçim analizleri, ekonomik gelişmeler neticesinde elde edilen fiyat endeksleri, büyüme, enflasyon, işsizlik, ihracat ithalat vb. verilere ait grafikler bunlar arasında sayılabilir.
- Yaşamın her anı bir veri olarak ifade edilebilir. Bazen bir grafik, dosyalar dolusu bilgiyi özetler. Yaşamı kolaylaştırmak; verilerin çözüm ve sonuçlarını elde etmek için bu grafikleri yorumlayabilmek, grafikler arasındaki ilişkiyi belirleyebilmek gerekir.
- Sonuç olarak veri ve grafikler sayesinde ulaşılan bilgiler, günlük yaşama dair bilinçlenmeyi sağlar ve hayatı kolaylaştırır.

İstatistik kelimesinin "durum ve devlet" anlamına gelen Latince "status" kelimesinden geldiği bilinmektedir. Eski yıllarda insanlar, devletin çeşitli yönlerden durumunu ifade edebilmek için birtakım bilgiler toplayıp bunların değerlendirmesini yaparak istatistiğin temelini atmıştır.

Belli amaçlar için araştırma yapılarak verilerin toplanması, toplanan verilerin tasnif edilmesi, çözümlenmesi ve değerlendirilmesi ile ilgili yöntemleri inceleyen bilime istatistik denir.

Modern istatistiğin gelişmesindeki en büyük etken, 16 ve 17. yüzyıllarda bazı bilim insanlarının olasılık teorisi üzerine çalışmaya başlamaları ile olmuştur. Bu çalışmaların öncüleri arasında Cardano (Kardano), Pascal (Paskal) ve Fermat (Ferma) vardır.

İstatistiksel problemlerin analizine yönelik önemli çalışmalardan birisi de 1766 yılında Daniel Bernoulli (Daniyel Bernuli) tarafından yapılan çiçek hastalığı ve bu hastalıktan ölen kişilerin ölüm oranları bilgilerinin analizidir. Bu analiz, aşının faydasının gösterilmesi amacıyla yapılmıştır.

İstatistik dendiğinde neredeyse bütün bilim dallarına yardımcı olan ve sorunların çözümünde uygulanan yöntemler topluluğunu kapsayan bir bilim dalı akla gelmektedir. Her beş yılda bir 20 Ekim tarihi Dünya İstatistik Günü olarak kutlanmaktadır.

Etkinlik

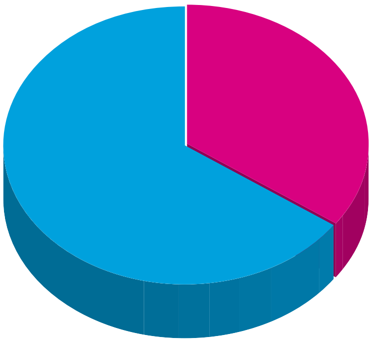
Elif Öğretmen, Biyoloji Olimpiyatları'na öğrencilerinin katılmasını istemektedir. Bu amaçla öğrencileri arasında bir seçme sınavı yapmaya karar verir. Sınava farklı şubelerden 10 öğrenci katılır. Sınav sonucunda katılan öğrencilerin puanları 10 tam puan üzerinden

"5, 7, 8, 7, 9, 7, 8, 9, 7 , 8"

şeklinde açıklanıyor. Açıklanan puanlara göre

- **Sınavın puan ortalaması kaçtır?**
- **Puanların hangi değer etrafında yığıldığı söylenebilir?**
- **En çok tekrar eden puan kaçtır?**
- **En düşük ve en yüksek puanların farkı kaçtır?**
- **Sınav puanları göz önüne alındığında öğrenci başarı seviyeleri için ne söyleyebilirsiniz?**

Cevaplarınızı, bölüm sonunda öğrendiklerinizle ilişkilendirerek gözden geçiriniz.



Günlük yaşamda sağlık, ekonomi, eğitim ve iş gibi birçok alana yönelik konularda ölçüm, sayım, deney, gözlem veya araştırma yoluyla elde edilen toplanmış ve çözümlenmiş bilgilere veri adı verilir. Sayısal değer bildiren veriler nicel, sayısal değer bildirmeyen veriler de nitel veriler olarak adlandırılır.

Matematikteki veri ise işlenmemiş ham bilgidir, istatistiksel amaçlar için kullanılır. Elde edilen veriler kullanılarak grafik çizimleri yapılır. Böylece bilgiler görsel hâle getirilerek daha kolay yorumlanabilir. Matematiksel veriler sayılarla belirtilir. Sayısal veriler iki bölüme ayrılır:

Kesikli Veri: Belirli bir aralıktaki tüm reel sayı değerlerini alamayan veri türüdür. Örneğin

- Bir kümesteki tavuk sayısı,
- Bir mobilya mağazasındaki sandalye sayısı vb. gibi.

Sürekli Veri: Ölçümler sonucu elde edilen, belirli bir aralıkta bütün gerçek sayı değerlerini alabilen veri türüdür. Genellikle ondalık sayılarla belirtilir. Örneğin

- Aile bireylerinizin boyları
- Arkadaşlarımızın kilo değerleri vb. gibi.

Bu veriler kullanılarak yapılan işlem ve çizilen grafikler sayesinde birçok konuda insanlara kolaylık sağlayacak bilgiler sunulabilmektedir.

Aile sağlığı merkezi ve aile hekimliklerinde bebek gelişiminin takibini sağlayan veri tablosu, aşı takvimi (Tablo 5.1.1), nüfus artış ve azalışını gösteren sayısal sonuçlar ve ekonomik durum grafikleri bunlara örnek olarak gösterilebilir.

Tablo 5.1.1: Sağlık Bakanlığı aşı takvimi

Aşılar	Doğumda	1. Ayın Sonu	2. Ayın Sonu	4. Ayın Sonu	6. Ayın Sonu	12. Ayın Sonu	18. Ayın Sonu	24. Ayın Sonu	İlköğretim 1. Sınıf	İlköğretim 8. Sınıf
Sarılık (Hepatit B)	I	II			III					
Verem			I							
Difteri-Boğmaca-Tetanoz			I	II	III		R			
Zatürre-Menenjit			I	II	III	R				
Kızamık-Kızamıkçık-Kabakulak						I			R	
Difteri-Boğmaca									R	
Çocuk Felci					I		II			
Erişkin Tipi Difteri-Tetanoz										R
Sarılık (Hepatit A)							I	II		
Suçiçeği						I				

Bulunduğunuz bölgeden seçtiğiniz dört ilin son üç nüfus sayımına ait bilgileri tablo yapıp yorumlayınız.

9.5.1. MERKEZİ EĞİLİM VE YAYILIM ÖLÇÜLERİ

1. Merkezi Eğilim Ölçüleri

Bir veri grubunun hangi değer etrafında toplandığını gösteren sayısal değerlerdir. Bunlar aritmetik ortalama, ortanca (medyan) ve tepe değer (mod) olarak adlandırılır.

Aritmetik Ortalama

Veri grubunda bulunan verilerin toplamının veri sayısına bölünmesi ile elde edilen değere aritmetik ortalama denir. $\overline{X}$ sembolü ile gösterilir.

$\overline{X} = \dfrac{\text{Sayısal verilerin toplamı}}{\text{Veri sayısı}}$ formülü ile hesaplanır.

1. ÖRNEK

Bir kreşte 6 gün boyunca oyun grubuna katılan çocuk sayıları sırasıyla 3, 4, 2, 8, x, 5 şeklindedir.

Bu kreşte oyun grubunda bulunan çocuk sayısının günlük ortalaması 5 olduğuna göre 5. gün oyun grubuna katılan çocuk sayısının kaç olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Verilerin aritmetik ortalaması 5 ise

$\overline{X} = 5 = \dfrac{3+4+2+8+x+5}{6} = \dfrac{22+x}{6}$

$22 + x = 30$ ise $x = 8$ olarak bulunur.

2. ÖRNEK

Babası, Can'dan 1 hafta boyunca her gün, günün aynı saatinde hava sıcaklığını ölçmesini ve bir hafta sonunda ortalama sıcaklığı hesaplamasını istiyor. Can, tüm ölçümlerini yaptıktan sonra günlük ortalama sıcaklığı 22 derece bulmuştur. Sıcaklığın 14 ve 25 derece olduğu iki günde ölçüm yapmamış olsaydı, oluşacak yeni aritmetik ortalama ne olurdu?

ÇÖZÜM

7 verinin toplamı : x

Veri sayısı : 7

Aritmetik ortalama 22 olduğundan $22 = \dfrac{x}{7} \Rightarrow x = 154$ bulunur.

Bu durumda

Yeni veri toplamı : $154 - (14 + 25) = 154 - 39 = 115$

Yeni veri sayısı : $7 - 2 = 5$

Yeni aritmetik ortalama : $\dfrac{115}{5} = 23$ olarak bulunur.

3. ÖRNEK

Tabloda 2 öğrencinin biyoloji sınavından aldıkları puanlar verilmiştir. Bu puanlara göre hangi öğrencinin biyoloji dersinde daha başarılı olduğunu bulunuz.

	1. Sınav	2. Sınav	3. Sınav
1. Öğrenci	90	65	55
2. Öğrenci	76	100	46

ÇÖZÜM

1. öğrencinin aritmetik ortalaması $\overline{X}_1$, 2. öğrencinin aritmetik ortalaması $\overline{X}_2$ olmak üzere

$$\left.\begin{aligned} \overline{X}_1 &= \frac{90+65+55}{3} = 70 \\ \overline{X}_2 &= \frac{76+100+46}{3} = 74 \end{aligned}\right\} \overline{X}_2 > \overline{X}_1 \text{ olduğundan 2. öğrenci biyoloji dersinde daha başarılıdır.}$$

Ağırlıklı ortalama: Veri grubu içindeki her bir verinin; veri ağırlığı ile çarpıldıktan sonra alınan toplamın, ağırlıklar toplamına bölünmesi ile elde edilen ortalamadır.

4. ÖRNEK

Aşağıdaki tabloda, bir sınıftaki öğrenci sayıları ve bu öğrencilerin matematik dersinden aldıkları puanlar verilmiştir. Buna göre öğrencilerin matematik puanlarının ortalamasını bulunuz.

Öğrenci Sayısı	3	4	5	8
Matematik Puanları	90	85	60	30

ÇÖZÜM

Ağırlıklı ortalama $= \dfrac{3 \cdot 90 + 4 \cdot 85 + 5 \cdot 60 + 8 \cdot 30}{8+5+4+3} = \dfrac{1150}{20} = 57,5$ bulunur.

Ortanca (Medyan) Değeri

Bir veri grubunun medyanını bulmak için veriler önce küçükten büyüğe ya da büyükten küçüğe doğru sıralanır.

Veri sayısı tek ise ortadaki veri ortanca (medyan) dır.

Veri sayısı çift ise ortadaki iki verinin aritmetik ortalaması medyandır ve Q_2 ile gösterilir.

5. ÖRNEK

15, 20, 25, 10, 15, 10, 15 veri grubunun medyanını bulunuz.

ÇÖZÜM

Veriler küçükten büyüğe sıralandığında

$$\underline{10,\ 10,\ 15},\ \underset{\text{Medyan}}{\underset{\downarrow}{15}},\ \underline{15,\ 20,\ 25}$$

sıralamasının ortasındaki veri 15 olduğundan veri grubunun medyanı $Q_2 = 15$ olur.

6. ÖRNEK

Ali'nin kütüphanesinde bulunan farklı türdeki kitaplarının sayıları 5, 10, 8, 16, 4, 13 şeklindedir. Bu veri grubunun medyanını bulunuz.

ÇÖZÜM

Veriler küçükten büyüğe doğru sıralandığında 4, 5, 8, 10 ,13 ,16 sıralaması elde edilir. Veri sayısı çift olduğundan ortadaki iki verinin aritmetik ortalaması aranan medyan değeri olur.

Veri grubunun medyan değeri:

$Q_2 = \frac{8+10}{2} = 9$ olarak bulunur.

7. ÖRNEK

x, 4, 5, 8, 12 veri grubunun medyanı 6 ise grubun aritmetik ortalamasını bulunuz.

ÇÖZÜM

Medyan 6 ise veri sıralaması 4, 5, x, 8, 12 şeklinde olur. Bu durumda

$$\left.\begin{array}{ccccc} 4 & 5 & x & 8 & 12 \\ & & \downarrow & & \\ & & 6 & & \end{array}\right\} \bar{X} = \frac{4+5+6+8+12}{5} = 7 \text{ olarak bulunur.}$$

Tepe Değer (Mod)

Ölçümler sonucu elde edilen verilerden en çok tekrar eden veriye grubun tepe değeri (modu) denir. Veri grubundaki sayıların tekrar sayılarına frekans adı verilir. O hâlde en yüksek frekans moddur.

- Bir veri grubunun birden fazla modu olabilir.
- Bir veri grubunda bütün sayılar aynı sayıda tekrar ediyorsa veri grubunun modu yoktur.

8. ÖRNEK

Aşağıdaki veri gruplarının (varsa) modunu bulunuz.

a) 3, 11, 4, 12, 4, 2
b) 9, 15, 6, 11, 6, 17, 15, 23
c) 2, 2, 5, 5, 8, 8, 4, 4
ç) 1, 1, 1, 1

ÇÖZÜM

a) 2, 3, 4, 4, 11, 12 veri grubunda en çok tekrar eden veri 4 olduğundan mod değeri 4 olur.

b) 6, 6, 9, 11, 15, 15, 17, 23 veri grubunda en çok tekrar eden veriler 6 ve 15 olduğundan veri grubunun modları 6 ve 15 olur.

c) 2, 2, 4, 4, 5, 5, 8, 8 veri grubunda tüm veriler eşit sayıda tekrar ettiği için veri grubunun modu yoktur.

ç) 1, 1, 1, 1 veri grubunda tüm veriler eşit olduğundan grubun modu 1 dir.

9. ÖRNEK

8, 6, 9, x, 9, 7 veri grubunun iki farklı modu olduğuna göre x in alabileceği değerler toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

Veri grubunda 9, iki kez tekrar ettiği için birinci mod 9 olur. İkinci mod ise 8, 6 ve 7 verilerinden herhangi birinin 2 kez tekrar etmesi sonucu oluşur. Bu durumda x, 3 farklı değer alır. Bunlar 6, 7 ve 8 dir.

Buna göre x değerleri toplamı: $6+7+8=21$ olarak bulunur.

10. ÖRNEK

Bir deneme sınavına katılan öğrenci sayıları ile yaptıkları doğru cevap sayıları aşağıdaki tabloda verilmiştir. Öğrencilerin doğru cevap sayılarının modu 19 olduğuna göre x in alabileceği en küçük tam sayı değerini bulunuz.

Öğrenci Sayısı	6	5	7	x	8	9
Doğru Sayısı	18	17	16	19	20	15

ÇÖZÜM

Mod 19 olduğundan x sayısı, diğer öğrenci sayılarından daha büyük bir değer olmalıdır. Bu durumda $x > 9$ olur. 9 dan büyük olan en küçük tam sayı arandığı için $x=10$ olarak bulunur.

Sıra Sizde

SORU

Tam sayılardan oluşan $4, 7, x, x+3, 10, y, 2y-5$ veri grubunun aritmetik ortalaması 10, modu 7 ise medyanını bulunuz.

ÇÖZÜM

Seçtiğiniz bir konuda (sınıf arkadaşlarınızın burçları, tuttukları futbol takımları vb.) tüm sınıf arkadaşlarınızın bilgilerini alınız. Aldığınız bilgilere göre bir veri grubu oluşturunuz. Veri grubunun merkezi eğilim ölçülerini bulunuz.

2. Merkezi Yayılım Ölçüleri

Bir veri grubundaki verilerin birbirine yakınlık veya uzaklığı hakkında bilgi veren ölçülerdir. Bunlar açıklık, alt çeyrek, üst çeyrek, çeyrekler açıklığı ve standart sapma olarak adlandırılır.

Açıklık

Veri grubundaki sayılar küçükten büyüğe doğru sıralandığında elde edilen en büyük sayıya veri grubunun en büyük değeri, en küçük sayıya ise veri grubunun en küçük değeri denir.

En büyük değer ile en küçük değer arasındaki fark açıklık olarak adlandırılır.

1. ÖRNEK

3, 5, 7, 11, 13, 16, 20, 25, 30 şeklinde verilen veri grubunun açıklığını bulunuz.

ÇÖZÜM

3, 5, 7, 11, 13, 16, 20, 25, 30

$\downarrow$ En küçük değer (3) — $\downarrow$ En büyük değer (30)

O hâlde veri grubunun açıklığı: En büyük değer - En küçük değer $= 30 - 3 = 27$ olarak bulunur.

2. ÖRNEK

8, 10, 6, 12, 26, 10, 5, 21, x şeklinde verilen veri grubunun açıklığı 22 olduğuna göre x in alabileceği değerler toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

Veri grubunun en büyük değeri ile en küçük değeri arasındaki fark 22 olmalıdır. Açıklık 22 olduğuna göre x ya en küçük ya da en büyük veri olmalıdır. x en küçük veri ise verilenlere göre en büyük veri 26 olur. Bu durumda

$22 = 26 - x$ olduğundan $x = 4$ bulunur. ...(1)

x en büyük veri ise en küçük veri 5 olur. Bu durumda

$x - 5 = 22$ olduğundan $x = 27$ bulunur. ...(2)

Buna göre (1) ve (2) den x değerleri toplamı: $4 + 27 = 31$ olur.

Sıra Sizde

SORU

Bir halk oyunları yarışması 5 kişiden oluşan bir jüri tarafından değerlendirilmektedir. Puanlamaya jüri üyelerinin verdiği en düşük ve en yüksek puanlar dâhil edilmeyip kalan puanların aritmetik ortalaması alınarak ekiplerin toplam puanları hesaplanacaktır. Bu yarışmaya katılan“Seyyah” ve “Ekin” adlı halk oyunları ekiplerine jüriler tarafından verilen puanlar yukarıdaki gibidir. Buna göre

Seyyah	92	86	95	85	75
Ekin	90	80	93	87	85

1. Ekip puanları ile kalan verilerin medyanlarını ve açıklıklarını hesaplayınız.
2. Ekiplere verilen jüri puanlarının (uç değerler çıkarılmadan) medyan ve aritmetik ortalama değerini hesaplayınız.
3. Bu iki durum incelendiğinde aritmetik ortalamanın ve medyanın uç değerlerden ne şekilde etkilendiğini yorumlayınız.

ÇÖZÜM

Alt Çeyrek, Üst Çeyrek, Çeyrekler Açıklığı

Bir veri grubunun alt çeyrek, üst çeyrek ve çeyrekler açıklığını bulmak için veriler, küçükten büyüğe sıralanır. Elde edilen veri grubunun medyanı bulunur. Medyandan küçük olan verilerin oluşturduğu gruba alt grup, büyük olan verilerin oluşturduğu gruba üst grup adı verilir. Alt grubun medyan değerine alt çeyrek, üst grubun medyan değerine üst çeyrek denir. Üst çeyrek ile alt çeyrek arasındaki fark çeyrekler açıklığı olarak ifade edilir.
Alt çeyrek Q_1, üst çeyrek Q_3 ve çeyrekler açıklığı da Q sembolü ile gösterilir.

3. ÖRNEK

Bir hastanenin iç hastalıkları polikliniğine 11 gün boyunca gelen hasta sayısı aşağıdaki gibidir.
35, 42, 46, 38, 33, 42, 48, 52, 30, 55, 41
Bu veri grubunun alt çeyreğini, üst çeyreğini ve çeyrekler açıklığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Veriler küçükten büyüğe doğru sıralanırsa 30, 33, 35, 38, 41, 42, 42, 46, 48, 52, 55 bulunur. Bu durumda

$$\overbrace{30, 33, 35, 38, 41}^{\text{Alt grup}}, 42, \overbrace{42, 46, 48, 52, 55}^{\text{Üst grup}}$$

35 → Alt çeyrek (Q_1)
42 → Medyan
48 → Üst çeyrek (Q_3)

Çeyrekler açıklığı: $48 - 35 = 13$ olur.

4. ÖRNEK

Salı günleri kapalı olup çalışmayan bir bayan kuaförüne 6 gün boyunca gelen müşteri sayısı 18, 27, 10, 36, 30, 45 ise bu veri grubunun alt çeyrek, üst çeyrek ve çeyrekler açıklığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Veriler küçükten büyüğe doğru sıralandığında 10, 18, 27, 30, 36, 45 olur. Veri sayısı çift olduğundan

$$\overbrace{10 \quad 18 \quad 27}^{\text{Alt grup}} \qquad \overbrace{30 \quad 36 \quad 45}^{\text{Üst grup}}$$

olur. 18 → Alt çeyrek, 36 → Üst çeyrek

Çeyrekler açıklığı $= 36 - 18 = 18$

5. ÖRNEK

Ömer Bey, çiftliğinde yerli ırk tavuklarla organik yumurta üretmektedir. 12 gün boyunca elde ettiği yumurta sayıları 14, 11, 10, 13, 8, 12, 9, 15, 11, 14, 12, 14 tür. Bu veri grubunun alt çeyrek, üst çeyrek ve çeyrekler açıklığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Veriler küçükten büyüğe doğru sıralandığında 8, 9, 10, 11, 11, 12, 12, 13, 14, 14, 14, 15 olur. Veri sayısı çift olduğundan

$$\overbrace{8 \quad 9 \quad \boxed{10 \quad 11} \quad 11 \quad 12}^{\text{Alt grup}} \qquad \overbrace{12 \quad 13 \quad \boxed{14 \quad 14} \quad 14 \quad 15}^{\text{Üst grup}}$$

Alt çeyrek $(Q_1) = \dfrac{10 + 11}{2} = 10,5$

Üst çeyrek $(Q_3) = \dfrac{14 + 14}{2} = 14$ Çeyrekler açıklığı $= 14 - 10,5 = 3,5$ olur.

6. ÖRNEK

A ve B araba galerilerinin 9 hafta boyunca sattığı araç sayıları aşağıda tablo hâlinde verilmiştir. Bu verilere göre 9. hafta sonunda daha istikrarlı satış yapan galeriyi bulunuz.

	1. Hafta	2. Hafta	3. Hafta	4. Hafta	5. Hafta	6. Hafta	7. Hafta	8. Hafta	9.Hafta
A Galerisi	4	0	3	2	2	3	2	3	0
B Galerisi	2	2	1	4	2	0	3	4	1

ÇÖZÜM

A ve B galerilerinin haftalık satış adetlerinin oluşturduğu veri grupları için

A galerisi

$$\overbrace{0, \boxed{0, 2}, 2}^{\text{Alt grup}}, \underset{\text{Medyan}}{2}, \overbrace{3, \boxed{3, 3}, 4}^{\text{Üst grup}}$$

B galerisi

$$\overbrace{0, \boxed{1, 1}, 2}^{\text{Alt grup}}, \underset{\text{Medyan}}{2}, \overbrace{2, \boxed{3, 4}, 4}^{\text{Üst grup}}$$

alt grup, üst grup ve medyan değerleri bulunur. Buradan

$$\text{Alt çeyrek (A)} = \frac{0+2}{2} = 1 \qquad \text{Alt çeyrek (B)} = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$\text{Üst çeyrek (A)} = \frac{3+3}{2} = 3 \qquad \text{Üst çeyrek (B)} = \frac{3+4}{2} = 3,5$$

Çeyrekler açıklığı $(A) = 3 - 1 = 2$ Çeyrekler açıklığı $(B) = 3,5 - 1 = 2,5$ elde edilir. Bu durumda A galerisinin çeyrekler açıklığı, B galerisinin çeyrekler açıklığından küçük olduğundan A galerisi en istikrarlı araba galerisi olarak bulunur.

7. ÖRNEK

Bir çini tabak üretim firmasının sahibi olsaydınız, çalışma günlerine göre boyadıkları tabak sayıları verilen ustalardan hangisinin daha istikrarlı olduğunu düşünürdünüz?

A ustası: 7, 9, 6, 5, 3

B ustası: 4, 8, 5, 5, 6, 8

C ustası: 5, 4, 1, 11, 7, 6, 9, 5

ÇÖZÜM

Ustalardan hangisinin daha istikrarlı olduğunu bulmak için çeyrek açıklığı hesaplandığında

A ustası

$$\boxed{3 \quad 5} \quad 6 \quad \boxed{7 \quad 9}$$

$$\text{Alt çeyrek (A)} = \frac{3+5}{2} = 4$$

$$\text{Üst çeyrek (A)} = \frac{7+9}{2} = 8$$

Çeyrekler açıklığı

$(A) = 8 - 4 = 4$

B ustası

$$4 \quad \boxed{5} \quad 5 \quad 6 \quad \boxed{8} \quad 8$$

Alt çeyrek (B) $= 5$

Üst çeyrek (B) $= 8$

Çeyrekler açıklığı

$(B) = 8 - 5 = 3$

C ustası

$$1 \quad \boxed{4 \quad 5} \quad 5 \quad 6 \quad \boxed{7 \quad 9} \quad 11$$

$$\text{Alt çeyrek (C)} = \frac{4+5}{2} = 4,5$$

$$\text{Üst çeyrek (C)} = \frac{9+7}{2} = 8$$

Çeyrekler açıklığı

$(C) = 8 - 4,5 = 3,5$

B ustasının çeyrekler açıklığı değeri en küçük olduğu için daha istikrarlı bir çalışma yaptığı görülür.

Standart Sapma

Bir veri grubundaki her bir verinin aritmetik ortalamadan ne kadar uzaklaştığı standart sapma ile belirlenir. Başka bir ifadeyle grup içindeki farklılaşmaya standart sapma adı verilir ve S ile gösterilir.

- Veri grubunun standart sapması yüksek ise veriler aritmetik ortalamadan uzak, standart sapması düşük ise veriler aritmetik ortalamaya yakın demektir.
- Standart sapmanın düşük olması veri grubunun homojen, yüksek olması ise heterojen olduğunu gösterir.
- Yapılmakta olan ölçme değerlendirme sınavlarında standart sapmanın yüksek olması seviye farklılığının yüksekliğini, standart sapmanın düşük olması bu sınavlarda seviyenin birbirine yakınlığını ifade eder.

Bir veri grubunun standart sapmasını bulmak için aşağıdaki adımları izleriz.

1. Adım :

Veri grubunun aritmetik ortalaması bulunur.

2. Adım :

Her bir verinin aritmetik ortalama ile farkının kareleri toplamı bulunur.

3. Adım :

Bulunan toplam, veri sayısının bir eksiğine bölünüp karekökü alınır.

S = Standart Sapma, $\overline{X}$ = Aritmetik Ortalama, n = Veri Sayısı

$$S = \sqrt{\frac{(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + \ldots + (X_n - \overline{X})^2}{n-1}} \text{ dir.}$$

8. ÖRNEK

Beş lise öğrencisinin öğrenim süreleri boyunca aldıkları derslere ait puanların aritmetik ortalamaları ve bu puanların standart sapmaları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

	Aritmetik Ortalama	Standart Sapma
Ali	90	2,1
Ayşe	87	3,5
Sena	90	1,9
Yusuf	85	4
Esra	87	3,8

Bu beş öğrenciden en başarılı olan üçüne başarı belgesi verilecektir. Buna göre belge verilecek öğrencileri bulunuz.

ÇÖZÜM

Aritmetik ortalamaların eşit olduğu durumlarda, karşılaştırma yapabilmek için standart sapmaya bakılır. Standart sapması küçük olan ortalama daha istikrarlı olacağından başarı belgesi verilecek öğrenciler sırasıyla Sena, Ali ve Ayşe'dir.

9. ÖRNEK

Aşağıdaki tabloda Efe ile Erol'un son 5 futbol maçında attıkları gollerin sayıları verilmiştir. Bu iki sporcudan daha istikrarlı olan tercih edilecektir. Bu kişiyi belirleyiniz.

	1. Maç	2. Maç	3. Maç	4. Maç	5. Maç
Erol	6	1	2	2	4
Efe	2	3	4	4	2

ÇÖZÜM

Erol:

I. $\overline{X} = \dfrac{6+1+2+2+4}{5} = \dfrac{15}{5} = 3$

II. $(6-3)^2 + (1-3)^2 + (2-3)^2 + (2-3)^2 + (4-3)^2 = 9+4+1+1+1 = 16$

III. $S = \sqrt{\dfrac{16}{4}} = 2$

Efe:

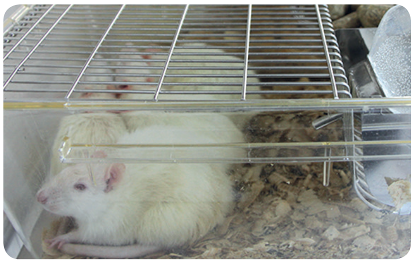
I. $\overline{X} = \dfrac{2+3+4+4+2}{5} = \dfrac{15}{5} = 3$

II. $(2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (4-3)^2 + (2-3)^2 = 1+0+1+1+1 = 4$

III. $S = \sqrt{\dfrac{4}{4}} = 1$

Erol ve Efe'nin aritmetik ortalamaları aynıdır. Bu durumda attığı gollere göre standart sapması küçük olan Efe'nin tercih edilmesi daha uygun olur.

10.ÖRNEK



Bir ilaç firması; bir hastalığı tedavi amaçlı A, B, C ilaçları için üretime başlayacaktır. Üç ülkede kobay fareler üzerinde yapılan denemeler sonucunda hastalıktan kurtulan fare sayısı aşağıdaki tabloda belirtilmiştir.

	2012	2013	2014	2015	2016
A İlacı	9	16	20	8	12
B İlacı	4	17	14	8	22
C İlacı	14	15	10	20	6

Bu verilere göre ilaç firmasının öncelikle hangi ilacın üretimine başlaması gerektiğini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\overline{X}_A = \frac{9+16+20+8+12}{5} = \frac{65}{5} = 13$$

$$S_A = \sqrt{\frac{(13-9)^2 + (13-16)^2 + (13-20)^2 + (13-8)^2 + (13-12)^2}{5-1}} = \sqrt{\frac{100}{4}} = 5$$

$$\overline{X}_B = \frac{4+17+14+8+22}{5} = \frac{65}{5} = 13$$

$$S_B = \sqrt{\frac{204}{4}} = \sqrt{51} \approx 7,14$$

$$\overline{X}_C = \frac{14+15+10+20+6}{5} = \frac{65}{5} = 13$$

$$S_C = \sqrt{\frac{112}{4}} = \sqrt{28} \approx 5,29$$

Standart sapma küçüldükçe başarısızlık riski azalır ve tedavide başarı şansı artar. Bu sebeple standart sapması küçük olan A ilacını üretmeye öncelik verilmesi uygundur.

11. ÖRNEK

a) Bir öğrenci grubunun A ve B derslerinden aldıkları puanların homojenlik durumlarının kıyaslanması,
b) Bir sınıftaki öğrencilerin bir ay boyunca en çok dinlediği müzik türünün belirlenmesi,
c) Derya'nın bir haftada çözdüğü 40 soruluk matematik testindeki 32, 35, 30, 31, 36, 34, 40 olan net sayılarını temsil eden değerin bulunması işlemlerinde aşağıdaki merkezi eğilim ve yayılım ölçülerinden hangisinin kullanılması gerektiğini belirleyiniz.

I. Standart sapma
II. Medyan
III. Mod

ÇÖZÜM

a) İki farklı veri grubunu karşılaştırmak için en uygun değerlendirme ölçüsü standart sapmadır. (a→I)
b) Bir ayda en çok dinlenen müzik demek, hem matematiksel işlem gerektirmeyen hem de en çok tekrar eden sayı demek olduğundan en uygun değerlendirme ölçüsü mod olur. (b→III)
c) Matematik net sayıları küçükten büyüğe doğru sıralandığında 30, 31, 32, 34, 35, 36, 40 tır. Kırk hariç diğer verilerin birbirine yakın olduğu görülmektedir. Bu sebeple en uygun değerlendirme ölçüsü medyan olur. (c→II)

Sıra Sizde

SORU

Bir apartmanda bulunan 9 ve 22 no.lu iki dairenin günlük doğal gaz tüketim değerleri metreküp cinsinden tablo hâlinde gösterilmiştir.

Tabloya göre her bir dairenin günlük doğalgaz tüketiminin

	Pzt.	Sal.	Çar.	Per.	Cum.	Cmt.	Paz.
9 no.lu daire	14	13	12	10	8	9	11
22 no.lu daire	12	13	11	10	9	10	12

a) Aritmetik ortalamasını,
b) Standart sapmasını,
c) Açıklığını bularak yorumlayınız.

ÇÖZÜM

Türkiye İstatistik Kurumu (TÜİK) aylık olarak Türkiye ile ilgili farklı konularda yapılan araştırma sonuçlarını açıklamaktadır. Bu araştırmalardan birini seçiniz. Seçtiğiniz araştırmaya ait veri grubunun merkezi yayılım ölçülerini bularak yorumlayınız.

ALIŞTIRMALAR-1

1. Aşağıdaki tabloda verilen terimleri tanımları ile eşleştiriniz.

1. En büyük değer 2. Medyan 3. Alt çeyrek 4. Açıklık 5. Kesikli veri 6. Mod 7. Sürekli veri 8. Standart sapma 9. Çeyrekler açıklığı 10. Aritmetik ortalama	.....	En büyük değerden en küçük değerin çıkarılması ile elde edilen sayısal veridir.
	.....	Belirli bir aralıktaki tüm gerçek sayı değerlerini alamayan veri türüdür.
	.....	Veriler sıralandığında veri sayısı tek ise ortadaki veri, veri sayısı çift ise ortadaki iki terimin aritmetik ortalamasıdır.
	.....	Ölçüm sonucunda elde edilen veri dağılımındaki her bir verinin aritmetik ortalamadan ne kadar uzaklaştığını, grup içindeki farklılaşmayı ortaya koyan ölçümdür.
	.....	Veri grubunda bulunan veri toplamının veri sayısına bölünmesi ile elde edilen değere denir.
	.....	Ölçümler sonucu elde edilen verilerden en çok tekrar eden veridir.

2. Aşağıdaki tabloda santrfor olarak oynayan Eray, Emre ve Mert'in son 5 sezonda attıkları gol sayıları verilmiştir. Santrfor transfer etmek isteyen A takımının teknik heyetinde olsanız bu 3 oyuncudan hangisini tercih edersiniz? Neden?

	1. Sezon	2. Sezon	3. Sezon	4. Sezon	5. Sezon
Eray	12	13	16	13	11
Emre	12	13	12	13	10
Mert	13	9	11	7	15

3. Aynı telefon operatörünü kullanan 8 kişilik gruba bir aylık aynı Genel Ağ paketi hediye edilmiştir.
Bu 8 kişinin Genel Ağ paketini bitirme süreleri gün olarak aşağıdaki gibidir.
15, 18, 12, 14, 18, 17, 15, 19

Bu veri grubunun

a) Tepe değerini,
b) Medyanını,
c) Açıklığını,
ç) Çeyrekler açıklığını,
d) Aritmetik ortalamasını,
e) Standart sapmasını bulunuz.

4. x, 2x+2, 3x+4 sayılarının aritmetik ortalaması 38 ise x değerini bulunuz.

5. Bir öğrencinin öğrenim gördüğü matematik, fizik, kimya ve biyoloji derslerinin haftalık ders saatleri ve bu derslerden alınan puanlar aşağıdaki gibidir.

Dersler	Ders Saati	Ders Puanı
Matematik	6	72
Fizik	2	82
Kimya	2	75
Biyoloji	3	85

Bu öğrencinin yukarıdaki derslerden aldığı puanların ağırlıklı puan ortalamasını bulunuz.

6. Bir otobüs durağında bekleyen öğrencilerin yaşları 10, 7, y, 12, 13, 10, 12 şeklindedir.

Öğrenci yaşlarının oluşturduğu veri grubunun modu 10 olduğuna göre medyanını bulunuz.

7. 3, 37, 10, x, 15, 23, 30, 8

Veri grubunun açıklığı 35 ise x in alabileceği değerlerin toplamını bulunuz.

8. 10, 14, 12, 20, 16, 12, 17 veri grubunun modu x, medyanı y ve çeyrekler açıklığı z olduğuna göre x, y ve z arasındaki sıralamayı bulunuz.

9. Aşağıdaki tabloda belli yıllara ait belediye nüfusunun genel nüfusa oranları verilmiştir. Genel nüfus, belediye nüfusu ve köy nüfusu olarak ikiye ayrılmaktadır. Belediyelik olamayan yerin köy olduğu bilindiğine göre köy nüfusunun yüzdelik oranlarının aritmetik ortalamasını bulunuz.

Sayım Yılları	Belediye Nüfusunun Genel Nüfusa Oranı
2000	%78
2008	%82
2009	%83
2010	%83
2011	%83
2014	%93

10. 7, 8, 9, 10, 3, 12, 5, m, 15 veri grubunun aritmetik ortalaması 8 ise standart sapmasını bulunuz.

11. A: 20, 30, 34

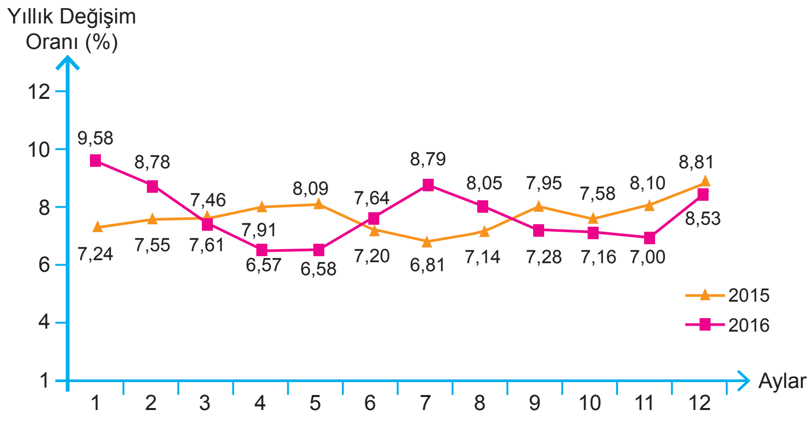
B: 12, 10, 18, 12

C: 15, 15, 24

Verilen A, B ve C veri gruplarının standart sapmalarını küçükten büyüğe sıralayınız.

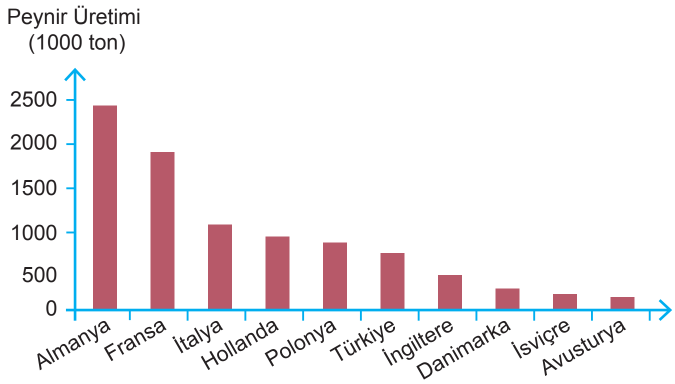
9.5.2. VERİLERİN GRAFİKLE GÖSTERİLMESİ

Grafik 5.2.1'de; TÜİK verilerine göre 2015-2016 yılları aylık değişimler göz önüne alındığında tüketici fiyatlarının (TÜFE) hangi yılda daha stabil (durağan) olduğu söylenebilir?



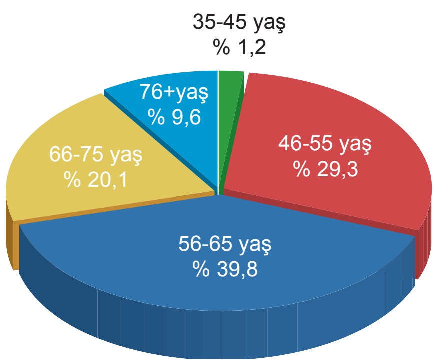
Grafik 5.2.1

Grafik 5.2.2'de, TÜİK verilerine göre, Türkiye ve bazı Avrupa Birliği ülkelerindeki peynir üretiminin sıralaması verilmiştir. Tarım ülkesi olarak bilinen Türkiye'nin sıralaması hakkında ne söyleyebilirsiniz?



Grafik 5.2.2

Grafik 5.2.3'te; TÜİK verilerine göre, Türkiye'deki emeklilerin yaş dilimlerine göre oranları verilmiştir. Sizce Türkiye'de çalışanların 45-65 yaş arasında emekli olmasının olumlu ya da olumsuz ne tür sonuçları olabilir?



Grafik 5.2.3

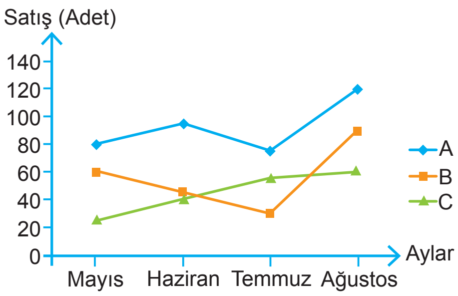
Etkinlik

Bir telefon satış mağazasındaki 3 farklı telefon markasının 4 aylık telefon satışları Tablo 5.2.1'de verilmiştir. Telefon markaları ve satışları ile ilgili oluşturulan grafik türlerini inceleyiniz.

Tablo: 5.2.1

Aylar / Markalar	Mayıs	Haziran	Temmuz	Ağustos
A	80	95	75	120
B	60	45	30	90
C	25	40	55	60
Toplam	165	180	160	270

1. Üç markanın aylara göre satış miktarlarını gösteren Grafik 5.2.4'teki çizgi grafiğini inceleyiniz. Grafiğe göre



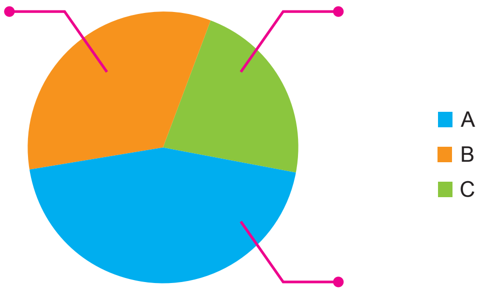
Grafik: 5.2.4

a) Dört aylık toplam satış miktarı en fazla olan markayı bulunuz.

b) Temmuz ayında en fazla satış yapan marka hangisidir?

c) Hangi markanın satış miktarındaki değişim en fazladır?

2. Üç markanın aylara göre satış miktarlarını gösteren Grafik 5.2.5'teki daire grafiğini inceleyiniz. Grafiğe göre



Grafik: 5.2.5

Satış adetlerinin yüzdelik oranlarını gösteren daire grafiği verilmiş olsaydı her bir markaya ait yüzdelik oranlar ne olurdu?

Ölçme sonucunda elde edilen verilerin nokta, çizgi, sütun gibi farklı şekillerle ifade edilmesine grafik denir. Grafikler, sayısal verileri görselleştirerek bunlar arasında karşılaştırmalar yapılabilmesine imkân tanır. Böylece sayısal veriler daha kolay anlaşılıp yorumlanır.

Yaygın olarak kullanılan grafik türleri şunlardır:

1. Histogram
2. Çizgi grafiği
3. Sütun (çubuk) grafiği
4. Daire (pasta, dilim) grafiği
5. Serpme grafiği
6. Kutu grafiği

1. Histogram Oluşturma

Gruplandırılmış bir veri topluluğunda, verilerin tekrar etme sayılarının bitişik dikdörtgen şeklinde sütunlar hâlinde gösterimidir. Veri sayılarının çok olduğu durumlarda tercih edilmektedir. Her aralık eşit olarak bölünür ve gösterilir. Her bir veri değeri için değil, belirli aralıktaki toplam veri sayısı için yorum yapılmaktadır.

Histogram oluşturulurken aşağıdaki işlemler yapılır:

1. Veri grubunun açıklığı bulunur.
2. Veri grubunun açıklığı seçilen grup sayısına bölünür.

$$\frac{\text{Açıklık}}{\text{Grup sayısı}} < \text{Grup genişliği}$$

3. Yukarıdaki eşitsizliği sağlayan en küçük tam sayı, grup genişliği olarak belirlenir.

1. ÖRNEK

19 kişilik bir sınıftaki öğrencilerin fizik dersi sınav sonuçları aşağıda verilmiştir.
43, 22, 86, 77, 24, 37, 59, 30, 64, 36, 48, 74, 41, 90, 53, 27, 40, 50, 31
Sınav sonuçlarını 7 grup olacak şekilde gösteren histogramı çiziniz ve yorumlayınız.

ÇÖZÜM

Histogramı oluşturmak için veriler küçükten büyüğe doğru sıralanır.
22, 24, 27, 30, 31, 36, 37, 40, 41, 43, 48, 50, 53, 59, 64, 74, 77, 86, 90
Grup genişliğini bulmak için açıklık seçilen grup sayısına bölündüğünde

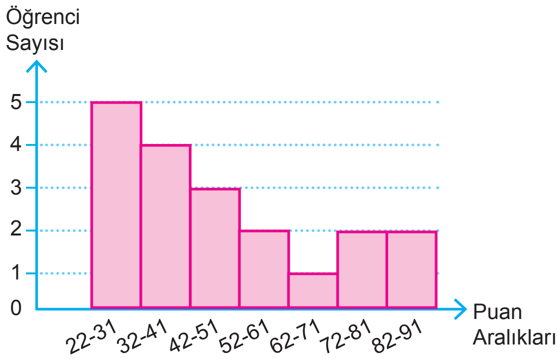
$$\text{Açıklık} = 90 - 22$$
$$= 68 \text{ olur.}$$

$$\frac{\text{Açıklık}}{\text{Grup sayısı}} < \text{Grup genişliği}$$
$$\frac{68}{7} < \text{Grup genişliği}$$
$$9,7 < \text{Grup genişliği}$$

Eşitsizliği sağlayan en küçük doğal sayı alınacağından grup genişliği 10 olur.

Veriler, grup genişliği 10 olacak şekilde tablodaki gibi gruplanır.

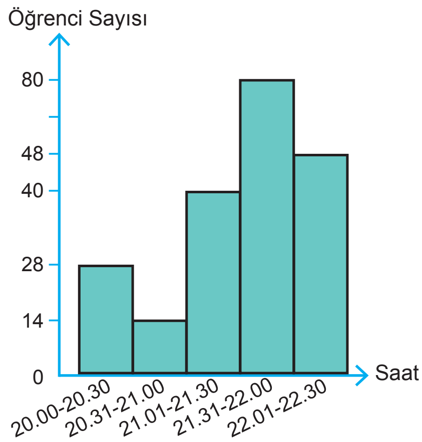
Aralık	Frekans
22-31	5
32-41	4
42-51	3
52-61	2
62-71	1
72-81	2
82-91	2



Oluşturulan histograma göre 9 öğrencinin 22-41 aralığında puan aldığı görülmektedir. Sınıfta 52 puandan yüksek alan 7 öğrenci, 51 puandan düşük alan 12 öğrenci vardır. Sınıfın yarısından fazlası 51 puandan düşük almıştır.

2. ÖRNEK

Yandaki histogramda bir okuldaki öğrencilerin uyku saatleri verilmiştir. 21.01 ile 22.30 arasında uyuyan öğrenci sayısının okuldaki toplam öğrenci sayısına oranını bulunuz.



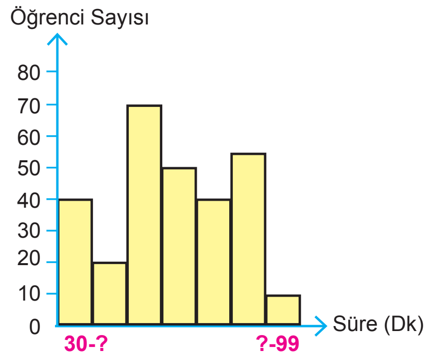
ÇÖZÜM

Okuldaki toplam öğrenci sayısı $= 14 + 28 + 40 + 48 + 80 = 210$
21.01 ile 22.30 arasında uyuyan öğrenci sayısı
$= 40 + 48 + 80 = 168$
21.01 ile 22.30 arasında uyuyan öğrenci sayısının okuldaki toplam öğrenci sayısına oranı $\dfrac{168}{210}$ olur. Buna göre
$\dfrac{168}{210} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{80}{100} = \%80$ olarak bulunur.

3. ÖRNEK

Bir okuldaki son sınıf öğrencilerinin günlük toplam test çözme süreleriyle ilgili birtakım bilgileri içeren histogram verilerine göre

a) Toplam test çözen en çok kaç öğrenci olduğunu,
b) Hangi aralıkta en az sayıda kişinin test çözdüğünü,
c) Hangi aralıkta en çok sayıda kişinin test çözdüğünü bulunuz.



ÇÖZÜM

a) Açıklık 99 – 30 = 69 bulunur. Grafikteki verilere göre 7 adet grup olduğundan grup genişliği $\dfrac{69}{7} = 9,85$ çıkar. Genişlik 10 alınır.

Buna göre grupların aralık dağılımları: 30-39, 40-49, 50-59, 60-69, 70-79, 80-89, 90-99 olduğundan 60 dakika boyunca test çözen öğrenci sayısı dördüncü sütuna karşılık gelir ve en çok 50 öğrenci vardır.

b) En az kişi sayısına sahip grubun test çözme dakika aralığı 90-99 olur.
c) En çok kişi sayısına sahip grubun test çözme dakika aralığı 50-59 olur.

2. Grafik Türleri

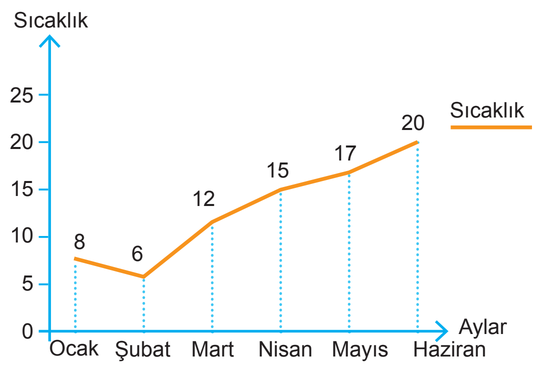
Çizgi Grafiği

Sürekli verilerin yatay ve düşey eksendeki değerleri işaretlenerek bulunan noktaların düz çizgilerle birleştirilmesi sonucunda elde dilen grafik türüdür.

Bir ilin yılın ilk 6 ayındaki ortalama sıcaklık değerleri Tablo 5.2.2 ve Grafik 5.2.6.'da verilmiştir.

Aylar	Ocak	Şubat	Mart	Nisan	Mayıs	Haziran
Ortalama Sıcaklık °C	8	6	12	15	17	20

Tablo: 5.2.2

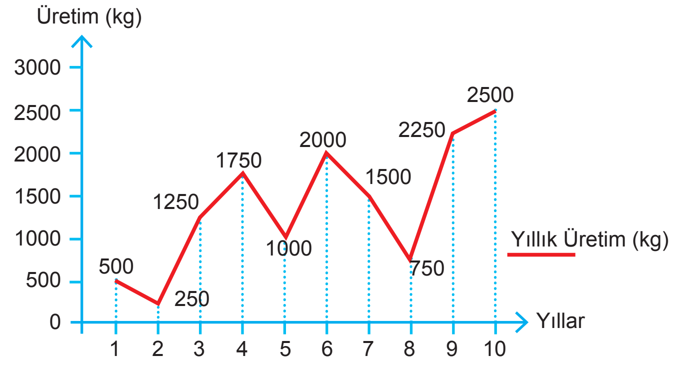


Grafik 5.2.6

Tablo ve grafik incelendiğinde şubat ayından itibaren sıcaklıkların artmaya başladığı görülmektedir.

1. ÖRNEK

Aşağıda bir fındık üreticisinin yıllara göre fındık üretim miktarlarını gösteren çizgi grafiği verilmiştir.



Buna göre

a) En az ve en çok üretim yapılan yılları bulunuz.
b) Son 10 yıldaki ortalama üretimin kaç kg olduğunu bulunuz.
c) Veri grubunun açıklığını bulunuz.

ÇÖZÜM

a) En az üretim 2. yılda, en çok üretim 10. yılda gerçekleşmiştir.

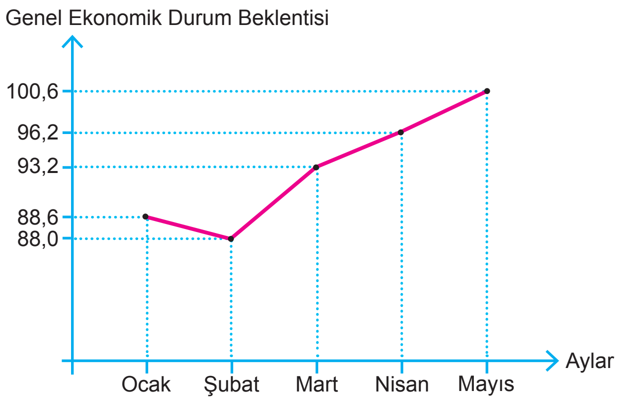
b) Son 10 yıldaki ortalama üretim:

$$\frac{500+250+1250+1750+1000+2000+1500+750+2250+2500}{10}=\frac{13750}{10}=1375\,\text{kg}$$

c) Veri tabanının açıklığı: $2500-250=2250$ kg dır.

2. ÖRNEK

Aşağıdaki grafikte, aylık tüketici eğilim anketi sonuçlarına göre tüketicilerin genel ekonomik durum beklentileri verilmiştir.



Grafiğe göre dağılımın mayıs ayındaki genel ekonomik durum beklentisinin bir önceki aya göre değişim oranını bularak yorumlayınız.

ÇÖZÜM

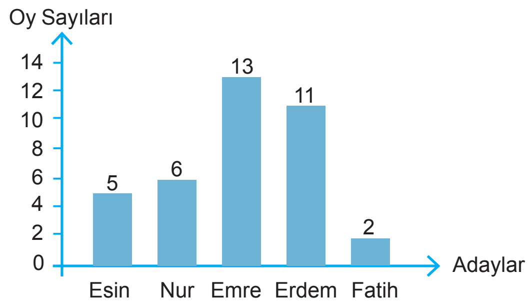
$$100,6-96,2=4,4\Rightarrow\frac{4,4\cdot 100}{96,2}\cong 4,5$$

Genel ekonomik durum beklentisi nisan ayında 96,2 iken mayıs ayında yaklaşık %4,5 oranında artarak 100,6 değerine yükselmiştir. Bu artış gelecek dönemde genel ekonomik durumun daha iyi olacağı yönünde beklentisi olan tüketicilerin sayısının bir önceki aya göre arttığını göstermektedir.

Sütun Grafiği

Belirli kategorilerin frekanslarını veya yüzdelerini göstermede kullanılan bir grafik türüdür. Ölçme sonucu elde edilen verilerin gelişimini ya da karşılaştırılmasını yapmak amacıyla sütunlar kullanılır. Karşılaştırılacak değerler yatay eksen üzerinde eşit aralıklarla belirtilir. Her bir değere karşılık gelen veri ise düşey eksende işaretlenerek sütunlar karşılık geldikleri işarete kadar uzatılır.

Grafik: 5.2.7'de sınıf başkanlığı seçiminde adayların aldıkları oyları gösteren sütun grafiği verilmiştir.



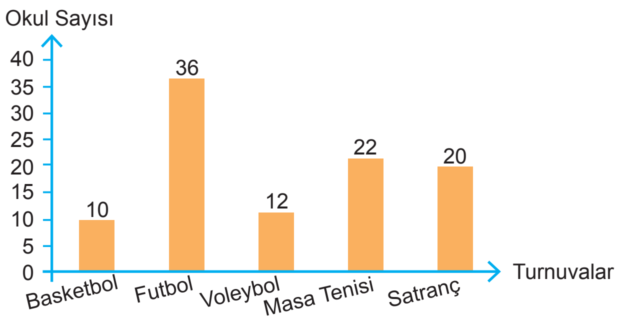
Grafik 5.2.7

Grafik incelendiğinde şu sonuçlar çıkarılabilir:

- En az oyu Fatih almıştır.
- Emre 13 oyla sınıf başkanı seçilmiştir.
- Esin ve Nur'un aldıkları oyların toplamı, Erdem'in oyuna eşittir.
- Sınıf başkanlığı seçiminde toplam 37 oy kullanılmıştır.

3. ÖRNEK

A ilinde basketbol, voleybol, futbol, masa tenisi ve satranç turnuvaları düzenlenmiştir. Her okul bu yarışmalardan sadece birine katılmıştır. Katılan ortaöğretim okul sayıları aşağıdaki grafikte verilmiştir.



Buna göre

a) Futbol ve satranç turnuvalarına katılan okul sayısının bütün okul sayısına oranını bulunuz.
b) Masa tenisi turnuvasına katılan okul sayısının tüm okul sayısının yüzde kaçı olduğunu bulunuz.
c) Turnuvalara katılan okul sayılarının aritmetik ortalamasını bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Futbol turnuvasına 36, satranç turnuvasına 20 okul katılmıştır. 5 turnuvaya katılan okul sayısı da 100 dür. Bu durumda oran

$$\frac{36+20}{10+12+20+22+36}=\frac{56}{100}=\frac{28}{50}=\frac{14}{25}$$

b) Grafiğe göre masa tenisine katılan okul sayısı 22 olduğundan istenen oran:

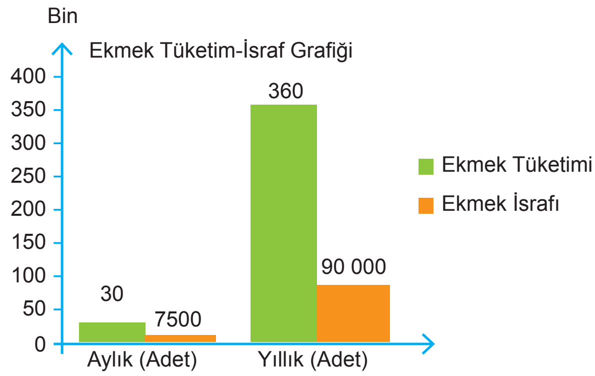
$\frac{22}{100}=\%22$ olur.

c) 5 turnuvaya katılan okul sayısı da 100 dür. Bu durumda aritmetik ortalama:

$\frac{100}{5}=20$ tir.

4. ÖRNEK

Aşağıdaki grafikte bir fabrikada tüketilen ve israf edilen ekmek sayılarını gösteren sütun grafiği verilmiştir. Aylık israf $\frac{1}{3}$ oranında azaltılırsa yıl sonunda fabrikanın satın alacağı ekmek adedini bulunuz.



ÇÖZÜM

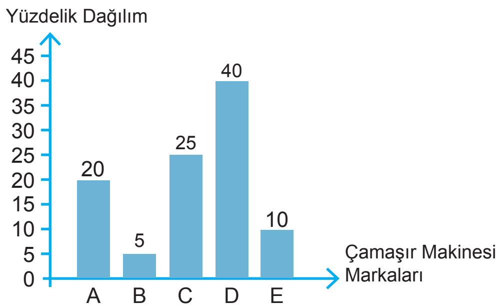
Aylık ekmek israfı 7500 adet olduğundan

$$\frac{7500}{3} = 2500 \Rightarrow 2500 \cdot 12 = 30\,000$$

$360\,000 - 30\,000 = 330\,000$ adet olur.

5. ÖRNEK

A, B, C, D ve E ile isimlendirilen beş farklı çamaşır makinesinin kullanım tercihine yönelik kullanıcı anketi yapılmıştır. Ankete 1000 kişi katılmıştır. Anket sonuçlarının yüzdelik dağılımı aşağıdaki grafikte gösterilmiştir. Grafiğe göre



a) En çok tercih edilen marka olarak hangisinin seçildiğini bulunuz.
b) A ve E markalarını seçen kişi sayılarının ortalamasını bulunuz.
c) En az ve en çok tercih edilen markaları seçen kişi sayılarının oranını bulunuz.

ÇÖZÜM

a) D markası yapılan ankette en yüksek orana sahip olduğundan en çok tercih edilen marka olur.

b) A markasını 100 kişide 20 kişi seçtiğinden bin kişide 200 kişi seçmiştir. Aynı düşünceyle E markasını da 100 kişi seçmiştir. O hâlde ortalama:

$$\frac{200+100}{2} = 150 \text{ olur.}$$

c) En çok tercih edilen D markasını 1000 kişide 400, en az tercih edilen B markasını ise 50 kişi seçmiştir.

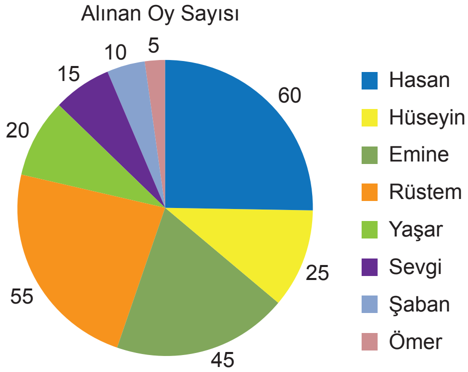
O hâlde istenen oran: $\frac{50}{400} = \frac{1}{8}$ tir.

Daire (pasta, dilim) Grafiği

Veri grubunun bütün içerisindeki oranını belirtmek için kullanılan grafik türüdür. Bütünün parçaları hakkında yorum yapılmasını sağlayan en güçlü yöntemdir. Daire grafiklerine yönelik sorularda sıklıkla kullanılan merkez açı hesabı için aşağıdaki kural uygulanır.

$$\frac{\text{İstenen veri sayısı}}{\text{Tüm veri sayısı}} = \frac{\text{Daire diliminin merkez açısının ölçüsü}}{360^\circ}$$

Grafik 5.2.8'de, A köyünde yapılan muhtarlık seçiminde azaların aldıkları oyları gösteren daire grafiği aşağıda verilmiştir.



Grafik: 5.2.8


Görsel 5.2.1: Oy kullanan vatandaş

Grafiğe göre en az oyu Ömer, en çok oyu Hasan almıştır. Kullanılan toplam oy sayısı 235 tir.

6. ÖRNEK

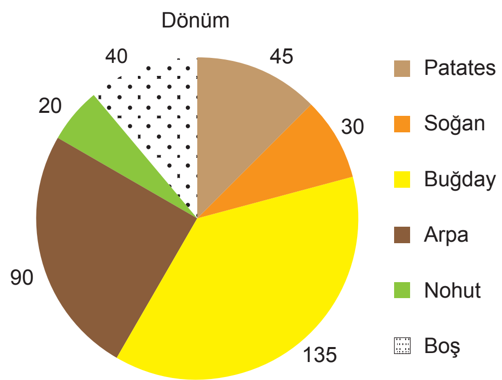
Grafikte bir çiftçinin yetiştirdiği ürünlerin dönüm değerleri verilmiştir. Grafiğe göre aşağıdaki soruları cevaplandırınız.

a) Ekilebilir arazinin $\frac{1}{4}$ üne ekilen ürünü bulunuz.

b) Buğday ekilen arazinin tüm araziye oranını bulunuz.

c) Dönüm başına 750 kg soğan elde edildiğine göre çiftçinin kaç ton soğan ürettiğini bulunuz.

ç) Bir dönümden 1,5 ton patates elde edildiğine göre patatesin kilosunu 75 kr. tan satması hâlinde çiftçinin kazancını bulunuz.



ÇÖZÜM

a) Ekilebilir arazinin $\frac{1}{4}$ ü, toplam arazinin 90 derecelik kısmı olup bu araziye ekilen ürün arpadır.

b) Buğday ekilen arazi 135 dönüm olduğundan tüm arazinin $\frac{135^\circ}{360^\circ} = \frac{3}{8}$ i olur.

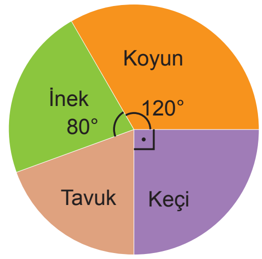
c) Soğan ekilen arazi 30 dönümdür. Dönüm başına 750 kg soğan elde edildiğine göre çiftçi,

$750 \cdot 30 = 22\,500\,\text{kg} = 22,5$ ton soğan elde etmiştir.

ç) Patates ekilen arazi 45 dönüm olduğu için

$45 \cdot 1500 \cdot 0,75 = 50\,625$ TL çiftçinin kazancıdır.

7. ÖRNEK



Yandaki grafikte bir çiftlikte bulunan hayvanların türlere göre dağılımı verilmiştir. Bu çiftlikte 51 keçi bulunduğuna göre

a) Toplam hayvan sayısını bulunuz.

b) Tavuklara ait dilimin merkez açısını bulunuz.

c) Koyunlardan 45 tanesi doğum yaptığına göre doğum yapmayan koyun sayısını bulunuz.

ç) İnek sayısının tavuk sayısına oranını bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Keçi sayısı; daire diliminde 90 derecelik dilime denk geldiğine göre bu sayı, toplam hayvan sayısının $\frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{4}$ üdür. Toplam hayvan sayısı $4 \cdot 51 = 204$ olur.

b) Tavuklara ait dilimin merkez açısı x ise
$x = 360^\circ - (120^\circ + 90^\circ + 80^\circ) = 70^\circ$ olarak bulunur.

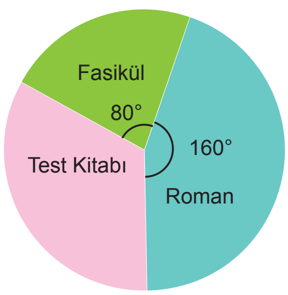
c) Koyun sayısı daire diliminde 120 derecelik dilime denk geldiğine göre bu sayı toplam hayvan sayısının $\frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{3}$ olur.
Toplam hayvan sayısı 204 bulunduğundan koyun sayısı $\frac{204}{3} = 68$ olur.
Doğuran koyun sayısı 45 olduğu için doğurmayan koyun sayısı
$68 - 45 = 23$ olarak bulunur.

ç) Hayvan sayılarının oranı, yüzdelerinin oranı ile aynı olacağından

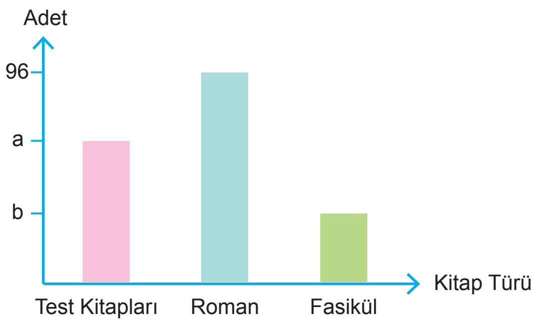
$$\frac{\text{İnek sayısı}}{\text{Tavuk sayısı}} = \frac{80^\circ}{70^\circ} = \frac{8}{7}$$

8. ÖRNEK

Grafik-1 bir kitapçıdaki kitap türlerinin dağılımını, Grafik-2 ise bu kitap türlerinden kaçar tane olduğunu göstermektedir.



Grafik-1



Grafik-2

Buna göre a+b nin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

Roman sayısı daire diliminde 160 derecelik dilime denk gelen 96 sayısını gösterdiğinden 80 derecelik dilime gelen b tane fasikül, 96 sayısının yarısı olan 48 değerine eşittir. O hâlde $b = 48$ olur.
Daire grafiğinde a sayıda test kitabına denk gelen dilimin açısı $= 360^\circ - (160^\circ + 80^\circ) = 120^\circ$ olur.

Bir derecelik dilime denk gelen kitap adeti $= \frac{96}{160}$ olur.

120°lik dilime denk gelen kitap sayısı $= 120 \cdot \frac{96}{160} = 72$ tir. O hâlde $a = 72$ olur.

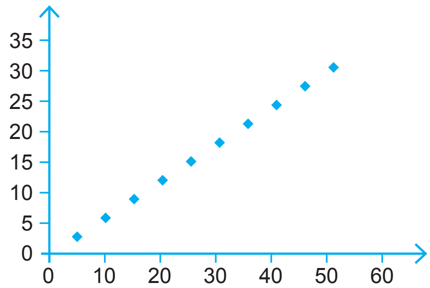
$a + b = 72 + 48 = 120$ bulunur.

Serpme Grafiği

Düşey eksendeki verinin, yatay eksendeki veriye göre değişim yönünü ortaya koymak için kullanılan grafik türüdür. Koordinat sisteminde sıralı ikili olarak gösterilir. Özellikle veri sayısının fazla olduğu durumlarda kullanılır. Genel olarak üç farklı şekli vardır.

4.1 Pozitif Yönlü Değişim

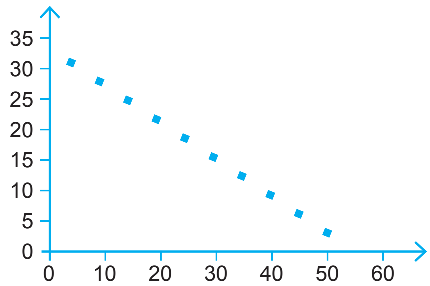
Değişkenlerden biri artarken diğerinin de arttığı değişim şeklidir (Grafik 5.2.9).



Grafik 5.2.9

4.2 Negatif Yönlü Değişim

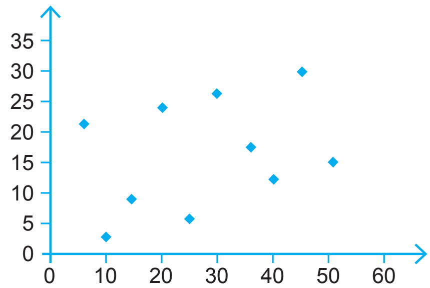
Değişkenlerden biri azalırken diğerinin arttığı değişim şeklidir (Grafik: 5.2.10).



Grafik 5.2.10

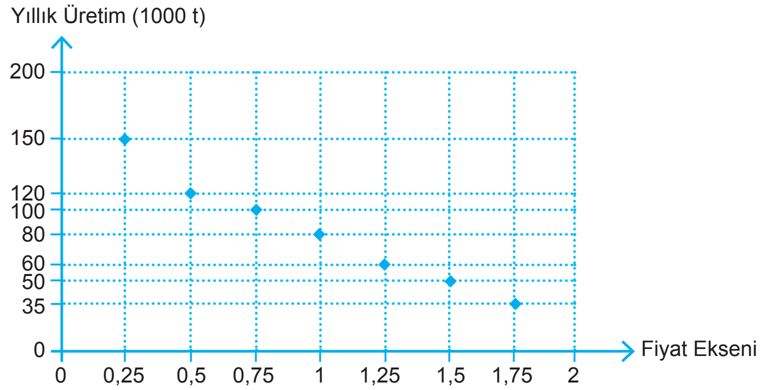
4.3 Düzensiz Değişim

Değişkenler arasında kesin olarak bir artış ya da azalışın olmadığı değişim şeklidir (Grafik: 5.2.11)



Grafik 5.2.11

Aşağıda bir ürünün yıllık üretim miktarı ile fiyat ilişkisine ait serpme grafiği verilmiştir (Grafik 5.2.12)

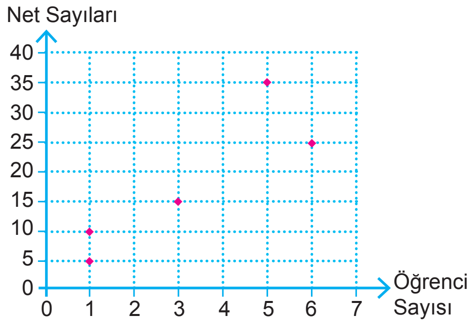


Grafik 5.2.12

Üretim miktarı ile fiyat ilişkisi incelendiğinde üretim arttığında fiyatın düştüğü görülmektedir. Bu durum negatif yönlü değişime örnektir.

9. ÖRNEK

Yanda 16 kişilik bir sınıfta yapılan YGS deneme sınavı matematik testi net sayıları ile öğrenci sayılarını veren serpme grafiği verilmiştir. Buna göre



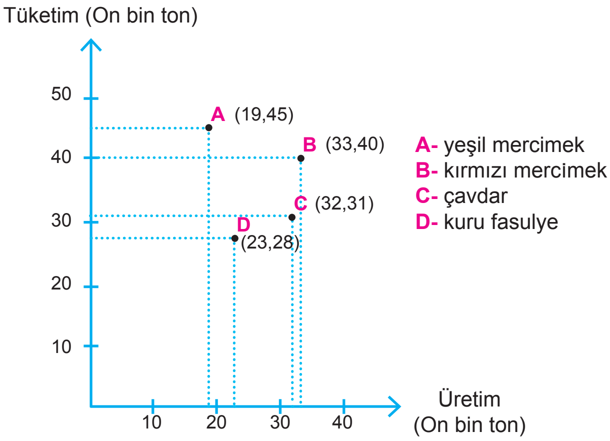
a) En fazla net yapan öğrenci sayısı ile en az net yapan öğrenci sayısını bulunuz.
b) Net sayılarının medyanını bulunuz.

ÇÖZÜM

a) En fazla net yapan (35 net) beş öğrenci, en az net yapan (5 net) bir öğrenci vardır.
b) Net sayılar sıralandığında ortadaki terim olan 25, net sayılarının medyanı olur.

10. ÖRNEK

Aşağıdaki serpme grafiğinde dört ürüne ait yıllık üretim tüketim dağılımları verilmiştir.



a) Tüketim üretim farkının en fazla olduğu ürünü bulunuz.

b) Üretimi tüketiminden fazla olan üründe üretimin yüzde kaçı tüketilmemiştir?

c) Kırmızı mercimek üretiminin tüketim ihtiyacını karşılayabilmesi için yüzde kaç arttırılması gerekir?

ÇÖZÜM

$Ü_A$: Yeşil mercimek ürününe ait üretim miktarı

T_A: Yeşil mercimek ürününe ait tüketim miktarı

a) Yeşil mercimek (A) için: $T_A - Ü_A = 45 - 19 = 26$
Kırmızı mercimek (B) için: $T_B - Ü_B = 40 - 33 = 7$
Çavdar (C) için: $T_C - Ü_C = 31 - 32 = -1$
Kuru fasulye (D) için: $T_D - Ü_D = 28 - 23 = 5$

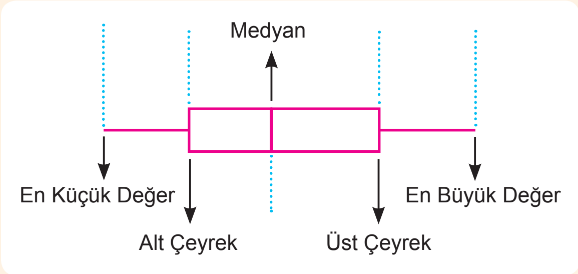
Çavdar ürününde üretimin tüketimden fazla olduğu görülmektedir. Ürün bir sonraki yılların tüketimi için saklanabilir ya da ihraç edilebilir. Diğer ürünlerde tüketim miktarının üretim miktarından fazla olduğu görülmektedir. İhtiyaç, ithalat yoluyla karşılanabilir.

b) Üretimi tüketiminden fazla olan ürün çavdardır.
$Ü_C - T_C = 32 - 31 = 1$ tüketilmeyen çavdar miktarıdır.
Tüketilmeyen çavdar miktarı 100 de x olsun.
$x = \dfrac{100 \cdot 1}{32} \cong 3$ Çavdar üretiminin yaklaşık %3 ü tüketilmemiştir.

c) Kırmızı mercimek ürününün üretim miktarı tüketim miktarından azdır. İhtiyacın karşılanabilmesi için üretim miktarının artması gerekmektedir.
$T_B - Ü_B = 40 - 33 = 7$ Üretim miktarı 100 de x arttırılmalı ise
$x = \dfrac{100 \cdot 7}{33} \cong 21$
Kırmızı mercimek üretiminin, tüketim ihtiyacını karşılayabilmesi için yaklaşık %21 artırılması gerekir.

Kutu Grafiği

Bir veri grubunun en büyük, en küçük, alt çeyrek, üst çeyrek ve ortanca değerlerinin bir dikdörtgene bitişik çizgilerle belirtildiği grafik türüdür. Bu grafik türünde belirtilen değerler etrafında verilerin yayılımı ve veri genişliği daha net gösterilmektedir (Grafik 5.2.13).



Grafik 5.2.13

- Veriler küçükten büyüğe doğru sıralanır. En küçük değer, en büyük değer, ortanca, alt çeyrek ve üst çeyrek hesaplanır.
- Sayı doğrusu çizilir. Sayı doğrusu üzerinde En küçük ve en büyük değer işaretlenerek kutu grafiğinin uç noktaları gösterilir.
- Alt çeyrek ve üst çeyrek değerleri kutunun kenarları olarak alınır. Veri grubunun ortanca değeri kutunun içine işaretlenir.
- Oluşan grafik verilerin dağılımını gösteren kutu grafiğidir.

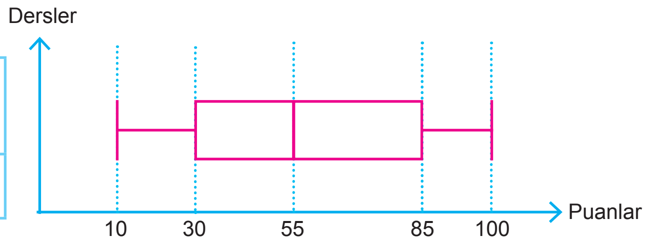
11. ÖRNEK

Dil ve Anlatım dersi yazılı sınavı sonucunda 10 öğrencinin puanları incelendiğinde medyan değerinin 55, alt çeyrek değerinin 30, üst çeyrek değerinin 85, en büyük değerinin 100, en küçük değerinin 10 olduğu görülmüştür.

Bu verilere ait tablo ve kutu grafiğini oluşturunuz.

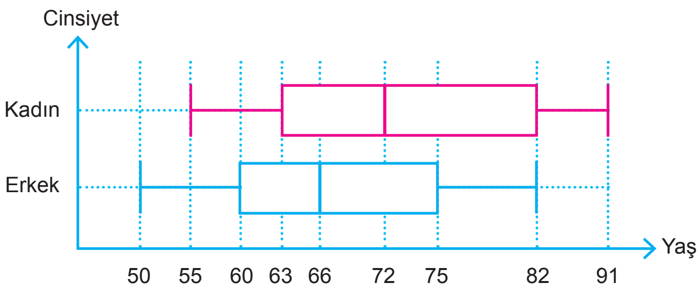
ÇÖZÜM

	En Küçük Değer	Alt Çeyrek	Medyan	Üst Çeyrek	En Büyük Değer
A Şubesi	10	30	55	85	100



12. ÖRNEK

Bir huzurevinde yaşayan kadın ve erkeklerin yaşları ile ilgili bilgiler aşağıdaki kutu grafiğinde verilmiştir. Grafiğe göre



a) Kadın ve erkeklerin yaşlarının medyanlarının arasındaki farkı,
b) Kadınların yaşlarının çeyrekler açıklığı ile erkeklerin yaşlarının çeyrekler açıklığını karşılaştırıp bunu yorumlayınız.

ÇÖZÜM

a) Kadınların medyanı Q_{2_K}, erkeklerin medyanı Q_{2_E} olmak üzere $Q_{2_K} = 72$ ve $Q_{2_E} = 66 \Rightarrow 72 - 66 = 6$ olur.
b) Kadınların alt çeyreği Q_{1_K}, üst çeyreği Q_{3_K} ve çeyrekler açıklığı Q_K olmak üzere

$Q_{1_K} = 63, Q_{3_K} = 82 \Rightarrow Q_K = 82 - 63 = 19$ olur.

Erkeklerin alt çeyreği Q_{1_E}, üst çeyreği Q_{3_E} ve çeyrekler açıklığı Q_E olmak üzere

$Q_{1_E} = 60, Q_{3_E} = 75 \Rightarrow Q_E = 75 - 60 = 15$ olur.

Kadınların çeyrekler açıklığı erkeklerin çeyrekler açıklığından büyüktür.

13. ÖRNEK

Bir mağazanın hafta boyunca sattığı ürünlerin sayısı 50, 30, 40, 50, 20, 120, 80 olarak verilmiştir. Bu verilerin

a) Medyanını,
b) Çeyrekler açıklığını bulunuz.
c) Verilere ait kutu grafiğini çizip yorumlayınız.

ÇÖZÜM

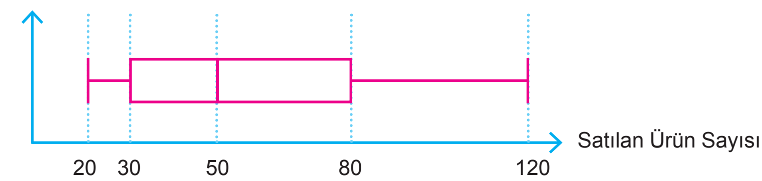
a) Veriler küçükten büyüğe doğru sıralandığında 20, 30, 40, 50, 50, 80, 120 olur. Ortadaki veri 50 olduğundan medyan 50 olarak bulunur.

b) Medyan

20 $\boxed{30}$ 40 $\boxed{50}$ 50 $\boxed{80}$ 120

Alt çeyrek (30) — Üst çeyrek (80)

Çeyrekler açıklığı: $80 - 30 = 50$

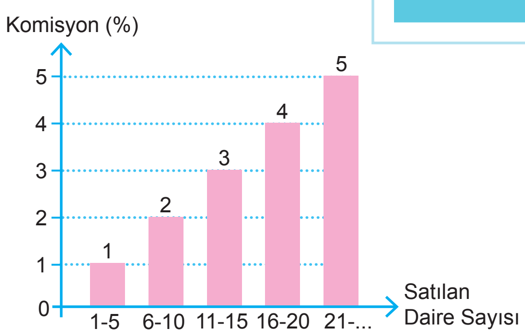
c) 

Kutu grafiği incelendiğinde verilerin en küçük değere daha yakın olduğu görülür. Veri grubunun ortancası üst çeyreğe göre alt çeyreğe daha yakındır.

Sıra Sizde

SORU

Yandaki grafikte, bir emlakçının inşaat firmasıyla yaptığı komisyon anlaşması verilmiştir. Bu dairelerin her biri 100 bin lira olduğuna göre emlakçının ayda 65 bin lira kazanabilmesi için kaç daire satması gerektiğini bulunuz.



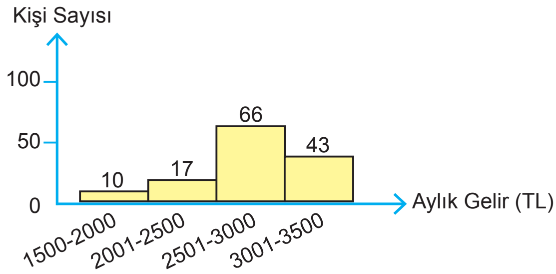
ÇÖZÜM

Son iki yılda Türkiye'ye en çok turistin geldiği 5 ülkeyi araştırınız. Bu ülkelerden gelen turist sayılarını tablo hâlinde gösteriniz. Tabloya göre verilerin daire grafiğini oluşturup yorumlayınız.

ALIŞTIRMALAR-2

1. Melis 100 sayfalık bir hikâye kitabının birinci gün 15 sayfasını, ikinci gün 25 sayfasını, üçüncü gün 20 sayfasını ve dördüncü gün 30 sayfasını okuyor. Buna göre her bir günün sonunda Melis'in okumamış olduğu sayfaların sayısını gösteren çizgi grafiğini çiziniz.

2. Aşağıdaki histogram grafiği bir gruptaki bireylerin aylık net gelir durumlarını göstermektedir. Buna göre



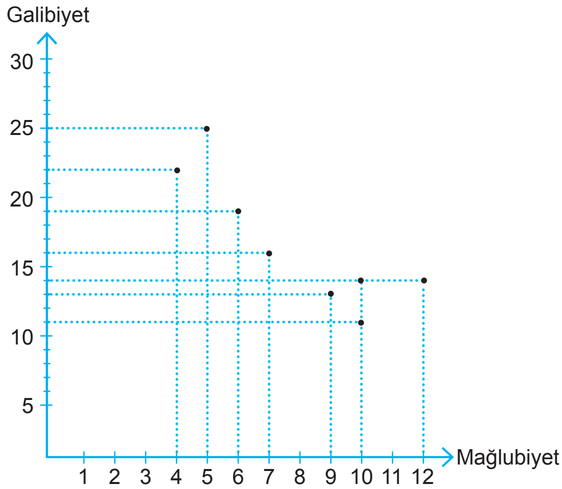
a) Gruptaki toplam kişi sayısını bulunuz.
b) Geliri 2001-2500 TL aralığında bulunan kişilerin tüm grubun yüzde kaçı olduğunu bulunuz.

3. Bir öğrencinin ay boyunca girdiği kırkar soruluk deneme sınavlarındaki matematik ve Fen Bilimleri ders netleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Verilere ait serpme grafiğini çizerek veriler arasındaki ilişkinin türünü belirtiniz.

	Deneme Sınavları					
	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Matematik	25	20	30	27	30	35
Fen Bilimleri	20	17	25	23	26	30

4. Türkiye Birinci Lig 2015-2016 Sezonu'nda ilk 8 takımın galibiyet ve mağlubiyet durumunu gösteren serpme grafiği aşağıda verilmiştir.



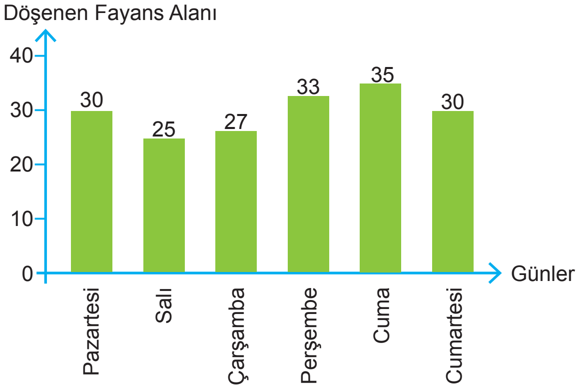
Grafiğe göre galibiyet sayılarının oluşturduğu veri grubunun medyanı ile mağlubiyet sayılarının oluşturduğu veri grubunun aritmetik ortalamasının toplamını bulunuz.

5. 8 kişilik bir öğrenci grubunun matematik dersi puanları aşağıda verilmiştir.

50, 65, 70, 40, 80, 62, 90, 74

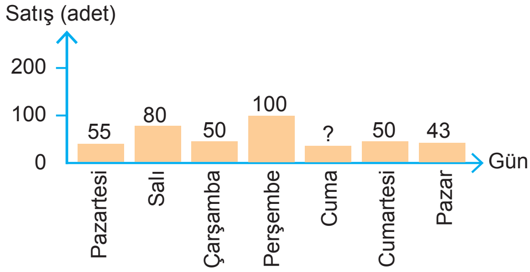
Verilere karşı gelen kutu grafiğini çizip yorumlayınız.

6. Aşağıdaki grafikte bir fayans ustasının altı gün boyunca döşediği fayans alanının sayısal değerleri m^2 olarak verilmiştir.

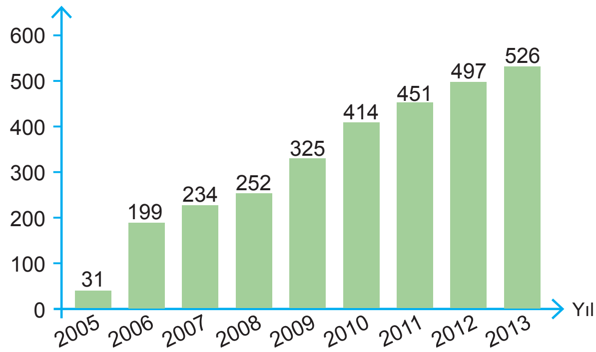


Veriler dairesel grafik olarak gösterildiğinde salı günü döşenen alana karşılık gelen merkez açının ölçüsünün kaç derece olduğunu bulunuz.

7. Aşağıdaki grafik, bir marketin hafta boyunca sattığı ekmek sayısını göstermektedir. Veriler daire grafiği olarak gösterilseydi cuma günü satılan ekmek sayısına ait daire diliminin merkez açısı 36° olacaktı. Buna göre cuma günü satılan ekmek sayısını bulunuz.

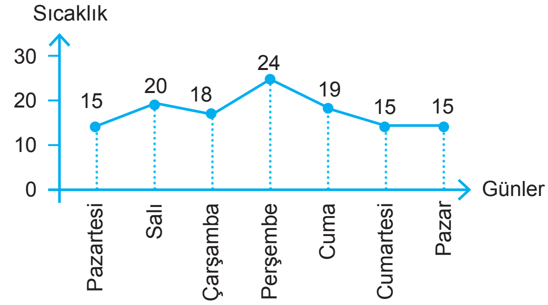


8. Atık pil toplama miktarı ile ilgili grafik aşağıda verilmiştir.



Grafiğe göre atık pil toplamadaki artış hızının en az ve en çok olduğu yıl aralıklarını bulunuz.

9. Aşağıdaki grafikte bir ilin kasım ayının ilk haftasına ait sıcaklık değerleri verilmiştir.



Buna göre

a) Bu ilin haftalık sıcaklık değerlerinin ortalamasını bulunuz.

b) Bu ilin haftalık sıcaklık değerlerinin standart sapmasını bulunuz.

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

A) Aşağıdaki 1-4. cümlelerde boş bırakılan yerlere uygun sözcük ya da değerleri yazınız.

1. Veri grubundaki tüm verilerden etkilenen merkezi eğilim ölçüsü .... dır.

2. Dizideki terim sayısı tek ise ....tam ortada bulunan sayıdır.

3. .... ölçüleri veri grubunun homojen veya heterojen olup olmadığı hakkında bilgi verir.

4. Bir değişkenin bir bütün içerisindeki oranını belirlemek için kullanılan en uygun grafik türü .... olur.

B) Aşağıda 5. soruda numaralar ile verilen ifadeleri, harf ile verilen ifadelerle eşleştiriniz.

5.

Altı sayının aritmetik ortalaması 25 dir. Bu sayılardan 19 olanı çıkartılıp yerine 61 eklendiğinde yeni aritmetik ortalama	1.	a)	90°
Mevlüt Bey 6 aileye Ramazan yardımı yapmak istemektedir. İhtiyaç sahibi olduklarını mahalle muhtarına bildiren ailelerin birey sayıları 4, 6, 7, 8, 3, 4 olduğuna göre aile birey sayılarının oluşturduğu veri grubunun ortancası	2.	b)	32
		c)	120°
Bir şehrin haftalık sıcaklık değerleri 1, 13, 15, 10, 9, 6 ve $7^\circ C$ ölçülmüştür. Bu veri grubunun açıklığı	3.	ç)	9
		d)	14
Bir çiftçi bahçesinin % 30 una soğan, % 40 ına buğday, % 5 ine salatalık ve % 25 ine ıspanak ekiyor. Bu çiftçinin ıspanak ekimi yaptığı alanın daire grafiğinde karşı geldiği açı değeri	4.	e)	5

C) Aşağıda 6-9. açık uçlu soruların cevaplarını boş bırakılan yerlere yazınız.

6. Hasan'ın matematik dersinden girdiği 5 sınav puanının ortalaması 65 tir. Hasan'ın matematik ortalamasını 70 yapması için 6. sınavdan kaç puan alması gerekir?

7. 4, 5, y, 8, 13, 15 veri grubunun açıklığı 14 olduğuna göre y nin alabileceği değerler toplamını bulunuz.

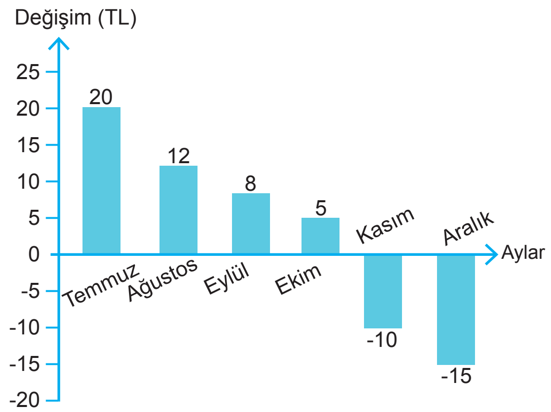
8. Bir öğrencinin yapılan 5 deneme sınavı sonucunda yaptığı yanlış sayıları sırasıyla

7, 5, 3, 4, 1 şeklindedir. Bu durumda oluşan veri grubunun standart sapması kaç olur?

9. 2, 5, 8, 5, 2, 7, 5 grubunun modu, medyanı, alt çeyreği, üst çeyreği ve çeyrekler açıklığından oluşan yeni veri grubunun aritmetik ortalaması kaçtır?

Ç) Aşağıda 10-19. çoktan seçmeli soruları okuyunuz ve doğru seçeneği işaretleyiniz.

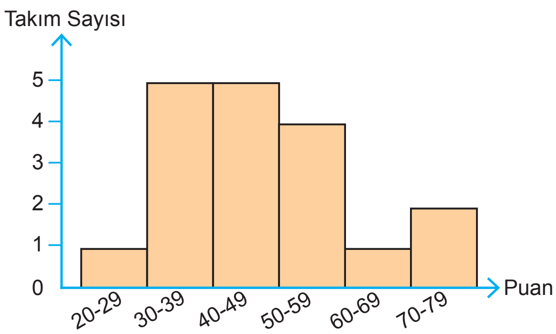
10. Aşağıdaki sütun grafiği, bir giysinin verilen aylara göre satış fiyatındaki değişim miktarını göstermektedir. Alış fiyatı 100 TL olan bir giysi, haziran ayında %10 kârla satılmıştır. Bu malın aralık ayındaki satış fiyatı kaçtır?



A) 160 TL B) 150 TL C) 145 TL

D) 130 TL E) 125 TL

11. 2015-2016 Spor Toto Süper Ligi Sezonu'nda oluşan puan durumunu gösteren histogram aşağıda verilmiştir.



Grafiğe göre 60 puanın altında puan toplayan takım sayısı, 59 puanın üstünde puan toplayan takım sayısının kaç katıdır?

A) 5 B) 4 C) 3

D) 2 E) 1

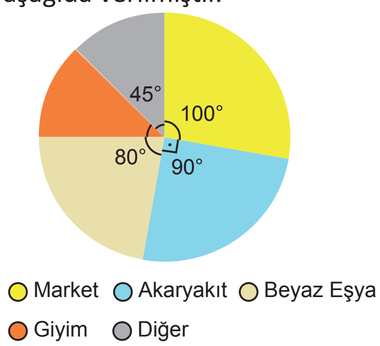
12. Aşağıdaki tabloda A ve B illerinde 7 ay boyunca düzenlenen sanatsal etkinlik sayıları verilmiştir.

	Ocak	Şubat	Mart	Nisan	Mayıs	Haziran	Temmuz
A İli	8	10	11	8	6	12	15
B İli	5	7	6	7	10	9	12

Tabloya göre aşağıdaki ifadelerden hangisi <u>yanlıştır</u>?

A) A ilindeki verilerin aritmetik ortalaması, B ilindeki verilerin aritmetik ortalamasından büyüktür.
B) B ilindeki verilerin medyanı, A ilindeki verilerin medyanından küçüktür.
C) A ve B illerine ait verilerin modları toplamı 15 tir.
D) A ve B illerine ait verilerin çeyrekler açıklığı farklıdır.
E) A ve B illerine ait verilerin açıklıkları farkı 2 dir.

13. Kazım Bey'in ekim ayında kredi kartı ile yaptığı harcamaların dağılımını gösteren daire grafiği aşağıda verilmiştir.



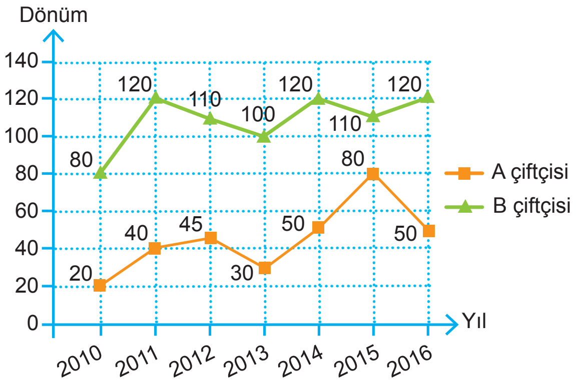
Ekim ayı kredi kartı borcu 2700 lira olduğuna göre aşağıdaki ifadelerden hangileri doğrudur?

I. Giyim harcaması 300 liradır.
II. Akaryakıt harcaması, giyim harcamasının 2 katıdır.
III. Market harcaması 750 liradır.
IV. Beyaz eşya harcaması tüm harcamaların $\frac{1}{9}$ udur.

A) I-II B) I-III C) II-III-IV

D) III-IV E) II-III

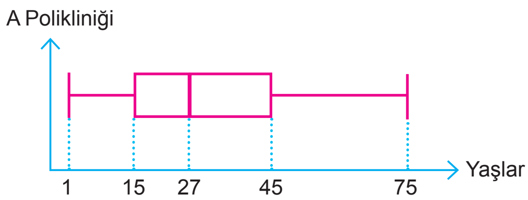
14. İki çiftçinin yetiştirdikleri ürünlerin 2010-2016 yılları arasında ekildiği arazilerin dönüm değerleri aşağıdaki çizgi grafiğinde verilmiştir.



Buna göre aşağıdakilerden hangisi <u>yanlıştır</u>?

A) İki çiftçinin ektiği dönüm değerlerinin ortancaları farkı 65 tir.
B) B çiftçisi A ye göre daha istikrarlı ekim yapmıştır.
C) İki çiftçinin ektiği dönüm değerlerinin modları farkı 40 tır.
D) A çifçisinin ektiği dönüm değerlerinin açıklığı, B çiftçisinin açıklığından fazladır.
E) A çiftçisinin ektiği dönüm değerlerinin ortalaması 45 dönümdür.

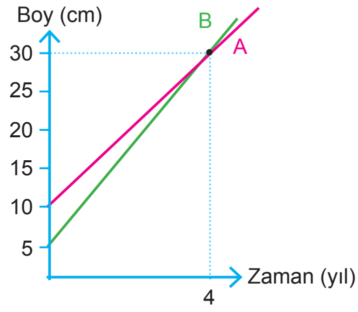
15. Aşağıdaki kutu grafiğinde bir poliklinikte muayenesi yapılan hastaların yaş dağılımları gösterilmiştir. Buna göre veri grubunun medyanı ile çeyrekler açıklığının toplamı kaçtır?



A) 45 B) 52 C) 57

D) 60 E) 65

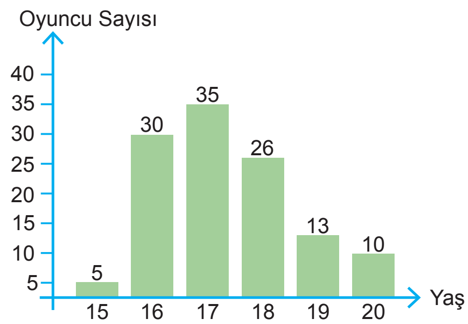
16. Aşağıdaki grafikte A ve B bitkilerinin boylarının yıllara göre uzama miktarları verilmiştir.
Dikildikten kaç yıl sonra bitkilerin boyları farkı 20 cm olur?



A) 18 B) 20 C) 23

D) 25 E) 30

17. Aşağıdaki grafikte bir voleybol turnuvasına katılan oyuncuların sayısı ve yaşları verilmiştir.



Oyuncuların yaşlarıyla hazırlanan bir veri grubunun sırasıyla modu, medyanı ve çeyrekler açıklığı hangi seçenekte doğru olarak verilmiştir?

A) 17-18-1
B) 16-17, 5-2
C) 18-17-3
D) 18-17, 5-1
E) 17-17-2

18. Bir belediye otobüsünün kasım ayı için bir duraktan geçişteki gecikme süresi ile gün sayısı aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Gün Sayısı	10	5	8	4	3
Gecikme Süresi (dk)	5	0	3	X	7

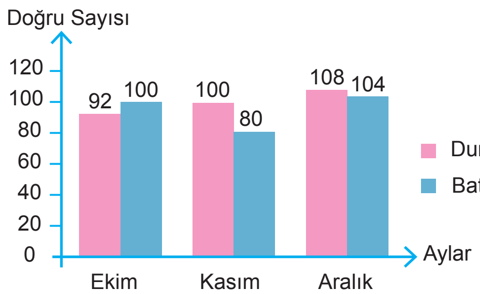
Buna göre kasım ayı gecikme süresi ortalama 4,5 dakika ise X kaçtır?

A) 15 B) 10 C) 8

D) 5 E) 3

19. Aşağıdaki sütun grafiğinde Duru ile Batu'nun 3 aylık 120 şer sorudan oluşan matematik testinden yapmış oldukları doğru sayıları verilmiştir.

Duru ve Batu ocak ayında yeni bir deneme sınavına girecektir. Bu sınavla birlikte Duru ve Batu'nun doğru sayılarının ortalaması hesaplanacaktır.



Matematik Testi

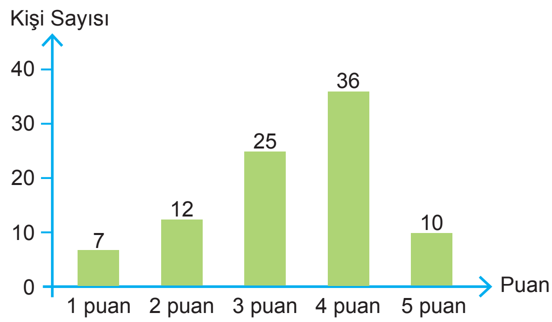
Bu ortalamanın Duru'nun ilk üç deneme sınavındaki ortalamasına eşit olması için yaptıkları doğru sayıları aşağıdakilerden hangisidir?

A) Duru 100, Batu 104
B) Duru 104, Batu 108
C) Duru 100, Batu 116
D) Duru 110, Batu 108
E) Duru 108, Batu 106

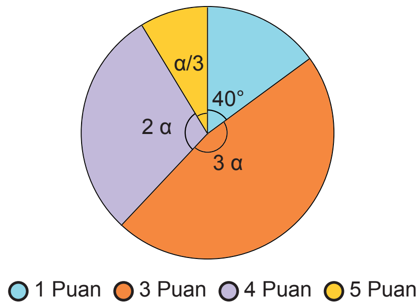
D) 20-21. soruları aşağıda verilen metne ve grafiğe göre cevaplandırınız.

Bir firma ürettiği A ve B isimli 2 farklı el sabununu test etmek için bir grup seçiyor.

Bu gruptan her iki ürünü de kullandıktan sonra ürünlere tarafsız olarak 1-2-3-4-5 puanlarından birini vermeleri isteniyor. Anket sonuçlarına göre A ve B sabunlarının puanlarını gösteren grafikler aşağıda verilmiştir.



A Sabunu Anket Sonuç Grafiği



B Sabunu Anket Sonuç Grafiği

20. B ürününe 3 puan veren kişi sayısı kaçtır?

A) 35 B) 40 C) 45

D) 50 E) 55

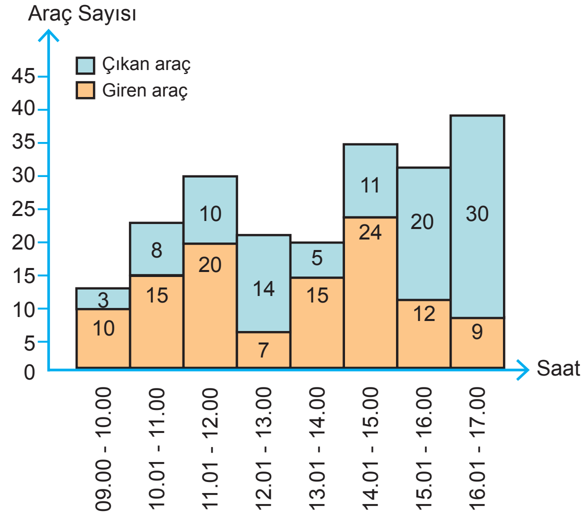
21. A ürününe verilen puanlar toplamından B ürününe verilen puanlar toplamının farkı aşağıdakilerden hangisidir?

A) 9 B) 10 C) 11

D) 12 E) 13

E) 22-26. soruları aşağıda verilen metne ve grafiğe göre cevaplandırınız.

Aşağıdaki grafik, boş bir otoparka belirtilen saatlerde giriş çıkış yapan araç sayısını göstermektedir.



22. 13.00'te otoparkta bulunan araç sayısı kaçtır?

A) 14 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

23. 09.00-17.00 aralığında, saatte ortalama kaç araç otoparka giriş yapmıştır?

A) 15 B) 14 C) 12 D) 10 E) 9

24. Otoparka giren ve otoparktan çıkan araç verilerinin medyanlarının aritmetik ortalaması aşağıdakilerden hangisidir?

A) 24 B) 21 C) 18 D) 15 E)12

25. 12.00 itibariyle otoparkta bulunan araç sayısının gün boyunca otoparka giren araç sayısına oranı kaçtır?

A) $\frac{3}{14}$ B) $\frac{5}{14}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{9}{14}$ E) $\frac{11}{14}$

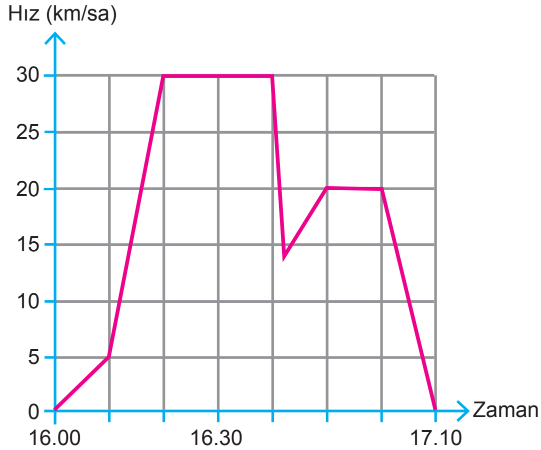
26. Hangi saatten itibaren otoparkta en fazla araç bulunur?

A) 12.00 B) 13.00 C) 14.00 D) 15.00 E) 16.00

F) 27-30. soruları aşağıda verilen grafiğe ve metne göre cevaplandırınız.

Tuna, ormanda bisiklet kullanmaktadır. Bu esnada önüne bir tavşan fırlar. Tavşana çarpmamak için ani bir fren yapar. Tavşan, ezilmekten son anda kurtulur. Tuna, bir hayvansever olduğundan tavşanı korkuttuğunu düşünerek üzüntüyle eve döner.

Yandaki grafik Tuna'nın hız değerlerini göstermektedir. Grafiğe göre



27. Tuna, bisiklet kullanırken kaç dakika sabit hızla yol almıştır?

28. Tuna, tavşana çarpmamak için fren yapmaya başladığı ana kadar kaç dakika geçmiştir?

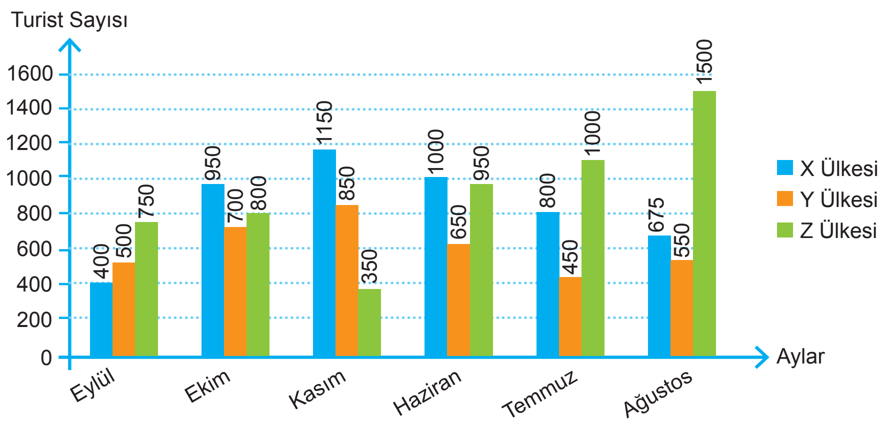
29. Tuna'nın hızını en çok arttırdığı zaman dilimi hangisidir?

A) 16.05-16.10
B) 16.05-16.15
C) 16.10-16.20
D) 16.20-16.40
E) 16.40-16.50

30. Tuna'nın tavşan ile karşılaştığı yere kadar aldığı yol ile dönüşte aldığı yolu karşılaştırıp yorumunuzu yazınız.

G) 31-34. soruları aşağıda verilen grafiğe göre cevaplandırınız.

Aşağıdaki grafikte bir A şehrine gelen turist sayıları üç farklı ülkeye göre ay bazında verilmiştir.



31. Kasım ayında X ülkesinden A şehrine gelen turist sayısı, Z ülkesinden gelen turist sayısının yaklaşık kaç katıdır?

32. Z ülkesinden gelen turist sayısı hangi ayda Y ülkesinden gelen turist sayısından azdır?

33. X ülkesinden gelen turist sayısı kasım ayından itibaren düşüş gösterdiğine göre takip eden yılın eylül ayında bu ülkeden yaklaşık kaç turist gelebileceğini bulunuz.

34. Bir turist, aylık ortalama 1250 TL harcama yaptığına göre A şehrinin ekonomisine temmuz ayında giren para miktarını bulunuz.

SEMBOLLER VE ANLAMLARI

Sembol	Anlamı	Sembol	Anlamı
p	p önermesi	$[a,b]$	a b kapalı aralığı
$\equiv$	Denktir	$(a,b]$	a dan açık b den kapalı aralık
$\exists$	Bazı, en az bir	$[a,b)$	a dan kapalı b den açık aralık
$\forall$	her	(a,b)	a b açık aralığı
$\wedge$	ve	$(-\infty,\infty)$	Sayı doğrusu
$\vee$	veya	$\lvert x \rvert$	x in mutlak değeri
$\Rightarrow$	ise	x^n	x in n. kuvveti
$\Leftrightarrow$	ancak ve ancak	$\sqrt[n]{x^m}$	n. dereceden kök x in m. kuvveti
$\veebar$	ya da	$x^{\frac{m}{n}}$	x in $\left(\frac{m}{n}\right)$. kuvveti
$\in$	Elemanıdır	%	yüzde
$\notin$	Elemanı değil	$\frac{a}{b}$	a nın b ye oranı (oran)
$\varnothing$	Boş küme	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$	orantı
$\subseteq, \subset$	Alt küme	EKOK	En küçük ortak kat
$\supseteq, \supset$	Kapsar	EBOB	En büyük ortak bölen
$\not\subset$	Alt küme değil	$\overset{\triangle}{ABC}$	ABC üçgeni
s(A)	A kümesinin eleman sayısı	$\widehat{ABC}$	ABC açısı
$\cup$	Birleşim	$[AB]$	AB doğru parçası
$\cap$	Kesişim	$\lvert AB \rvert$	AB doğru parçasının uzunluğu
$A-B$	A fark B	$\cong$	Eşlik
A'	A kümesinin tümleyeni	$\overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{DEF}$	ABC üçgeni eştir DEF üçgeni
$A \times B$	A kartezyen çarpım B	n_A	A açısının açıortayı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi	V_a	a kenarının kenarortayı
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi	G	Ağırlık merkezi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi	h_a	a kenarının yüksekliği
$\mathbb{Q}'$	İrrasyonel sayılar kümesi	$\sim$	Benzerlik
$\mathbb{R}$	Gerçek sayılar kümesi	$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{DEF}$	ABC üçgeni benzerdir DEF üçgeni
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tam sayılar kümesi	sinx	x in sinüsü
$\mathbb{Q}^+$	Pozitif rasyonel sayılar kümesi	cosx	x in kosinüsü
$\mathbb{R}^+$	Pozitif gerçek sayılar kümesi	tanx	x in tanjantı
$\mathbb{Z}^-$	Negatif tam sayılar kümesi	cotx	x in kotanjantı
$\mathbb{Q}^-$	Negatif rasyonel sayılar kümesi	$A(\overset{\triangle}{ABC})$	ABC üçgeninin alanı
$\mathbb{R}^-$	Negatif gerçek sayılar kümesi	$\overline{X}$	Aritmetik ortalama
$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	Gerçek sayıların kartezyen çarpım kümesi	S	Standart sapma
$\mathbb{R}^2$	Kartezyen koordinat sistemi	Q	Çeyrekler açıklığı
$<$	Küçüktür	Q_1	Alt çeyrek
$\leq$	Küçüktür veya eşittir	Q_2	Ortanca
$>$	Büyüktür	Q_3	Üst çeyrek
$\geq$	Büyüktür veya eşittir	$\approx$	Yaklaşık

ALIŞTIRMA ÇÖZÜMLERİ

MANTIK

ALIŞTIRMALAR-1

1. a) 1, b) 0, c) Önerme değil, ç) 0**,** d) Önerme değil, e) 1

2.

$p \not\equiv q$	$q \not\equiv r$
$q \equiv s$	$s \not\equiv r$
$p \equiv r$	$p \not\equiv s$

3. p': "$5-3 \neq 2$"

q': "316 sayısı 5 ile bölünür."

r': "$2^4 \neq 4^2$"

s': "$\sqrt{16}-3\sqrt{4} \neq 2$"

4. $p \equiv 1,\ q \equiv 0,\ r \equiv 0$

5. 1

6. 1

7. p

9. $(p \vee q) \vee r$ Lamba yanar.

10. 21

11. a) Karşıtı: "Bir hayvan 2 ayaklı ise tavuktur."

Tersi: "Bir hayvan tavuk değilse 2 ayaklı değildir."

Karşıt tersi: "Bir hayvan 2 ayaklı değilse tavuk değildir."

b) $(x \neq -1) \Rightarrow (x^3 \neq -1)$

14. a) 1, b) 1, c) 0, ç) 1**,**

ALIŞTIRMALAR-2

1. a) p: "$\exists x \in \mathbb{Z}, 3x-7=11$" olduğundan $p \equiv 1$ tir.

b) q: "$\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 = 36$" olduğundan $q \equiv 0$ tir

c) r: "$\forall x \in \mathbb{Q}, x \neq \frac{m}{n}$ $(m,n \in \mathbb{Z};\ (m,n)=1)$" olduğundan $r \equiv 0$ tir.

2.

Sözel ifade
$p'(x)$: "4 ten küçük olan bazı rasyonel sayıların karesi 16 dan büyüktür."
$q'(x)$: "Her tam sayının 2 eksiğinin karesi sıfır veya pozitiftir."
$r'(x)$: "Bazı tam sayıların karesi 8 den küçük ise bu sayının 1 eksiği pozitiftir."
$s'(x)$: "2 nin her rasyonel sayı kuvveti pozitiftir."

3.

Değili
$p'(x)$: "$\forall x \in \mathbb{N}, x-1<0$"
$q'(x)$: "$(\exists x \in \mathbb{Z}, 4x+3=-5) \wedge (x \neq -2)$"
$r'(x)$: "$(\exists x \in \mathbb{Q}, x<0) \wedge (\forall x \in \mathbb{Q}, 2-x \geq 0)$"
$s'(x)$: "$(\forall x \in \mathbb{N}, x^3 \geq 0) \vee (\exists x \in \mathbb{N}, x^2 < 0)$"

4. a) $\{x \mid x<4, x \in \mathbb{N}\}$ b) $\{-1\}$

c) $\{(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)\}$

5. I.0-II.1-III.1

6. a) Hipotez: "$5x-7=18$"

Hüküm: "$x-1=4$"

b) Hipotez: ABCD dörtgeni bir karedir.

Hüküm: ABCD dörtgeninin her bir açısı 90° dir.

KÜMELER

ALIŞTIRMALAR-1

1. D, **2.** 19, **3.** B,E, **4.** I, IV. ve VI., **5.** 256, **6.** 8, **7. a)** 16 **b)** 8 **c)** 8 **ç)** 24 **d)** 24 **e)** 8, **8.** 9, **9.** 32, **10.** C ve E, **11.** 240

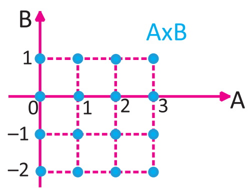
ALIŞTIRMALAR-2

1. 7, **2.** 95, **3.** 21, **4.** 17, **5.** 20**, 6. a)** En çok 16, en az 12 **b)** En çok 17, en az 13, **7.** 5, **8.** A, **9.** 6, **10.** 15

ALIŞTIRMALAR-3

1. 4, **2.** $\frac{-2}{3}$ **, 3.** 10,

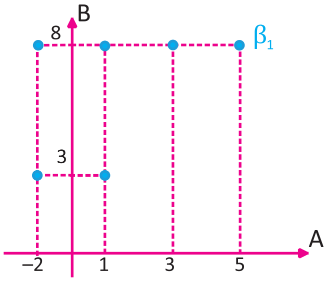
4. a) 16 b)



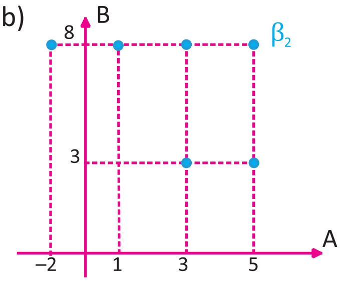
c) 2^{15} ç) $3 \cdot 2^{14}$

5. 28, **6.** 5, **7. a)** 256 **b)** 64 **c)** 64 **ç)** 9

8. a)



b)

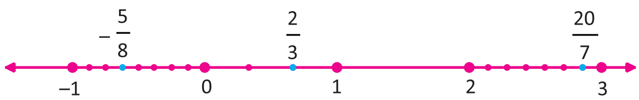


DENKLEMLER VE EŞİTSİZLİKLER

ALIŞTIRMALAR-1

1. Rasyonel: $-3, 1, 9\overline{76}, \sqrt{36}, \dfrac{2}{7}$ İrrasyonel: $\sqrt{2}, 3\pi, 2\sqrt{5}-1$ **2. a)** Tek **b)** Çift **c)** Tek **3.** $\dfrac{-61}{18}$

4.

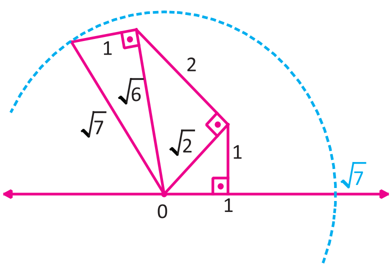


5. $\dfrac{4}{45}$

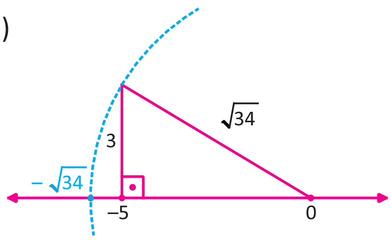
6. En büyük:13, En küçük:1

7. 14, 25, 36, 47, 58, 69

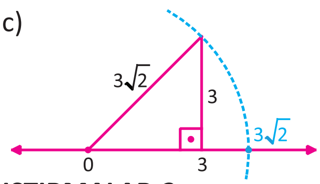
9. a)



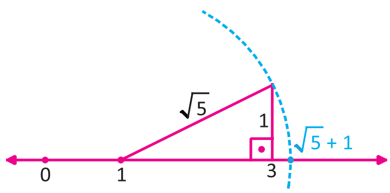
b)



c)



ç)



ALIŞTIRMALAR-2

1. $b = \dfrac{2a+1}{4}$, **2.** 8, **3.** 59, **4.** 6, **5.** 2, **6.** 8, **7.** 10, **8.** 23

ALIŞTIRMALAR-3

1. 1, 4, 7, **2.** 9, **3.** 27, **4.** 8^8, **5.** 5, **6.** 92, **7.** 12, **8.** 120, 208, 244, 280

ALIŞTIRMALAR-4

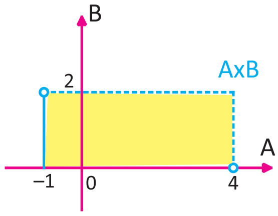
	2	3	4	5	6	9	10	15
A	*	*		*	*		*	*
B	*	*		*	*		*	*
3A	*	*		*	*	*	*	*
A^2	*	*	*	*	*	*	*	*
$A+B$	*	*		*	*		*	*
A.B	*	*	*	*	*	*	*	*

2. a) 270 lt **b)** 10 lt **c)** 27, **3.** 160, **4.** 200, **5.** 882, **6.** 7, **7.** 20, **8. a)** 6 **b)** 33, **9.** 120

ALIŞTIRMALAR-5

1. $\frac{2}{3}$, **2.** 7, **3.** -1 ve $\frac{-1}{3}$, **4.** 5, **5.** 30, **6.** $Ç=(5,9)$, **7.** $Ç=(3,\infty)$, **8.** En büyük:12, En küçük: -26

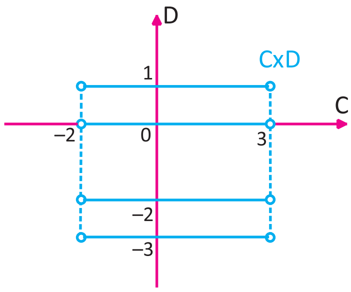
9.



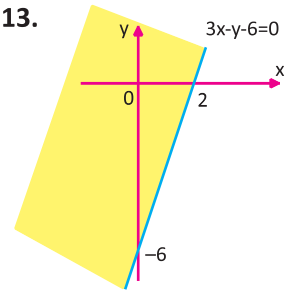
11. $Ç=(1,\infty)$

12. 3

10.



13.

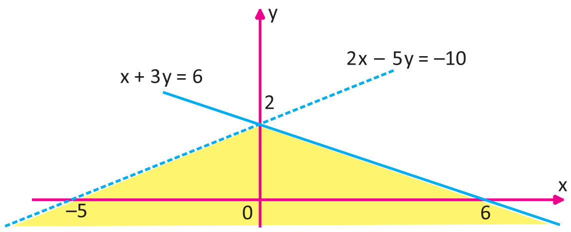


ALIŞTIRMALAR-6

1. $2\sqrt{3}-3$, **2.** -3, **3. a)** $z-y$ **b)** 1, **4.** $Ç=\left\{\frac{3}{2},\frac{-1}{2}\right\}$ **5.** $Ç=\{-2\}$, **6.** $Ç=\{3\}$, **7.** 26, **8.** 6,

9. $Ç=(-\infty,1]\cup[6,\infty)$, **10.** 0, **11.** $Ç=\left(-\infty,\frac{-3}{2}\right]$, **12.** -12, **13.** 25,

14.



ALIŞTIRMALAR-7

1. x, **2.** $\frac{-2}{3}$, **3.** 56, **4.** 400, **5.** $\frac{a^4}{b^2}$, **6. a)** 2 **b)** 2, **7.** $\frac{5}{2}$, **8.** 54, **9.** $\frac{8m^3n}{9}$, **10.** -3, **11.** $Ç=\{1\}$

ALIŞTIRMALAR-8

1. 6, **2.** -8, **3.** $2b-3a$, **4.** $\frac{-5}{2}$, **5. a)** $\sqrt[6]{675}$ **b)** $\sqrt{2}$ **c)** 2017 **ç)** $\sqrt{2}+1$, **6.** $\frac{20}{7}$, **7.** $9+\sqrt{3}$, **8.** $\sqrt{6}$,

9. $x<y<z$, **10.** 8

ALIŞTIRMALAR-9

1. 2004, **2.** $\frac{5}{4}$, **3.** $7.\sqrt[3]{12}$, **4.** $\frac{1}{3}$, **5.** 1, **6.** $\frac{7}{9}$, **7.** 16, **8.** 2, **9.** 9, **10. a)** 2,75 km **b)** 12 durak

ALIŞTIRMALAR-10

1. -8, **2.** 32, **3.** 21, **4.** 38, **5.** $\frac{5b-3a}{2}$, **6.** 48, **7.** 44, **8.** 19, **9.** 1552, **10.** 20, **11.** Değişmez

ALIŞTIRMALAR-11

1) 390 **2)** 17 **3.** 60, **4.** 20 000, **5.** 4000, **6.** 80, **7.** 25, **8.** 2, **9.** 280, **10.** 36 km/sa, **11.** 6, **12.** 72, **13.** 180

14. 15, **15. a)** 400 **b)** 288 km/sa, **16.** 5, **17.** 60 km/sa ve 30 km/sa

ÜÇGENLER

ALIŞTIRMALAR-1

1. 46, **2.** 56, **4.** 111, **5.** 48, **6.** 9, 10, **7.** 63, **8)** 9

ALIŞTIRMALAR-2

1. $4\sqrt{5}$, **2.** 56, **3.** 135, **4.** 27, **5.** 18, **7.** 210m, **8. a)** 1500m

ALIŞTIRMALAR-3

1. 10, **2.** $\frac{3\sqrt{14}}{7}$, **3.** 20, **4.** 10, **6.** 36, **7.** $2\sqrt{6}$, **8.** $2\sqrt{73}$ **9.** $3\sqrt{17}$, **10.** $3\sqrt{6}-3\sqrt{2}$, **11.** $2\sqrt{3}$, **12.** $2\sqrt{17}$, **13.** 4, **14.** $\frac{2}{3}$, **15.** 6, **16.** $18\sqrt{3}$

ALIŞTIRMALAR-4

1. 10, **2.** 3, **3.** $2\sqrt{22}$, **4.** $\frac{17}{2}$, **5.** $\frac{80}{3}$, **6.** $3\sqrt{2}$, **7.** $\sqrt{30}$, **8.** 25

ALIŞTIRMALAR-5

1. $\sin x=\frac{3}{7}$, $\sin 2y=\frac{2\sqrt{10}}{7}$, $\cos x=\frac{2\sqrt{10}}{7}$, $\cos 2y=\frac{3}{7}$, $\tan x=\frac{3\sqrt{10}}{20}$, $\tan y=\frac{2\sqrt{10}}{10}$, $\cot x=\frac{2\sqrt{10}}{3}$, $\cot y=\frac{\sqrt{10}}{2}$, **2.** $\frac{11}{6}$, **3.** 6, **4.** $4\sqrt{2}$, **5.**1, **6.** $\frac{8}{21}$, **7.** $\frac{3}{5}$,

8. a)5,4, **b)** $\frac{9}{4}$, **9.** $2\sqrt{6}+2\sqrt{2}$, **10. a)**12 **b)** $16+12\sqrt{3}$, **11.** 4

ALIŞTIRMALAR-6

1. 32, **2.** 8, **3.** 10, **4.** 9, **5.** $12\sqrt{3}$, **6.** $\frac{100(\sqrt{3}+3)}{3}$, **7.** 9, **8.** $2\sqrt{3}$, **9.** 24, **10.** 117 **11.** $4\sqrt{7}$

VERİ

ALIŞTIRMALAR-1

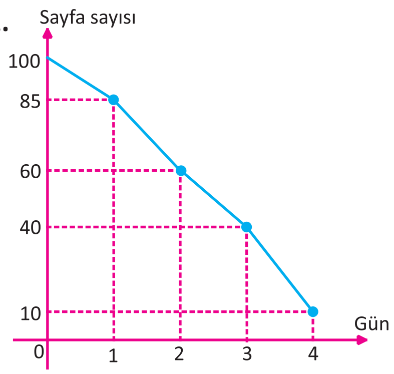
1. 4-5-2-8-10-6, **2.** $\overline{X}_{Eray}=13$, $\overline{X}_{Emre}=12$, $\overline{X}_{Mert}=11$ .olup aritmetik ortalaması en büyük olan Eray tercih edilmelidir.

3. a) 15 ve 18 **b)** 16 **c)** 7 **ç)** $\frac{7}{2}$ **d)** 16 **e)** $\sqrt{\frac{40}{7}}$, **4.** 18, **5.** 77, **6.** 10, **7.** 40

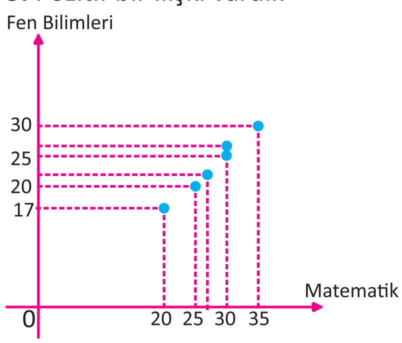
8. $z<x<y$, **9.** $\frac{49}{3}=16,\overline{3}$, **10.** $\frac{\sqrt{65}}{2}$, **11.** $S_A>S_C>S_B$

ALIŞTIRMALAR-2

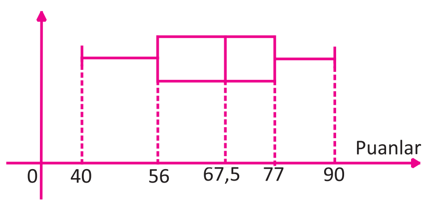
1.



3. Pozitif bir ilişki vardır.



5.



2. a) 136, **b)** 12,5

4. 22,875

6. 50, **7.** 42, **8.** 2005-2006 en hızlı artış, 2007-2008 en yavaş artış, **9. a)** 18 **b)** $\sqrt{\frac{34}{3}}$

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME CEVAP ANAHTARI

MANTIK

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

1) 2^n, **2)** değili, **3)** $p \wedge q$, **4)** $\{-1, 5\}$, **5)** 1-e, 2-a, 3-b, 4-c, **6)** p', **7)** $(1, 0, 0)$, **8)** p', **9)** 1, **10)** A, **11)** B, **12)** E, **13)** D, **14)** D, **15)** C, **16)** D, **17)** B, **18)** A, **19)** D, **20)** E, **21)** B, **22)** C, **23)** B, **24)** E, **25)** A, **26)** 1-1-0-0-1-1-0

KÜMELER

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

1) öz alt küme, **2)** tümleyeni, **3)** 8, **4)** 19, **5)** 1-c, 2-ç, 3-b, 4-a, **6)** 16, **7)** 3, **8)** 1, **9)** 25, **10)** C,
11) E, **12)** E, **13)** E, **14)** E, **15)** A
16) D, **17)** C, **18)** B, **19)** A, **20)** C, **21)** B, **22)** D, **23)** C, **24)** E, **25)** A, **26)** A, **27)** B, **28)** C, **29)** B, **30)**.D, **31)** C, **32)** E, **33)** A, **34)** A, **35)** D, **36)** E, **37)** B, **38)** C, **39)** D

DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME-1

1) 2, **2)** $\mathbb{R}$, **3)** $(-3, -1)$, **4)** 6^4, **5)** 1-ç, 2-b, 3-a, 4-d, **6)** 2, **7)** 56, **8)** 0, **9)** -6, **10)** E, **11)** C, **12)** B
13) B, **14)** E, **15)** E, **16)** A, **17)** A, **18)** E, **19)** B, **20)** A, **21)** B
22) D, **23)** C, **24)** E, **25)** A, **26)** D, **27)** C, **28)** a) 9 ay, b) 15 000, c) 15 ay,
29) a) 82, b) 8.30, c) 50 000-80 000 arası

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME-2

1) B, **2)** B, **3)** A, **4)** C, **5)** D, **6)** D, **7)** A, **8)** C, **9)** D, **10)** B, **11)** D, **12)** B, **13)** E, **14)** B, **15)** A, **16)** A **17)** D, **18)** E, **19)** B, **20)** D, **21)** C, **22**) C, **23)** E, **24)** B, **25)** D, **26)** E, **27)** A, **28)** E, **29)** C, **30)** A

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME-3

1) C, **2)** E, **3)** A, **4)** B, **5)** A, **6)** A, **7)** B, **8)** D, **9)** A, **10)** C, **11)** B, **12)** E, **13)** A, **14)** B, **15)** E, **16)** C **17)** D, **18)** A, **19)** C, **20)** E, **21)** C, **22**) E, **23)** B, **24)** B

ÜÇGENLER

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME -1

1) üçgen, açı **2)** $158°$, **3)** k, k^2, **4)** $\frac{7}{24}$, **5)** kenarortayların, **6)** 1-b, 2-ç, 3-c, 4-d, **7)** 16, **8)** 70, **9)** 44, **10)** 45, **11)** A, **12)** A, **13)** E, **14)** A, **15)** D, **16)** C **17)** B, **18)** $0,75\,km^2$ ile $1\,km^2$, **19)** %45 ile %55 arası,
20) Fidan sayısı: 100 001-200 000, Maliyet:400 004-800 000

VERİ

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME

1) aritmetik ortalama, **2)** medyan, **3)** merkezi yayılım, **4)** daire grafiği, **5)** 1-b, 2-e, 3-d, 4-a, **6)** 95, **7)** 19, **8)** $\sqrt{5}$, **9)** 4,8
10) D, **11)** A, **12)** D, **13)** E, **14)** C, **15)** C, **16)** B, **17)** E, **18)** B, **19)** C, **20)** C, **21)** B, **22)** D, **23)** B, **24)** E, **25)** A, **26)** D
27) 30 dakika, **28)** 40 dakika, **29)** C, **30)**-, **31)** 3,3, **32)** Kasım, **33)** 500-550, **34)** 2 812 500 TL

SÖZLÜK

A

açı : Başlangıç noktaları aynı olan iki ışının birleşimi.
açık önerme : İçerisinde değişkenler bulunan ve bu değişkenlerin alacağı değere göre doğruluğu veya yanlışlığı kesinleşen önerme.
açıortay : Bir açıyı, ölçüleri birbirine eşit iki açıya ayıran ışın.
ağırlık merkezi (üçgen) : Bir üçgenin kenarortaylarının kesiştiği nokta.
ağırlıklı ortalama : Bir veri grubundaki her bir verinin ağırlık değeri ile çarpımlarından elde edilen sayılar toplamının, tüm ağırlık çarpanları toplamına bölümü ile elde edilen değer.
aksiyom : İspata gerek duyulmaksızın doğruluğu kabul edilen önerme.
alan : Bir yüzeyin bulunduğu düzlemde kapladığı yer.
alt çeyrek : Küçükten büyüğe sıralanıp iki gruba ayrılan verilerin alt grubunun medyan değeri.
alt küme : A ve B iki küme olmak üzere A nın her elemanı B nin de elemanı oluyorsa A, B nin alt kümesidir.
altın oran : Matematik ve sanatta bir bütünün parçaları arasında gözlemlenen, geometrik ve sayısal bir oran bağıntısı.
analitik düzlem : Üzerine dik kesişen iki doğru yerleştirilmiş düzlem.
apsis : Koordinat düzleminde bir noktayı gösteren sıralı ikilinin birinci bileşeni.
aritmetik ortalama : Veri grubunda bulunan verilerin toplamının veri sayısına bölünmesi ile elde edilen değer.
ayrık küme : Ortak elemanı olmayan kümeler.

B

bağıntı : Kartezyen çarpımın her bir alt kümesi.
bağıntının grafiği : Bir bağıntının elemanlarının venn şeması yöntemiyle ya da analitik düzlemde gösterilmesi.
benzer üçgenler : İki üçgen arasında kurulan bire bir eşlemede, karşılıklı açıları eş veya karşılıklı kenarlarının uzunlukları orantılı olan üçgenler.
bileşen : Bir noktayı belirten sıralı ikililerden herhangi biri.
boş küme : Elemanı olmayan küme.
bölen : Bir bölme işleminde bölünen sayının kaç eşit parçaya ayrıldığını gösteren sayı.
bölüm : Bölme işleminde bölünen içinde bölenin kaç defa olduğunu gösteren sayı.
bölünen : Bir bölme işleminde eşit bölümlere ayrılması gereken miktar veya sayı.

Ç

çelişki : Doğruluk değeri daima sıfır (0) olan önerme.
çevrel çember : Bir çokgenin tüm köşelerinden geçen çember.
çeyrekler açıklığı : Üst çeyrek ile alt çeyrek arasındaki fark.
çizgi grafiği : Verilerin analitik düzleme aktarılıp oluşan noktaların çizgilerle birleştirilmesi sonucu oluşan grafik.
çözüm kümesi : Denklem veya eşitsizlikleri sağlayan değerlerden oluşan küme.

D

daire grafiği : Veri grubunun bütün içerisindeki oranını belirtmek için dairenin dilimlere ayrılarak gösterildiği grafik türü.
denk kümeler : Eleman sayıları aynı olan kümeler.
denk önermeler : Doğruluk değerleri aynı olan önermeler.
denklem : İçinde bilinmeyen bulunan, bilinmeyenin bazı değerleri için sağlanan eşitlik .
dış açıortay : Bir üçgenin bir dış açısını iki eş açıya ayıran ışın.
dış teğet çemberinin merkezi : Üçgenin iki dış açıortayının kesiştiği nokta.
diklik merkezi : Bir üçgende yüksekliklerin kesiştiği nokta.
doğruluk kümesi : Açık önermeyi sağlayan değerler kümesi.

E-F

en büyük ortak bölen (EBOB) : İki veya daha çok sayının ortak bölenlerinin en büyüğü.

en küçük ortak kat (EKOK) : İki veya daha fazla doğal sayının ortak katlarının en küçüğü.

eşit kümeler : Aynı elemanlardan oluşan kümeler.

eşlik : İki üçgenin karşılıklı kenarlarının uzunluklarının ve açılarının ölçülerinin birbirine eşit olması.

evrensel küme : Bütün kümeleri içine alan, boş kümeden farklı, en geniş küme.

frekans : Veri grubundaki sayıların tekrar sayıları.

G-H

gerçek sayılar : Rasyonel sayılar ile irrasyonel sayılar kümelerinin birleşiminden oluşan sayı kümesi.

grafik : Ölçme sonucunda elde edilen verilerin nokta, çizgi, sütun vb. farklı şekillerle ifade edilmesi.

heterojen : Benzer karakter ve yapıya sahip olmayan.

hipotenüs : Bir dik üçgende, dik açının karşısında bulunan kenar.

hipotez : Varsayım.

histogram : Bir kenarının aralıklara diğer kenarının veri sayılarına eşit birbirine bitişik dikdörtgenlerden oluşan bir grafik gösterimi.

homojen : Her yeri aynı özelliği gösteren, bütün terimleri aynı derecede olan (çok terimli)

hüküm : Yargı.

İ

iç açı : Bir çokgenin ardışık iki kenarının oluşturduğu ve çokgenin içinde bulunan açı.

iç açıortay : Bir çokgenin bir iç açısını iki eş açıya ayıran ışın.

iç ters açı : Herhangi iki doğruyu üçüncü bir doğru kestiğinde, bu doğruların arasında ve kesenin her iki tarafında komşu olmayan açılar.

ikizkenar üçgen : İki kenarının uzunluğu birbirine eşit olan üçgen.

irrasyonel sayı : İki tam sayının birbirine bölümü şeklinde yazılamayan sayı.

ispat : Matematiksel kural, sonuç veya tanımları kullanarak bir yargının doğru veya yanlış olduğunun gösterilmesi.

K-L

kapsama : Bir kümenin, başka bir kümenin elemanlarının hepsini içermesi.

kartezyen çarpım : Boş kümeden farklı olan A ve B kümeleri için; birinci bileşeni A kümesinden, ikinci bileşeni B kümesinden alınarak oluşturulan tüm ikililerin kümesi.

kenarortay : Bir üçgende her köşeden karşı kenarın ortasına çizilen doğru parçası.

kesikli veri : Sonlu veya sayılabilir belli bir aralıkta her değeri alamayan veriler.

kesişim kümesi : A ve B kümelerinin ortak elemanlarının alınması ile oluşturulan küme.

komşu açılar : İç bölgeleri ayrık ve birer ışını ortak olan açılar.

Kosinüs teoremi : Üçgenin iki kenar uzunluğu ve bu kenarların oluşturduğu açının ölçüsü ile üçüncü kenarının uzunluğu arasındaki ilişkiyi ifade eden teorem.

kotanjant : Komşu dik kenar uzunluğunun karşı dik kenar uzunluğuna oranı.

kutu grafiği : Veri dağılımındaki en büyük değeri, en küçük değeri, alt çeyrek, üst çeyrek ve ortanca değerlerini tek bir grafikte belirten istatistiksel grafik türü.

küme : İyi tanımlanmış, birbirinden farklı nesneler topluluğu.

liste yöntemi : Kümeyi oluşturan bütün elemanların küme parantezinin içerisinde, aralarına virgül konularak gösterilmesi.

M

medyan : Veriler sıralandığında veri sayısı tek ise ortadaki terim, çift ise ortadaki iki terimin aritmetik ortalaması.

mod : Veri grubunda en çok tekrar eden değer.

mutlak değer : Bir gerçek sayının sayı doğrusu üzerindeki görüntüsünün sıfıra olan uzaklığı.

merkezi eğilim ölçüleri : Tepe değer, ortanca ve aritmetik ortalam değerleri.

merkezi yayılım ölçüleri : Terimlerin yakınlık veya uzaklığını belirten standart sapma, açıklık ve çeyrekler açıklığı değerleri.

O-Ö

orantı	:	İki veya daha çok oranın eşitliği.
ordinat	:	Koordinat düzleminde bir noktayı gösteren sıralı ikilinin ikinci bileşeni.
orijin	:	Koordinat eksenlerinin kesim noktası.
orta dikme	:	Bir doğru parçasına orta noktasında dik olan doğru.
ortak özellik yöntemi	:	Bir kümeyi elemanlarının taşıdığı koşulları veya özellikleri belirterek ifade eden gösterim biçimi.
Öklid algoritması	:	İki tam sayının en büyük ortak bölenini bulmak için yapılan ardışık bölme işlemi.
önerme	:	Doğru veya yanlış kesin hüküm bildiren ifade.
öz alt küme	:	Bir kümenin kendisi dışındaki alt kümelerinden her biri.

P

Pisagor teoremi	:	Bir dik üçgende, hipotenüs ile dik kenarların uzunlukları arasındaki ilişkiyi ifade eden teorem.
pozitif yönlü değişim	:	Değişkenlerden biri artarken diğerinin de arttığı değişim şekli.

S-T

serpme grafiği	:	İki farklı değişken arasındaki ilişkinin yönünü ve kuvvetini gözlemlemek için verilerin sıralı ikililer olarak grafik üzerinde gösterildiği grafik türü.
sonlu küme	:	Eleman sayısı bir doğal sayı ile ifade edilebilen küme.
standart sapma	:	Bir sayı dizisindeki elemanların aritmetik ortalamaya yakın olup olmadığı hakkında bilgi veren merkezi yayılım ölçüsü.
teorem	:	Kanıtlanabilen bilimsel önerme.
ters orantı	:	Değişkenlerden biri artarken diğeri azalan orantı.
Thales teoremi	:	Kesişen iki doğrunun, paralel iki doğru tarafından kesilmesiyle oluşan üçgenlerin kenarlarının orantılı olduğunu gösteren teorem.
totoloji	:	Doğruluk değeri daima 1 olan bileşik önerme.
trigonometrik oranlar	:	Bir dik üçgenin kenar uzunlukları arasındaki oranlar.
tümdengelim	:	Genelden özele çıkarımlar türeterek bilgi üretme yöntemi.
tümevarım	:	Özel olandan genel olana varmak için uygulanan yöntem.
tümler açılar	:	Ölçüleri toplam 90° olan açılar.
tümleyen küme	:	Verilen kümede bulunmayan evrensel kümede bulunan elemanların kümesi.

Ü

üçgen	:	Doğrusal olmayan üç farklı noktanın doğru parçaları ile birleştirilmesi sonucu oluşan geometrik şekil.
üçgen eşitsizliği	:	Bir üçgende herhangi bir kenarın uzunluğunun, diğer iki kenarın uzunluklarının toplamından küçük, farkının mutlak değerinden büyük olması.
üst çeyrek	:	Küçükten büyüğe sıralanıp iki gruba ayrılan verilerin üst grubunun medyan değeri.

V-Y

veri	:	Belli konularda ölçüm, sayım, deney, gözlem vb. yoluyla elde edilen toplanmış ve çözümlenmiş bilgiler.
yöndeş açı	:	Paralel iki doğru, bir kesenle kesildiğinde kesenin aynı tarafında kalan aynı yönlü açılar.
yükseklik	:	Üçgenin bir köşesinden karşı kenara çizilen dik doğru parçası.

KAYNAKÇA

- Adams, R. A. (1995). A Course Calculus, Addision. Newyork: Wesley Publishers Limited.
- Balcı, M. (2003). Genel Matematik (Cilt I). Ankara: Balcı Yayınları.
- Çelik, B. (2010). Temel Matematik. Bursa: Dora Basım Yayın.
- Çevik, A. S., Bozacı, E. (2009). Genel Matematik 1. Ankara: Nobel Yayınları.
- Dernek, A. (2009). Analiz 1, Ankara: Nobel Yayınları.
- Dönmez, A. (2002). Matematiğin Öyküsü ve Serüveni (Cilt I,IV). İstanbul: Toplumsal Dönüşüm Yayınları.
- Dönmez, A. (2005). Temel Analiz. Ankara: 2005.
- Erdoğan, A. (2009). Matematik. Ankara: Nobel Yayınları.
- Ertuğrul, İ. (2006). Temel Matematik. Ankara: Ekin Kitabevi.
- Göğüş, M., Koçak, Ş., Tayfur, C., Üreyen, M. (1985). Matematik I (Diferansiyel Hesap). Eskişehir: Bizim Büro Basımevi.
- Hacısalihoğlu, H. H., (vd.) (2000). Matematik Terimleri Sözlüğü. Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.
- Hacısalihoğlu, H. H., Balcı, M., Gökdal, F. (1988). Temel ve Genel Matematik. Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.
- Haggarty, R. (1993). Funtamentals of Mathmatical Analysis. London: Addision-Wesley.
- Kaplan, W. (1967). Advanced Calculus. London: Addision-Wesley Publishing Company.
- Öztürk, F. (2011). Olasılık ve İstatistiğe Giriş 1. Ankara: Gazi Kitabevi.
- Öztürk, F. (2011). Olasılık ve İstatistiğe Giriş 2. Ankara: Gazi Kitabevi.
- Sağel, M.K., Aktaş, M., (Eds) (2007). Genel Matematik 1. Ankara: Pegem A Yayıncılık.
- Sertöz, S. (2011). Matematiğin Aydınlık Dünyası. Ankara: Tübitak Yayınları.
- Silverman, R. A. (1985). Calculus With Analytic Geometry. New Jersey: Prentice-Hall.
- Stewart, I. (2016). Matematiğin Kısa Tarihi. İstanbul: Alfa Basım Yayın Dağıtım San. ve Tic. Ltd. Şti.
- Struik, D. J. (2011). Kısa Matematik Tarihi. İstanbul: Doruk Yayınları.
- Türk Dil Kurumu (2012). Türkçe Sözlük. Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.
- Türk Dil Kurumu (2012). Yazım Kılavuzu. Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları.
- Türkiye İstatistik Kurumu (03 Ocak 2017, 22 Mart 2016, 19 Ocak 2016). Basın Bülteni.
- T.C. Milli Eğitim Bakanlığı (2018).Ortaöğretim Fen Lisesi Matematik Dersi (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı. Ankara: MEB Yayınları.

GÖRSEL KAYNAKÇA

Görsel ve grafik tasarım uzmanı tarafından düzenlenen görseller:

Sayfa 11, 68, 130, 179 (3. görsel), 180, 188, 184, 199, 264, 311, 312, 315, 325, 327, 336 (Özgün çizim) , 337, 340, 343 (Özgün çizim), 360,362 (Özgün çizim), 374.

Orjinal Fotoğraf Çekimleri

Sayfa 13, Sayfa 100

Ağ adreslerinden alınan görseller

Sayfa 56 (http://www.tvf.org.tr/img/uploads/haber_resimleri/2016/06 haber_1465132409_3.jpg
(Erişim Tarihi: 11 04 2017, Erişim Saati: 16.52),
Sayfa 236 (http://okuma-yazma.meb.gov.tr/www/icerik_goruntule.php?KNO=118
(Erişim Tarihi: 06.06.2017, Erişim Saati:17.27))

Shutterstock (Telif hakkı ödenerek alınan görseller)

Sayfa 224/ ID No: 335028530 (Yeniden düzenlenmiştir)

Dreamstime (Telif hakkı ödenerek alınan görseller)

Sayfa 12/ ID No: 83180382, Sayfa 14/ID No: 7838054, Sayfa 41/ID No: 17519957, Sayfa 42/ID No: 55819483,
Sayfa 43/ID No: 63446559, Sayfa 53/ID No: 9271642, Sayfa 61/ID No: 33041737, Sayfa 68/ID No: 23598721,
Sayfa 87/ID No: 33040687, Sayfa 88/ID No: 45083462, Sayfa 89/ID No: 11864189, 4869251, Sayfa 98/ID No: 19446522,
Sayfa 118/ID No: 20874942, Sayfa 119/ID No: 51384768, Sayfa 120/ID No: 5025565, Sayfa 130/ID No: 9380689,
Sayfa 161 /ID No:16716220, Sayfa 178/ID No: 29681182, Sayfa 179/ID No: 11221791,
Sayfa 180/ID No: 13698635, Sayfa 182/ID No: 45395728, Sayfa 183/ID No: 11504117,
Sayfa 185/ID No: 20379871, 51042631, Sayfa 189/ID No: 25776,
Sayfa 193/ID No: 55569044, Sayfa 196/ID No: 19429115, Sayfa 198/ID No: 225485,
Sayfa 201/ID No: 1205619, 88962620, Sayfa 202/ID No: 19225437, 80741634, Sayfa 208/ID No: 257683,
Sayfa 209/ID No: 3162851, Sayfa 218/ID No: 2608845, 78509162,
Sayfa 313/ID No: 7802757, Sayfa 322/ID No: 83808400, Sayfa 334/ID No: 28901340, Sayfa 355/ID No: 20103445,
Sayfa 356/ID No: 63447195, Sayfa 358/ID No: 34750963, Sayfa 363/ID No: 75443213, Sayfa 364/ID No: 69052105,
Sayfa 365/ID No: 57623800, Sayfa 366/ID No: 51778437, 53181223, Sayfa 377/ID No: 18033496,

Kitap genelindeki diğer grafik, tablo ve şekiller görsel ve grafik tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.